Como significados, propriedades invariantes e representações simbólicas influenciam a compreensão do conceito de número inteiro relativo*

RUTE ELIZABETE DE SOUZA ROSA BORBA**
TEREZINHA NUNES***

Resumo

Baseando-se na proposição de Vergnaud (1982, 1997), foi observado como a resolução de problemas é afetada por significados envolvidos, pelas propriedades invariantes trabalhadas e pelos sistemas de sinais utilizados para representar números positivos e negativos e as operações de adição e subtração. Em dois estudos experimentais, com 60 participantes em cada, observou-se que crianças de sete e oito anos já possuem conhecimentos sobre inteiros relativos e são capazes de operar aditivamente com esses números bem antes da introdução formal a esse conceito – em geral quatro ou cinco anos mais tarde. A forma como as crianças foram solicitadas a resolverem os problemas afetou fortemente o seu desempenho. Nesse sentido, no ensino de conceitos matemáticos, como o de número inteiro relativo, deve-se variar significados, propriedades e representações utilizadas, possibilitando aos alunos compreensões amplas dentro de campos conceituais.

Palavras-chave: Desenvolvimento conceitual; estruturas aditivas; números relativos.

Abstract

Based on Vergnaud (1982, 1997), this study investigated how problem solving is affected by the meanings involved, by invariant properties that were learned, and by systems of signs used to represent positive and negative numbers and the operations of addition and subtraction. In two experimental studies, with 60 children participating in each, it was observed that seven and eight-year-olds

* Este artigo baseia-se em pesquisa de doutorado realizada pela primeira autora, sob a orientação da segunda autora e financiada pela Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – MEC.

** Doutora pelo Departamento de Psicologia da Universidade Federal de Pernambuco. E-mail: rborba@ce.ufpe.br

*** Doutora em Psicologia – Oxford Brookes University. E-mail: tnunes@brookes.ac.uk

already have some understanding of directed numbers and are able to perform some additions and subtractions with these numbers long before they are formally introduced to this concept at school – usually four to five years later. The form in which children were asked to solve the problems strongly affected their performance. Thus, in the teaching of mathematical concepts, such as directed numbers, the meanings, properties and symbolic representations should vary, so as to allow students' understanding to develop widely within a conceptual field.
Key-words: *Conceptual development; additive structures; directed numbers.*

Introdução

O desenvolvimento conceitual tem sido amplamente pesquisado dentro da educação matemática. Como conceitos são compreendidos e como se desenvolvem dentro e fora da escola tem sido tema de muitas investigações. Esses estudos são de extrema relevância, pois seus resultados podem auxiliar na determinação de como melhor se trabalhar conceitos matemáticos em sala de aula.

Por vezes, estudos têm chegado a observações e conclusões que aparentam ser contraditórias sobre a compreensão e o desenvolvimento conceitual. Esse é o caso de estudos sobre a compreensão de números inteiros relativos. Alguns estudos (Davidson, 1987; Davis, 1990, dentre outros) observaram que crianças bem pequenas, algumas com 4 anos de idade, entendem o conceito de número relativo, enquanto outros estudos (Küchemann, 1981; Peled, 1991, dentre muitos outros) mostraram que estudantes até os 15 anos de idade, ou mais, ainda têm dificuldade em resolver problemas aditivos com números relativos. Uma análise minunciosa das metodologias adotadas pode evidenciar o que possivelmente afetou o desempenho dos participantes desses estudos.

Uma forma de se entender melhor a aprendizagem de conceitos é através do estudo dos fatores que influenciam o desenvolvimento conceitual. Ser capaz de resolver problemas aditivos, ou sobre qualquer conteúdo matemático, depende dos aspectos enfocados durante a resolução dos problemas. Se se aceita que o entendimento de um conceito depende dos aspectos particulares do mesmo, sobre os quais se está raciocinando, pode-se entender porque as investigações anteriores obtiveram resultados aparentemente contraditórios.

Vergnaud (1982, 1997) propôs que todo conceito é descrito por três dimensões: situações que dão *significado* ao conceito, as propriedades *invariantes* do mesmo e as *representações simbólicas* utilizadas para representá-lo. Essas três dimensões exercem influência tal de maneira que a compreensão de um conceito pode variar em função dos significados dados, das propriedades sobre as quais se está pensando e das representações simbólicas utilizadas para a resolução de problemas que envolvam o conceito.

A teoria de desenvolvimento conceitual proposta por Vergnaud (1982, 1997) foi aplicada no presente estudo à resolução de problemas aditivos com inteiros relativos para se observar como o desempenho varia em função das três dimensões propostas e para se observar se as mesmas interagem entre si. Embora essas dimensões estejam intrisecamente relacionadas e não seja necessariamente possível isolá-las nas situações nas quais conceitos se fazem presentes, para fins de pesquisa e fins didáticos é possível isolar cada uma das dimensões. Assim, pode-se fazer variar cada uma das três dimensões mantendo as outras duas constantes para ser possível a verificação de como essas variações afetam o desempenho de alunos ao resolverem problemas com os conceitos em estudo.

O objetivo da presente pesquisa foi investigar o efeito de significados dados a números relativos, de propriedades do conceito e da forma como esses números são representados na resolução de problemas aditivos antes do ensino formal. Observou-se quais significados, propriedades e formas de representação já são compreendidos por crianças bem antes da introdução formal na escola ao conceito de número inteiro relativo.

O ensino formal deve iniciar a partir dos conhecimentos já possuídos. A identificação de dificuldades alerta sobre a necessidade de se estar atento no ensino formal a aspectos dentro de cada dimensão de um conceito que precisam ser melhor explorados. Saber o que os alunos já conhecem sobre o conceito de número inteiro relativo e quais significados, propriedades e representações simbólicas precisam ser melhor trabalhados, possibilita uma exploração mais ampla do conceito em sala de aula.

Significados dados a números relativos

Diversos autores (Carpenter e Moser (1982) e Vergnaud (1982, 1986), dentre outros, desenvolveram classificações de problemas aditivos, diferenciando categorias de problemas de adição e de subtração de acordo com critérios psicológicos.[1] Para esses autores, embora dois problemas possam

1 Carpenter e Moser (1982) classificaram os problemas de adição e subtração em quatro tipos que, dependendo da posição da incógnita e da operação aritmética

ser resolvidos pela mesma operação matemática, 3 + 4, por exemplo, pode haver nesses problemas diferenças relacionais que afetam o desempenho de alunos na resolução de cada um. Existe, assim, uma diversidade de problemas que possuem diferentes significados implícitos, embora possam ser resolvidos por meio de uma mesma operação aritmética.

