Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferencias ordinárias

ADRIANA HELENA BORSSOI*
LOURDES MARIA WERLE DE ALMEIDA**

Resumo
Neste trabalho estamos interessados em investigar os ambientes de modelagem matemática e a sua potencialidade no que diz respeito à aprendizagem significativa dos estudantes. O que se faz é buscar nas produções dos alunos em atividades de modelagem matemática evidências de uma aprendizagem significativa. Deste modo, o trabalho apresenta pressupostos teóricos sobre a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem e sobre a aprendizagem significativa fundamentada em Ausubel e Novak. O trabalho define alguns aspectos que são usados como indicativos de aprendizagem significativa quando do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e descreve uma situação na qual esses aspectos foram investigados durante uma disciplina de um curso de Química. As informações obtidas no decorrer do desenvolvimento da pesquisa representam indícios de que a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem pode proporcionar a aprendizagem significativa.
Palavras-chave: modelagem matemática; aprendizagem significativa; equações diferenciais.

Abstract
In this work we are interested in investigating the Mathematical Modelling and his potentiality in what says respect to the students' Meaningful Learning. The one that we do is to look for in the students' productions in activities of Modelling Mathematical evidences of a Meaningful Learning. In this way, the work presents theoretical presuppositions on the Mathematical Modelling as teaching strategy and learning and on the Meaningful Learning based in Ausubel and Novak. The work defines some aspects that are used as indicative of Meaningful Learning when of the development of

* Universidade Estadual de Londrina.

** lourdes@uel.br

activities of Mathematical Modelling and it describes a situation where these aspects were investigated during a discipline of a course of Chemistry. The information obtained in elapsing of the development of the research represent indications that the Mathematical Modelling as teaching and learning strategy can provide the Meaningful Learning.
Key-words: *Mathematical Modelling; Meaningful Learning; Differential Equations.*

Introdução

As dificuldades relacionadas com o ensino e a aprendizagem da Matemática, especialmente nos cursos superiores, têm sido investigadas em diversas pesquisas. Várias propostas têm sido elaboradas na perspectiva de examinar e resolver problemas detectados. O que se pode perceber são experiências de inovações e mudanças nas práticas ortodoxas, baseadas tradicionalmente em operações, técnicas e repetição de algoritmos, passando à criação de ambientes de ensino e aprendizagem onde a compreensão dos processos de pensamento é explorada.

Neste trabalho estamos interessados em investigar os ambientes de modelagem matemática e a suas potencialidade no que diz respeito à aprendizagem significativa dos estudantes. O que se pretende é buscar nas produções dos alunos, durante as aulas, evidências de uma aprendizagem significativa. Para que essas evidências possam aparecer, entendemos que é necessário envolver o aluno com o desenvolvimento de atividades de aprendizagem que lhe permitam construir ou atribuir significados compartilhados e aceitos como corretos. Entendemos que proporcionar condições para uma aprendizagem significativa dos estudantes seja um dos objetivos primeiros da educação escolar. Deste modo, conhecer as condições necessárias para que ela ocorra é importante para que se possam organizar atividades de aprendizagem voltadas a esse fim, nos diferentes níveis de ensino. É com essa perspectiva que introduzimos as atividades de modelagem matemática.

Desse modo, inicialmente fazemos algumas considerações sobre a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. Apresentamos, a seguir, alguns aspectos relativos à aprendizagem significativa como caracterizada por Ausubel (1988). Na seqüência, definimos alguns aspectos que consideramos como indicativos de aprendizagem significativa quando do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e descrevemos uma situação onde esses aspectos foram investigados durante uma disciplina de um curso de Química. Finalmente, apresentamos alguns resultados obtidos.

2. O quadro teórico da pesquisa: a aprendizagem significativa intermediada pela modelagem matemática

O envolvimento do aluno com situações-problema em sala de aula representa uma oportunidade de externar o processo construtivo de aprender, de converter conceitos e exemplos construídos por meio da interação com o professor.

Para Ausubel (1988), resolver um problema pode ser encarado como um meio para promover a aprendizagem significativa, uma vez que a resolução resulta de um processo de clarificação progressiva sobre relações de meio-e-fim fundamentadas na formulação, verificação e rejeição de hipóteses alternativas.

Neste trabalho, apresentando a modelagem matemática como uma forma de resolver problemas e investigamos como o envolvimento dos alunos em atividades de modelagem viabiliza a aprendizagem significativa.

2.1 Modelagem matemática

A modelagem matemática, como estratégia de ensino e aprendizagem, pode ser compreendida como uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema da realidade, que configura uma atividade que se desenvolve segundo um conjunto de procedimentos e na qual a escolha do problema a ser investigado tem a participação direta dos sujeitos envolvidos.

No que se refere a atividades matemáticas, Chevallard et alii (2001) consideram que os três grandes tipos de atividades verdadeiramente matemáticas consistem em: utilizar matemática conhecida, aprender (e ensinar) matemática e criar uma matemática nova.

O primeiro tipo de atividade matemática versa sobre resolver problemas fazendo uso de ferramentas matemáticas que são de domínio pessoal do sujeito que estuda o problema. Em geral, são situações que envolvem pequenos problemas, problemas rotineiros, ou situações que envolvem problemas típicos.

O segundo aspecto da atividade matemática requer, para a resolução de um problema matemático novo, que o sujeito procure saber se tal problema e a respectiva solução são “conhecidos” junto a outros matemáticos ou produções matemáticas. Esse caso implica aprender matemática para então solucionar o problema.

E, por fim, o terceiro aspecto da atividade matemática consiste em criar matemática “nova” buscando a solução de problemas que surgem de situações, tanto intramatemáticas como extramatemáticas, para as quais se criam novos modelos de estudo ou imaginam-se novas utilizações de antigos modelos.

No contexto de sala de aula, a modelagem matemática pode ser percebida como uma atividade matemática levando em consideração a matemática pode ser usada na sala de aula de diferentes maneiras, ou seja, conceitos matemáticos já conhecidos podem ser ativados para resolver o problema, ou mesmo conceitos e procedimentos matemáticos novos podem ser introduzidos por meio da atividade de modelagem. Essas possibilidades de integrar a modelagem matemática no currículo são caracterizadas por Blum e Niss (1991) como *alternativa da combinação.*

São muitos os pesquisadores e educadores matemáticos que defendem a incorporação de atividades de modelagem matemática nas aulas de Matemática. Mas planejar o desenvolvimento de uma modelagem matemática requer que algumas questões relevantes sejam consideradas, tais como: Qual é o problema? Qual é o objetivo? Quais as respostas necessárias? É necessário um modelo para se resolver o problema? Quais são os dados disponíveis? É possível verificar a validade dos resultados do modelo? Essas atividades podem contribuir para que os alunos adquiram e interiorizem conceitos, métodos e resultados matemáticos por meio da exploração de situações de interesse? A modelagem, de certa forma, estimula os alunos a investigarem situações de outras áreas que não a Matemática e permite entender os caminhos percorridos na investigação.

A modelagem matemática em sala de aula viabiliza a interação da matemática escolar com aquela presente fora do ambiente da escola. Nesse sentido, Niss (1992) argumenta que em um ambiente de modelagem matemática o aluno deixa a posição passiva e passa a ser um sujeito atuante que se envolve no problema em estudo. Assim, a interação entre a matemática escolar e a sociedade pode ser estabelecida. Entendemos então que melhores resultados podem ser obtidos se os problemas a serem estudados tiverem relação com a área de interesse dos estudantes, ou seja, a realidade considerada é aquela em que eles estão inseridos, não uma realidade qualquer.

