A lógica elementar da matemática e o ensino superior

SILVIA DIAS ALCÂNTARA MACHADO[1]

MARIA TEREZA DE LIMA CARVALHO NOGUEIRA[2]

Resumo

Este artigo trata do ensino de regras básicas da lógica matemática no ensino superior. Diversas pesquisas, como a de Hallet (1991), levantaram as dificuldades e os obstáculos relativos ao ensino e a aprendizagem da lógica elementar matemática. Apresentamos uma atividade didática denominada “Circuito”, desenvolvida por Marc Legrand (1990), e outras, correlatas, que visam favorecer a aquisição pelos alunos das regras básicas da lógica matemática. Com base nessas atividades, discutimos a questão de como fazer para que o aluno se aproprie da lógica elementar matemática e a torne operacional. Concluímos que as atividades realizadas facilitaram uma melhora no desempenho dos alunos em relação à resolução de problemas, mas que, para que esse efeito esclarecedor seja reforçado e operacionalizado, é necessário explicitar esse assunto em todos os domínios da Matemática.
Palavras-chave: lógica elementar; ensino superior; estruturas algébricas.

Résumé

Cet article porte sur l’enseignement des règles rudimentaires de la logique mathématique. Plusieurs recherches, comme celle de Hallet (1991), ont montré les difficultés et des obstacles relatifs a l’apreentissage de la logique élémentaire matémathique. Nous presentons l’activité didactique nomée «Circuit» ou «les règles du débat mathématique» elaborée par Legrand (1990) et d’autres, correlationnés, qui ont l’objectif de favoriser l’aquisition des règles de la logique par les étudiants. L’analise de ces activités donne lieu a une discussion sur l’acquisition et la mise en foctionnement de la logique rudimentaire par l’étudiant de l’enseignement supérieur. Nous montrons que les activités ont produit une meilleure performance des étudiants en relation a la résolution de problèmes, mais pour que cet effet clarificateur soit renforcée et operationalisée il faut expliciter ce sujet dans toutes les domaines mathématiques.
***Mots-clés**: logique élémentaire; enseignement supérieur; structures algébriques.*

Abstract

The aim of this paper is to analyze the teaching of mathematical elementary logic at university level. Different research studies, such as Hallet (1991), describe the difficulties and obstacles related to the learning and teaching of elementary mathematical logic. We present a didactic activity named “electric circuit”, developed by Marc Legrand (1990) along with associated activities, which, intend to help students understand the rules of mathematical reasoning. Based on these activities, we discuss the matter of how to help students not only to appropriate but also to turn mathematical elementary logic operational. We conclude that completing the activities helped

[1] Professora da PUC-SP. E-mail: silviaam@pucsp.br

[2] Professora da FEG, UNESP. E-mail: mterezalc@uol.com.br

students to a better problem-solving performance, but, for a permanent effect on reasoning and use, it is necessary to introduce these subjects in all mathematical domains.
Key-words: *elementary logic; university; algebraic structures.*

Introdução

O ensino universitário de Matemática vem sendo examinado e sujeito a intensas críticas em vários países. Para Palis (1994), as preocupações e constatações sobre os aspectos críticos relativos a esse tipo de ensino, descritas em publicações do Brasil e de outros países, são similares. Segundo, Hallet, coordenadora de um grupo de Reforma do Cálculo nos Estados Unidos, "... uma conspiração não explicitada entre professores e alunos removeu a maior parte, senão todo o pensamento matemático de nossos cursos de Matemática.” (1991).

Sobre esse assunto Legrand observa que

> A aquisição de [...] atitude científica indispensável ao aprofundamento e utilização [...] dos conhecimentos científicos de alto nível não é espontânea, pelo contrário, é um fenômeno cultural. Atualmente poucos alunos ingressando no primeiro ciclo universitário já adquiriram os elementos fundamentais dessa atitude, e infelizmente, a proporção destes não aumenta ao final do primeiro ciclo. (1988).

Acreditamos que uma maior compreensão do que embasa o raciocínio matemático pelo aluno universitário é essencial para uma melhora qualitativa na aquisição de conhecimentos matemáticos. O tema desta pesquisa é o ensino de regras básicas da lógica matemática no ensino superior.

A explicação e a prova no ensino-aprendizagem de matemática.

Mudanças recentes no ensino de Matemática em todos os níveis visam tornar as experiências de aprendizagem mais cooperativas, mais conceituais e mais associadas (Dreyfus, 1999). Em conseqüência, enfatiza-se a importância das explicações fornecidas pelos alunos sobre seus raciocínios. A explicitação do pensamento do aluno sobre um determinado assunto permite ao professor avaliar seu entendimento, entender seu processo de raciocínio, auxiliando-o, se necessário, a passar de uma argumentação descritiva para uma argumentação justificativa.