Pesquisas anteriores têm constatado que significados dados às operações aditivas com números naturais influenciam a resolução de problemas (Nunes e Bryant, 1997 e Nunes, Campos, Magina e Bryant, 2001, dentre outros). Em uma dessas pesquisas, Borba e Santos (1997) aplicaram testes em crianças de 3ª série e observaram que, para um mesmo nível de dificuldade de contas, alguns tipos de problemas eram mais facilmente resolvidos que outros. O problema "Marília e Mércia têm juntas 34 ursos de pelúcia. Marília tem 18 ursos. Quantos ursos Mércia tem?" foi mais facilmente resolvido que o problema "Bruno tinha 34 carrinhos. Ele ganhou alguns de seu irmão. Ele tem agora 53 carrinhos. Quantos carrinhos ele ganhou?". Ambos os problemas podiam ser resolvidos por subtrações bem semelhantes (34-18 e 53-34, respectivamente) e o mesmo percentual de alunos (12%) errou nesses dois problemas ao efetuar as contas necessárias. Os alunos que erraram essas contas ainda possuíam dificuldades em compreender a subtração com reserva. Embora as contas a serem efetuadas sejam semelhantes, os significados das operações envolvidas nesses dois problemas são diferentes. No primeiro problema o significado aditivo em questão é uma *combinação de quantidades*. Nesse problema solicita-se que se determine uma de duas partes combinadas, conhecendo-se o todo e a outra parte. No segundo problema o significado envolvido é o de uma *mudança de quantidades*. Nesse problema conhecem-se os valores inicial e final e solicita-se que se determine a quantidade acrescida. A dificuldade em escolher uma operação adequada foi bem maior na resolução do segundo problema. No primeiro problema, 35% dos alunos erraram na escolha da operação. No segundo problema, um percentual bem mais elevado de alunos, 53%, foi incapaz de identificar

envolvida, subdividem-se, totalizando 16 subcategorias. Semelhantemente, Vergnaud (1982, 1986) classifica os problemas aditivos em quatro categorias. Em Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001) tem-se uma rica discussão dessa classificação proposta por Vergnaud, bem como se apresentam resultados de pesquisas nas quais se observa o efeito dos significados nos desempenhos de alunos. Em Borba e Santos (1997) também se encontram exemplos desses tipos de problemas aditivos e demonstra-se o que essas duas classificações possuem em comum e o que as diferencia.

uma forma adequada de resolver o problema. Assim, observou-se que mais alunos perceberam a subtração como uma operação válida para se determinar uma das subpartes de um todo do que perceberam que com essa mesma operação é possivel determinar de quanto um valor inicial foi acrescido, conhecendo-se também o valor final. Os resultados deste estudo confirmam o que já foi observado por outros autores: há significados das operações de adição e subtração que são mais facilmente entendidos que outros.

O presente estudo buscou observar de forma sistemática como os significados dados aos números inteiros e a operações com esses números afetam o desempenho, à semelhança do que se observou com números naturais. Fez-se uma análise dos diferentes significados que os números inteiros possuem nas diversas situações nas quais o conceito se faz presente e observou-se quais significados são mais facilmente compreendidos.

Números relativos podem ter diversos significados tais como *medidas* (temperaturas acima e abaixo de zero, créditos e débitos, níveis de água acima e abaixo de um dado referencial etc.), *transformações* (acréscimos ou decréscimos em quantidades ou estados – aumentos ou diminuições de temperatura, de dinheiro, de água etc.) e *relações* (as relações "mais do que" ou "menos do que" que são utilizadas em comparações de quantidades ou estados). Esses significados se fazem presentes, isoladamente ou combinados, em diversos contextos e numa grande variedade de situações.

Da perspectiva matemática, os significados dados aos números relativos podem ser irrelevantes na resolução de problemas com este conceito pois esses significados não alteram os resultados formais obtidos. Se dois números negativos são combinados – por exemplo (- 3) + (- 4) – o resultado é negativo – neste caso (- 7) – e independe do significado que os números tenham – medidas, transformações ou relações.

Da perspectiva do aluno que está resolvendo um problema aditivo com números relativos, os significados dados aos números podem influenciar de tal maneira o raciocínio do aluno que ele será, ou não, capaz de resolver o problema. Há significados de mais fácil compreensão e problemas que envolvam os mesmos podem levar a um maior percentual de acertos que problemas que envolvam outros, de mais difícil compreensão.

Isso pode explicar porque alunos em estudos anteriores – como o de Bell (1980) – apresentaram diferentes desempenhos em problemas que tinham a mesma representação matemática formal, mas que variavam em significado dado aos números. Os estudantes resolveram problemas em duas tarefas que envolviam números relativos. Na "tarefa do relógio" não havia uma origem fixa e o resultado de combinar movimentos no relógio era uma posição relativa e não um ponto específico no relógio porque os alunos podiam iniciar a resolução dos problemas partindo de diferentes origens. A "tarefa da reta numérica" tinha uma origem fixa e a combinação de movimentos resultava numa posição na reta numérica que não variava de aluno para aluno. Os estudantes se saíram bem melhor na "tarefa da reta numérica" do que na "tarefa do relógio". Bell argumentou que essas diferenças em desempenho podiam ser explicadas porque a "tarefa da reta numérica" era menos abstrata ou requeria menor armazenamento na memória, uma vez que os alunos não precisavam memorizar qual o ponto que haviam escolhido como ponto de partida, já que a origem era fixa. Na "tarefa do relógio" a origem escolhida tinha que ser gravada, pois a posição relativa dependia de qual ponto tinha sido inicialmente escolhido.

Outra diferença nessas tarefas, não evidenciada por Bell (1980), é que os significados de número eram diferentes nas respostas esperadas por parte dos alunos. A "tarefa da reta numérica" resultava em medidas (posições à direita ou à esquerda da origem fixa) e a "tarefa do relógio" resultava em relações (posições relativas a um ponto arbitrariamente escolhido). Embora as tarefas apresentassem as mesmas soluções formais (os mesmos números tinham que ser adicionados ou subtraídos), o desempenho dos estudantes variava em função do significado de número relativo sobre o qual eles tinham que pensar.

A facilidade de se compreender o significado de inteiro relativo como medida também foi observada nos estudos com crianças pequenas. Davidson (1987) investigou o conhecimento que crianças de quatro a sete anos de idade possuíam de números inteiros relativos. As crianças respondiam a questões inseridas em jogos. Num desses jogos, um carteiro devia entregar cartas em casas representadas numa reta numerada de (– 4) a (+ 4). As crianças moviam um carrinho nessa reta a partir de instruções dadas em cartões que indicavam a direção e o número de casas a serem percorridas. Cerca de 40% das crianças foram capazes de combinar movimentos positivos e negativos e localizaram corretamente os endereços solicitados. Nesse estudo, portanto, observou-se que bem cedo algumas crianças com quatro anos de idade são capazes, em situações de jogos, de utilizar corretamente do conceito de número inteiro relativo, quando o significado dado é o de medida.

O estudo aqui relatado teve como objetivo confirmar, num experimento que controlou os níveis de abstração e de memória requerida, que variações em significados dados aos números afetam o desempenho quando da resolução de problemas aditivos com inteiros relativos. A predição era de que as crianças entenderiam mais facilmente o significado de medida do que o significado de relação, pois entender este último requer um pensamento mais generalizado. Para se pensar numa relação não é necessário conhecer estados iniciais e finais, se se conhecem estados intermediários. Sabendo-se quanto se ganhou ou perdeu num jogo, por exemplo, pode-se saber se no final se tem mais (relação positiva) ou menos (relação negativa) pontos do que se tinha antes, mesmo sem saber quantos pontos se tinha no início ou no final de um jogo. Esse tipo de raciocínio é mais elaborado e não facilmente demonstrado por muitos alunos.