Argumentações favoráveis à utilização da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem podem ser encontradas nos estudos de autores diversos, como Bassanezzi (2002), D'Ambrósio (2002), Blum e Niss (1991), Niss (1992), Barbosa (2001), Almeida e Brito (2003), Ferruzzi et alii (2002), Borssoi e Almeida (2003), Almeida e Dias (2004) entre muitos outros. Esses argumentos aparecem relacionados, por um lado, com a motivação que as atividades podem proporcionar aos alunos com a aplicabilidade da matemática, e, por outro lado, em um sentido mais amplo, aparecem aspectos extramatemáticos vinculados à competência crítica dos alunos e a seu exercício de cidadania.

As atividades de modelagem matemática em sala de aula, segundo o que defendemos (Almeida e Dias, 2004; Borssoi e Almeida, 2003), devem ser introduzidas de forma gradativa, permitindo ao estudante familiarizar-se com o ambiente de sala de aula na perspectiva da modelagem.

A fim de que a participação dos alunos aumente gradativamente, permitindo que se insiram nesse novo contexto, é adequado que em um primeiro momento seja desenvolvido com os alunos um trabalho de modelagem já estruturado, sob a orientação do professor – sendo este o primeiro contato dos estudantes com a modelagem matemática, a participação ativa e a interação do aluno com o problema são importantes.

Posteriormente, um problema, juntamente com um conjunto de informações, é definido pelos alunos em conjunto com o professor. Os alunos realizam a formulação das hipóteses simplificadoras, a dedução do modelo e sua posterior validação – nesse estágio, os estudantes devem ser instigados a ter uma participação maior, desenvolvendo a atividade de forma a percorrer todas as etapas do processo.

Finalmente, os alunos conduzem um processo de modelagem, em grupos, a partir de um problema escolhido por eles e devidamente assessorados pelo professor – já familiarizados com as atividades de modelagem, os estudantes apresentam mais autonomia e habilidade para conduzir o processo.

Esse encaminhamento, sugerido para trabalhar com atividades de modelagem, contribui para compor atividades de aprendizagem consideradas significativas, porém, a qualidade das atividades ou mesmo do material de ensino por si não é garantia de uma aprendizagem significativa. Outro fator que influencia fortemente, conforme Arruda et alii (2004),

> (...) principalmente quando a tarefa não é trivial, o que é freqüente no ensino de Ciências, é preciso que haja uma predisposição favorável, uma intenção ou uma motivação que anteceda a própria tarefa ou que, pelo menos cresça à medida que o estudante se envolve no processo, pois a construção do significado vai ocorrendo lentamente. Dessa forma, muitas vezes a compreensão não é o ponto de partida, mas o de chegada da tarefa. (pp. 197-198)

Entendemos que a motivação do aluno, que propicia a predisposição para aprender, deve ser sustentada por uma organização adequada das aulas e pelo material destinado às atividades de ensino e aprendizagem. Encontramos, na teoria da aprendizagem significativa, orientações para a organização dessas atividades levando em consideração também os argumentos relativos à incorporação das atividades de modelagem matemática nas aulas de Matemática.

2.2 A aprendizagem significativa

A teoria da Aprendizagem Significativa corresponde a uma proposta psicoeducativa, em uma perspectiva cognitivista, formulada por David Ausubel na década de 60. Um enfoque mais humanista foi dado posteriormente por Joseph Novak, em sua teoria, que tem a aprendizagem significativa como conceito central.

Ausubel entende a aprendizagem significativa como um processo de modificação do conhecimento e, para tanto, reconhece a importância dos processos cognitivos dos alunos, que ocorrem em uma interação entre as informações novas e a estrutura cognitiva de cada um (Ausubel et alii 1980).

A aprendizagem significativa pode ser definida como um processo por meio do qual o sujeito que aprende relaciona, de maneira não arbitrária e substantiva, uma nova informação a um aspecto relevante de sua estrutura cognitiva. A estrutura cognitiva compreende um complexo organizado de informações na mente do sujeito que aprende, e a forma como se encontra organizada essa estrutura determina uma aprendizagem mais ou menos facilitada. A não-arbitrariedade indica que a nova informação deve se relacionar com um aspecto relevante da estrutura cognitiva de quem aprende e não com um aspecto arbitrário qualquer. A substantividade significa que é a essência da nova informação que deve ser interiorizada pela estrutura cognitiva, e não um conjunto de símbolos usados para expressá-la.

Nesse contexto, pensar em uma educação que promova uma aprendizagem significativa requer levar em conta o processo de construção de significados como elemento central do processo de ensino e aprendizagem. Visando essa construção, são identificadas três condições básicas para proporcionar uma aprendizagem significativa (Ausubel et alii 1980, Coll et al. 2000 e Moreira, 1999): a utilização de um material potencialmente significativo nas atividades de ensino; a existência, na estrutura cognitiva do aluno, de conhecimentos prévios que permitam o relacionamento do que o aluno já sabe com os conhecimentos novos, e a predisposição positiva do aluno para aprender significativamente.

Para Ausubel, a estrutura cognitiva tende a ser organizada de forma hierárquica, onde conceitos e proposições mais inclusivos, com maior poder de generalização, ficam no topo da hierarquia e abrangem proposições e conceitos menos inclusivos, com menor poder de generalização (Moreira, 1997). Assim, a organização do material de ensino, das aulas, deve considerar dois princípios: a *diferenciação progressiva* – princípio segundo o qual as idéias mais gerais e inclusivas da disciplina devem ser apresentadas no início e logo sendo diferenciadas em função dos detalhes e da especificidade; e a *reconciliação integradora* – princípio segundo o qual programar o ensino implica a realização de esforços sérios e explícitos para explorar as múltiplas relações entre conceitos parecidos, destacando as semelhanças e as diferenças importantes, de maneira tal que possam esclarecer as inconsistências reais ou aparentes. A Figura 1 mostra um esquema representativo dos dois princípios, onde as setas em negrito indicam o sentido da diferenciação progressiva e as outras indicam o sentido da reconciliação integradora.

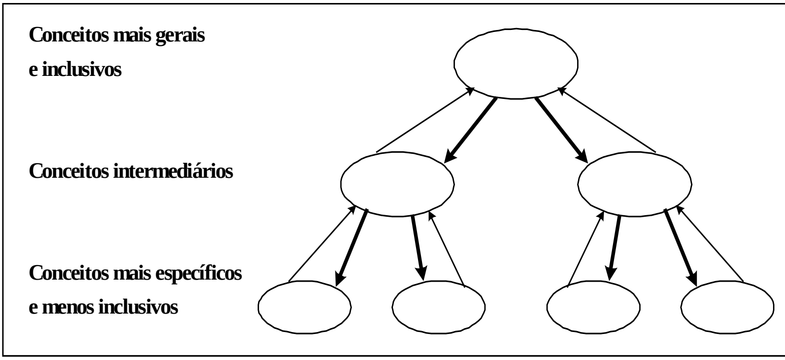

Figura 1 – Representação esquemática do processo de diferenciação progressiva e reconciliação integradora (Moreria & Buchweitz, 1987, p. 27).

Um dos pontos centrais do modelo de ensino proposto por Ausubel é o aluno com sua estrutura cognitiva, e nele, os conhecimentos prévios do aluno assumem grande importância. Mas, além do aspecto cognitivo, é necessário também voltar a atenção aos aspectos motivacionais do aluno. Segundo Moreira (1999, p. 40), a predisposição para aprender e para a aprendizagem significativa têm uma relação cíclica: "a aprendizagem significativa requer predisposição para aprender e, ao mesmo tempo, gera esse tipo de experiência afetiva". Nessa direção, apoiamo-nos também na teoria de Novak, que contempla uma conotação mais humanista, superando a característica essencialmente cognitivista enfatizada por Ausubel.