Dados obtidos através de explicações de alunos de graduação evidenciam que a tarefa de explicar é extremamente difícil, mesmo para alunos razoavelmente hábeis e que demonstram algum entendimento do assunto considerado (ibid.). Explicações de alunos mostram que estas se baseiam em critérios que diferem dos critérios dos professores. Assim, por exemplo, os alunos geralmente fornecem relatos cronológicos de ações efetuadas, em vez de apontar conexões e implicações. As características das explicações dos alunos indicam que, para a maioria, falta clareza conceitual para usar ativamente os conceitos relevantes em um argumento matemático. De modo mais geral, esses dados revelam que os alunos tiveram pouca oportunidade de aprender quais são as características de uma justificativa matemática. Não é de se estranhar, portanto, que resultados de pesquisas sobre as concepções de prova dos alunos, realizadas no segundo e terceiro graus, mostram que a maioria não sabe o que é uma prova e nem o que se deve concluir (ibid).

Ernest (1999) enriqueceu essas considerações, mostrando que grande parte do conhecimento do universitário sobre o fazer matemático é tácita, funcionando em aplicações não podendo, porém, ser usado explicitamente em raciocínios.

A situação descrita acima é agravada pelo fato apontado por Dreyfus (1999), de que professores e autores de livros textos universitários raramente têm consciência da necessidade do estabelecimento de normas que determinem o que é considerada uma explicação e uma justificativa matemática aceitável e, com freqüência, suas ações tendem a confundir os alunos. Assim, em muitos livros textos de graduação são usados argumentos mais ou menos formais - mesmo os argumentos formais com freqüência são apenas aparentemente formais - em conjunto com justificativas visuais ou intuitivas, exemplos genéricos e induções simples. Porém, quase nunca são dadas indicações aos alunos se essas formas de argumentação são igualmente aceitáveis na fundamentação de um conhecimento matemático. Como argumentou Anton (1994), o que o autor de um livro espera do aluno quando no enunciado de um exercício escreve "mostre que" e no próximo pede para "mostrar com um exemplo que"?

Observa-se também a ocorrência da circularidade da argumentação no ensino de Matemática. Sobre essa questão, Dreyfus escreveu:

"Aprender, mesmo em matemática, geralmente procede em uma ordem bem diferente da ordem lógica. Aprendemos estabelecendo conexões e relações, pela construção de um entrelaçamento de idéias ao invés de uma seqüência linear e lógica de implicações; idéias crescem sinergeticamente ao invés de estritamente do topo de uma a outra. Então muitos dilemas sobre precedência surgem para professores e autores de livros, como por exemplo, o dilema de se introduzir limites antes ou depois de derivadas no cálculo; as tensões entre raciocínio experimental e rigoroso [...] em um texto de cálculo, são comuns precisamente porque são, ao menos parcialmente, um efeito desse dilema." (1999).

Se justificativas visuais, intuitivas, genéricas, experimentais e mesmo circulares aparecem comumente em livros textos, parece correto supor que raciocínios apresentados em sala de aula sejam ainda menos formais.

Conseqüentemente, uma vez que os alunos têm poucos meios para distinguir as diferentes formas de raciocínio e de perceber suas validades no estabelecimento do conhecimento matemático, não surpreendem as evidências que mostram que a maioria dos alunos tem, quando muito, uma noção muito vaga do que constitui uma prova em Matemática.

Sierpinska (1994) examinou a questão da relação entre explicação, prova e entendimento através da análise das diferenças epistemológicas entre explicação e prova tendo em vista seus papéis no entendimento da Matemática. Conforme expressou, "... (há) uma estreita relação entre provar e explicar. Nos dois casos, ao se provar um teorema e ao se explicar um estado de coisas respondemos a uma única e mesma questão: por quê?" (ibid.). Porém, a autora apontou que existem algumas diferenças importantes entre prova e explicação. Enquanto a prova tem por objetivo aumentar o grau de firmeza com o qual um fato é aceito como base do entendimento, a explicação não serve como base para o entendimento, para a aceitação mais positiva da afirmação derivada. Diferentemente da prova, na explicação são utilizados modelos, visualizações e outros meios similares a fim de expressar algo sobre a Matemática. O discurso explanatório é mais meta matemático que matemático podendo, por exemplo, incluir razões que justifiquem que um determinado fato seja significativo em Matemática. Nesse sentido, a explicação ultrapassa o domínio da prova. Por outro lado, pode ser necessária uma explicação que esclareça a idéia central de uma prova. Assim, prova e explicação estão ligadas no processo de entendimento.

