O papel dos registros de representação na compreensão do sistema de numeração decimal

CÉLIA FINCK BRANDT*
MÉRICLES THADEU MORETTI**

Resumo
Neste trabalho, buscaremos destacar e evidenciar certos aspectos relevantes presentes na representação semiótica do Sistema de Numeração Decimal – SND. Nessa direção, proporemo-nos a apontar a importância da representação semiótica para a compreensão da estrutura do SND por crianças, em ambiente escolar, e os aspectos a serem contemplados no processo de ensino, numa dimensão didático-metodológica do ato educativo. As reflexões estarão voltadas também para o papel do professor nesse processo, no sentido de compor um referencial teórico que lhe sirva de apoio para avaliar as compreensões das crianças e, dessa forma, através da reflexão e da reorganização da prática educativa, contribuir para os avanços nessas compreensões. Alguns dados empíricos estarão no centro dessas reflexões, objetivando identificar o papel da representação semiótica na criação e na produção de um sistema de representação de quantidades que visa estabelecer a medida de um conjunto.
Palavras-chave: sistema de numeração decimal; registros de representação semióticos; congruência semântica; invariante operatório.

Abstract
This work aims to highlight and show some relevant aspects of the semiotic representation of the Decimal Numeration System (DNS). To achieve this, we consider the importance of semiotic representation for children's understanding of the DNS structure, in the school context, along with the teaching aspects related to the didactic-methodological dimension of an educational act. Our reflections also focus on the role of teachers in this process: we recommend that they have theoretical references to support the assessment of children's understanding. In this way, through the reflection upon and reorganization of the educational practice, we intend to impact upon children's evolving understandings. Empirical data will be at the center of these reflections, with the aim of identifying the role of semiotic representation in the creation and production of a system of representation of quantities whose purpose is the establishment of the measure of a set.
Key-words: *decimal numeration system; semiotic representation; semantic congruence; operational invariant.*

---

* Doutoranda do PPGECT/UFSC e professora.

** Professor da UFSC e doutor em Didática da Matemática pela Université Louis Pasteur.

Introdução

Um objeto matemático não tem existência física e é construído pelo sujeito, por abstração reflexiva, a partir de suas coordenações das ações ao interagir com o mundo real. Ao construir tal objeto matemático, o sujeito o representa mentalmente e com a utilização de registros de representação semióticos.

> Na matemática a especificidade das representações consiste em que elas são relativas a um sistema particular de signos, à linguagem, à escrita algébrica ou aos gráficos cartesianos e elas podem ser convertidas em representações equivalentes em um outro sistema semiótico, podendo tomar significações diferentes pelo sujeito que as utiliza. (Duval, 1995, p. 17)[1]

As diversas representações semióticas de um objeto matemático são, pois, absolutamente necessárias, já que os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis na percepção e para que se possam efetuar tratamentos sobre os mesmos. Isso nos leva a apontar que existem três patamares distintos: o objeto matemático, a representação mental desse objeto e a utilização de registros de representação semióticos desse objeto. Por essa razão, a importância da distinção entre um objeto matemático e a representação que se faz no funcionamento cognitivo. Podemos citar como exemplos os números, as funções, as retas, com suas representações, as escritas algébricas (decimais ou fracionárias), os símbolos, os gráficos, os traços de figuras. Essa distinção só poderá acontecer se diversos registros forem mobilizados e, ao mesmo tempo, se o objeto matemático for reconhecido em cada um deles. Outro exemplo é o caso do número. Se quisermos quantificar uma coleção de três canetas e de três flores, utilizamos, para ambas, o numeral três. O número três e o numeral três são, respectivamente, o objeto matemático e a representação desse objeto matemático. Antes, porém, existe a abstração do número e a representação mental deste pelo sujeito. Para comunicar e para operar com tal objeto de conhecimento (utilizá-lo para quantificar grandezas contínuas e discretas), é preciso a utilização de um registro semiótico. Sabe-se da árdua caminhada pela humanidade para inventar sistemas de numeração

1 Todos as referências de Duval no texto foram traduções nossas dos originais em francês.

apropriados para a representação de quantidades. Diversos procedimentos foram adotados, tais como: talhes em pedras, correspondência biunívoca com pedras para contagem e registro da contagem, partes de corpo em correspondência também biunívoca com quantidades, agrupamentos das quantidades e registros desses agrupamentos com utilização de signos e desenhos correspondentes aos objetos representados. A invenção do SND, por nós largamente utilizado hoje, não foi fácil e constitui sem dúvida uma das maiores sínteses realizadas pelo homem para a representação de quantidades, o que evidencia a importância dos registros de representação para operar e comunicar os objetos matemáticos.

No entanto, é necessário que, no ambiente de ensino e aprendizagem, estejamos atentos para essa diferenciação, investigando de que forma está havendo compreensão dos objetos matemáticos ou das possíveis representações desses objetos das quais se pode lançar mão para aplicar na resolução de problemas.

A questão mais difícil a ser enfrentada é verificar se os sujeitos, em fase de aprendizagem, confundem os objetos matemáticos com suas representações, visto que eles só podem lidar com as representações semióticas para realizar uma atividade sobre os objetos matemáticos.

Há que se levar em conta também as diferenças entre as representações mentais e as representações semióticas, visto que as primeiras recobrem mais o conjunto de imagens e de conceitualizações, enquanto que as segundas são produções que dependem de signos de natureza arbitrária. As representações mentais dizem respeito a todo conjunto de imagens e de concepções que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação, mas que não se prestam a tratamentos, mas sim à mobilização de um registro semiótico e à prática mental desse registro. As representações semióticas, por sua vez, dessas produções, constituídas pelo emprego de signos (por exemplo, enunciado em língua natural, fórmula algébrica, gráfico, figura), parecem ser apenas um meio que um indivíduo dispõe para exteriorizar as suas representações mentais, para as tornar visíveis ou acessíveis a outros. Estas apresentam um grau de liberdade necessário a todo tratamento de informação, mas podem ser indiferentes ao objeto. Elas são apreendidas somente sob o aspecto do representante ou sob aquele que representa. Porém, segundo Duval (1993), elas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias para todo o desenvolvimento da própria matemática, pois a possibilidade de efetuar tratamentos depende de um sistema semiótico e essa função não pode ser preenchida pelas representações mentais.

Outra questão importante, destacada por Duval (ibid.), diz respeito à independência das funções de objetivação e de expressão que cobrem todas as representações conscientes, tanto as mentais como as semióticas (utilizadas para exprimir as representações mentais). As representações mentais novas se acompanham de uma produção de representações semióticas que podem parecer insuficientes, inaceitáveis ou incompreensíveis do ponto de vista da função de expressão. O inverso, isto é, a produção de representações semióticas pode ser satisfeita do ponto de vista de expressão e não corresponder a nenhuma objetivação, levando o sujeito a reproduzi-las mais por imitação do que por objetivação. Essa questão aponta para o desacordo que pode ocorrer e também é difícil de ser enfrentado no processo de ensino e aprendizagem.