Propriedades invariantes

Inteiros relativos possuem propriedades que são invariantes em qualquer forma de representação utilizada e para qualquer significado que se dê a esses números. Essas propriedades se mantêm constantes para qualquer significado de número inteiro que se esteja trabalhando: seja medida, transformação ou relação. Variações de formas de representação também não afetam as propriedades de um conceito como o de inteiro relativo.

As diversas propriedades podem ser entendidas em diferentes estágios do desenvolvimento da compreensão de números relativos. Algumas dessas propriedades são: números positivos e negativos de mesmo valor absoluto se cancelam; quando dois números negativos são adicionados o resultado é sempre um número negativo menor que qualquer um dos números somados; e tomando o oposto de um número negativo, o resultado é um número positivo e vice-versa.

O impacto das propriedades invariantes no raciocínio aditivo, principalmente com números naturais, tem sido amplamente investigado e discutido (Carpenter e Moser, 1982; Nunes e Bryant, 1997, dentre outros). Tem-se observado que propriedades de conceitos são gradativamente entendidas e que todas não são compreendidas simultaneamente. Muitas vezes, o desenvolvimento da compreensão de um conceito leva anos até se alcançar um entendimento mais amplo.

Nunes e Bryant (1997), a partir de estudos realizados sobre operações com números naturais, argumentam que as dificuldades de se entender uma propriedade invariante de um conceito estão relacionadas às operações mentais envolvidas ao se raciocinar sobre aquele invariante. O número de operações mentais e o nível de coordenação de operações mentais requeridos na solução de um problema determinam o nível de dificuldade do mesmo.

De acordo com Nunes e Bryant (ibid.), o número de operações mentais envolvidas em problemas de mudança de quantidades varia de acordo com a posição da incógnita – valor inicial, transformação ou valor final desconhecido. Problemas de valor final desconhecido exigem um número menor de operações mentais se comparados com problemas de transformação desconhecida ou valor inicial desconhecido. Nos problemas diretos – com valor final desconhecido – pode-se agir diretamente nos valores dados, ou seja, a partir de um valor inicial conhecido age-se no mesmo de acordo com a transformação também conhecida – um acréscimo ou decréscimo da quantidade inicial – e determina-se o valor final desejado. Mais operações mentais são requeridas nos problemas inversos, pois estes não podem ser resolvidos a partir de ações diretas sobre os dados desses problemas. Problemas inversos podem ser resolvidos por tentativas, por uso da comutatividade ou pela inversão das operações mencionadas no enunciado dos problemas. Qualquer uma dessas formas de resolver problemas inversos exigem mais operações de pensamento que as requeridas para se resolver problemas diretos.

Mais pesquisas sobre o impacto de propriedades invariantes no raciocínio de problemas aditivos com números relativos se tornam necessárias e o presente estudo teve como objetivo contribuir para essa investigação. Foi observado se crianças entendem as propriedades aditivas envolvidas em problemas com números relativos e foi analisado porque problemas inversos (resultado inicial desconhecido) são muito mais difíceis que problemas diretos (resultado final desconhecido) quando números relativos estão envolvidos.

Representações simbólicas

Para um mesmo significado dado a um número relativo, este pode ser representado de diferentes maneiras. Por exemplo, oralmente, pode-se expressar uma medida de temperatura negativa como "cinco graus abaixo de zero". Por escrito essa medida pode ser representada como "- 5°".

Oralmente, também se poderia expressar um débito – uma medida negativa de posse – como "estou devendo cinco reais ao banco" e por escrito este valor poderia ser expresso num extrato bancário como "- 5" ou "5D" (sendo "D" representativo para "débito"). Dessa forma, por um lado há diferentes maneiras de se representar simbolicamente números positivos e negativos nos diversos contextos nos quais o conceito de número inteiro se faz presente e, por outro lado, os mesmos sinais podem ser utilizados para representar diferentes significados dados aos inteiros relativos.

O uso de material concreto para representar números relativos é uma questão controversa. Alguns autores argumentam que números relativos devem ser sempre tratados de forma abstrata (Freudenthal, 1973, dentre outros) e outros autores argumentam que números relativos podem ser, no ensino formal, inicialmente tratados concretamente (Rowland, 1982, dentre outros). Uma forma concreta sugerida para se representar números inteiros é por meio de material manipulativo de diferentes cores – uma cor para representar números positivos e outra para representar números negativos.

Nunes (1993) investigou o efeito de representações simbólicas no entendimento de números negativos solicitando que os alunos resolvessem problemas oralmente ou por meio do sistema convencional no qual se utiliza o sinal menos (-) para representar tanto a operação de subtração quanto o sinal negativo. Foi observado que quando os estudantes resolviam os problemas oralmente eles eram mais bem-sucedidos do que quando tinham que usar a representação convencional para representar os números e depois resolver os problemas.

Duas conclusões são possíveis a partir dos resultados obtidos por Nunes (ibid.). A primeira é que as dificuldades representacionais se relacionam ao uso do sistema de sinais convencional. A segunda possibilidade é que as dificuldades são devidas à necessidade de se utilizar uma representação explícita dos números antes de resolver os problemas. No sistema convencional, o mesmo sinal, (-), é utilizado para representar a operação de subtração e para representar um número negativo. A utilização de um mesmo sinal com significados diferentes pode gerar dificuldades. Porém, é possível que as dificuldades representacionais vão além desse uso de um mesmo sinal com significados distintos. Mesmo não utilizando uma representação única para a operação aritmética e para o sinal do número, pode-se ter dificuldade em explicitar diferentemente números positivos e negativos e operar a partir dessas representações explícitas.

O estudo aqui relatado examinou a possibilidade de que as dificuldades representacionais ao se resolver problemas aditivos com números relativos são devidas ao uso de representações explícitas dos números, mesmo quando estas não envolvem o uso dos sinais convencionais ("+" e "-"). Ao utilizar uma representação explícita, faz-se uma clara distinção entre sinais dos números, o mesmo não ocorrendo em representações implícitas.

Representações orais, escritas ou que se utilizam de material concreto são explícitas se nestas marcam-se de alguma forma externa diferentemente números positivos e negativos. Se oralmente se diz "uma perda de sete com um ganho de três resulta numa perda de quatro" ou se por escrito se registra "(-7) + (+3) = (-4)", nos dois casos está-se explicitamente diferenciando números positivos e negativos.

Uma representação é implícita quando nela não se faz exteriormente distinções entre sinais dos números, embora internamente quem a utiliza faça essas distinções. Se oralmente se disser "sete com três é quatro" o usuário dessa representação pode não estar expressando externamente os sinais dos números mas internamente faz essa distinção.

Embora representações orais, escritas e por uso de manipulativos possam ser explícitas ou implíticas – dependendo das diferenciações externas ou internas efetuadas –, oralmente pode-se mais facilmente não fazer distinções entre sinais de números positivos e negativos. Por escrito ou por uso de manipulativos, em geral, as distinções se fazem necessárias. Mesmo que se utilize, por exemplo, uma mesma cor de cartões para marcar números positivos e negativos, para diferenciar os sinais dos números alguma distinção externa é efetuada – como colocar cartões de um lado da mesa representando números positivos e de outro lado representando negativos. Por escrito também alguma distinção, em geral, é feita entre números positivos e negativos, que pode ser por meio de sinais convencionais ou de outras marcas, tais como "P" para perda e "G" para ganho.