Resumindo, como indicou Dreyfus, "... para os educadores matemáticos parece haver um continuum estendendo-se da explicação via argumento e justificação à prova, e as distinções entre as categorias não são profundas." (1999).

Em conclusão, a tarefa de explicar e justificar raciocínios exige dos alunos a difícil transição de um ponto de vista calculatório para a concepção da Matemática como um campo de estruturas intrincadamente relacionadas (ibid.). Essa transição implica em novas atitudes e propósitos diferentes. A questão central torna-se "É verdade que...?" ao invés de "Qual é o resultado?". Em conseqüência os alunos precisam adquirir formas novas e mais sofisticadas de conhecimento, entre as quais é fundamental o conhecimento de regras da lógica matemática.

Embasamos-nos principalmente em Legrand (1990) para a descrição que segue sobre as principais diferenças entre a lógica do cotidiano e a matemática.

De acordo com um princípio da economia científica, "deve-se fazer intervir na resolução de um problema todos os fatores pertinentes e não somente aqueles diretamente envolvidos". Destaca-se que, "pertinente", em termos científicos, refere-se ao que tem valor de generalidade ou, inversamente, que altera os demais fatores se é modificado.

Diferentemente, na linguagem corrente "pertinente" significa o que é muito particular a um objeto ou muito evidente, ou que o distingue dos demais. Por exemplo, em geral os alunos descrevem um retângulo como uma figura que tem quatro ângulos retos, dois lados grandes e dois lados menores. Portanto, têm a tendência a dar uma informação não pertinente matematicamente: "não é um quadrado".

Observa-se também que, segundo o princípio do máximo de informação, firmado na vida cotidiana, "aquele que age de boa fé deve dizer tudo que sabe, se omitir alguma coisa é por que está mentindo". Essa convenção é tão importante que em alguns paises, uma pessoa pode ser declarada penalmente responsável, caso retenha uma informação. Tal princípio opõe-se ao da economia científica citado, pois faz com que os argumentos do discurso não se limitem àqueles que são logicamente úteis à conclusão.

Em contraposição também a esse princípio da economia científica, salienta-se ainda que na prática cotidiana não se tem o costume de expor aqueles argumentos que são considerados evidentes. Assim, na vida corrente não são explicitadas as hipóteses de trabalho e o contexto preciso no qual se situam as ações, as explicações, as afirmações gerais. Ao contrário, em Matemática a maior parte dos implícitos é fortemente convencionada, impossibilitando que sejam feitas interpretações pessoais. O aluno que adota a atitude do cotidiano ignora os códigos implícitos e, o que é mais grave, não está consciente que seria necessário convencionar esses explícitos, pois considera que há somente uma única interpretação possível, a do "bom senso", ou seja, a dele. Exemplificando, constata-se esse procedimento quando o aluno caracteriza o retângulo afirmando que este tem um comprimento maior que a largura, em vez de precisar, em primeiro lugar, que o retângulo é um quadrilátero.

Finalmente, destaca-se que o princípio do máximo de informação induz à consideração de que toda implicação é uma equivalência. Assim, segundo esse princípio, se "$A \Rightarrow B$" não é uma equivalência, deveria ser acrescentada à informação de que B pode ser verdade em casos em que A não se verifica. Em particular, se B é sempre verdade, a implicação "$A \Rightarrow B$" é considerada absurda.

Em relação aos critérios de verdade dos enunciados gerais, os critérios provenientes da vida cotidiana ocasionam duas confusões epistemológicas, mencionadas a seguir.

Em primeiro lugar, observa-se que no silogismo matemático "$A \Rightarrow B$", se A é verdadeiro então B somente pode ser verdadeiro, é um raciocínio que os alunos aceitam formalmente. Porém, se em uma dedução o resultado obtido B é inverossímil, ainda assim é aceito, sem que a própria demonstração seja contestada. Esse comportamento relaciona-se, em parte, com a crença do aluno de que "a realidade matemática não é muito real".

Em segundo lugar, verifica-se que no cotidiano os critérios de verdade dos enunciados gerais são, principalmente do tipo estatístico utilitário. Assim, um fato é verdadeiro se ocorre em um grande número de casos particulares, ou nos casos particulares mais freqüentemente encontrados ou, ainda, nos casos considerados cruciais. A prova de um enunciado se baseia, portanto, em uma explicação que tende a tornar a tese acreditável, em vez de logicamente ligada às hipóteses, as quais são apenas parcialmente explicitadas, como foi mencionado. Dessa forma, uma das regras fundamentais da Matemática: um contra-exemplo é suficiente para determinar que uma propriedade é falsa, na vida cotidiana é transformada em uma regra paradoxalmente oposta que afirma que um fato que ocorre na maior parte dos casos, mesmo que não ocorra em todos os casos, é considerado verdadeiro.