Noésis – Semióse

O que foi apontado até agora leva-nos a identificar que estaremos sempre lidando, ora com a produção de representações semióticas, ora com a produção de representações mentais. Ambas estão ligadas ao mesmo objeto matemático e se apresentam de formas distintas na conceitualização desse objeto. Duas questões se apresentam: a apreensão das representações semióticas (e a identificação do objeto matemático em cada um dos registros de representação semióticos utilizados) e a apreensão do próprio objeto matemático. Temos ainda que considerar a diferenciação entre o objeto matemático e a representação desse objeto. Estamos, então, perante dois processos: a semióse e a noésis, interligadas na dimensão cognitiva do ato educativo. Para Duval (ibid.) a "semióse" corresponde à apreensão ou à produção de uma representação, e a "noésis", à apreensão conceitual do objeto. Por essa razão será necessário examinar, também, na organização das atividades do ensino, as diferentes atividades cognitivas constitutivas da "semióse" e a característica fundamental da ligação noésis/semióse.

Comecemos com as questões relativas à semióse. Qualquer sistema semiótico se presta para ser um registro de representação? Tomemos por exemplo a língua materna e a escrita algébrica para os números. Ao nos referirmos ao quinze podemos também utilizar a escrita 15 com utilização de algarismos. Os tratamentos que podemos efetuar nos dois registros de representação apresentam as mesmas especificidades? É imediata a conversão de um registro ao outro? O objeto matemático é reconhecido igualmente nos dois registros de representação? Se esse objeto for a estrutura do sistema de numeração, qual dos dois registros torna mais evidente essa estrutura? E no caso de um gráfico e de sua expressão em língua algébrica? Esses questionamentos nos levam a refletir se qualquer sistema semiótico pode ser um registro de representação.

Segundo Duval (ibid.), ele deve permitir a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. Em se tratando da formação, podemos lançar mão de muitos recursos: língua materna, desenhos, figuras ou fórmulas (com signos próprios de uma ciência). Porém, esta formação não acontece independentemente do conteúdo a representar e deve respeitar regras.

Em relação ao tratamento, devemos considerar a transformação da representação e as especificidades de cada tipo de registro de representação que estarão compreendidas nessas transformações: paráfrase, inferência, cálculo, reconfiguração, anamorfose e também as regras específicas: regras de derivação, de coerência temática, associativas de contigüidade e de similitude.

Na transformação por conversão, que estará compreendendo a transformação de uma dada representação em outra, de modo a conservar a totalidade ou parte da representação inicial, devemos considerar: a ilustração, a tradução e a descrição.

Duval (ibid.), alerta que, das três atividades cognitivas ligadas a semióse, somente as duas primeiras (a de formação e a de tratamento) são levadas em conta no ensino.

O autor nos alerta também que, com muita freqüência, tanto no ensino como nos livros didáticos, observa-se a passagem de um sistema de representação a outro ou a mobilização simultânea de muitos registros de representação, como se isso fosse evidente para a maior parte dos alunos. O que o autor aponta é que os alunos não reconhecem o mesmo objeto através de diferentes sistemas semióticos de representação: escrita algébrica de uma relação e sua representação gráfica, escrita numérica de uma relação e sua representação geométrica sobre uma reta, um plano, etc.

O privilégio a uma das três atividades cognitivas prejudica a conceitualização do objeto matemático. Se privilegiarmos somente o tratamento estaremos atribuindo importância para a forma, como se ela fosse responsável pela descrição de uma informação.

A conversão das representações de um sistema semiótico a outro é fundamental, visto que esta compreende uma operação cognitiva que pode ser descrita como uma mudança de forma. "Traçar a curva correspondente a uma equação do segundo grau ou passar de um enunciado de uma relação à escrita literal dessa relação será equivalente a encontrar a forma pela qual um conhecimento é representado" (Duval, 1995, p. 17). Muitos trabalhos em psicologia ou didática têm destacado a importância das representações semióticas em relação à forma, evidenciando um ou outro dos seguintes aspectos: a importância da forma por resposta ao conteúdo representado; a importância da diversidade das formas de representação para um mesmo conteúdo representado ou o interesse por uma mudança das formas de representação por razões de economia de tratamento.

A operação de conversão, por sua vez, não é nem trivial, nem cognitivamente neutra. A operação de conversão coloca tanto a questão do papel da semiósis no funcionamento do pensamento quanto o das condições de uma diferenciação entre representante e representado. A complexidade da conversão de representações só pode ser compreendida desde que se veja os sistemas semióticos em sua estreita relação com as representações ou mais exatamente ao par (conhecimento, representação).

Os sistemas semióticos devem permitir considerar três atividades inerentes a toda representação: constituir um traço ou um conjunto de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de qualquer coisa num sistema determinado; transformar as representações por suas regras próprias ao sistema de maneira a obter outras representações; converter as representações produzidas dentro de um sistema de representação para um outro sistema, de tal maneira que este último permita explicitar outras significações relativas ao que está sendo representado.

Segundo Duval (ibid.), geralmente, as atividades de tratamento e de conversão das representações não são distinguidas. No entanto, segundo ainda o autor, é essencial separá-las, pois o tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, mobilizando apenas um só registro de representação, enquanto que a conversão é, ao contrário, uma transformação que faz passar de um registro a outro, requerendo a coordenação pelo sujeito que a efetua.

Tendo analisado os aspectos relevantes da semióse, cabe agora analisar a característica fundamental da ligação semióse/noésis na qual encontra-se a característica do pensamento humano: comunicar, lançando mão de muitos registros de representação: linguagem, imagem gráfica, entre outros.

Além dessa característica, existem, segundo Duval (1993), outras vantagens que podem ser destacadas em relação à diversidade de tipos de representação: a economia de tratamento, a complementaridade de registros e a conceitualização que implica a coordenação dos registros de representação.

Para o autor, a economia de tratamento leva à superação dos limites de uma representação e à rapidez na representação das relações entre objetos. Como exemplo, podem-se citar proposições ou teoremas descritos em língua materna e descritos através de representações figurais ou linguagem algébrica. Essa economia pode ser economia de custo de memória ou de ordem heurística como, por exemplo, o recurso a uma figura para resolver um problema de geometria. A complementaridade de registros está ligada às possibilidades próprias de cada registro e dos elementos informativos ou comunicacionais que a representação torna possível: as figuras só podem representar estados, configurações ou produtos de operações e não ações ou transformações, enquanto que a língua natural ou algébrica permite representar as operações. Além disso, as figuras permitem representar a totalidade de relações entre os elementos que constituem um objeto ou uma situação.

Podemos citar como exemplo os procedimentos utilizados por um aluno na resolução do problema: *A soma de dois números é 10 e a diferença entre eles é 2. Quais são os números?*

O aluno não consegue resolver o problema com a utilização de uma linguagem algébrica e resolve dar a solução do problema utilizando a língua natural: *Se os números fossem iguais, cada um seria 5, mas como existe uma diferença de 2, somo 1 ao primeiro, portanto 6, e diminuo 1 do segundo, portanto 4. Os números são 4 e 6.*

A língua natural constitui, para esse aluno, o registro de representação que ele possuía com mais significação para argumentar sobre a solução encontrada. O mesmo sujeito não sabia efetuar tratamentos, com significação, utilizando a linguagem algébrica que permitiria resolver o problema a partir da resolução do sistema de equações: $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Esse exemplo permite ilustrar as questões evidenciadas acima. A utilização de um determinado registro de representação exigirá heurísticas de pensamento distintas que compreendem e colocam em jogo relações e propriedades matemáticas que já são do conhecimento do sujeito. Ou então ele pode proceder por imitação aos modelos propostos pelo professor.