No estudo aqui relatado, a previsão era de que resolver problemas oralmente por meio de representações implícitas de números relativos seria mais fácil do que usar representações escritas ou usar materiais concretos nas quais explicitamente se representassem números relativos. Como as crianças participantes do estudo ainda não haviam sido formalmente introduzidas a esse conceito na escola, não se esperava que as crianças representassem números positivos e negativos por meio de sinais convencionais, mas mesmo assim previa-se que a explicitação das diferenças entres esses números fosse a maior causa de dificuldade representacional que se iria evidenciar.

Para se observar o efeito de significados dados aos números, de propriedades invariantes sobre as quais se está raciocinando e de representações simbólicas utilizadas para registrar e para operar sobre os números, dois estudos experimentais foram realizados.[2] Nesses estudos, as três dimensões de um conceito, segundo proposta de Vergnaud (1982, 1977), foram experimentalmente manipuladas para se observar o efeito isolado de cada uma quando as outras duas dimensões eram mantidas constantes. Buscou-se observar também se havia efeitos de interação dessas dimensões.

Método do primeiro estudo

Participantes do primeiro estudo

Crianças que não tinham sido ainda introduzidas formalmente ao conceito de número relativo participaram dos dois estudos. As crianças do primeiro estudo freqüentavam uma escola pública situada ao norte de Londres. Como estudos anteriores mostraram que crianças novas eram capazes de entender o conceito de número relativo, neste estudo 60 crianças de sete e oito anos de idade (média de idade: oito anos e dois meses) participaram do mesmo para se observar se resultados de estudos anteriores se confirmariam.

Formato do primeiro estudo

As crianças foram aleatoriamente distribuídas em quatro grupos experimentais, como se pode observar na Tabela 1. Esses grupos variavam no significado dos números inteiros relativos envolvidos nos problemas e também na forma de representação que os participantes deveriam utilizar para resolver os problemas aditivos propostos.

---

2 Os estudos aqui relatados fazem parte de uma pesquisa maior envolvendo, além desses dois experimentos, mais dois estudos de intervenção. A pesquisa completa encontra-se em Borba (2002) e discussões dos dois primeiros experimentos também se encontram em Borba e Nunes (1999, 2000a, 2000b e 2001).

Metade dos alunos resolvia problemas que resultavam em medidas e metade resolvia problemas cujas respostas eram relações. Metade das crianças resolvia os problemas oralmente e metade das crianças representava explicitamente os números e depois resolvia os problemas. As crianças nos grupos de representação explícita escolhiam a forma de representar que julgavam ser a mais conveniente. Elas podiam escrever os números ou utilizar um dos materiais concretos disponíveis: bolas de gude, cartões coloridos, palitos ou réguas. Metade dos problemas que as crianças resolviam eram problemas diretos (final desconhecido) e metade eram inversos (início desconhecido). Dessa forma, "significado dados aos números" e "representação simbólica utilizada na resolução dos problemas" foram fatores *intra-sujeitos,* pois as crianças resolviam problemas apenas com um dos dois significados dados a relativos e por intermédio de uma única forma de representação simbólica. O fator "propriedade invariante" era *inter-sujeito,* pois todas as crianças resolviam problemas diretos e problemas inversos. Como as propriedades invariantes de problemas diretos são distintas daquelas de problemas inversos, todas as crianças foram levadas a pensar sobre diversas relações invariantes presentes em problemas aditivos com números inteiros relativos.

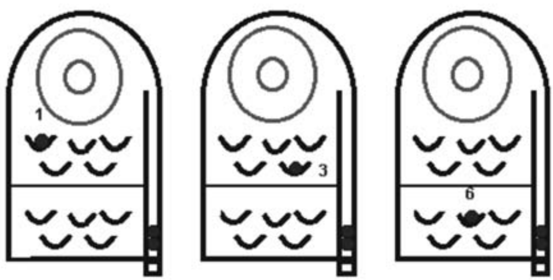
Tabela 1 – Os grupos experimentais do primeiro estudo

	Forma de representação simbólica	
Significado dos números	**Implícita (oral)**	**Explícita (por escrito ou uso de material)**
Medida	G1 Idade m = 8a 1m	G2 Idade m = 8a 2m
Relação	G3 Idade m = 8a 4m	G4 Idade m = 8a 2m

No primeiro estudo, as crianças que resolviam problemas sobre medidas resolviam questões sobre partidas de jogos num "pinball" (Figura 1) e as crianças que resolviam problemas sobre relações resolviam problemas sobre bolas de gude colocadas dentro ou retiradas de uma lata (Figura 2). Dois jogos distintos foram utilizados de maneira a buscar replicar resultados obtidos em estudos anteriores que utilizaram contextos semelhantes aos desse primeiro experimento.

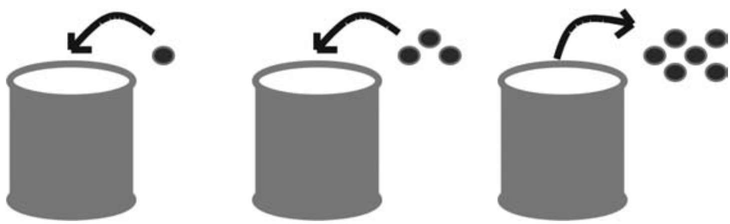
Nos problemas diretos do jogo de "pinball" era afirmado que a partir de um escore inicial igual a zero, três jogadas foram efetuadas e com base nos valores obtidos nessas jogadas a criança deveria determinar o escore final. Esse escore final era uma medida que poderia ser maior que zero, ou seja, positiva, uma medida que poderia ser igual a zero, ou ainda uma medida que poderia ser menor que zero, ou seja, negativa. Não era esperado que as crianças utilizassem os termos "positivo" ou "negativo" mas sim que indicassem de alguma forma clara se no escore final haviam pontos ganhos (positivos) ou pontos perdidos (negativos).

Nos problemas diretos do jogo de bolas de gude afirmava-se que havia algumas bolas na lata, mas que não se sabia quantas bolas havia ao todo. Diziam-se as três transformações ocorridas – bolas colocadas ou retiradas da lata – e solicitava-se que a criança determinasse se no final havia mais bolas, menos bolas ou o mesmo tanto de bolas que havia no início. As crianças, ao responderem as questões desse jogo, estariam determinando relações entre quantidades de bolas no final, comparadas com quantidades de bolas inicialmente na lata.



Exemplo de um problema direto: "Eu não tinha nenhum ponto quando comecei a jogar. Depois eu ganhei um ponto, depois eu ganhei três pontos e depois eu perdi seis pontos. Qual é meu escore no final do jogo: estou ganhando pontos, perdendo pontos ou não tenho nenhum ponto?... De quantos pontos é meu escore no final?
Exemplo de um problema inverso: "Eu não vou lhe contar o que aconteceu a primeira vez que atirei a bola. Depois eu ganhei três pontos, e depois eu perdi seis pontos. Meu escore no final era perdendo dois pontos. O que aconteceu a primeira vez que atirei a bola: eu ganhei pontos, perdi pontos ou não marquei nenhum ponto? … Quantos pontos eu marquei a primeira vez que atirei a bola?"