Para Novak, a aprendizagem significativa compreende a integração construtiva entre pensamento, sentimento e ação que conduz ao engrandecimento humano. Levando em consideração que os seres humanos pensam, sentem e agem, Novak propõe que uma teoria de educação deva compreender esses três aspectos e defende que todo evento educativo deve implicar ação para trocar significados entre professor e aluno, visando a aprendizagem significativa de um conhecimento contextualmente aceito.

Neste sentido, para Novak e Gowin (1988), em um evento educacional, um ser humano (*estudante*) adquire um *conhecimento* em certo *contexto*, interagindo com um *professor* (ou algo que o substitua) e a *avaliação* também se inclui no evento porque muito do que acontece no processo ensino-aprendizagem-conhecimento-contexto, depende da avaliação, ou, como colocam os autores, "muito do que acontece na vida das pessoas depende também da avaliação".

De forma geral, o que se pode perceber é que Ausubel oferece, com sua teoria, diretrizes, princípios para facilitar a aprendizagem significativa. Ao abordar questões relacionadas à avaliação, que considera central no conceito de aprendizagem na sala de aula, defende que os dados obtidos devem ajudar o estudante a fim de situá-lo no processo, mostrando-lhe seu nível de desenvolvimento e fornecer recursos ao professor para que avalie também o material e os métodos utilizados.

2.3 Interação entre aprendizagem significativa e modelagem matemática

Levando em consideração características da aprendizagem significativa e os argumentos em relação ao uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem, buscamos neste trabalho investigar como atividades de modelagem em sala de aula podem desencadear a aprendizagem significativa. Assim, inicialmente, definimos alguns aspectos que representam indicativos da aprendizagem significativa para, posteriormente, observar esses aspectos durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Vamos considerar dois grupos distintos de aspectos: um mais relacionado com a aprendizagem do conteúdo e, outro, relacionado com a predisposição positiva, condição básica, já estabelecida no item 2.2, para a ocorrência da aprendizagem significativa.

Esses *aspectos* orientam a análise dos resultados, obtidos com o desenvolvimento de uma proposta de ensino e aprendizagem que elaboramos, fundamentada na possibilidade de promover no estudante a aprendizagem significativa por meio das atividades de Modelagem Matemática.

Inicialmente, consideramos os aspectos relativos à predisposição dos alunos para aprender, os quais dizem respeito a atitudes e questões motivacionais que permeiam todo o processo de ensino e aprendizagem. Assim, elegemos os seguintes *aspectos*:

Envolvimento nas atividades: a participação ativa nas atividades de ensino pode indicar se há predisposição do aluno para aprender significativamente (Ausubel et al. 1980; Buchweitz, 2002), pois o envolvimento contribui para que o aluno desenvolva competência e criatividade na resolução de problemas e favorece uma atribuição de significados mais efetiva (Carreira, 1993; Coll, 1994, Bassanezi, 2002, Niss, 1992);

Elaboração de estratégias próprias: segundo Ausubel et alii (1980), Carreira (1993), D'Ambrosio (2002), a aprendizagem pode ser mais ou menos significativa, dependendo das estratégias adotadas pelo aluno. Nesse sentido, situações de ensino que proporcionam ao aluno o contato com um contexto real podem motivar o desenvolvimento de estratégias que levam à aquisição do conhecimento de forma significativa. Em um processo de modelagem, esse aspecto pode ser evidenciado em diferentes momentos e com maior expressão nas etapas que envolvem definição das hipóteses e aproximações simplificadoras e na elaboração e resolução do problema matemático;

Aprendizagem extraconteúdo: de uma atividade de ensino pode emergir um conjunto de aprendizagens que envolvem, além de aspectos do próprio conteúdo, outros, tais como aprendizagem sobre o contexto, aprendizagem de habilidades, aprendizagem de atitudes, aprendizagem de valores. São diversos os autores que defendem a idéia de que essas outras aprendizagens também podem contribuir para a aprendizagem significativa do conteúdo matemático envolvido no estudo (Buchweitz, 2002, Coll et alii, 2000; D'Ambrósio, 2002, Novak e Gowin, 1988).

No segundo grupo, levando em conta os aspectos cognitivos de Ausubel para observar se há aprendizagem significativa do conteúdo, consideramos:

Compreensão conceitual: a aprendizagem de conceitos é central para a aprendizagem significativa (Ausubel et alii, 1980; Coll et alii, 2000). Em um processo de modelagem matemática, a resolução de um problema só pode ser efetivada realmente se houver a compreensão conceitual de aspectos matemáticos e extramatemáticos envolvidos. A compreensão conceitual requer a interação entre a nova informação e a estrutura conceitual já existente, que remete à existência de conhecimentos prévios relevantes para que o aluno relacione adequadamente uma nova informação com sua estrutura cognitiva (Ausubel et alii, 1980; Coll et alii, 2000). Esse aspecto influencia a capacidade do aluno de adotar estratégias e tomar decisões, além de influenciar no sucesso da aprendizagem, pois enquanto não ocorre tal compreensão, provavelmente, a definição das variáveis e das hipóteses será pouco adequada e assim o modelo precisará ser melhorado;

Construção e manipulação de representações múltiplas: habilidades com esse aspecto podem evidenciar o relacionamento não-arbitrário e substantivo do conhecimento com a estrutura cognitiva (Ausubel et alii, 1980; Moreira, 1999). Para Gravina e Santarosa (1998), um objeto matemático pode receber diferentes representações, que expressam diferentes facetas do mesmo objeto. Assim, uma exploração que transita entre diferentes sistemas se torna significativa no processo de construção do conceito. Segundo Coll et alii, (2000) e Carreira (1993), a atribuição pessoal de significado pelo aluno permite elaborar uma compreensão e uma "tradução" própria do que se aprende;

Aplicação do conhecimento a situações novas: a aprendizagem significativa é evidenciada quando o aluno consegue reconhecer a aplicabilidade de determinado conhecimento em uma nova situação (Coll et alii, 2000; Moreira, 1999; Bassanezi, 2002; D'Ambrósio, 1986).

Retenção do conhecimento por longo tempo: quando o aprendizado é significativo, os conceitos aprendidos permanecem por mais tempo claros e diferenciados na estrutura cognitiva, em relação à aprendizagem memorística. Em caso de esquecimento, são facilmente reativados (Ausubel et alii, 1980; Moreira, 1999; Buchweitz, 2002).

3. Construindo uma proposta pedagógica

Estamos interessados em investigar se o envolvimento do aluno em atividades de modelagem matemática consideradas potencialmente significativas levam o aluno a manifestar uma predisposição positiva para relacionar, não-arbitrária, mas substantivamente, as novas informações com sua estrutura cognitiva, podendo assim levar a uma aprendizagem significativa.

A proposta de ensino desenvolvida para este estudo foi planejada antes que a aplicação fosse iniciada, contudo, sua elaboração ocorreu antes e durante a aplicação, pois as atividades de modelagem contavam com a contribuição dos alunos e não pretendíamos trabalhar com um esquema rígido, mas sim permitir ajustes durante seu desenvolvimento.

3.1 Estrutura da proposta, o material e o planejamento

Organizamos a proposta para 38 horas-aula para o estudo de equações diferenciais ordinárias, conteúdo que integra o programa da disciplina de Cálculo 2 do curso de Bacharelado em Química da Universidade Estadual de Londrina. Essa disciplina é obrigatória e é ofertada no 2º ano do curso, sendo de incumbência do Departamento de Matemática, que na ocasião estava sob a responsabilidade da segunda autora deste trabalho. As 38 aulas foram desenvolvidas com a participação da primeira autora deste trabalho em uma turma com 39 alunos.