Em relação à conceitualização, segundo Duval (ibid.), duas hipóteses podem ser admitidas: uma única representação possibilita a conceitualização de um objeto ou a coordenação de dois ou mais registros de representação é que torna possível a conceitualização. A primeira hipótese é justificada pela crença na seguinte estrutura da representação ilustrada na Figura 1:

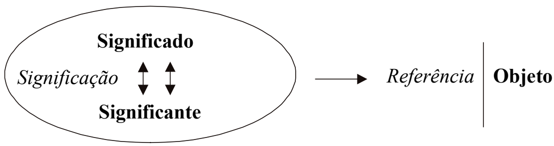


Figura 1 – Estrutura triádica da significância dos signos.
Nesse esquema, os elementos constitutivos da significância dos signos estão em negrito e as relações entre esses elementos estão em itálico.
Fonte: Duval (1993, p. 50).

Segundo Saussure[2] apud Duval (ibid.), essa estrutura é própria dos signos lingüísticos (ou mesmo as figuras) na qual a relação com o objeto depende de uma relação de significação determinada pelo sistema da língua ou (pelas leis da percepção visual).

Uma outra estrutura da representação, ilustrada na Figura 2, presta-se, segundo Duval (ibid.), a outros tipos de signos empregados para certas noções matemáticas, tais como: notação de função, vetores, operadores. Tais signos não possuem significação própria e são constituídos por uma relação instituída a um objeto.

2 Ferdinand de Saussure. *Cours de linguistique générale*. Paris, Payot, 1973.

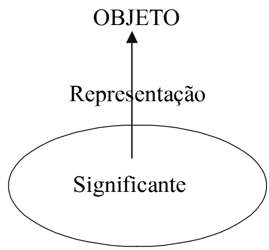


Figura 2 – Estrutura diádica da significância dos signos.
Fonte: Duval (1993, p. 50).

Duval (ibid.) alerta-nos que essas estruturas não são suficientes para que, através do emprego de signos ou de representações, a significação possa funcionar cognitivamente nos sujeitos. As significações são consideradas como trans-registros, não colocando, portanto, o problema da conversão. Para o autor, isso só é válido para os sujeitos que têm um bom domínio da matemática e não o é para sujeitos em fase de aprendizagem..

Uma segunda hipótese baseia-se na crença de que a compreensão conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação. Essa hipótese, segundo Duval (ibid.), é explicada por uma estrutura diferente, ilustrada na Figura 3, através da qual o funcionamento da representação semiótica é compreendido:

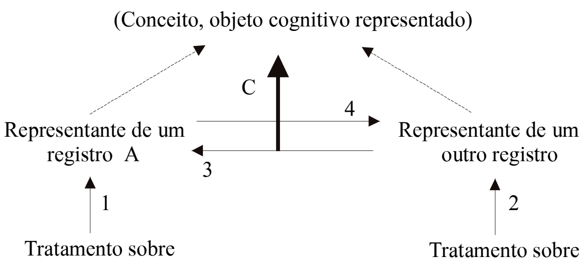


Figura 3 – Estrutura da representação em função de conceitualização.
Fonte: Duval (1993, p. 51).

Segundo Duval (ibid.), as flechas 1 e 2 estarão compreendendo as transformações internas, e as flechas 3 e 4, as transformações externas. Transformações internas são aquelas necessárias e específicas de cada tipo de registro e as externas estarão compreendendo as conversões de um registro a outro. A conceitualização estará compreendendo a coordenação entre os dois tipos de registro. A distinção entre o representante e o representado se estabelece.

Essa coordenação não é natural e tem que ser provocada para impedir um enclausuramento de um único registro de representação que tende a limitar a compreensão.

Outras questões fundamentais devem ser evidenciadas quando estamos levando em consideração o papel das representações semióticas no funcionamento cognitivo e, como conseqüência, na aprendizagem da matemática.

A primeira delas diz respeito ao fenômeno de congruência ou de não-congruência entre as representações de um mesmo objeto que se originam de sistemas semióticos diferentes. Isso porque é esse fenômeno que pode explicar os sucessos ou os insucessos dos alunos ante questões que implicam uma mudança de sistema semiótico de representação. Além disso, essa passagem se faz espontaneamente quando eles são congruentes. Segundo Duval (ibid.), para que dois sistemas semióticos de representação sejam congruentes, três condições devem ser satisfeitas:

a) correspondência semântica entre unidades significantes que as constituem;
b) mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações;
c) conversão de uma unidade significante da representação de partida a uma só unidade significante na representação de chegada.

Uma análise dos problemas aditiva de Vergnaud (1985) foi tomada como exemplo por Duval (1995) para ilustrar a congruência e a não-congruência entre dois sistemas semióticos de representação; um na língua materna e a sua conversão para um que utiliza a escrita da equação aritmética.

Problema 1: Ganho 3 bombons e ganho 6. Fico com 9 bombons.
(ganha) 3 + (ganha) 6 = (ganha) 9

Nesse caso, para o autor, há correspondência semântica (ganhar $\leftrightarrow$ +), a mesma ordem de apreensão das unidades nas duas representações (ganha 3, ganha 6, ganha 9 $\leftrightarrow$ 3, 6, 9) e conversão de uma unidade significante na representação de partida em uma só unidade significante na representação de chegada (ganha 3 ↔ +3, ganha 6 ↔ +6, ganha 9 ↔ + 9).

> Já não é o caso do problema:: Ganha 3 bombons e perde 6 bombons. Perde 3.
> (ganha) 3 + (perde 6) = (perde) 3

Nesse caso, para Duval (ibid.), os verbos portadores de informação semântica são antônimos (ganhar/perder) e, portanto, não há mais identidade semântica terminal, o que vai significar que as duas representações semióticas não serão congruentes, pois uma das condições não foi verificada. Esse segundo problema é mais difícil para os alunos quando se tratar de conversão.

> Ou o caso do problema "Ganhou algumas, ganhou 3, no total ficou com 8. A ordem tem que ser invertida: (ganhou) 8 ? (ganhou) 3 = ...

Se esse problema for resolvido, segundo Duval (ibid.), por um procedimento da diferença, a ordem tem que ser invertida e não há nenhuma informação semântica no enunciado em língua natural que indique a subtração exigida para o mesmo. Porém, se o problema for resolvido pelo procedimento do complemento, a ordem também tem que ser invertida, pois a comutatividade é uma exigência: (ganhou) 3 + (ganhou) ... = (ganhou) 8.

Nos dois últimos exemplos não existe congruência entre os dois sistemas semióticos de representação e, segundo resultados de pesquisas, as taxas de sucesso ou insucesso dependem do maior ou menor grau de não-congruência.