Na vida corrente, o número e a gravidade dos contra-exemplos, caso considerados relevantes, não permitem a extrapolação de uma declaração geral a partir de exemplos particulares. Inversamente, o número e, sobretudo o interesse subjetivo de casos nos quais a regra se aplica induzem a considerar, a partir de um critério sempre subjetivo, que é válido transformar essa regularidade aparente em caso geral.

O estabelecimento de uma propriedade na prática cotidiana não tem, portanto, um valor absoluto, pois é suficiente que a regra não apresente muitas exceções. Estas são percebidas como "exceções que confirmam a regra".

Em conclusão, as considerações apresentadas indicam que há uma diferença irredutível entre a escolha epistemológica da comunidade científica e a da vida cotidiana e que essa escolha não é percebida pelo aluno espontaneamente, como o demonstra a análise das características das explicações e provas dos alunos, e do próprio ensino de Matemática.

A aquisição das regras da lógica elementar da matemática.

Neste item são focalizados projetos de ensino elaborados por Marc Legrand, que visam a superação, ao menos em parte, da confusão epistemológica dos alunos, possibilitando assim a elaboração de formas de conhecimento que geralmente não são adquiridas no ensino usual.

Debate Científico.

O conhecimento científico tem como finalidade a apreensão do mundo de uma forma muito particular, aquela da comunidade científica (Legrand, 1996). Para dar sentido às realidades materiais e intelectuais, os cientistas tentam identificar os invariantes, explicar as regularidades e mostrar o caráter necessário de certos fatos. Para a maior parte dos alunos, tal forma de pensar não é adquirida "naturalmente". Mais ainda, contrariamente à atitude científica, observa-se que, em geral, nos cursos de Matemática os alunos retêm apenas o discurso do professor e reproduzem por imitação suas técnicas e maneiras de demonstração. Assim, os alunos são privados do que é essencial na atividade científica: o questionamento, a entrada no desconhecido. Os conhecimentos escolares, em vez de servirem como ferramentas para a compreensão do mundo, são considerados como verdades em si, dogmas com finalidade interna à instituição escolar – saberes a serem memorizados para aprovação nos exames.

O "debate científico em cursos de Matemática", conforme concebido por Legrand (ibid.), tem como pressuposto que é necessário participar pessoalmente do jogo científico para se interessar pelos raciocínios essenciais da ciência, compreender o alcance real de seus resultados e, em conseqüência, saber explorar com pertinência esses resultados na resolução de problemas.

A prática do "debate científico" entre os alunos, sobre suas concepções a respeito de um determinado conhecimento matemático no qual eles próprios têm a responsabilidade da conclusão, faz com que a maioria dos alunos adquira um maior entendimento do raciocínio e dos conhecimentos matemáticos, tornando-os aptos a tratar de problemas científicos.

O "debate científico" se desenvolve através da formulação e resolução de conjecturas, parte essencial do trabalho do matemático. Esse processo implica em utilizar e discutir as definições e os modos de provas, ampliando, assim, os conhecimentos do aluno sobre os objetos matemáticos e suas propriedades.

As regras ou os princípios do "debate científico", conforme estabelecidas por Legrand (1990), parecem permitir aos alunos praticar realmente, em sala de aula, atividades científicas – questionamentos e formulações de raciocínios – que, guardadas as devidas proporções, são da mesma natureza das atividades desenvolvidas por especialistas nas comunidades de pesquisa.

O objetivo do "debate científico" não é a formação de futuros pesquisadores em Matemática. De fato, o que se pretende é, através da introdução de conceitos e resultados fundamentais, a aquisição pelos alunos de uma cultura matemática de base, ou seja, de uma cultura científica importante tanto para os futuros pesquisadores em Matemática, quanto para aqueles que não prosseguirão seus estudos nessa disciplina. A denominação "debate científico em curso de Matemática" se deve ao fato de que essa atividade respeita a essência de toda atividade científica: ser produtora de saberes. Nessa acepção, o trabalho do aluno durante o "debate" consiste em colocar a si próprio questões fundamentais tais como: de que falamos? O que é verdade? O que é pertinente?

Deve-se esclarecer que a elaboração de saberes novos durante o "debate" não significa que se espere que os alunos "descubram", em um curto prazo, conhecimentos que demoraram séculos para emergir. As descobertas e as criações pessoais que o debate tenta suscitar são essencialmente descobertas e criações de significados. O estabelecimento desse debate visa, fundamentalmente, que o aluno participe de uma problemática *ad hoc* que consiste em compreender as dificuldades e os problemas constitutivos do conhecimento abordado. A partir de uma situação adequada escolhida pelo professor, é possível ao aluno, através de seus questionamentos e conjecturas, compreender e dar sentido a um novo saber a ser instituído pelo professor.