Figura 1 – O jogo de "pinball"



Exemplo de um problema direto: "Eu tinha algumas bolas de gude na lata. Depois eu coloquei uma bola dentro, depois eu coloquei três bolas dentro e depois eu tirei seis bolas. No final eu tenho mais bolas, menos bolas ou o mesmo tanto de bolas que eu tinha antes?... Quantas bolas a mais/ a menos?
Exemplo de um problema inverso: "Eu não vou lhe contar o que aconteceu a primeira vez. Depois eu coloquei três bolas dentro, e depois eu tirei seis bolas. No final eu fiquei com duas bolas a menos. O que aconteceu a primeira vez: eu coloquei bolas, tirei bolas ou não fiz nada? … Quantos bolas eu coloquei/tirei a primeira vez?"

Figura 2 – O jogo das bolas de gude

Nos problemas inversos dos dois jogos afirmava-se para as crianças que havia um valor inicial desconhecido – pontos ganhos ou perdidos no caso do jogo de "pinball" ou bolas colocadas, ou retiradas no caso do jogo das bolas de gude. A partir de valores finais dados – medidas ou relações, dependendo do jogo – valores iniciais deveriam ser determinados pelas crianças.

Todas as crianças resolviam 12 problemas: seis diretos e seis inversos. Os problemas variavam em posição e quantidade de números negativos envolvidos. Na Tabela 2 pode-se observar a variação de sinais dos números nos problemas diretos e nos problemas inversos.

Tabela 2 – As estruturas dos problemas resolvidos pelas crianças

6 problemas diretos:
P1: Primeiro positivo, primeiro resultado parcial positivo, resultado desconhecido positivo. (+1) + (+4) + (-2) = ? (+5) + (-2) = (+ 3)
P2: Primeiro positivo, primeiro resultado parcial positivo, resultado desconhecido negativo. (+1) + (+3) + (-6) = ? (+4) + (-6) = (-2)
P3: Primeiro negativo, primeiro resultado parcial positivo, resultado desconhecido positivo. (-2) + (+6) + (-3) = ? (+4) + (-3) = (+1)
P4: Primeiro negativo, primeiro resultado parcial positivo, resultado desconhecido negativo.(-1) + (+3) + (-6) = ? (+2) + (-6) = (-4)
P5: Primeiro positivo, primeiro resultado parcial negativo, resultado desconhecido negativo.(+1) + (-4) + (-2) = ? (-3) + (-2) = (-5)
P6: Primeiro negativo, primeiro resultado parcial negativo, resultado desconhecido negativo. (-6) + (+2) + (-3) = ? (-4) + (-3) = (-7)

6 problemas inversos:
P7: Inicial desconhecido, composição de números e resultado positivos.
? + (+7) + (-3) = (+5) (+1) + (+4) = (+5)
P8: Inicial desconhecido e resultado positivo, composição de números negativo.
? + (+3) + (-5) = (+4) (+6) + (-2) = (+4)
P9: Inicial desconhecido positivo, composição de números e resultado negativos.
? + (+4) + (-7) = (-1) (+2) + (-3) = (-1)
P10: Inicial desconhecido negativo, composição de números e resultado positivos.
? + (+6) + (-2) = (+3) (-1) + (+4) = (+3)
P11: Inicial desconhecido e resultado negativos, composição de números positivo.
? + (+6) + (-1) = (-3) (-8) + (+5) = (-3)
P12: Inicial desconhecido, composição de números e resultado negativos.
? + (+5) + (-7) = (-6) (-4) + (-2) = (-6)

Resultados obtidos no primeiro estudo

Análise quantitativa

A Tabela 3 mostra o desempenho de cada um dos grupos experimentais no primeiro estudo. Essa tabela permite observar como o desempenho foi afetado pelos significados dados aos números inteiros nos problemas – medidas ou relações – pelas representações simbólicas que as crianças eram solicitadas a utilizar – representações implícitas (geralmente orais) ou representações explícitas (geralmente escritas ou por meio de material manipulativo como bolas de gude, cartões coloridos, palitos ou réguas) – e pelas propriedades invariantes sobre as quais raciocinavam – propriedades de problemas diretos e de problemas inversos.

Tabela 3 – Média de acertos e desvio padrão do 1º estudo nos problemas diretos e inversos de acordo com significados dados e formas de representação utilizadas

Significado dos números	Representação simbólica	Média	Desvio padrão	Média	Desvio Padrão
		Problemas diretos		Problemas inversos	
Medida	**G1**- Representação Implícita	4.40	1.64	2.27	2.22
	G2 - Representação Explícita	2.13	1.60	.67	.98
Relação	**G3** - Representação Implícita	3.07	1.75	.73	.33
	G4 - Representação Explícita	1.93	1.87	1.10	.72

Foram observadas diferenças significativas em desempenho de acordo com o significado de número, $F(1,56) = 6.23$; $p = .02$. Mantendo forma de representação constante, quando o resultado era uma medida as crianças resolveram os problemas com muito mais facilidade do que se o resultado era uma relação.

Diferenças significativas também foram observadas quando as crianças utilizavam uma representação implícita dos números, quando comparado com o uso de uma representação explícita, $F(1,56) = 14.75$, $p < .001$. Para uma boa percentagem de crianças que resolviam os problemas oralmente, não havia dificuldade em resolver os problemas diretos sobre medidas quando elas não tinham que representar os números exteriormente antes de solucionar o problema.

Mantendo forma de representação e significado de número constantes, foi significativamente mais fácil resolver os problemas diretos do que os problemas inversos, $F(1,56) = 99.27$, $p < .001$. Assim como acontece com números naturais, problemas com números relativos que envolvem inversão são difíceis para a maioria dos alunos.

Como se pode verificar na Figura 3, não foi observada nenhuma interação entre as variáveis. O efeito do significado de número era o mesmo nas duas formas de representação (implícita e explícita) e nos dois tipos de problemas (diretos e inversos). O efeito de invariantes era o mesmo nas duas formas de representação e para os dois significados de número (medida e relação). O efeito da representação simbólica era o mesmo para os dois significados de número e para os dois tipos de problemas. Dessa forma, observou-se que cada uma das três variáveis afetava de forma independente o desempenho das crianças.

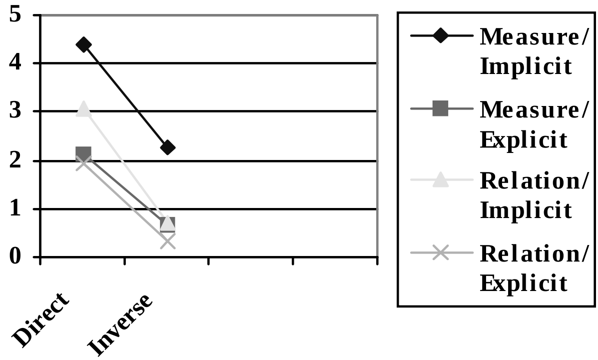


Figura 3 – A falta de interação das variáveis observada no primeiro estudo

Na Tabela 4 pode-se observar que as crianças escolheram de forma quase eqüitativa diferentes formas de representação explícita para os dois significados de número. Um número maior de crianças, tanto para o significado de medida quanto para o de relação, preferiu utilizar-se de algum material que pudesse ser manipulado (bolas de gude, cartões coloridos ou palitos) do que utilizar uma representação por escrito. Apenas seis das 30 crianças que foram solicitadas a utilizar uma representação explícita optaram por escrever os números, representações estas que serão discutidas a seguir. Nenhuma das crianças neste primeiro estudo utilizou réguas para representar os números ou para operar com os números envolvidos nos problemas.