Em relação ao fenômeno da congruência ou não-congruência Duval (ibid.) levanta que dois sistemas semióticos podem ser congruentes num sentido e não o ser no sentido inverso. É o caso, por exemplo, da representação em linguagem algébrica e em linguagem gráfica. Elas são congruentes ao se passar da linguagem algébrica para a linguagem gráfica e não o são no sentido inverso.

Duval (ibid.), ressalta sobre a necessidade de um trabalho de aprendizagem específico centrado na diversidade de sistemas de representação, sobre a sua utilização e sobre as traduções mútuas de um no outro.

Segundo o autor, outra questão importante diz respeito à análise do desenvolvimento dos conhecimentos e aos obstáculos encontrados nas aprendizagens fundamentais relativas ao raciocínio. Três fenômenos podem ser observados:

- a diversidade de registros de representação semiótica. A língua natural e as linguagens simbólicas não formam um único e um mesmo registro da mesma forma que os esquemas, as figuras geométricas, os gráficos cartesianos, os quadros. Eles são sistemas de representação muito distintos entre si e, como conseqüência, possuem questões específicas de aprendizagem;
- a diferenciação entre representante e representado ou entre forma e conteúdo de uma representação semiótica;
- a coordenação entre os diferentes registros de representação semióticas disponíveis.

Para Duval (ibid., p. 22),

> Para os sujeitos, uma representação pode apenas funcionar como representação, isto é, dar-lhes acesso ao objeto representado, quando duas condições forem preenchidas: que eles disponham ao menos de dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação de um objeto, de uma situação ou de um processo e que eles possam converter "espontaneamente" de um sistema semiótico a outro.

As representações semióticas na compreensão do SND

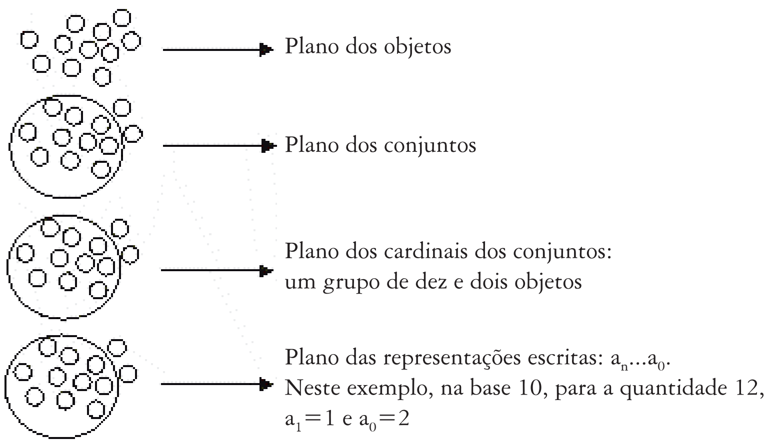
Procederemos, a seguir, à análise dos aspectos evidenciados em relação à formação das representações semióticas eficazes para a representação de quantidades utilizando um sistema de numeração com uma determinada estrutura na relação entre a apreensão conceitual dessa estrutura e as representações semióticas estabelecidas culturalmente e cuja natureza é arbitrária.

Como apontado anteriormente, a distinção entre um objeto matemático e a representação que se faz dele é essencial para a conceitualização. Para o caso específico da medida de um conjunto, é necessária, em primeiro lugar, a contagem que tem a sua lógica: contar todos, contar apenas uma vez, contar recitando os números numa ordem convencionalmente estabelecida. Também é necessário a cardinalidade, que significa estabelecer, por abstração reflexiva, a síntese de duas relações: ordem e inclusão hierárquica. A medida de um conjunto pode ser obtida por comparação a outro conjunto. Nesse caso, a medida que se obtém exige a correspondência biunívoca e diz respeito ao resultado da comparação: tem a mais, tem a menos ou tem igual. No caso de determinarmos a quantidade, é necessário fazer a contagem.

Piaget e Szeminska (1975) argumentam que o sujeito só construirá o número após conceber a composição aditiva. Esta, por sua vez, vai exigir do sujeito a conservação do todo e as relações de inclusão entre o todo e as partes. É necessário antes, porém, admitir que o todo se mantém invariante apesar das modificações pelas quais possa passar. Porém, a composição aditiva pode ser concebida no campo das classes em que intervêm aspectos qualitativos e a quantificação intensiva (ter a mais, ter a menos, ter alguns, ter nenhum, ter nada), mas, para a construção do número, é necessária a composição aditiva no campo infralógico. Essa quantificação é a das classes em extensão, quando o sujeito é capaz de inclusões invariantes ou de seriações, quando ele é capaz de coordenar relações assimétricas. Nesta, os elementos de um conjunto não diferem em qualidade, intervém a quantificação extensiva e é necessária uma unidade de medida. A enumeração falada não é suficiente para comprovar que a composição aditiva está compreendida pelo sujeito. A síntese da coligação e da enumeração é uma necessidade para o nível operatório, que define o número propriamente dito. No nível das enumerações elementares, nenhuma operação permite que o sujeito chegue a uma coligação das unidades numa totalidade real e estável. A enumeração e a totalização devem tornar-se conscientes para o sujeito e reunir-se sem permanecer sucessivas. A coligação do todo com a seriação dos elementos é que permitirá a construção do número, de forma progressiva e se completa quando se reúne às operações de composição aditiva e multiplicativa. Porém, segundo Piaget e Szeminska (ibid.), "essa reunião permanece indiferenciada, e pode constituir tanto uma classe quanto um número, segundo o espírito se oriente para a classificação conceptual ou a adição de unidades seriáveis" (p. 274). É a síntese da enumeração tornada seriação e da totalização tornada composição figurada, que tornada durável, portanto operatória, independentes da figura percebida, que constitui a síntese da classe e da relação assimétrica ou a coordenação progressiva da coligação e da enumeração.

As questões acima apontadas são importantes, pois o plano dos cardinais só poderá ser abordado pelos sujeitos que apresentam essa síntese ou coordenação. Nem sempre uma totalidade numérica de cardinal 8 é o resultado de uma composição aditiva, podendo constituir um todo intuitivo ou conjuntos globais composto de partes com a soma das partes não possuindo significação. A composição aditiva é, portanto, fundamental e tem que estar estabelecida pelo sujeito para que o mesmo possa operar no plano dos agrupamentos. A totalidade tem que ser concebida como soma das partes adicionais. Essa totalidade pode passar por transformações em suas configurações e tem que ser percebida como invariante pelo sujeito.

Vergnaud (1985) alerta que existem quatro planos e diferentes operações em jogo na aquisição da adição de números inteiros: o plano dos objetos, o plano dos conjuntos de objetos, o plano dos cardinais dos conjuntos e o plano das representações escritas. Podemos observar que esses planos estão presentes também na obtenção da medida de um conjunto, antes mesmos de somar dois conjuntos. A figura a seguir permite visualizar tais planos:



Podemos observar o papel das representações semióticas em cada um dos planos e sobre as operações em cada um dos planos. No plano dos objetos e no plano dos agrupamentos o reagrupamento e o cardinal desses agrupamentos, no plano do cardinal do conjunto, a contagem que exige a utilização de signos específicos, isto é, numerais recitados numa seqüência fixa e preestabelecida, de natureza arbitrária, que exigem transmissão social. No plano das representações escritas o reconhecimento de uma estrutura presente num sistema de numeração utilizado.

