O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário[1]

The informatics conversion procedure of global interpretation of curve sketching in higher education

MERICLES THADEU MORETTI[2]
LEARCINO DOS SANTOS LUIZ[3]

Resumo:

Duval assinala a importância, para a aprendizagem matemática no esboço de curvas, o procedimento que promove a interpretação global de propriedades figurais. Assinala ainda que a conversão entre as formas gráfica e simbólica da função deve ser efetuada nos dois sentidos. Para a maioria das funções que são tratadas no ensino universitário, a conversão nos dois sentidos se torna impraticável. Para essas funções, discutiremos neste trabalho um procedimento informático de conversão que se aproxima daquele preconizado por Duval.
Palavras chave*: Esboço de curvas; Registros de representação semiótica; Procedimento informático de conversão; Interpretação de curvas. Ensino universitário.*

Abstract

Duval points out the relevance, for mathematical learning of curve sketching, of the procedure that promotes global interpretation of figure properties. He also points out that the conversion between graphical and symbolic forms of functions must be made in both directions. For most functions that are treated in higher education, the conversion in two directions turns to be impractical. For those functions we discuss an informatics conversion procedure that approaches the one proposed by Duval.
Keywords: *Curve sketching. Registers of semiotic representation; Interpretation of curves; Higher education.*

Introdução

A interpretação de curva é uma atividade importante em matemática na compreensão de fenômenos. Essa curva pode ser resultante de algum problema de otimização, por exemplo, como veremos mais adiante.

Além da forma linguística e numérica (tabela de pontos) das funções de uma variável real, interessa-nos neste trabalho ainda as formas nos seguintes registros:

- de representação simbólica:

[1] Parte deste artigo são reflexões da dissertação de mestrado de Luiz (2010).
[2] PPGECT/MTM/UFSC - Apoio Capes e CNPq. Email: mthmoretti@gmail.com
[3] Bolsista da Capes no período de realização do mestrado no PPGECT.
email: learluiz@yahoo.com.br

$$y : A \to B$$
$$y = y(x)$$

sendo A e B subconjuntos dos reais e y(x) a expressão analítica da função y;

- de representação gráfica que é a função representada por uma curva no plano cartesiano (ou em outro sistema de coordenadas).

A passagem de uma função na forma de representação simbólica para a representação gráfica exige a operação de conversão. Duval (1988B) faz referência aos tipos distintos de procedimentos nas conversões entre representações de uma mesma função. Um deles, que é o que nos interessa aqui, é o procedimento de interpretação global das propriedades figurais, em que o conjunto *traçado/eixo* forma uma imagem que representa um *objeto* descrito por uma expressão analítica que permite que se identifiquem as modificações possíveis conjuntamente na imagem e na expressão analítica. Como diz Duval (1988B, p. 237), "neste tipo de tratamento não estamos em presença da associação *um ponto* $\leftrightarrow$ *um par de números*, mas na associação *variável visual da representação* $\leftrightarrow$ *unidade significativa da escrita algébrica".*

Outro procedimento que Duval não faz referência especificamente é o procedimento informático em que a forma gráfica da função é obtida com o uso de programas computacionais que cada vez mais se tornam presentes nos meios educacionais. Em alguns países, como por exemplo, em Portugal, o uso da calculadora gráfica é obrigatório, "No tema ´funções`, presente ao longo de três anos do ensino secundário, o programa [de matemática] refere que os alunos devem abordar as diferentes representações de uma função: a verbal, a numérica, a algébrica e a gráfica." (ROMANO e PONTE, 2008, p. 183).

O modo de efetuar o gráfico por programas informáticos é em geral também o procedimento por pontos. Diferentemente da quantidade de pontos calculados do modo manual, neste caso, muitos pontos são obtidos, localizados no plano e unidos para formar a curva. O que o usuário vê simplesmente, quando não há problemas em situações limites no cálculo dos pontos, é o traçado da curva. As vantagens neste modo de conversão são diversas como, por exemplo, a importância da rapidez na visualização da curva, a rapidez também nos casos de mudanças de escalas, de parâmetros. Enfim, essa rapidez com que a curva pode ser mostrada traz enormes vantagens permitindo técnicas de ensino com uso das novas tecnologias.