As aulas foram organizadas com apoio de material bibliográfico a fim de dispor os conceitos de acordo com o significado lógico (Zill e Cullen, 2001; Bassanezzi, 2002), pois, para que o material usado nas atividades de ensino e aprendizagem seja potencialmente significativo, deve ser possível relacioná-lo à estrutura cognitiva do aluno de maneira não arbitrária e substantiva, incorporando o seu significado lógico de modo a permitir que o aluno o transforme em significado psicológico. Embora o significado psicológico envolva experiências idiossincráticas, uma preocupação na organização e apresentação dos conceitos envolvidos nas atividades era que se tornassem compreensíveis para todos os alunos.

Durante as aulas foram desenvolvidas, inicialmente, algumas atividades de modelagem matemática sob a orientação das professoras. Em alguns momentos foram introduzidos conceitos e, em outros, conceitos já apresentados eram reativados e aplicados. Os problemas investigados nessas atividades estavam relacionados com aspectos comuns na Química e entre eles podemos citar: estudo da degradação do herbicida Imazaquin; evolução do consumo de água na cidade de Londrina; decaimento da concentração de cloro no tratamento da água da Companhia de Saneamento do Paraná. As demais atividades de modelagem foram desenvolvidas pelos alunos, distribuídos em 8 grupos. O objetivo destes trabalhos era oportunizar ao aluno o envolvimento completo com o processo de modelagem, sendo os próprios alunos responsáveis pela definição e resolução do problema. Nessa etapa, parte das atividades era realizada pelos alunos em horário extraclasse e as equipes eram acompanhadas continuamente, sendo as observações registradas em fichas de acompanhamento. Alguns dos trabalhos desenvolvidos são: análise de matéria orgânica da água do rio Limoeiro; efeito da temperatura na solubilidade do nitrato de potássio em água; estudo da variação da turbidez no tratamento da água da Sanepar; a obesidade como fator de risco do diabete do tipo 2; o crescimento de orquídeas; caracterização de cálcio nas águas do rio Limoeiro.

Para observar os aspectos apresentados no item 2.3, foi necessário um acompanhamento criterioso das produções dos estudantes, bem como das suas atitudes durante as atividades de aprendizagem. Nesse sentido, foram adotados procedimentos de obtenção de informações que seguem tendências da pesquisa qualitativa (Lüdke e André, 1986) e consistem em: 1. registro de observações das aulas sistematizado de forma rigorosa durante o desenvolvimento de todas as aulas e atividades extraclasse; 2. fichas de levantamento: materiais com a maior parte de questões abertas respondidas pelos alunos em vários momentos; 3. mapas conceituais: estruturas desenvolvidas pelos alunos em alguns momentos e após algumas atividades; 4. resolução de problemas relativos ao conteúdo de equações diferenciais ordinárias; 5. a realização do trabalho final; 6. a realização de uma prova escrita; 7. a realização de uma entrevista semi-estruturada com os alunos no final das atividades.

A representação da Figura 2 ilustra como os conceitos foram sendo estudados, dos mais abrangentes para os mais específicos, e os momentos em que as atividades de modelagem programadas para as aulas foram inseridas. O termo AM denomina atividade de modelagem e o termo EDO/EDP denomina equação diferencial ordinária/parcial, respectivamente.

A atividade de modelagem apresentada na seqüência (AM3 na Figura 2) é um exemplo de como introduzir um novo conceito por meio da modelagem matemática, visando uma aprendizagem significativa. O tema do estudo é a variação da concentração de Cloro no tratamento da água na Sanepar – Companhia de Saneamento do Estado do Paraná.

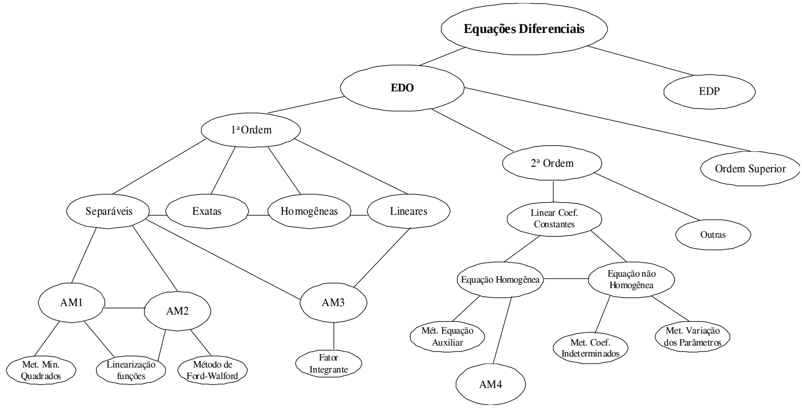

Figura 2 – Mapa Conceitual que representa a organização dos conceitos integrados a algumas atividades de modelagem.

Na ocasião, os alunos já haviam participado de outras atividades de modelagem e estavam se familiarizando com o processo. Os alunos participaram da escolha do assunto, da definição do problema, da escolha das variáveis, da definição das hipóteses e das demais discussões envolvendo outras etapas do processo de modelagem.

3.2 Uma atividade desenvolvida

O tema da atividade de modelagem que descrevemos foi decidido a partir do interesse dos alunos, em relação ao processo de tratamento da água, levantado durante a atividade de modelagem trabalhada anteriormente (AM2 na Figura 2), que estudou a evolução do consumo de água na cidade de Londrina.

A motivação para o estudo emergiu da curiosidade dos alunos em saber como a empresa responsável pelo tratamento da água controla as quantidades de produtos usados para a purificação da água.

O desenvolvimento da atividade deu-se em sala de aula, conduzido pelas autoras deste artigo com a contribuição dos alunos, que, reunidos em pequenos grupos, contribuíam com sugestões e as discutiam com os colegas e com a professora, visando estruturar o problema.

Em visita à Sanepar, foram obtidas informações sobre todo o processo de tratamento de água, assim como dados específicos de uma das estações de tratamento, quanto ao volume dos tanques, às quantidades de cada produto utilizado no tratamento (tais como cloro, flúor, etc.), às vazões de entrada e saída, e o tempo de tratamento.

O processo de purificação da água envolve várias etapas (Figura 3). A apresentação e a discussão do processo de tratamento, em cada uma delas, foi importante para que houvesse a compreensão da situação e a definição do problema a ser estudado.

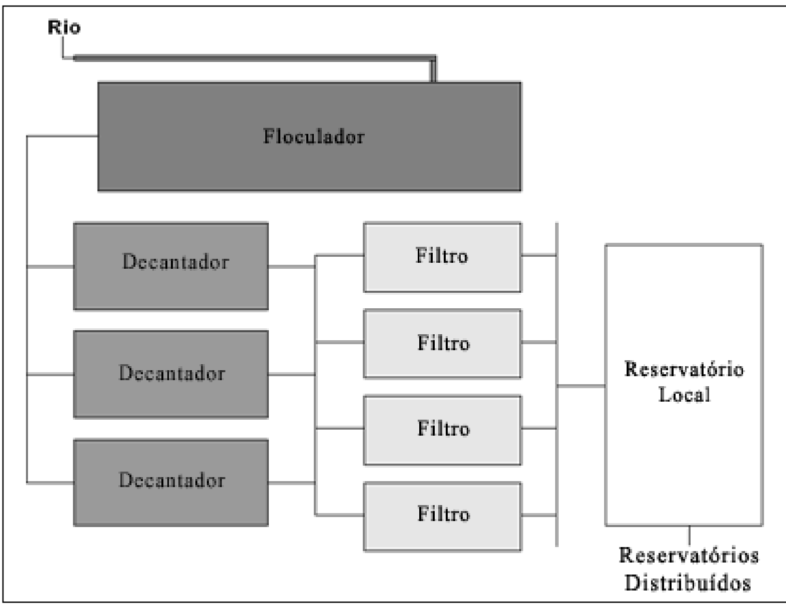

Figura 3 – Representação das etapas do processo de tratamento de água.