É esse o sentido que se pode atribuir ao que argumenta Verganud (ibid.) ao falar da importância do intercâmbio entre diversos materiais. Uma totalidade pode ser então agrupada em grupos de dois, três, quatro... dez, e tem que ser percebida como se mantendo invariável. Estaremos atuando no plano dos agrupamentos e ao estabelecer o cardinal desses agrupamentos estaremos atuando no plano das representações escritas. Nesse plano intervém a estrutura de um sistema de numeração. Da mesma forma, a evolução pela qual passou o nosso sistema de numeração decimal posicional pode ser alvo das práticas educativas de modo a contemplar o plano do agrupamento, dos cardinais dos agrupamentos e o plano das representações escritas. Essa situação didática estará compreendendo o que está na base da construção do número, pois investiga a sua capacidade de efetuar as sínteses entre a coligação e a enumeração.

O sistema de numeração inventado pelos egípcios apresenta-se oportuno para uma proposta a ser contemplada na prática educativa. Tal sistema possui um símbolo para cada grupo de dez. Assim:

| representa uma unidade, | | representa duas unidades e assim até nove. Para 10 unidades usa-se o símbolo ∧ e teremos ∧ para 10 unidades, ∧| | para doze unidades, ∧ ∧ para 20 unidades e assim sucessivamente até noventa unidades. Para dez grupos de 10, portanto cem unidades, um novo símbolo c e teremos para ☾ ∧ ∧ para 120 unidades, ☾ ☾ para 200 unidades e assim sucessivamente até dez grupos de cem unidades.

O sistema possui essa estrutura e não compreende a posição. Isso significa que a quantidade 105 pode ser representada por ☾ | | | | | ou | | ☾ | | |.

No que diz respeito à síntese necessária para a construção do número, independentemente do plano da cardinação, essa atividade se revela de extrema importância e significação enquanto conceitualização do objeto matemático em questão, o sistema de numeração. No plano dos cardinais dos agrupamentos, ela também é importante, pois estará compreendendo a síntese da enumeração e da coligação. No plano das representações escritas, estará contemplando o tratamento de um registro de representação, que nesse primeiro momento já compreende um aspecto do nosso sistema de numeração, ou seja, a base dez.

A coordenação de um outro registro de representação exigirá os mesmos planos acima citados e a assimilação pelo sujeito de uma nova regra específica do novo sistema. No caso do sistema de numeração decimal posicional os mesmos agrupamentos serão exigidos e na cardinação dos respectivos agrupamentos intervém a mesma síntese exigida no outro sistema. O tratamento no novo sistema exigirá agora o conhecimento que cada grupo de dez formado pode ser representado por um dos dez símbolos estabelecidos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Porém, o que vai definir se esse grupo é um grupo de dez unidades, um grupo de cem unidades (portanto dez grupos de dez), um grupo de mil unidades (dez grupos de cem unidades) é a posição do símbolo na representação. O tratamento nesse sistema exigirá o conhecimento da nova regra e mais importante será a conversão de uma representação à outra para a conceitualização desse objeto matemático. Assim, teremos que 105 no novo sistema exigirá a colocação do 1 na terceira casa à esquerda, um zero representando a ausência na segunda casa e o símbolo 5 colocado à direita do zero. O tratamento nesse sistema evidenciará que a troca de posição significará uma outra quantidade representada. Assim 501, 051, 510, 015 serão representações de outras quantidades o que não acontece no sistema egípcio pois 𓍢 | | | | | ou | | | 𓍢 | | ou | | | | | 𓍢, ainda representam a mesma quantidade. Mas será importante a conversão de um sistema em outro para que a significação seja atribuída ao significante e ao mesmo tempo que o representado não seja confundido com o objeto matemático.

O tratamento nas duas representações permitirá evidenciar a mudança de forma. Vejamos uma operação de adição: 117 + 88 = 205

No sistema egípcio teremos:

𓍢 ∧ | | | | | | | + ∧ ∧ ∧ ∧ ∧ ∧ ∧ ∧ | | | | | | | |
= 𓍢 ∧ ∧ ∧ ∧ ∧ ∧ ∧ ∧ ∧ | | | | | | | | | | | | | | |
= 𓍢 𓍢 | | | | |

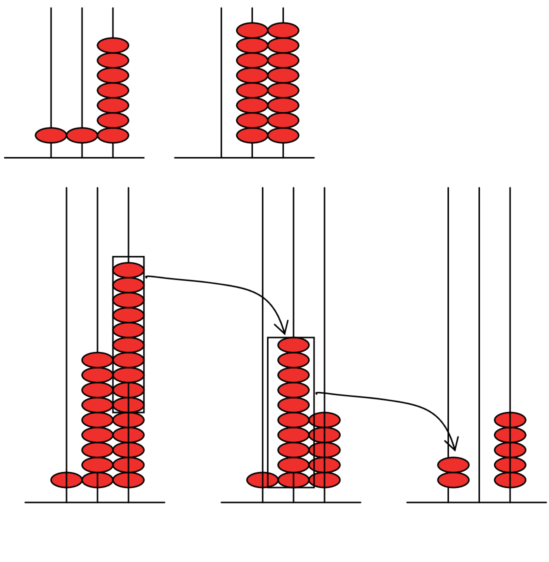
O tratamento nesse sistema já permite evidenciar a base presente em sua estrutura. No SND, o tratamento será:

$$
\begin{array}{ccc}
C & D & U \\
1 & 1 & 7 \\
+ & 8 & 8 \\
\hline
 & 1 & 5 \\
 & 9 & 0 \\
1 & 0 & 0
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{ccc}
C & D & U \\
1 & 1 & 7 \\
+ & 8 & 8 \\
\hline
 & 0 & 5 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
\hline
2 & 1 & 5
\end{array}
$$

O tratamento nesse sistema vai exigir a compreensão das invariáveis presentes em sua estrutura: o valor posicional e a base 10.

É necessário não esquecer, porém, a necessidade de conversão de uma representação à outra e a coordenação dessa conversão a ser efetuada pelo próprio sujeito.