O que discutiremos neste artigo é o procedimento de interpretação global das propriedades figurais aliado ao procedimento automático informático. Chamaremos este procedimento de "informático de interpretação global".

1. O procedimento informático de interpretação global

Em Moretti, Ferraz e Ferreira (2008, p.110) um esquema ilustra o trânsito entre função (ou equação) nas representações simbólica e gráfica. A este esquema, acrescentamos o caminho informático conforme mostramos na **Figura 1** a seguir.

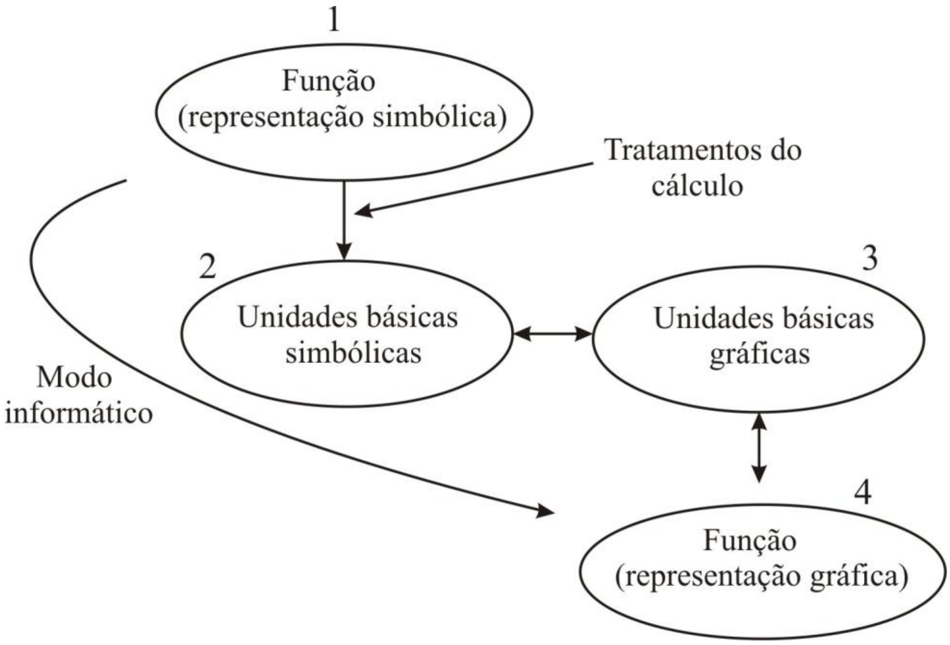


FIGURA 1 – Esquema do procedimento informático de interpretação global

A conversão no sentido **1→4**, associada simultaneamente à conversão no sentido **4→1**, pode ocorrer para grupos muito restritos de funções, entre os quais, são exemplos as retas em Duval (1988B), as parábolas em Moretti (2003) e diversas outras curvas que aparecem no ensino médio em Silva (2008).

Duval (1988A, 1988B, 1995, 1996, 2003) preconiza como fundamental para a aprendizagem matemática o uso de ao menos dois registros e que a conversão entre registros precisa seguir uma mão dupla, isto para qualquer que seja a atividade em matemática. Esta autor quando faz este tipo de advertência preocupa-se com a aprendizagem no ensino básico e apresenta em Duval (1988B, p.240) o seguinte quadro para o caso da conversão entre as representações gráficas e simbólicas da função linear/afim:

Tabela 1: Relação entre as unidades simbólicas e visuais da função linear/afim.

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	ascendente	coeficiente > 0	ausência do símbolo -
	descendente	coeficiente < 0	presença do símbolo -
Ângulo com os eixos	partição simétrica	coef. var. = 1	não tem coef. escrito
	ângulo menor (45^o)	coef. var. < 1	
	ângulo maior (45^o)	coef. var. > 1	
Posição sobre o eixo	corta acima	acrescenta-se uma constante	sinal +
	corta abaixo	subtrai-se uma constante	sinal -
	corta na origem	não tem correção aditiva	

Fonte: Duval (1988B, p.240)

Na Tabela 1 podemos perceber a relação entre as modificações nas expressões algébricas e as modificações na figura e vice-versa. Para a função y = ax + b, o coeficiente independente b é responsável pela posição da reta no eixo das ordenadas (4^a linha da tabela), o coeficiente angular a é responsável pelo ângulo que a reta forma com os eixos (2^a e 3^a linhas da tabela).