De posse dos dados e informações foi necessário tecer considerações que ajudariam a definir o problema a ser estudado. Os alunos foram percebendo que estudar o processo como um todo seria complexo, pois em cada uma das etapas as condições a que as variáveis estavam sujeitas sofriam alterações, de modo que, para obter um modelo mais fiel à situação real, seria necessário estudar as etapas uma a uma. Os alunos comentaram também que havia um grande número de variáveis a serem consideradas para que o modelo fosse mais realista, mas, por outro lado, as informações obtidas junto à empresa eram insuficientes. Por exemplo, sabe-se que ocorre um processo químico de reação entre o cloro e as impurezas da água, mas não há um controle que permita conhecer as taxas que as relacionam.

Algumas dificuldades foram sendo apontadas e discutidas, de modo que, em conjunto com os alunos, decidimos fazer um estudo para conhecer a concentração de cloro na água envolvendo duas etapas iniciais que acontecem no tanque floculador (Figura 3): a *pré-cloração,* que ocorre assim que a água entra na estação de tratamento e tem a finalidade de reduzir o teor de ferro/manganês, evitando a proliferação de algas que podem prejudicar o processo e provocar gosto característico; e a etapa da c*oagulação/floculação*, onde a *coagulação* consiste no processo químico que transforma as impurezas que estão em suspensão fina ou em solução em partículas maiores (flocos) para que possam ser removidas por sedimentação e filtração; e a *floculação*, que constitui um processo físico que provoca, através de uma lenta agitação do corpo líquido, o choque dos coágulos com as impurezas contidas na água, aumentando a densidade e formando flocos.

Definição das variáveis

Ao avaliar quais variáveis seriam consideradas no estudo, decidimos pelas seguintes. *t:* tempo (seg); C_E*:* concentração de cloro na entrada (0,003g/L); $C_T(t)$*:* concentração de cloro no tanque no instante t (g/L); $Q_E(t)$*:* quantidade de cloro na entrada, no instante *t*, (g); $Q(t)$*:* quantidade de cloro no tanque, no instante *t*, (g); ρ_E: vazão da mistura água/cloro na entrada (330L/s);ρs: vazão da mistura água/cloro na saída (330L/s); *V*: volume (constante) da mistura água/cloro, no tanque (115000L); α: taxa de perdas por irradiação, reações químicas etc. (0,02).

Dedução do modelo

A modelagem dessa situação exigiu algumas simplificações, já que seria bastante complexo considerar as diversas variáveis que influenciam a variação da concentração de cloro na água do tanque, como a ação da irradiação solar, entre outras. Durante as discussões que levariam às hipóteses, sugerimos que fossem consideradas duas situações:

Situação 1: consideramos que a empresa pára de tratar a água em um determinado momento, ou seja, não adiciona mais cloro à água, que continua entrando no tanque. Essa situação, em geral, não ocorre na prática, apenas em casos excepcionais.

Os alunos sugeriram que a hipótese H_1 ocorre, pois nesse caso há um decaimento na quantidade de cloro no passar do tempo e reconheceram que o mesmo não é linear; assim, definimos que:

H_1: A variação da concentração de cloro na água é proporcional à concentração existente em cada instante;

Outras hipóteses assumidas são:

H_2: as vazões de entrada e de saída são iguais e constantes;

H_3: a concentração de cloro no tanque $C(t)$, em um determinado instante t é dada pela razão entre a quantidade de cloro em unidade de massa (u.m) e o volume do tanque em litros;

H_4: por um intervalo de tempo em que $t \in (t_0, t_1)$, temos C_E, $Q_E(t)$, V, ρ_E, ρ_S e α constantes;

H_5: a água chega à estação sem cloro.

Considerando a hipótese H_2 e sabendo que $Q(t)$ é a quantidade de cloro no tanque no instante t, definimos $\frac{dQ(t)}{dt}$ (ou $Q'(t)$) como a taxa de variação dessa quantidade, e podemos escrever:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = (taxa\ de\ entrada) - (taxa\ de\ saida) \qquad \rho_S \frac{Q(t)}{V} \qquad \rho_S \frac{Q(t)}{V} \qquad \frac{Q(t)}{V} \qquad C_T(t)$$

$$\tag{1}$$

Nesta situação, $C_E = 0$, e por H_1, podemos escrever o seguinte modelo

$$\tag{2}$$

Lembramos que pela hipótese H_4, podemos escrever,

$$\tag{3}$$

Fazendo temos:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\sigma Q(t) \qquad (4)$$

onde σ é uma constante real em $t \in (t_0, t_1)$.

Assim, podemos escrever o PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ(t)}{dt} = -\sigma Q(t) \\ Q(t_0) = Q_0 \end{cases} \qquad (5)$$

onde consideramos $t_0 = 0$.

A equação diferencial autônoma pode ser resolvida por separação de variáveis, e a solução é:

$$Q(t) = ke^{-\sigma t} \qquad (6)$$

Assim,

$$Q(t) = Q_0 e^{-0,00287t} \text{ ou } Q(t) = 3,15e^{-0,00287t} \qquad (7)$$

sendo Q_0 a quantidade de cloro presente no tanque no instante $t = t_0$.

Como o modelo obtido descreve uma situação que não é rotineira na Sanepar, estendemos o estudo para uma segunda situação.

Situação 2: nesta situação assumimos uma hipótese mais realista. Para a formulação do modelo adotamos as hipóteses H_6 e H_7 ao invés de H_1, pois o processo de tratamento da água é dinâmico e se faz necessário a adição contínua de cloro.

H_6: a taxa de variação da quantidade de cloro na água, no instante t é dada pela diferença entre a concentração de cloro na entrada e a concentração na saída;

H_7: parte das perdas que provocam a diferença na quantidade de cloro da entrada até a saída da água no tanque é decorrente de perdas por irradiação, por reações químicas, etc.

A hipótese H_7 foi inserida por sugestão dos alunos, que ponderaram que apesar de não se ter um controle das taxas de perdas, elas existem e seria interessante considerá-las. Quanto ao valor, uma estimativa por "chute" foi arriscada, fundamentada em Bassanezi (2002).

Assim, escrevemos:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \textit{(taxa de entrada)} - \textit{(taxa de saída)} - \textit{(taxa de perdas)} \qquad (8)$$

Ou seja,

(9)

sabemos que, pela hipótese H_4, podemos escrever

$$C_E(t) = \frac{Q_E(t)}{V} \text{ e} \qquad (10)$$

então,

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \rho \frac{Q_E(t)}{V} - \left(\frac{\rho + \alpha}{V} \right) Q(t) \qquad (11)$$

$$\frac{dC_T}{dt} = \rho C_E - \rho C_T(t) - \alpha C_T(t)$$

$$Q(t_0) = Q_0$$

Reescrevendo a equação, fazemos,

que é constante para $t \in (t_0, t_1)$, e :

(12)

(13)

(14)

Na *Situação 1*, o modelo representado pela equação diferencial *(4)* tinha um método de resolução conhecido, porém a equação *(13)* se apresentou como um tipo novo de equação diferencial, para os alunos. Este foi um momento propício para dar a denominação da equação (Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem), e para introduzir o método de resolução para esse tipo específico de equação.

Assim, durante o desenvolvimento dessa atividade de modelagem, foi trabalhado o conceito de Fator Integrante deduzindo-o a partir da equação *(13)* e posteriormente generalizando para uma EDO Linear da forma $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$.