A média de acertos das crianças que usaram manipulativos foi de 2.7, com um desvio padrão de 2.2, e as crianças que utilizaram uma representação escrita acertaram em média 2.0 dos problemas, com um desvio padrão de 2.6. Observa-se que o desempenho não variou com a forma de representação explícita utilizada. Observaram-se, porém, diferenças significativas de desempenho entre as crianças que utilizaram representações implícitas (orais) e as que utilizaram qualquer forma de representação explícitas, seja o uso de bolas de gude, de cartões coloridos ou de palitos.

Tabela 4 – Número de crianças por forma de representação explícita escolhida no primeiro estudo

Significado dos números	Forma de representação explícita escolhida pelas crianças				
	Por escrito	Uso de bolas de gude	Uso de palitos	Uso de cartões coloridos	Uso de réguas
Medida (G2)	3	5	5	2	0
Relação (G4)	3	6	3	3	0

Análise qualitativa do primeiro estudo

Dificuldades em resolver problemas sobre relações

Quando as crianças resolviam oralmente problemas sobre medidas, em geral, não tinham dificuldades em combinar os números relativos nem em apresentar resultados negativos como resposta. Embora não tivessem ainda sido instruídas formalmente sobre a existência de números negativos, muitas crianças não apresentavam nenhuma dificuldade em admitir que o escore no final do jogo era um escore negativo. As crianças expressavam este valor negativo em termos de "escore perdedor" ou "perdendo pontos", ou em termos de o jogador estar no final do jogo "devendo pontos". Algumas dessas crianças ainda afirmavam que seria necessário que o jogador ganhasse um certo número de pontos (os que ele estava devendo) para que seu escore fosse igual a zero. Dessa forma, essas crianças demonstravam um bom conhecimento de inteiros relativos bem antes de trabalharem com esses números na escola.

Quando as crianças resolviam problemas sobre relações, em geral, tinham dificuldades em quantificar as mesmas, pois pensavam que era necessário saber qual o valor inicial – quantas bolas de gude havia inicialmente na lata – para que pudessem determinar se no final havia mais ou menos bolas na lata. Essas crianças questionavam o experimentador sobre esse valor inicial e quando o mesmo afirmava, mais uma vez, que ele era desconhecido, muitas crianças afirmavam que sem esse valor inicial não era possível saber se no final havia mais ou menos bolas do que se tinha antes do jogo iniciar. Outras crianças buscavam formas de superar o seu não conhecimento do número inicial de bolas que havia na lata.

Laura, uma criança de oito anos e quatro meses, ao resolver o quinto problema direto quantificou a relação entre o número de bolas na lata antes e depois das três transformações como: *"Agora tem menos bolas de gude, porque você tirou mais do que colocou dentro. Você colocou uma bola dentro mas tirou quatro e duas, isto quer dizer que tem* ***seis a menos****"*.

Embora Laura lembrasse que o experimentador havia colocado inicialmente uma bola dentro da lata, ela não levou em conta essa transformação inicial na sua quantificação da relação entre bolas antes e depois das três transformações. Como ela procedeu assim na maioria dos problemas que resolveu, e como muitas outras crianças também fizeram o mesmo, esses procedimentos parecem indicar que as crianças julgavam ser necessário ter um valor inicial e, ao invés de incluir a transformação inicial na computação, as crianças tratavam essa transformação como se fosse uma medida inicial.

Esses procedimentos das crianças ao lidarem com problemas cujo significado de número inteiro relativo é o de relação, evidencia que esse significado é de mais difícil compreensão e exige um pensamento mais abstrato e generalizado, uma vez que se tem que aceitar que, independentemente do que se tinha antes, colocar uma bola de gude na lata implica em se ter uma a mais no final e retirar uma bola da lata implica em se ter uma a menos no final.

Dificuldades com problemas inversos

As dificuldades em resolver problemas inversos eram generalizadas e mesmo as crianças que resolviam problemas sobre medidas (significado mais fácil) e oralmente (representação mais fácil) tinham dificuldades em utilizar a inversão para resolver problemas. A dificuldade de lidar com problemas inversos, observada nos estudos sobre números naturais, foi aumentada quando os problemas envolviam também números negativos.

Cathryn, uma garota de oito anos e quatro meses, quando resolveu o segundo problema inverso apresentou a seguinte solução: *"Você ganhou três e perdeu cinco ... você perdeu dois. Você acabou com quatro... No começo você deve ter* ***ganho dois*** *porque dois e dois são quatro*".

Cathryn, corretamente, compôs as duas medidas ((+3) + (-5)) e entendeu que a composição dessas medidas era negativa (-2) ("... você perdeu dois"). Porém, ela não inverteu corretamente essa composição ao determinar o valor inicial solicitado. Se essa criança tivesse feito a inversão corretamente, ela teria descoberto que seria necessário no começo ganhar seis pontos para, depois que se perdesse dois pontos, se tivesse no final do jogo um escore de quatro pontos. Observa-se, assim, que Cathryn foi capaz de, em problemas diretos, compor medidas, mesmo quando estas envolviam valores negativos, mas não se mostrou capaz de inverter números relativos para descobrir os valores iniciais desconhecidos de problemas inversos.

Observou-se que as dificuldades com problemas inversos eram aumentadas quando os problemas tinham mais números negativos envolvidos. Apenas dois dos problemas inversos foram resolvidos corretamente por mais de metade das crianças que utilizaram a representação oral – forma demonstrada por essas crianças como de mais fácil compreensão. No sétimo problema, conforme se pode observar na Tabela 2, tanto o valor inicial desconhecido, quanto a composição de números e o resultado dado eram positivos. No décimo problema, embora o valor inicial desconhecido fosse negativo, a composição de números e o resultado dado eram positivos. Assim, a presença de uma quantidade maior de números positivos com os quais se tinha que lidar facilitou a operação de inversão nesses dois problemas.

Dificuldades com a representação explícita

Quando as crianças resolviam os problemas por meio de representações implícitas – mais presentes nas resoluções orais – elas não precisavam distinguir externamente as diferenças entre os sinais dos números nem entre sinais e operações aritméticas. Quando elas usavam representações explícitas – por escrito ou por uso de material concreto – elas não eram em geral bem-sucedidas, pois não sabiam como externalizar o conhecimento implícito que elas possuíam de números relativos e de operações aditivas com esses números.

Embora oralmente algumas crianças fossem capazes de lidar implicitamente com números inteiros relativos, ao serem solicitadas a utilizar representações explícitas, algumas delas marcavam números positivos e negativos como se fossem todos positivos e outras marcavam todos os negativos como se fossem zero.

Franco, com oito anos e seis meses, resolveu os problemas por escrito e apresentou a representação mostrada na Figura 4 para os seis problemas diretos.