É fácil deduzir que mudanças nesses coeficientes são responsáveis por mudanças da reta no plano cartesiano. Deste modo, a forma da expressão da função linear/afim (valores dos coeficientes a e b) é importante por conta da relação já destacada que há entre os valores dos coeficientes e a posição da reta no plano cartesiano e vice-versa. Não se pode dizer o mesmo, para o caso, por exemplo, da função polinomial de segundo grau, o estudo das relações entre os coeficientes e as posições das parábolas no plano cartesiano é inviável por conta das combinações possíveis. Para o estudo dessas curvas, Moretti (2003) preferiu outra via, a translação tendo por base parábolas com vértice na origem do plano cartesiano.

No ensino universitário a possibilidade de procedimento de conversão que permite acompanhar modificações simultâneas entre os registros de representação simbólica e gráfica é praticamente inexistente dada a variedade e complexidade das funções que são estudadas. Por conta disto, a conversão direta no sentido da representação gráfica para a representação simbólica não tem tanta importância e será necessário, então buscar outro caminho.

A conversão que mais se ajusta para este caso é o sentido de **1→4** no modo informático. A volta se dá levando em conta as unidades básicas gráficas e as respectivas unidades básicas simbólicas, ou seja, as direções **4→3↔2←1** (ver **Figura 1**). Neste nível de ensino a importância da função em sua forma simbólica se dá pelo fato de que é a partir dela que elementos do cálculo (limite, assíntota, derivada, valor da função em um ponto, domínio, etc) podem ser implementados (tratamentos na direção **2←1**). A função em sua forma gráfica permite visualizar as unidades básicas gráficas que podem ser relacionadas às unidades básicas simbólicas. Assim, para o exemplo a seguir, a unidade básica gráfica (Tabela 13 do Anexo) destacada de alguma função em sua forma gráfica permite que se suspeite que tal função y possua um mínimo na vizinhança de x_0 **(4→3).**

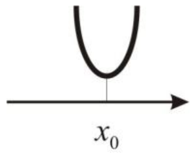


FIGURA 2 – Unidade básica gráfica de um mínimo.

Tal suspeita deve ser confirmada pelos tratamentos do cálculo na função em sua forma simbólica, ou seja, verificar, por exemplo, que $y'x_0) = 0$ e $y''(x_0) > 0$ e com isso os percursos **1→4** e **4→3↔2←1** se podem ser completados para esta unidade básica gráfica. Do mesmo modo que fizemos para esta unidade gráfica básica, podemos fazê-lo, por exemplo, para a unidade gráfica seguinte (Tabela 7 do Anexo):

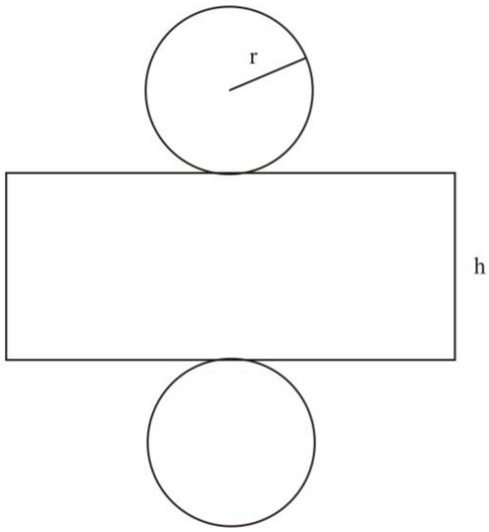
FIGURA 3 – Unidade básica gráfica de uma assíntota vertical.

Uma vez que praticamente não temos a possibilidade de fazer a relação direta entre a representação gráfica e simbólica da função, estudamos então a relação entre as representações **básicas gráficas** e **básicas simbólicas**. Este modo de proceder permite que nos mantenhamos o mais próximo possível da perspectiva preconizada por Duval de interpretação global de propriedades figurais: a interpretação global terá por base as unidades básicas gráficas significativas da curva. Em Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) há um levantamento diversas unidades básicas gráficas, básicas linguísticas e básicas simbólicas associadas que aparecem no cálculo e que as reproduzimos com algumas modificações que as tornam mais claras no Anexo deste texto.