A solução do PVI *(14)* resulta em

$$Q(t)=\frac{\alpha}{\beta}+\left(Q_0-\frac{\alpha}{\beta}\right)e^{-\beta t} \qquad (15)$$

Os dados disponíveis e uma calibração para o valor de α nos permitiram obter o modelo *(16)*, para o qual tomamos $\alpha = 0{,}02$, ou seja, perdas de 2%.

$$Q(t)=344{,}94774+0{,}05226e^{-0{,}00287t} \qquad (16)$$

Este estudo poderia ter se encerrado com a determinação dos modelos da *situação 1* e da *situação 2*, porém, os alunos alegaram não visualizar o comportamento das funções obtidas apenas por meio das expressões matemáticas. Propomos então que eles procurassem plotar os gráficos dos modelos para discutirmos os resultados na aula seguinte. Essa etapa é característica do processo de modelagem e denomina-se *análise da validade do modelo*, que ocorre quando se volta ao problema não matemático da realidade a fim de perceber se os resultados matemáticos obtidos fazem sentido.

A representação gráfica ilustrada na Figura 4 e na Figura 5 foi apresentada por um dos alunos, a qual projetamos para que todos pudessem acompanhar. Algumas interpretações para os resultados foram feitas sem que inicialmente houvesse consenso. Surgiram comentários como: "Ah, os gráficos são iguais!" ou, "Que estranho, os gráficos são os mesmos para diferentes modelos...", quando começaram a perceber a diferença de escalas no eixo *Q.* Finalmente, a compreensão que ficou é de que na *situação 1* a quantidade de cloro misturada à água do tanque diminui com o passar do tempo, tendendo a zero em um tempo em torno de 23 minutos, já na *situação 2* ocorre que o tanque recebe água e cloro continuamente, então, nos primeiros minutos ocorre uma pequena redução na quantidade de cloro do tanque, mas ela se estabiliza em torno de 344,95 após aproximadamente 27 minutos. A dúvida levantada quanto à validade do modelo gerou mais discussões, assim, propusemos que a construção do modelo fosse revisada antes de voltar à estação de tratamento para tomar mais informações, como sugeriram alguns alunos.

A discussão iniciada nessa atividade de modelagem provocou um dos oito grupos, citados no item 3.1, a investigar a variação na turbidez da água durante o tratamento, retomando de certa forma o problema. Em termos do conteúdo, a primeira situação levou a um modelo cujo método de resolução já era conhecido, por ter sido introduzido por meio de outra atividade de modelagem desenvolvida em aulas anteriores; assim, a *situação 1* permitiu a aplicação e transferência de um conhecimento a uma situação nova. Já na *situação 2* a modelagem permitiu introduzir o método para resolver EDO Linear de Primeira Ordem, por meio do fator integrante, conceito que ainda não havia sido estudado e que contou com a participação dos alunos na dedução.

3.3 Alguns resultados

Durante o desenvolvimento das atividades nas 38 aulas, usando os instrumentos já descritos em 3.1, obtivemos informações que representam indicativos de aprendizagem significativa dos alunos. Vamos analisar essas informações em relação aos aspectos que mencionamos no item 2.3 deste texto.

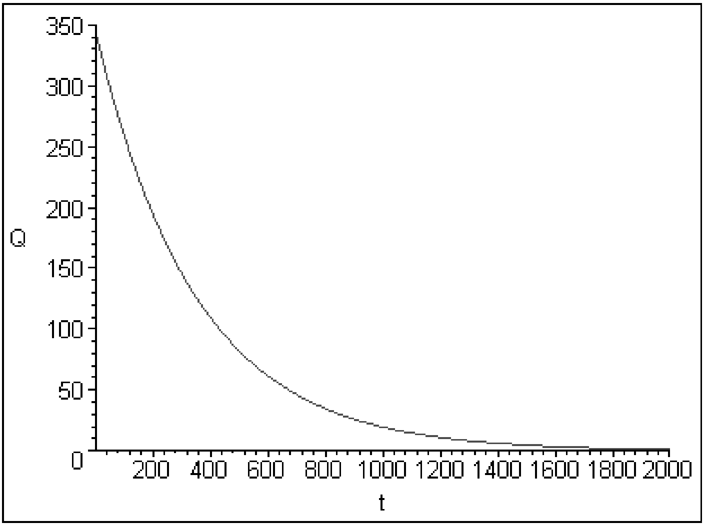

Figura 4 – Representação do modelo obtido na Situação 1.

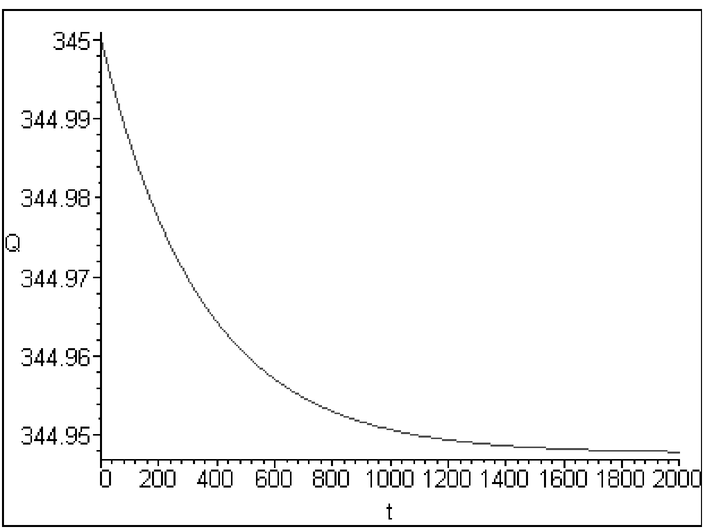

Figura 5 – Representação do modelo obtido na Situação 2.

Inicialmente, observamos que, investigados ao final do desenvolvimento da proposta sobre a importância das atividades de modelagem nas aulas de equações diferenciais, 92% dos alunos consideram adequado trabalhar com modelagem matemática e 82% deles consideram que as atividades de modelagem facilitam a compreensão do conteúdo matemático.

Os aspectos motivacionais foram fortemente influenciados pelas atividades de modelagem matemática e, havendo a motivação para o estudo, uma das condições básicas para a aprendizagem significativa está estabelecida.

- **O envolvimento nas atividades**

No decorrer das aulas foi possível observar um grande interesse e envolvimento dos alunos, principalmente em atividades que se desenvolviam em grupos, como o trabalho final de modelagem, que foi conduzido inteiramente pelos alunos, desde a escolha do tema. A atribuição de responsabilidades aos alunos incentivou-os a participar mais ativamente do desenvolvimento da atividade, tornando-os conscientes da co-responsabilidade pelo próprio aprendizado. Mesmo nas atividades iniciais de modelagem, a participação dos alunos era solicitada, de forma que contribuíam em cada etapa do processo de modelagem com as discussões e sugestões, a exemplo da atividade apresentada neste texto. Na opinião de um dos estudantes, *"O aluno usa o conhecimento das aulas na prática, e isso estimula a participação"*. O fato de que, em geral, as atividades aconteciam em grupos influenciou nesse aspecto, como percebemos na colocação de um aluno ao se referir à importância da participação de cada um do grupo: "*cada um vê de modo diferente a interpretação de um problema*" e complementou dizendo que a discussão dos diferentes pontos de vista contribui para conduzir a modelagem. Para outro aluno, *"As aplicações práticas que foram mostradas e estudadas exigiram maior dedicação, assim como despertou maior interesse dos alunos".*