Conforme apontou Legrand (1996), uma vez que os alunos, através do debate partem, das mesmas premissas que os matemáticos profissionais, e em face de um problema exploram entre seus colegas suas heurísticas próprias em uma racionalidade matemática, têm condições de chegar ao final de um encaminhamento errático, à conclusões próximas daquelas dos especialistas. Com a continuidade da prática do debate, as provas dos alunos, mesmo contendo imperícias, tendem a conter, cada vez mais freqüentemente, os elementos essenciais de uma demonstração matemática.

A seguir apresentamos a atividade denominada "Circuito", elaborada por Legrand (1990), destinada ao ensino de regras básicas da lógica matemática, a qual é desenvolvida através do debate cientifico.

A atividade "Circuito".

Conforme foi exposto, as dificuldades e incompreensões dos alunos, constatadas em pesquisas desenvolvidas em educação matemática e experiências em sala de aula, indicam que a habilidade para explicar e provar depende de formas de conhecimento que, em geral, eles não tiveram oportunidade de adquirir. Inclui-se aí o conhecimento de regras da lógica matemática, fundamental à compreensão do raciocínio matemático.

Em relação ao ensino de regras da lógica matemática, observa-se que os excessos de formalização dos anos 70, pedagogicamente desastrosos, evidenciaram a impossibilidade do ensinamento formal do formalismo matemático resolver as graves incompreensões dos alunos em Matemática.

De fato, se a aprendizagem formal das tabelas verdade e dos rudimentos da teoria dos conjuntos não se mostrou problemática, por outro lado não se constatou nenhuma eficácia semântica. Assim, após esse ensinamento, não se observava um acréscimo significativo nas competências dos alunos ao se depararem com os formalismos da ciência. Por exemplo, em relação às "verdadeiras implicações matemáticas" - verdadeiras referindo-se àquelas que aparecem constantemente nos raciocínios, sem se apresentarem formalmente sob o aspecto $A \Rightarrow B$ - , e face aos verdadeiros quantificadores tais como os que estão implicitamente presentes nos enunciados da geometria - "Em um triângulo isósceles..." ao invés de "Em todos os triângulos...", e outros - ou, ainda, explicitamente presentes em análise e que permitem dar um sentido preciso à continuidade e aos limites.

Em outros termos, o ensino de Matemática Moderna mostrou que a lógica tornou-se um objeto de ensino em si, que formulava suas definições, suas notações, seus exercícios e seus problemas. Esse ensinamento, no entanto, servia somente a si próprio, pois o aluno não reconhecia o objeto que havia formalmente estudado ou não sabia mais como fazê-lo funcionar, quando este se tornava ferramenta para fazer a Matemática.

Essa situação, considerada por pesquisadores em educação matemática, uma verdadeira perversão didática, ocasionou uma forte reação epistemológica que ocasionou o abandono desse ensino durante anos considerado uma panacéia. A ideologia dominante tornou-se então “sejamos pragmáticos e façamos de modo concreto”. Porém, como apontou Legrand (1990), no quadro atual do ensino de Matemática às dificuldades relativas à aprendizagem mencionadas anteriormente persistem, uma vez que a fundamentação da lógica em vigor em Matemática é negligenciada.

Apresentamos a seguir alguns aspectos do tratamento didático das confusões epistemológicas através da atividade “Circuito”.

Observa-se que é relativamente fácil descobrir situações clássicas onde os alunos manifestam claramente essas confusões de cunho epistemológico. Porém, como apontou Legrand (ibid.), é muito difícil provocar, no curso de ações puramente matemáticas, a tomada de consciência dessas confusões, capaz de propiciar uma mudança significativa de atitude. De fato, observa-se que se a situação é muito complexa, o aluno em dificuldade pode se equivocar sobre o sentido da explicação do professor, acreditando que está sendo discutido um problema de aritmética, de análise ou de geometria, enquanto que se trata primeiramente de um problema de convenções lógicas. Por outro lado, se a situação é suficientemente simples e despojada possibilitando que a explicação da confusão lógica seja identificável, muitos alunos desinteressam-se por considerarem a discussão uma trivialidade, enquanto outros com dificuldade de entendimento retraem-se e, assim, não se torna possível o aprofundamento do problema.