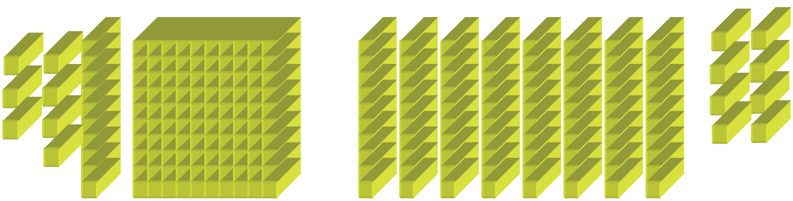
Com a utilização do ábaco, a estrutura do SND também é evidenciada e, portanto, corresponde a mais um intercâmbio proposto por Vergnaud (1985), e à conversão proposta por Duval (1995). Nesse caso a adição de 117 com 88 ficaria:



Nesse caso, a figura do ábaco estaria contemplando o produto das operações A figura do ábaco estaria contemplando o produto das operações efetuadas sobre os grupos de objetos e o tratamento no algoritmo estaria contemplando as ações, operações e transformações efetuadas no sistema de numeração. O ábaco e o SND são duas representações congruentes, pois existe a mesma correspondência semântica, a mesma ordem e a mesma unidade semântica significante na representação de partida e na representação de chegada. Cada grupo de dez no algoritmo ou na representação na linguagem algébrica é representado por um símbolo de 0 a 9, numa determinada posição.

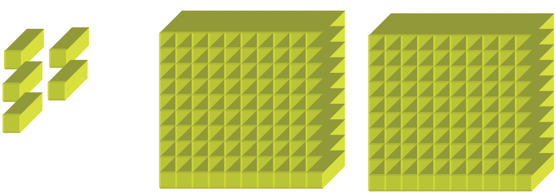
No ábaco, cada grupo de 10 é representado por uma argola em uma determinada posição. Se forem dois grupos daquela natureza, então, o numeral 2 ou duas argolas.

Analisemos o caso do trabalho com o SND utilizando o material montessoriano. Para a soma de 117 com 88 vejamos o tratamento que se efetua. Para a representação do 117, utilizamos uma placa de 100, uma barra de 10 e sete cubinhos soltos e para a representação do 88 utilizamos oito barras de 10 e 8 cubos soltos.



117 88

Após a soma e as substituições oriundas dos agrupamentos ficaríamos com:



Pode-se observar que o tratamento nessa representação não exige o valor posicional, pois os cubos e as placas resultantes da adição podem estar situados em qualquer lugar. Essa representação não é congruente, nem à representação no ábaco e nem à representação algébrica. Porém, ela é congruente ao sistema de numeração egípcio e evidencia a base do sistema de numeração. Em relação aos planos de Vergnaud (ibid.) essa representação e o tratamento sobre ela, que constituem as transformações internas sobre o registro, bem como as transformações externas em se tratando de conversão de um registro a outro, estará voltada para o plano dos agrupamentos e dos cardinais dos agrupamentos. Temos 2 grupos de 100 (ou duas placas) e cinco unidades (ou cinco cubos). Se essa quantidade for representada com utilização do sistema egípcio, teremos 2 grupos de 100 (ou dois signos 𓍢 𓍢) e 5 unidades (ou 5 signos específicos para representar as unidades, | | | | |). No plano das representações escritas, teremos 𓍢 𓍢 | | | | | ou placa placa cubo cubo cubo cubo cubo.

As representações semióticas começam a exercer o seu papel, visto que a enumeração dos elementos do conjunto exige um conjunto de signos com significado próprio, isto é, que carregam consigo a cardinalidade e a ordinalidade. Isso significa que o numeral dois é o cardinal de um conjunto de dois objetos e é diferente de “segundo”, que significa o segundo objeto do conjunto contado ou o último elemento de um conjunto de dois objetos. Aqui é que se manifesta o primeiro paradoxo com o qual temos que lidar: o sujeito pode não ter construído o número e já estar recitando, com utilização de um conhecimento social, ao invés de um conhecimento lógico matemático que será estabelecido por abstração reflexiva, os numerais. Devemos estar atentos para o enfrentamento desse paradoxo, visto que esse tipo de conhecimento pode se consolidar e passar desapercebido, podendo inclusive tornar-se um obstáculo, segundo Bachelard (1996), em que a experiência primeira carrega consigo a força do pré-julgamento e da crença, difícil de ser superada.

A representação da medida de um conjunto, por sua vez, exigirá um sistema de numeração, com uma estrutura. Esse sistema surgiu e evolui através dos tempos e hoje utilizamos o sistema de numeração decimal posicional, de origem indo-arábica. Tal sistema possui em uma estrutura: composição aditiva e valor relativo das unidades. A composição aditiva significa compreender que a quantidade 22 equivale a $2\times10+2$ e que, cada um dos 2 da representação possui um valor diferente, dependente da posição em que se encontra: o 2 à esquerda vale 20 e o 2 à direita vale 2 mesmo. Os valores são somados: 20 + 2.

Devemos analisar a estrutura de tal sistema em relação as três atividades cognitivas fundamentais da semióse. Em relação à formação de uma representação identificável, podemos admitir que o sistema de numeração de origem indo-arábica apresenta notórias vantagens em relação aos demais sistemas que foram inventados pela humanidade. Ele carrega uma notável capacidade de síntese e, com apenas dez dígitos, permite a representação de quantidades muito grandes. As representações na língua materna e com a utilização de signos podem apresentar dificuldades em fase de aprendizagem.

Por outro lado, um sistema de numeração representativo de quantidades pode valer-se da linguagem oral, matemática ou valer-se da utilização de materiais didáticos tais como ábacos, material montessoriano, quadro valor lugar, entre outros. Em se tratando de sistemas semióticos de representação, cada um desses registros possui especificidades próprias e interferem de forma distinta no funcionamento cognitivo.

Aqui nos defrontamos com o lugar atribuído à semióse nos sistemas semióticos de representação, pois devemos estar atentos às formas de apreensão e às formas de produção das representações utilizadas e ao papel dos diversos tipos de registros semióticos no funcionamento cognitivo.

Resultados de pesquisas apontam que os rótulos verbais se diferenciam de uma língua para outra e podem ou não facilitar a identificação da estrutura presente em tal sistema. Por essa razão é importante analisar essa atividade cognitiva da semióse. Podemos citar como exemplo a numeração de onze a quinze na língua portuguesa, inglesa, francesa e compará-la com a enumeração na língua chinesa na qual *ni* vale um, *ju* vale dez, *juni* vale onze. Pesquisas apontam um progresso maior em crianças japonesas em comparação com as crianças inglesas e francesas na compreensão da estrutura do sistema de numeração. Isso evidencia a importância de uma representação identificável com a utilização da língua materna como atividade cognitiva fundamental.

Em relação ao tratamento e à conversão, outras duas atividades fundamentais da semióse, podemos considerar os planos e as diferentes operações entre os planos, em jogo, apontados por Vergnaud (ibid.), para a aquisição da adição, passando em primeiro lugar pela medida dos conjuntos envolvidos nesta adição. Por essa razão Vergnaud aponta que nada é mais fecundo que os exercícios de passagem de um material a outro ou de uma representação a outra. Passar de um material ou número escrito correspondente e reciprocamente, passar de um desenho a um material A, de um material A a um material B ou número escrito, e de um número escrito ao desenho é um meio de levar as crianças a compreenderem o sistema de numeração.

Cada uma dessas representações carrega uma especificidade própria, que passaremos a levantar, mas o que se evidencia é o que Duval (1995) esclarece em relação ao tratamento que compreende a transformação da representação e a conversão que é a transformação de uma representação em outra.