Como todos os negativos eram representados como zero, todas as respostas que Franco apresentou eram resultantes da combinação apenas dos números positivos envolvidos nos problemas. Por não ser capaz de gerar uma representação adequada para números negativos, Franco ficou impossibilitado de responder corretamente às questões que lhe foram apresentadas.

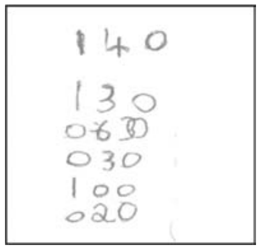


Figura 4 – Uma representação de problemas que marca todos os números negativos como se fossem iguais a zero

Apenas quatro das 30 crianças que resolveram os problemas por meio de representações explícitas conseguiram gerar alguma forma de representação que diferenciasse números positivos de negativos e que diferenciava sinais de números de operações aritméticas. Embora seja um número pequeno de crianças é, mesmo assim, surpreendente observar crianças de sete e de oito anos de idade, muito antes de estudarem o conceito de número inteiro relativo na escola, serem capazes de gerar um sistema de sinais que dê conta das diferenças entre números positivos e negativos e entre os sinais de números e as operações aritméticas de adição e subtração.

O que no primeiro estudo se evidencia que as crianças sabem sobre números inteiros relativos bem antes da instrução formal

Muito antes de serem instruídas formalmente sobre operações e representações de números inteiros relativos, crianças já entendem o significado de inteiro enquanto medida e são capazes de operar corretamente em problemas diretos, desde que utilizem representações implícitas – orais – dos números e das operações. As crianças podem combinar números positivos e negativos e determinar os valores finais dessa combinação, mesmo que resultem em números negativos, mas o fazem melhor quando não têm que explicitar números ou operações e quando os significados envolvidos são de medidas.

Antes da instrução formal, algumas crianças são capazes de gerar representações e procedimentos eficientes para lidar em situações aditivas com números positivos e negativos. Algumas crianças do primeiro estudo geraram formas eficientes de diferenciar ganhos de perdas. A Figura 5 mostra as quatro formas corretamente geradas pelas crianças neste primeiro estudo. Duas dessas formas foram geradas com material manipulativo e as outras duas foram produzidas por escrito. Uma das formas foi a de colocar bolas de gude dentro de uma caixa, por um lado, (representando ganhos) e bolas de gude fora da caixa por outro lado (representando perdas). Outra forma foi utilizando cores diferenciadas de cartões para representar distintamente ganhos e perdas. Nas outras produções as crianças escreveram sinais (de modo semelhante à representação formal convencional) ou letras ("L" para "loss" (perda) e "W" para "win" (ganho)).

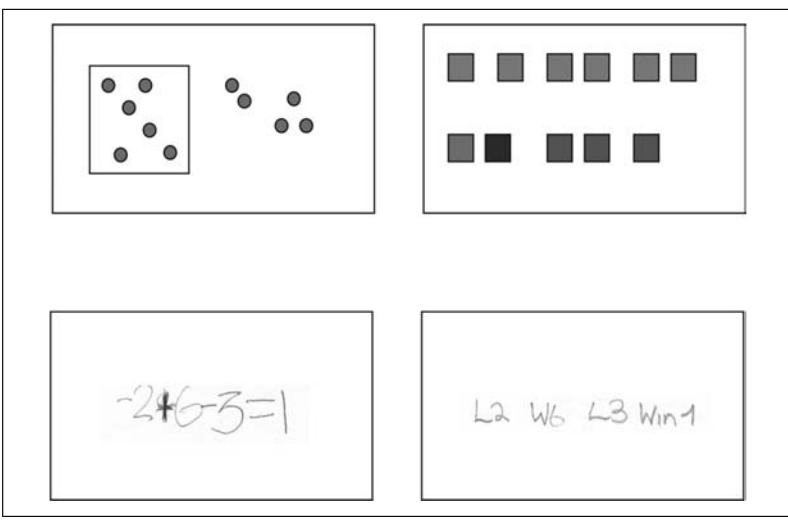


Figura 5 – Representações explícitas para o problema ((-2) + (+6) + (-3) = ?) nos quais números positivos e negativos foram diferenciados

O que levou à condução do segundo estudo

Como nesse primeiro estudo os diferentes significados dados ao inteiro relativo (medida e relação) estavam presentes em dois contextos distintos (jogo do "pinball" e jogo das bolas de gude, respectivamente), poder-se-ia argumentar que as diferenças de desempenho obtidas podem ter sido resultantes do uso de contextos diferenciados, e não de diferentes significados ou ainda da interação entre contextos e significados. Para se esclarecer essa dúvida, um segundo estudo foi organizado, no qual o contexto fosse mantido constante, ou seja, para um mesmo jogo diferentes significados seriam envolvidos.

O contexto do jogo de "pinball" foi escolhido para esse segundo estudo porque o mesmo permite que problemas de medidas e de relações sejam formulados. No contexto do jogo de bolas de gude sendo colocadas e retiradas de um recipiente, apenas problemas de relação fazem sentido, pois pode-se comparar a quantidade de bolas antes e depois de um certo número de transformações, mas não se pode nesse contexto ter uma medida negativa, ou seja, não há como ter menos que zero bolas dentro de um recipiente.

Método do segundo estudo

Participantes do segundo estudo

Participaram do segundo estudo 60 crianças de outra escola pública do norte de Londres. As crianças tinham sete e oito anos de idade, sendo a idade média oito anos e quatro meses. As crianças foram aleatoriamente distribuídas nos mesmos quatro grupos experimentais do primeiro estudo, à semelhança da distribuição descrita na Tabela 1.

Formato do segundo estudo

Todas as crianças respondiam a questões sobre um jogo de "pinball" (como o que se pode observar na Figura 1). Os problemas de medida eram exatamente os mesmos que haviam sido propostos no primeiro estudo. Para o segundo estudo os problemas de relação foram adaptados para esse novo contexto. Um problema direto no qual era solicitada a determinação de uma relação era do tipo: "Eu joguei ontem e terminei com um certo escore. Hoje eu continuei jogando a partir do escore do ontem e hoje eu ganhei um ponto, depois eu ganhei três pontos e depois eu perdi seis pontos. No final fiquei com mais pontos, menos pontos ou a mesma quantidade de pontos que eu tinha antes? Quantos a mais/ menos?" Um problema inverso correspondente seria: "Eu não sei o que aconteceu no começo do jogo de hoje, depois ganhei três pontos, depois perdi seis pontos e terminei com dois pontos a menos do que eu tinha antes. O que aconteceu no começo: eu ganhei pontos, perdi pontos ou marquei zero pontos? Quantos pontos ganhei/perdi da primeira vez que joguei hoje?"

Resultados obtidos no segundo estudo

Os resultados obtidos no segundo estudo estão sintetizados na Tabela 5. Quando se compara essa última tabela com a Tabela 3, que mostra os resultados obtidos no primeiro estudo, pode-se observar que as tendências são as mesmas, ou seja, significados dados aos números, propriedades invariantes sobre as quais se raciocina e representações simbólicas tiveram o mesmo efeito quando diferentes contextos (jogo do "pinball" para o significado de medida e jogo das bolas de gude para o significado de relação) foram utilizados e quando apenas um contexto foi utilizado (jogo do "pinball" para os dois significados dados a inteiros relativos).