Segundo Legrand (ibid), o próprio conteúdo da atividade Circuito e a forma de conduzi-la permitem superar o obstáculo didático acima citado, uma vez que a situação leva os alunos a revelarem suas próprias epistemologias. As diferenças epistemológicas geram conflitos irredutíveis, sem que nenhum dos pontos de vista seja considerado uma verdade absoluta ou, ao contrário, totalmente rejeitável, pois os participantes chegam a conclusões opostas mas defensáveis, sobre fatos aparentemente elementares. Assim, as oposições são suficientemente simples e determinadas de forma que ninguém pode ignorar opiniões contrárias. Portanto, cada aluno tem que argumentar considerando os diferentes posicionamentos e deve, para convencer os demais, basear-se em sua epistemologia pessoal. Dessa forma descobre, pouco a pouco, os critérios implícitos nos quais ele se baseia para afirmar que uma determinada posição é verdadeira ou falsa, ou então reconhece que não tem verdadeiros critérios para assumir tal decisão.

Em resumo, o ensino das regras da lógica Matemática através da atividade Circuito tem como objetivo estabelecer concretamente a diferença entre os critérios de verdade pessoais, adquiridos culturalmente, e aqueles convencionados pelas comunidades científicas, em particular a de Matemática.

A seguir é feita a descrição da atividade "Circuito", apresentando-se resultados observados em sua utilização em cursos de Matemática do ensino superior.

O desenvolvimento do Domínio de regras básicas da lógica matemática utilizando a atividade "circuito" como recurso didático.

Neste item é apresentado relato da pesquisa por nós desenvolvida, com o uso do "Circuito" e outras atividades correlacionadas em cursos de Matemática do ensino superior.

Desde 1990, temos utilizado a atividade "Circuito" em cursos de graduação da PUC/SP. Relatamos, a seguir, algumas de nossas experiências no ensino de regras elementares da lógica matemática com uso do "Circuito" e outras atividades afins, que ilustram aspectos que julgamos importantes destacar.

A Álgebra Linear, por sua natureza, é um campo fértil em teoremas, lemas. Durante esse curso o aluno é confrontado freqüentemente com a necessidade de justificar suas afirmações. Assim, utilizamos a atividade "Circuito" em uma das primeiras aulas do curso de Álgebra Linear na licenciatura e bacharelado em Matemática.

A atividade, conforme o número de alunos, se estende por uma hora mais ou menos, após o que, os alunos trabalham com exercícios de verificação da veracidade ou não de afirmações sobre assuntos já conhecidos.

Na discussão estabelecida com a classe durante a correção desses exercícios, enfatizamos as regras do debate matemático nos reportando à atividade "Circuito".

Verificamos que alguns alunos assumem as regras e passam a utilizá-las, no resto do curso enquanto outros demoram mais para utilizá-las. Em geral, todos os alunos no final do curso acabam adotando uma atitude cientifica, e algumas vezes, mesmo quando não conseguem um contra exemplo para negar alguma afirmação falsa, declaram que não conseguiram construí-lo, tornando claro que estão cientes da regra elementar da lógica matemática: para negar basta apresentar um contra-exemplo.

Em 2001, como professora de Álgebra Superior para o quarto ano, tivemos oportunidade de ministrar aulas a alunos que haviam cursado a disciplina Álgebra Linear dois anos antes, e que na época haviam participado da atividade do circuito.

O curso de Álgebra Superior foi desenvolvido através de atividades, constantes de problemas e questões que os alunos resolviam em duplas, consultando diferentes livros textos. Dentre as questões havia, em geral, ao menos uma questão sobre a veracidade ou não de algumas afirmações.

Após cada atividade, fazíamos a análise da produção dos alunos , e na aula seguinte estabelecíamos o debate entre os alunos sobre as questões mais controversas. Nesses debates os alunos eram induzidos a explicitar as regras da lógica em que estavam se baseando.

A seguir apresentamos uma questão dessas atividades.

Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique.

b) Todo anel é um grupo aditivo abeliano.

c) D={a+b $\sqrt{2}$/ a, b $\in$Z } é subanel de Q.

d) E={a+b $\sqrt{2}$/a,b $\in$Z} é subanel de R.

e) Z_3 é um corpo comutativo.

f) Z_6 é um corpo comutativo.

g) A equação 3x = 2 tem solução em Z_3.

h) Um divisor de zero num anel comutativo com unidade não tem um inverso multiplicativo.

i) $F:C \rightarrow M_2(R)$, $F(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, é um homomorfismo sobrejetor.