Cada um dos tipos de registros possibilitados, utilizando diversas formas de representação, desde as mais visuais até as mais abstratas, carrega suas especificidades, que devem que ser levadas em conta no momento da aprendizagem.

Quando utilizamos o material montessoriano e os palitos amarrados, ,devemos ter consciência de que este carrega de uma maneira direta a base dez, presente na estrutura do sistema de numeração. Já o ábaco traz presente tanto a base dez como o valor posicional, desde que não sejam utilizadas argolas de cores diferentes, pois as mesmas eliminam o valor posicional presente na estrutura do SND. Já a numeração escrita carrega em outra linguagem, agora não mais visual, a composição aditiva e o valor relativo das unidades. Desse modo, uma quantidade representada na forma escrita, com utilização do SND carrega uma especificidade própria da utilização de uma linguagem específica, no caso, a matemática.

É na conversão de uma representação a outra que podemos propor um caminho de transpor o limite dos números de dois algarismos, que constitui mais um entrave do que um auxílio à compreensão do princípio fundamental da numeração, a saber, que um mesmo algarismo representa um número n vezes maior que a coluna das unidades, em base n, se ele for colocado na segunda coluna da esquerda, n vezes maior que esta se ele for colocado na terceira coluna e n^2 que a coluna das unidades, e assim sucessivamente.

O intercâmbio entre os diversos materiais e entre os diversos tipos de registros é fundamental para a noésis, pois esta evidencia o papel da criação e do desenvolvimento de sistema novos e específicos para o avanço do conhecimento. Ao mesmo tempo, estaremos ressaltando a importância da diversidade de tipos de representação em relação à economia que permite a superação dos limites e a rapidez na representação das relações entre objetos. A complementaridade que destaca os aspectos informativos comunicacionais de cada tipo de representação. Nesse caso, temos os diversos materiais representando os estados e a língua natural e escrita representando as operações entre os planos e a passagem de um plano a outro.

Além disso, em cada um dos planos existe uma representação semiótica da medida do conjunto. Cada uma dessas representações apresenta seus embaraços próprios. No plano dos objetos, só existe a contagem se uma lógica intrínseca for considerada: contar todos, contar apenas uma vez e recitar os números numa ordem convencionalmente estabelecida. No plano dos agrupamentos, a convenção que estabelece o número de elementos por grupo e os grupos de ordem superior que se forma. No plano dos cardinais dos agrupamentos, a identificação de que a medida é a medida de todo o conjunto (cardinalidade) e não dos objetos isolados, o que subentende a relação de inclusão hierárquica. No plano das representações escritas, a compreensão de que uma quantidade pode ser representada na forma $a_n\, a_{n-1} \ldots a_0$, em que a_n é igual a $a_n \times 10^n$.

Alguns dados empíricos

Importante será, no ambiente da sala de aula, instrumentalizar o professor com subsídios teóricos, para que ele possa refletir sobre sua prática e a ela retornar, num movimento dialético que se transformará em práxis.

Os dados empíricos a seguir apresentados foram obtidos a partir de uma pesquisa[3] desenvolvida com crianças do 2º ciclo do ensino fundamental que buscava analisar a compreensão do SND por elas.

Tais dados serão a seguir analisados, levando em consideração o que foi apontado a respeito de um sistema de representação semiótica. Buscamos com isso argumentar sobre a importância de um referencial

3 A referida pesquisa foi desenvolvida com crianças do 2º ciclo do ensino fundamental de duas escolas públicas de Ponta Grossa. O relatório de pesquisa encontra-se na Universidade Estadual de Ponta Grossa, sob o nome "O valor posicional e suas implicações... para o ensino da matemática nas séries iniciais do ensino básico". Setor de Ciências Humanas Letras e Artes, Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino. Autoras: Célia Finck Brandt e Joseli Almeida Camargo. Maiores informações pelo e-mail brandt@bsi.com.br.

para entender os desempenhos das crianças a partir de suas produções e, ao mesmo tempo, com base nesse referencial, analisar os elementos presentes que deverão ser alvo de transformações, para permitir o avanço nas compreensões.

Na referida pesquisa, alguns testes foram propostos às crianças, que deveriam apresentar respostas às questões compreendidas nos mesmos e argumentar por escrito sobre as respostas dadas. Algumas foram submetidas a entrevista gravada caracterizando a metodologia de pesquisa baseada no método clínico piagetiano.

Os desempenhos revelados puderam ser submetidos à análise considerando o sistema semiótico de representação. É o caso, por exemplo, de um teste proposto, no qual quinze feijões foram dados às crianças, que deveriam contá-los e, em seguida, escreverem o numeral representativo da quantidade. Em seguida, as crianças deveriam circular a quantidade de objetos correspondentes ao um da representação e ao cinco da representação. Três desempenhos puderam ser observados: as crianças circulam 10 objetos para o **um** e 5 objetos para o **cinco**; as crianças circulam 1 objeto para o **um** e 5 para o **cinco**; as crianças circulam o primeiro objeto para o **um** e o quinto para o **5**.

Esses desempenhos podem ser analisados em relação ao significado atribuído aos dígitos utilizados para a representação de quantidades e à estrutura do sistema de numeração. Em primeiro lugar, percebeu-se algumas crianças lidando com as representações sem terem apreendido conceitualmente a estrutura do sistema de numeração. É o paradoxo a ser enfrentado, já comentado anteriormente e revelado no desempenho de algumas crianças.

Pôde-se também perceber a existência da diferenciação entre a representação mental e a representação semiótica utilizada. Enquanto representação mental e no plano dos objetos, a medida do conjunto é obtida utilizando a contagem e respeitando as regras lógicas a ela inerentes. Enquanto representação semiótica percebeu-se a ausência de conceitualização no plano dos agrupamentos, dos cardinais dos agrupamentos e no plano das representações escritas por algumas crianças.

É esse o momento para o professor, dispondo dos referenciais teóricos conceituais, compreender que tais desempenhos são reveladores do funcionamento cognitivo do pensamento e que este deve ser inseparável do registro de representação utilizado. É o momento, portanto, de mobilizar outros registros de representação semiótica para permitir a passagem entre os planos e abordar as operações nos planos. Estamos, nesse instante, considerando a semióse enquanto apreensão ou produção de uma representação que deve ser trabalhada de modo a compreender a noésis que levará à apreensão conceitual do SND utilizado para representar quantidades.

Ao mobilizar outros registros de representação, também estaremos considerando, além do intercâmbio necessário entre os diversos materiais, o tratamento da representação e a conversão e dessa forma avançando para a terceira atividade cognitiva a ser levada em conta no ensino, a conversão.

Deve-se compreender tais desempenhos como ainda situados na estrutura significante → representação → objeto, na qual as significações são trans-registros que são válidas para os que têm domínio do objeto matemático e não para os sujeitos em fase de aprendizagem. As significações têm que acontecer durante o tratamento sobre diversos registros de representação e durante a conversão, que levam ao conceito e à representação do objeto cognitivo.

Por essa razão, as crianças que demonstraram desempenhos circulando um objeto, ou o primeiro objeto, para o **um** da representação e o quinto objeto para o **cinco** da representação, não atribuem significado à representação que utilizam enquanto operam sobre ela.