- **Elaboração de estratégias próprias**

Durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem o aluno se depara com a necessidade de adotar estratégias próprias nas diferentes etapas; inicialmente, precisa decidir que problema vai estudar, como vai obter dados e informações para seu trabalho e, principalmente, durante o desenvolvimento da modelagem, quando, de posse das informações, precisa decidir como usá-las. Em muitas situações as estratégias definidas num primeiro momento conduziam ao insucesso e precisavam ser repensadas. Nessas situações, os alunos buscavam orientação das professoras, que os auxiliavam a pensar em alternativas mais adequadas. Neste sentido, um aluno argumenta, na entrevista:

> *Com o auxílio de um livro e com a orientação da professora conseguimos abordar as hipóteses e os parâmetros a serem utilizados e através de tentativas chegamos ao modelo matemático que descreve o problema que achamos interessante e desafiador.*

O enfrentamento, que inevitavelmente os alunos têm com os problemas da realidade e a aproximação dos problemas que estão fora da sala de aula com os conteúdos estudados leva-os a repensar seu papel enquanto alunos e suas responsabilidades com a própria aprendizagem. De certa forma, podemos perceber isso em um comentário de aluno:

> *A aula torna-se mais interativa, pois a participação do aluno numa certa integração entre as partes facilita e desenvolve o aprendizado. A aplicação prática do assunto dá a visão necessária para seu uso.*

Embora as estratégias de resolução já vinham sendo definidas em co-participação com os alunos durantes as atividades orientadas pelas professoras, foi no desenvolvimento do trabalho final que esse aspecto se tornou mais evidente. Nesse momento, as professoras atuavam apenas como um “mediador” que só se manifestava quando solicitado. Assim, as decisões eram sempre definidas, inicialmente pelos alunos, ou seja, as estratégias de ação eram pensadas pelos alunos.

- **Aprendizagem extraconteúdo**

Em situações de modelagem o aluno se encontra inicialmente tendo que compreender o contexto em que está inserido o problema, para então tratá-lo. Decorre daí a necessidade de aprender questões periféricas ao problema, além do próprio conhecimento matemático. A aprendizagem extraconteúdo, que envolve também aprendizagem de atitudes, valores, e construção de conhecimentos não essencialmente relacionados com a matemática envolvida no problema, também é manifestação de que a aprendizagem está sendo significativa. Durante os trabalhos desenvolvidos os alunos reconheceram que, entre outras coisas, aprenderam bastante sobre a própria Química, ao investigarem os conhecimentos envolvidos em seus problemas durante as modelagens desenvolvidas nas aulas e com a apresentação dos trabalhos dos colegas. Assim, a aprendizagem extrapolou os conteúdos matemáticos. Resolver problemas como análise de matéria orgânica da água do rio Limoeiro; efeito da temperatura na solubilidade do nitrato de potássio em água; estudo da variação da turbidez no tratamento da água da Sanepar; a obesidade como fator de risco do diabete do tipo 2; o crescimento de orquídeas; caracterização de cálcio nas águas do rio Limoeiro, fez com que os alunos construíssem outros conhecimentos além da Matemática presente no programa escolar. Para ilustrar, citamos uma discussão que surgiu durante a atividade do processo de tratamento da água consumida pela população. O fato de não haver um controle bacteriológico rigoroso durante o tratamento ou mesmo a falta de uma análise quanto à presença de metais pesados na água provocou surpresa para a maioria dos alunos, que questionaram e fizeram considerações sobre a qualidade da água consumida e as possíveis conseqüências para a saúde.

- **Compreensão conceitual**

A compreensão conceitual ocorre também a partir da interação entre os novos conhecimentos e a estrutura cognitiva existente e é o indício mais forte de aprendizagem significativa, fazendo com que técnicas e métodos não sejam apenas memorizados. Essa compreensão é fundamental para o sucesso na resolução de problemas e no estudo das equações diferenciais, para a identificação do método de resolução de determinado tipo de equação diferencial. A fala de um aluno se encaminha neste sentido: *"A interação entre a teoria e os problemas exigiu um esforço maior, é necessária a compreensão da matéria para sua aplicação, uma compreensão até mais* *aprofundada*". Para perceber se a interação entre o novo conhecimento e a estrutura cognitiva ocorre, é necessário recorrer às produções individuais dos alunos, principalmente aos seus resultados. A resolução correta de um problema, a aplicação correta de um método de resolução, a elaboração adequada de um mapa conceitual são alguns indícios de como ocorreu tal interação. Como ilustração, citamos a *situação 1*, descrita no item 3.2, na qual os alunos sugeriram as hipóteses e o modelo de equação diferencial, obtendo corretamente a solução. Isso não se deu ao acaso, nem por um processo de tentativa e erro, mas sim pelo uso de relações corretas estabelecidas na estrutura cognitiva dos alunos. Conforme afirmação de um aluno, *"Consegui compreender bem o que é e onde aplicá-las, bem como as técnicas que utilizamos para resolvê-las"* (as EDOs). Os mapas conceituais construídos pelos alunos revelam como eles relacionam os conceitos e permitem observar a organização lógica do conteúdo. Apresentamos na Figura 6 um exemplo de mapa conceitual elaborado por um aluno em uma atividade complementar. Por meio desse esquema é possível perceber que o aluno relacionou os conceitos de forma adequada, apresentando exemplos correspondentes aos tipos de equações estudadas. Porém, o estudante foi modesto ao estabelecer relações entre os conceitos, já que não incluiu termos adequados que relacionem os conceitos e nem apresentou definições.

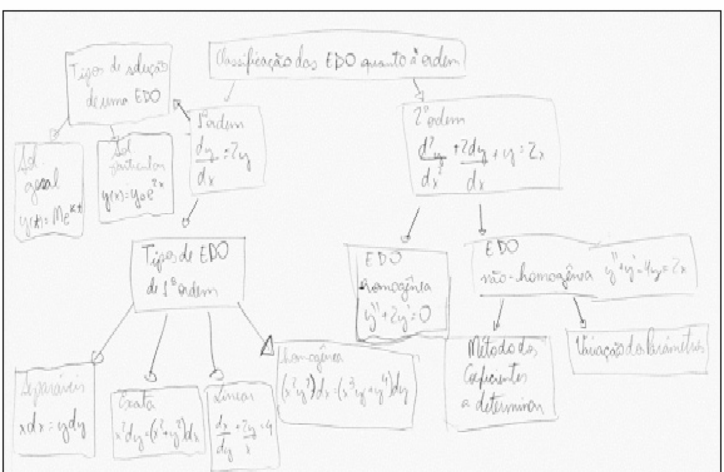

Figura 6 – **Mapa conceitual esboçado por um aluno em uma atividade de aula.**

- **Construção e manipulação de representações múltiplas**

Uma forma bastante importante de observar as diferentes representações dos alunos neste trabalho foi por meio do uso de recursos da informática. Constatamos que grande parte dos alunos atribuiu um valor expressivo à oportunidade de trabalhar em ambiente informatizado durante as aulas, ao mesmo tempo em que trabalhava com a modelagem. Os computadores oferecem um sistema diferente para exploração e representação do objeto estudado e permitem perceber diferentes facetas do mesmo, além de ser um meio dinâmico. Segundo os alunos, *"A visualização do gráfico feito no computador facilita a compreensão das EDOs"* ou ainda: *"Sabemos usar o computador para ajudar a resolver uma EDO".* Uma forma bastante interessante de observar a construção e manipulação ocorreu na resolução de equações diferenciais separáveis, onde os parâmetros deviam ser encontrados. Usar o método dos mínimos quadrados como haviam feito em aulas anteriores ou recorrer aos recursos computacionais para realizar esses cálculos foram procedimentos adotados por diferentes alunos. No entanto, ao socializar os conhecimentos nas apresentações de trabalhos feitas na classe, os alunos perceberam as relações existentes entre os diferentes procedimentos.