Quatro das oito afirmações c, f, g, i são falsas e os alunos deveriam dar um contra-exemplo ou mostrar que eram falsas pois negavam um teorema demonstrado. Dos oito alunos que fizeram essa atividade apenas um, em um dos itens, não justificou sua resposta, vejamos:

Alunos	Itens			
	c	f	g	i
1	FCE	FCE	FCE	FCE
2	FCE	FCE	FD	FCE
3	FCE	FD	FCE	FCE
4	FCE	FD	FCE	FCE
5	FCE	FCE	VD	F
6	VD	FD	FCE	FCE
7	FCE	FD	FCE	FCE
8	FCE	FCE	FCE	FCE

Tabela 1. Tipo de resposta para cada afirmativa falsa.

legenda		**nº de respostas**
FCE	Falsa, justificada através de um contra-exemplo pertinente.	24
FD	Falsa, justificada por meio da negação a um teorema ou definição.	05
F	Falsa, sem justificação.	01
VD	Verdadeira, justificada por meio de demonstração (com erro).	02

Conforme se verifica na Tabela 1 acima, dentre as trinta e duas respostas somente uma não foi justificada. Nas outras, embora alguns alunos tenham oferecido justificativas expressas de maneira confusa, respeitaram as regras da lógica elementar. Mesmo os que afirmaram ser a afirmação verdadeira, embora fosse falsa, apresentaram ensaios de demonstração. É importante notar que os alunos que afirmaram ser falsa a afirmação porque contrariava um resultado teórico tiveram mais dificuldade em expressar-se do que aqueles que apresentaram um contra-exemplo.

Quatro das oito afirmações b, d, e, h são verdadeiras, e para justificar os alunos deveriam demonstrar deduzindo dos resultados conhecidos. A seguir apresentamos as respostas dos alunos.

Alunos	Itens			
	b	d	e	h
1	VD	VD	VD	FCE
2	VD	VD	VD	VD/FCE
3	VD	V	VD	F

4	VD	VD	VD	NR
5	VD	VD	VD	VE
6	VD	VD	VD	F
7	VD	VD	VD	VE
8	VD	VD	VD	VE

Tabela 2. Tipo de resposta para cada afirmativa verdadeira.

Legenda		**nº de respostas**
VD	Verdadeira, justificada por meio de demonstração correta.	23
VE	Verdadeira com tentativa de justificação por meio de exemplo.	03
V	Verdadeira sem justificativa	01
FCE	Falsa, justificada através de um contra-exemplo não pertinente	01
F	Falsa sem justificativa	02
NR	Não respondeu	01
VD/FCE	Tentou demonstrar e não conseguindo tentou um contra-exemplo	01

Verifica-se que do total de trinta e duas respostas em apenas três foi afirmado que a proposição considerada (h) era falsa. Em uma dessas três, houve a tentativa de fornecer um contra-exemplo.

Observa-se também que ocorreram três tentativas de se provar que uma das proposições (h) era verdadeira através de um exemplo. Houve ainda um caso em que o aluno tentou demonstrar uma afirmativa (h) e, não conseguindo, tentou dar um contra-exemplo. Esse aluno agiu, portanto, de acordo com o raciocínio científico matemático.

Como indicado na Tabela 2, todos os alunos tentaram demonstrar que as afirmações b, d, e e eram verdadeiras através de demonstrações. A única afirmação que apresentou alguma dificuldade na demonstração foi a h. Pelos resultados obtidos nessa afirmação, acima citados, pode-se supor que quando a questão é mais difícil, os alunos recaem no raciocínio cotidiano, tentando dar um exemplo, por outro lado, é possível que ao testar a proposição em um exemplo conhecido, os alunos procurassem fazer simplesmente uma verificação de sua veracidade.

Em resumo, os resultados mostraram que de uma forma geral os alunos conheciam a lógica elementar matemática no que diz respeito à demonstração. No entanto, ainda restou um resquício da utilização da lógica do cotidiano, como no caso de demonstrar que é verdadeiro através de exemplo. É importante notar que os alunos tiveram um melhor desempenho nas questões falsas que nas verdadeiras.

Esse fato nos fez concluir que embora a atividade do circuito tenha favorecido a compreensão da lógica elementar da matemática para muitos, seu papel é o de encaminhar a solução do problema em consideração. Para que os alunos assimilem de fato as regras da lógica e saibam utilizá-las, julgamos necessário que os professores, em todos os cursos de Matemática, estejam atentos às justificativas de seus alunos, incentivando-os a construírem contrapostas de teoremas, a construírem contra-exemplos, enfim, a desenvolverem atividades que exijam dos alunos demonstrações que tornarão explicitas a lógica empregada.

Considerações finais

O ensino da Matemática sofreu a partir da década de 70 um movimento pendular, saindo dos excessos de formalização dos anos 70 ao mais recente pragmatismo "concretista", qual seja, aprender através de problemas. Na realidade a palavra de ordem "resolver problemas" foi interpretada pela maior parte dos livros didáticos, como apresentar problemas com suas resoluções, seguidos de problemas análogos a serem resolvidos pelo aluno. Isso levou a que os alunos pensassem que só seriam capazes de resolver um "exercício", se já lhes tivesse sido apresentado um análogo, para "se inspirarem na resolução". Pensamos que essa é a principal causa de certo imobilismo de grande parte dos alunos que adentram a Universidade.