À semelhança do primeiro estudo, a análise de variância efetuada no segundo estudo evidenciou diferenças significativas entre os significados ($F(1,56) = 15.10$, $p<.001$), entre invariantes ($F(1,56) = 13.60$, $p< .001$) e entre representações ($F(1,56) = 37.28$, $p<.001$), mas não foram observados efeitos de interação entre as variáveis.

Tabela 5 – Média de acertos e desvio padrão do 2º estudo nos problemas diretos e inversos de acordo com significados dados e formas de representação utilizadas

Significado de números	Representação simbólica	Média	Desvio padrão	Média	Desvio Padrão
		Problemas diretos		Problemas inversos	
Medida	G1- Representação Implícita	3.80	1.42	1.73	1.16
	G2 - Representação Explícita	1.73	1.44	1.20	1.37
Relação	G3 - Representação Implícita	2.00	1.41	1.33	1.63
	G4 - Representação Explícita	1.20	1.42	.33	.62

Os resultados obtidos no segundo estudo seguiram as mesmas tendências observadas no primeiro estudo: entender o significado de relação é mais difícil que entender o de medida, os invariantes dos problemas inversos são de mais difícil compreensão do que os invariantes dos problemas diretos e utilizar representações explícitas é mais difícil que fazer uso de representações implícitas.

Além de serem replicadas as mesmas tendências com um outro grupo de crianças, no segundo estudo pode verificar-se que o desempenho é mais fortemente afetado por significados dados aos números do que por contextos, desde que estes últimos sejam significativos para as crianças. Mesmo mantendo-se constante um contexto, as crianças desempenham-se diferentemente, de acordo com os significados dos números sobre os quais são levadas a pensar.

Conclusão

Os resultados obtidos neste estudo mostram que os significados dados a números, as propriedades sobre as quais se pensa e as representações utilizadas têm tal influência no modo como se resolvem problemas aditivos com números relativos que variações em uma dessas dimensões do conceito podem afetar o desempenho na resolução de problemas.

Os alunos, quando iniciam a aprendizagem formal de números inteiros relativos, já possuem conhecimentos em algumas dimensões desse conceito. Crianças bem antes da introdução formal ao conceito de número relativo já entendem o significado de inteiro como medida e já são capazes de resolver problemas diretos utilizando-se de representações implícitas. Algumas poucas crianças são capazes de gerar representações explícitas para números positivos e negativos e de corretamente operar nessas representações bem antes de aprenderem a fazer uso das representações formalizadas.

Esses resultados não implicam necessariamente que crianças nessa idade já devam ser formalmente ensinadas sobre operações com números relativos. O que se sugere é que muito antes de serem formalmente introduzidos a esse conceito na escola, alunos já desenvolvem algum conhecimento de operações aditivas com números relativos. O que eles conhecem, porém, é limitado a alguns significados dados aos números, a algumas propriedades invariantes e a certos tipos de representação simbólica.

Na escola deve-se reconhecer que o aluno já tem algum conhecimento de relativos antes da introdução formal a esse conceito, porém, outros significados, outras propriedades e outras formas de representação terão que ser discutidos para que os alunos desenvolvam um conhecimento bem mais amplo das operações aditivas com números relativos.

Se os alunos já possuem esses conhecimentos prévios, torna-se necessário que, antes de iniciar o ensino formal, se investigue quais aspectos do conceito já são compreendidos e quais requerem maior atenção quando do ensino formal. Dessa forma os alunos poderão ser auxiliados a obter um maior progresso na compreensão dos conceitos.

Referências

BELL, A. (1980). Developmental studies in the additive composition of numbers. *Recherches en didactique des mathématiques*, n. 1, pp. 113-141.

BORBA, R. (2002). *The effect of number meanings, conceptal invariants and symbolic representations on children's reasoning about directed numbers.* Tese de doutorado. Reino Unido. Psychology Department, Oxford Brookes University.

BORBA, R. e NUNES, T. (1999). "Young children's representations of negative numbers". In: BILLS, L. (ed.). *Proceedings of the Day Conference held at St. Martin's College*. Lancaster.

______(2000a). "Are young children able to represent negative numbers?" In: NAKAHARA, T. e KOYAMA, M. (eds.). *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Hiroshima University.

BORBA, R. e NUNES, T. (2000b). "Are young primary school pupils able to manipulate representations of negative numbers?" In: FUJITA, H. e SUGIYAMA, Y. (eds.). *Proceedings of the 9th International Congress on Mathematical Education*. Tokyo, Japan.

_____(2001). Teaching young children to make explicit their understanding of negative measures and negative relations. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*. Southampton.

BORBA, R. e SANTOS, R. (1997). Investigando a resolução de problemas de estruturas aditivas por crianças de 3ª série. Recife. *Tópicos Educacionais*, v. 15, n. 3, pp. 125-140.

CARPENTER, T. e MOSER, J. (1982). "The development of addition and subtraction problem-solving skill". In: *Addition and subtraction: a cognitive perspective*. Hillsdale, Erlbam.

DAVIDSON, P. (1987). "How should non-positive integers be introduced in elementary mathematics". In: BERGERON, J.; HERSCOVICS, N. e KIERAN, C. (eds.). *Proceedings of the XI International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Montreal, Canada.

DAVIS, R. (1990). "Discovery learning and constructivism". In: DAVIS, R.; MAHER, C. e NODDINGS, N. (eds.). Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. *Monograph 4, Journal for Research in Mathematics Education*, Reston, VA: NCTM,.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, Holland, D. Reidel Publishing Company.

KÜCHEMANN, D. (1981). "Positive and negative numbers". In: HART, K. (ed.). *Children's understanding of mathematics: 11-16.* London, John Murray.

MAGINA, S.; CAMPOS, T.; NUNES, T. e GITIRANA, V. (2001). *Repensando adição e subtração. Contribuições da teoria dos campos conceituais.* São Paulo, Proem.

NUNES, T. (1993). "Learning mathematics. Perspectives from everyday life". In: DAVIS, R. e MAHER, C. (eds.). *Schools, mathematics and the world of reality.* Needham Heights (MA), Allyn and Bacon.

NUNES, T. e BRYANT, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre, Artes Médicas.

NUNES, T.; CAMPOS, T.; MAGINA, S. e BRYANT, P. (2001). *Introdução à Educação Matemática. Os números e as operações numéricas.* São Paulo, Proem.

PELED, I. (1991). "Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability". In: FURINGHETTI, F. (ed.). *Proceedings of the XV International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Assisi, Italy.

ROWLAND, T. (1982). Teaching directed numbers - An experiment. *Mathematics in School,* January, pp. 24-27.

VERGNAUD, G. (1982). "A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems". In: CARPENTER, T.; MOSER, J. e ROMBERG, T. (eds.). *Addition and subtraction: a cognitive perspective.* Hillsdale, N.J., Lawrence Erlbaum.

_____(1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica,* v. 1, n. V, pp. 75-90.

_____(1997). "The nature of mathematical concepts". In: NUNES T. e BRYANT, P. (eds.). *Learning and teaching mathematics. An international perspective.* East Sussex, UK, Psychology Press Ltd. Publishers.

Recebido em fev./2004; aprovado em maio/2004