- **Aplicação do conhecimento a situações novas**

Uma forma de explicitar que aprendeu realmente consiste em transferir o conhecimento adquirido a situações novas. Entendemos que a a*plicação do conhecimento a situações novas* é claramente percebida por meio das atividades de modelagem, como ocorreu com os trabalhos finais dos alunos. Várias equipes apresentaram situações completamente distintas das trabalhadas em sala, porém os instrumentais matemáticos usados nas atividades das aulas estavam presentes, embora em alguns casos com novas roupagens. Na *situação 1*, anteriormente apresentada, a hipótese 1 é essencialmente a mesma utilizada no problema de degradação de herbicida estudado na primeira atividade de modelagem desenvolvida em sala; o modelo obtido na *situação 2* viria a ser sugerido pelos alunos posteriormente, para resolver um "problema de mistura". Se a capacidade de transferir o conhecimento indica que a aprendizagem ocorreu, percebemos isso também em algumas afirmações dos alunos, por exemplo:

> *Muitos dos problemas aplicados nas aulas estão relacionados com a área de Química, com isso, se nos depararmos com um problema deste tipo, saberemos resolver".*
> *"Tendo um conhecimento geral sobre Equações Diferenciais você sabe qual melhor situação pra você encaixar determinado problema.*

- **Retenção do conhecimento por longo tempo**

Para aferir que a aprendizagem realmente se deu significativamente é recomendado que se observe o aspecto de *retenção do conhecimento por longo tempo,* porém, o período em que desenvolvemos as atividades foi relativamente curto para observar esse aspecto. A prova foi uma maneira de evidenciar se conceitos e técnicas estudados no decorrer das aulas estavam ou não presentes nos alunos; outra possibilidade são os mapas conceituais, que permitem perceber se a compreensão conceitual se mantém no aluno após um período em que o estudo de determinado assunto se deu.

4. Comentários finais

As informações que obtivemos no decorrer do desenvolvimento desta pesquisa representam indícios de que a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem pode proporcionar a aprendizagem significativa dos estudantes.

As atividades de modelagem matemática desenvolvidas permitiram abordar uma grande quantidade de conceitos matemáticos e extramatemáticos e proporcionam interações favoráveis à aprendizagem. As condições básicas para proporcionar uma aprendizagem significativa, já enunciadas em 2.2, se estabeleceram durante o desenvolvimento das atividades. De fato, as situações-problema apresentadas pelos alunos constituem "um material potencialmente significativo" e desencadearam a predisposição positiva do aluno para aprender, conforme observamos em vários momentos citados em 3.3.

Os aspectos que, a partir da fundamentação teórica, selecionamos para indicar se a aprendizagem foi significativa foram observados durante o desenvolvimento das aulas.

Defendemos, então, que a aproximação dessas duas forças, aprendizagem significativa e modelagem matemática, contribui para o estabelecimento de uma educação menos impessoal, valorizando o processo de ensino e aprendizagem no sentido da Educação Matemática, onde a educação do sujeito como um todo tem as contribuições da Matemática.

O trabalho aqui apresentado foi desenvolvido com alunos de um curso superior de Química, enfocando um conteúdo específico da grade curricular do curso. De qualquer forma, a reflexão que estamos sugerindo, extraída do estudo particular, pode ser endereçada a outros cursos e a outros níveis de ensino.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. (2003). Introdução à Modelagem Matemática, Notas de aula, Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Londrina, PR, Uel.

ALMEIDA, L. M. W. e DIAS, M. R. (2004). Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, ano 17, n. 22, pp. 19-35.

ALMEIDA, L. M. W e BRITO, D. S. (2003). *Modelagem Matemática na Sala de Aula: algumas implicações para o ensino e a aprendizagem da Matemática*. In: CONFERÊNCIA IBEROAMERICANA DE EDUCAÇÃO MAEMÁTICA. *Anais eletrônicos do XI CIAEM*. Blumenau, 1 CD.

ARRUDA, S. M et alii (2004). Da aprendizagem significativa à aprendizagem aatisfatória na Educação em Ciências. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 21, n. 2, pp. 194-223.

AUSUBEL, D. P. (1988). *Educational psychology: a cognitive view.* Nova York, Holt Rinehart and Winston.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D. e HANESIAN, H. (1980). *Psicologia Educacional.* Trad. de Eva Nick. 2 ed. Rio de Janeiro, Interamericana.

BORSSOI, A. H. (2004). *A aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino.* Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina.

BORSSOI, A. H. e ALMEIDA, L. M. W. (2003). *Modelagem Matemática do processo de purificação de água: um estudo visando aprendizagem significativa em um curso de Química.* In: III CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Anais eletrônicos da III CNMEM*. Piracicaba, SP, pp. 1-10, 1 CD.

BARBOSA, J. C. (2001). *Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores.* Tese de doutorado em Educação Matemática. Rio Claro, Unesp.

BASSANEZI, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo, Contexto.

BLUM W. e NISS, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics,* v. 22. n. 1, pp. 37-68.

BUCHWEITZ, B. (2001). Aprendizagem significativa: idéias de estudantes concluintes de curso superior. *Investigação em Ensino de Ciências*, v. 6, n. 2, pp. 1-10. Porto Alegre. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol6/n2/v6_n2_a2.htm>. Acesso: março de 2003.

CARREIRA, S. (1993). Construção e exploração de modelos matemáticos em situações do mundo real envolvendo Trigonometria. *Quadrante*, v. 2, n. 1, pp. 49-62.

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M. e GASCÓN, J. (2001). *Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.* Trad. de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre, Artmed.

COLL, C. (1994). Significado e sentido na aprendizagem escolar. Reflexões em torno do conceito de aprendizagem significativa. In: COLL, C. *Aprendizagem escolar e construção do conhecimento.* Porto Alegre, Artes Médicas.

COLL, C. et alii (2000). *Psicologia do Ensino.* Trad. de Cristina Maria de Oliveira. Porto Alegre, Artes Medicas Sul.

D'AMBROSIO, U. (2002). A Matemática nas escolas. *Educação Matemática em Revista*, ano 9, n. 11, pp. 29-33.

FERRUZZI, E. C.; ALMEIDA, L. M. W. e GONÇALVES, M. B. (2002). Dedução da Lei de OHM usando modelagem e investigação matemática. XII SIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática. *Actas...* Lisboa, Associação de Professores de Matemática.

GRAVINA, M. A. e SANTAROSA, L. M. (1998). A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. In: REDE IBEROAMERICANA DE INFORMÁTICA EDUCATIVA, 4. Brasília. *Anais eletrônicos do IV Congresso RIBIE*. Brasília, pp. 1-16.

LUDKE, M. e ANDRÉ, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.* São Paulo, EDU.

MOREIRA, M. A. (1997). Aprendizagem Significativa: um conceito subjacente. ENCUENTRO INTERNACIONAL SOBRE APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO. *Actas...* Burgos, Espanha. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Burgos, pp. 19-44.

________ (1999). *Aprendizagem significativa. Fórum Permanente de professores.* Brasília, Ed. Universidade de Brasília.

MOREIRA, M. A. e BUCHWEITZ, B. (1987). *Mapas conceituais: instrumentos didáticos de avaliação e de análise de currículo.* São Paulo, Moraes.

NISS, M. (1992). O papel das aplicações e da Modelação na Matemática Escolar. Trad. de Paulo Abrantes. *Educação e Matemática*, n. 23, 3º trim.

NOVAK, J. e GOWIN, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Trad. de J. M. Campanario & E. Campanario, Barcelona, Martínez Roca.

Recebido em mar./2004; aprovado em maio/2004