Acreditamos que ambos os extremos foram e são pedagogicamente desastrosos pois evidenciaram a impossibilidade desses tipos de ensino em desenvolver no aluno uma compreensão do que é fazer matemática.

Procuramos, então, um "caminho do meio", que contemplasse a verdadeira "resolução de problemas" e introduzisse o aluno na forma peculiar do pensar matemático. Esse "pensar matemático" supõe o conhecimento da lógica elementar, subjacente a todo fazer matemático.

Considerando os graves problemas existentes no ensino da lógica matemática passamos, a partir de 1990, a desenvolver esse ensino utilizando como recurso didático a atividade "Circuito" e outras correlatas, em cursos de Matemática de graduação.

Conforme constatamos o "Circuito" é uma atividade meta matemática que induz o aluno a identificar as diferenças e as semelhanças entre as regras do jogo em vigor em

Matemática e aquelas utilizadas espontaneamente nos raciocínios cotidianos. Em conseqüência propicia o desbloqueamento de profundos mal entendidos que geralmente não são superados no ensino usual, especialmente em relação aos significados do falso em verdadeiro em Matemática e no cotidiano. Assim, tende a provocar uma evolução do aluno para uma atitude mais científica.

Nossas experiências mostraram que a atividade “Circuito” é um ponto de partida eficaz no ensino das regras da lógica matemática. Porém, a fim de possibilitar efetivamente a superação de dificuldades dos alunos com a forma de trabalhar a lógica matemática, em complementação ao uso do “Circuito” devem ser desenvolvidas, em todos os domínios da Matemática, atividades destinadas a marcar as diferenças entre os rudimentos da lógica matemática e da lógica do cotidiano. A discussão sobre o sentido de enunciados matemáticos envolvendo implicação e equivalência, exercícios sobre a verificação da veracidade de afirmações, a construção de contrapostas, o significado dos conectivos (e, ou), são exemplos de atividades que reforçam o entendimento e a operacionalização das regras da lógica elementar matemática, confrontando-as com as práticas do cotidiano.

Finalizando, enfatizamos a importância de que em todas as atividades os alunos possam expressar suas concepções sobre o assunto em questão, discutir com os demais seus pontos de vista e que tenham, eles próprios, a responsabilidade da conclusão. Esses debates propiciam um maior entendimento dos conhecimentos e raciocínios matemáticos envolvidos, o alcance dos resultados estabelecidos e, conseqüentemente, a exploração com pertinência desses resultados para resolver mais cientificamente outros problemas.

Referências

ANTON, H., (1994): *Elementary Linear Algebra.* Nova York, Wiley.

DREYFUS, T. e EISENGERG, T., (1996). On different facets of mathematical thinking**.** In: *The Nature of Mathematical Thinking*. Nova Jersey, Lawrence Erlbaum.

DREYFUS, T. e HADAS,W. (1996). Proofs as answers to the question why. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* v.28, n.1,pp.1-5.

DREYFUS, T., (1999). Why Johnny can't prove. In: *Educacional Studies in Mathematics,* v.38. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

ERNEST, P., (1999). Forms of knowledge in mathematics and mathematics education: philosophical and rethorical perspectives. *Educacional Studies in Mathematics* .v38, pp.67-83.

HALLET, D. H., (1991).Where is the Mathematics? Another look at Calculus Reform.*Proceedings of the Conference on Technology in Collegiate Mathematics.* USA: Addison-Wesley.

LEGRAND, M., (1988). Reflexions sur L'Enseignement à la Université. *Actes du Colloque "Renovation des Premier Cycles Universitaires: le Role des Mathématique".* Rennes, França.

_____ (1990). Circuit ou les Règles du Débat Mathématique**.** In: *Enseiner Autrement le Mathématiques*. Lille: IREM.

_____ (1996).Debat Scientifique en Cours de Mathématiques**.**In:*Enseignement des Mathématiques:desrepèresentresavoirs,programeset pratiques.*Grenoble: IREM.

PALIS, G. L. R., (1994). *Proposta de um Curso de Introdução ao Cálculo. Fundamentos Didático-Pedagógicos. A Utilização de Tecnologia Computacional como Ferramenta Didática.* Relatório Interno de Pesquisa, PUC-RJ.

SIERPINSKA, A..(1994). *Understanding in Mathematics.* London: Falmer Press.

Recebido em jun. /2005; aprovado em jun. /2005