Outros desempenhos são reveladores da não conceitualização pelas crianças, devendo ser objeto de reflexão à luz de um referencial teórico, e em especial à importância de um sistema semiótico de representação. É o caso, por exemplo, de uma criança que circula o primeiro e o quinto objeto como representativos do algarismo um e cinco do numeral quinze. Ao ser argumentada sobre os objetos não circulados, ela argumentou serem necessários outros números. Solicitamos que ela acrescentasse esses números, o que prontamente a levou a escrever um quatro e um sete à direita do quinze e a circular o quarto e o sétimo objeto. Porém, ao ler o numeral, não hesitou em prontamente recitar: um mil quinhentos e quarenta e sete.

Essa criança manipula um registro de representação sem atribuir significado à estrutura existente no sistema de numeração.

Isso significa que o professor, ao avaliar a compreensão da criança, deve reorganizar a prática educativa, levando em consideração os aspectos a serem contemplados na representação semiótica desse objeto matemático de modo a contribuir para o avanço na compreensão.

Será importante observar que, enquanto representação mental que é diferente desse tipo de representação com utilização da linguagem escrita, a criança estabelece a medida do conjunto, por contagem, respeitando as regras lógicas. Porém, ela se encontra no plano dos objetos e não ultrapassou os demais planos. Enquanto plano das representações escritas, que é um dos diversos tipos de registros semióticos que desempenha um papel no funcionamento cognitivo, pode-se perceber o quão a criança manipula tal sistema e ao mesmo tempo o quão essa manipulação está distanciada da conceitualização do objeto (no caso o objeto é a estrutura do SND).

Em relação à semióse, a formação de uma representação identificável não é feita pelo sujeito do conhecimento e segue a estrutura significante→representação→objeto estabelecida por convenção e transmitida ao sujeito. Por essa razão, a atividade de tratamento situa-se na indiferenciação entre o objeto e a representação do objeto. A criança trabalha com a representação como se fosse o próprio objeto.

A atividade de conversão também se revela falha quando essa criança lida com um outro tipo de representação. É o caso, por exemplo, de a criança separar cartões de 5 dezenas e 3 unidades (escolhidos entre diversos tipos de cartões), para representar a quantidade 503. Seu argumento é que 5 dezenas valem 50 e 3 unidades valem 3, portanto, necessários e suficientes para representar a quantidade 503. Essa conversão não considera nem a totalidade e nem a parte da representação inicial, pois a mesma não compreende nem a ilustração.

Em relação à característica fundamental da ligação semióse/noésis, mesmo lançando mão de uma representação mental e de uma representação escrita, por haver ausência de conceitualização, perde-se a capacidade de superar limites e não se torna possível usufruir as relações entre objetos. No caso específico do SND, a incompreensão de sua estrutura leva a criança a argumentar que na soma 75 + 17, 8 mais 7 é 15, deixa o 5 e vai 1. Argumenta que o 1 vale 1 mesmo e que não pode deixar o 15, senão a conta não vai dar certo. A incompreensão da estrutura do SND deixa de lado a complementaridade como vantagem, pois não evidencia os elementos informativos ou comunicacionais próprios do registro.

Esses elementos, se identificados na estrutura, levariam a criança a argumentar que vai 1 pois o resultado 15 significa 1 dezena e 5 unidades (já compreendendo o plano do reagrupamento e dos cardinais dos agrupamentos) e, de acordo com essa estrutura, a coluna à direita representa a coluna das unidades e a coluna imediatamente à esquerda, a coluna das dezenas.

Por essa razão o professor pode lançar mão da hipótese de Duval (1995) de que a compreensão conceitual repousa sobre a coordenação de mais de um registro de representação e considerar os intercâmbios entre diversos materiais apontados por Vergnaud (1985). É necessário, neste momento, propor tanto o tratamento sobre os diversos registros como a coordenação entre os registros que levarão a conceitualização do objeto cognitivo representado, utilizando materiais de apoio tais como ábacos, material montessoriano, quadro valor lugar, entre outros. As transformações internas específicas da cada tipo de registro e as externas, específicas das conversões, estarão sendo consideradas e poderão levar à conceitualização, visto que essa coordenação não é natural e deve ser provocada.

Considerações finais

No processo de ensino e aprendizagem da matemática, não podemos deixar de considerar a ligação semiósis/noésis para a conceitualização dos objetos matemáticos pelo sujeito. No presente artigo, procuramos evidenciar as atividades cognitivas fundamentais de representação ligadas à semiósis, a saber, a formação de representações semióticas, o tratamento destas e a conversão. Enfocamos especificamente o SND como objeto matemático e analisamos essas atividades ante o mesmo

A conversão necessária, no sentido de oportunizar ao sujeito a coordenação de vários registros de representação, também foi abordada e, para tanto, alguns materiais, sistemas de representação de quantidades diferentes em sua estrutura, bem como os diversos planos em que o sujeito atua na quantificação, foram elencados, evidenciando um dos problemas específicos da conversão: a congruência ou a não congruência entre registros de representação.

Em relação ao tratamento, procuramos evidenciar as especificidades e as regras próprias de cada um e a importância destas para a conceitualização.

Os dados empíricos apresentados procuraram elucidar a compreensão do sujeito do SND tendo como foco uma teoria das representações semióticas. Tivemos a intenção de apontar que, na prática educativa, as diversas dimensões intervêm e têm que ser contempladas de forma a permitir o progresso conceitual por parte do sujeito aprendente. Apontar também que os erros apresentados pelos alunos precisam ser analisados à luz de quadros teóricos conceituais que permitam ao professor reorganizar a prática educativa de modo a permitir que o sujeito venha a conceitualizar os objetos matemáticos e não os confunda com as representações desses objetos.

A organização de situações de aprendizagem centradas na coordenação de registros exige a identificação das variações cognitivamente pertinentes de uma representação num registro, de forma que possamos variar um único fator enquanto os demais permanecem invariáveis. Foi o que pretendemos mostrar ao propor um trabalho com o sistema egípcio e com o material Montessori que só evidencia a base de um sistema de numeração. Ao propor o trabalho com o ábaco e sua conversão num sistema escrito, procuramos evidenciar o valor posicional e a base do SND.

É necessário, porém, uma proposta centrada na investigação da própria prática e as reformulações que se fizerem necessárias para a condução de uma prática educativa voltada para aprendizagens significativas. É a forma de formar matematicamente cidadãos para uma convivência plural e democrática tendo os objetos matemáticos como ferramenta de pensamento.

Referências

BACHELARD, G. (1996). *A formação do espírito científico.* Rio de Janeiro, Contraponto.

DUVAL R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. Strasbourg, Irem, n. 5, pp. 37-65.

______(1995). *Sémiosis et pensée humaine. Regitres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Paris, Peter Lang.

PIAGET, J. e SZEMINSKA, A. (1975). *A gênese do número na criança.* 2 ed. Rio de Janeiro/Brasília, Zahar/INL.

VERGNAUD, G. (1985). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* 3 ed. Nova York, Peter Lang.

Recebido em abr./2005; aprovado em maio/2005.