O procedimento informático de interpretação global parte da conversão no sentido direto **1→4** por meio de ajuda de algum programa de esboço de curva. Neste trabalho utilizamos o DERIVE[4] em sua versão 6 que além de esboçar curvas e superfícies, também permite o calculo simbólico, de grande utilidade para determinar as unidades básicas simbólicas associadas às unidades básicas gráficas.

Descreveremos a seguir parte da atividade tratada em Luiz (2010) com 62 alunos em duas turmas de engenharia em 2009 na UFSC que a desenvolvem em duplas na disciplina de Cálculo A[5] (para maiores detalhes ver Luiz (2010)).

> Uma lata cilíndrica fechada deve conter 1 litro ($1000 cm^3$) de líquido. Como poderíamos escolher a altura e o raio para minimizar a quantidade de material usado na confecção da lata?



$$V_c = \pi r^2 h$$

$$A_c = \pi r^2$$

> a) Encontre uma função que represente o problema proposto;
>
> b) Crie o gráfico da função do item (a) utilizando o DERIVE, ajuste suas escalas para visualização adequada da curva e copie o esboço dessa curva no espaço abaixo.

Ainda na mesma questão, uma tabela fora fornecida para que os alunos pudessem identificar as unidades básicas gráficas e associá-las às unidades básicas simbólicas.

Para o item (a), os alunos chegaram sem muita dificuldade à expressão seguinte da função $A(r) = 2\pi r^2 + 2000/r$.

---

[4] Derive é um sistema de álgebra computacional, desenvolvido como um sucessora muMATH pelo Soft Warehouse em Honolulu. Agora é propriedade da Texas Instruments. Uma versão "free trial" deste software pode ser obtida no sítio da Texas Instruments.

[5] Nesta disciplina são tratados os seguintes assuntos: Função de uma variável real. Limite e continuidade. Derivada. Aplicações da derivada. Integral e aplicações. A atividade ocorreu dentro do capítulo de aplicações da derivada (esboço de curvas e problemas de otimização).

A primeira tentativa de visualização da curva A(r) com o DERIVE causou um pouco de perplexidade nos alunos uma vez que nada aparecia no sistema de eixos desenhado no monitor dos computadores que eles estavam usando em duplas na sala de aula. Foi preciso fazer reajustes nas escalas[6] e depois de algum tempo muitas duplas de alunos chegaram ao gráfico a seguir:

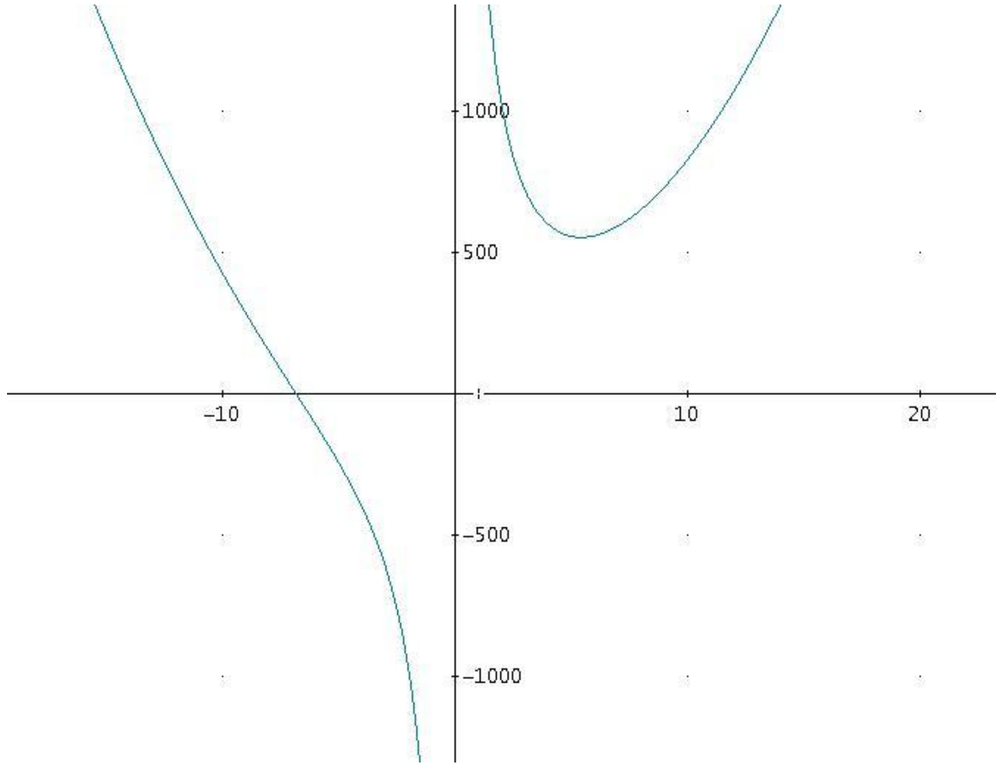


FIGURA 4. Esboço da curva $A(r) = 2\pi r^2 + 2000/r$ no DERIVE 6.

Das 31 duplas que realizaram a atividade apenas 3 não conseguiram completar a tabela de unidades básicas adequadamente: uma não identificou o ponto de mínimo presente no gráfico e outras duas localizaram uma assíntota horizontal.

Neste exercício podemos destacar inicialmente um mínimo relativo aproximadamente em r = 5,4 e uma assíntota vertical em r = 0 (o DERIVE fornece as coordenadas do cursor no plano da curva desenhada e por isso é possível obter um valor aproximado do ponto que se quer). A sequência de cálculo efetuada no DERIVE a seguir confirma a

[6] Aparentemente o DERIVE utiliza a escala 1:1 quando o módulo de traçado de curva é acionado pela primeira vez. Se a escala é modificada e o traçado de uma nova curva é solicitado, o DERIVE utiliza a escala que está na memória, a mesma que foi utilizada para traçar uma curva anterior. Em cada vez que o programa é carregado a escala utilizada é 1:1. Modificações de escala no DERIVE podem ser feitas sem dificuldades.

existência deste mínimo no ponto (5,4; 553,6) e uma reta assintótica em r = 0. Uma vez obtido r, a altura h é calculada pela relação $h = 1000/(\pi r^2)$.

#1: $2\cdot\pi\cdot r^2 + \dfrac{2000}{r}$

#2: $\dfrac{d}{dr}\left(2\cdot\pi\cdot r^2 + \dfrac{2000}{r}\right)$

#3: $12.5\cdot r - \dfrac{2000}{r^2}$

#4: $\text{SOLVE}\left(12.56521739\cdot r - \dfrac{2000}{r^2},\ r,\ \text{Real}\right)$

#5: $r = \pm\infty \vee r = 5.419426487$

#6: $\dfrac{d}{dr}\dfrac{d}{dr}\left(2\cdot\pi\cdot r^2 + \dfrac{2000}{r}\right)$

#7: $\dfrac{4000}{r^3} + 4\cdot\pi$

#8: $\dfrac{4000}{5.419426487^3} + 4\cdot\pi$

#9: 37.69680539

#10: $\lim\limits_{r\to 0+}\left(2\cdot\pi\cdot r^2 + \dfrac{2000}{r}\right)$

#11: ∞

FIGURA 5: Sequência de cálculo efetuada no DERIVE

Temos na Figura 5 a sequência seguinte:

- em #1 a expressão da função A(r);
- em #3 a expressão da derivada de A(r);
- em #5 a derivada de A(r) tem uma raiz real r = 5,4;
- em #7 a expressão da derivada de segunda ordem de A(r);
- em #9 valor obtido quando r = 5,4 é substituído na expressão da derivada de segunda ordem de A(r). É o teste para verificar a natureza do ponto cuja abscissa é r = 5,4;
- em #10 e #11confirmamos que A(r) possui uma assíntota vertical em r = 0.

Observamos uma grande atividade intelectual durante o desenrolar da atividade e as discussões nas duplas mostraram-se muito animadas e positivas. Percebemos também que alguns alunos que demonstravam mais dificuldades conseguiam com as discussões progredir na atividade e procurar compreender os conceitos trabalhados.

Para se ter uma ideia de que os alunos acharam sobre as atividades desenvolvidas, Luiz (2010, p.112) solicitou que eles citassem pontos positivos e negativos da atividade proposta.

Em geral as respostas a esta solicitação foram bastante positivas. Duas frases dão uma ideia do que os alunos achavam:

> *Muito mais prático e útil, pois torna a aula mais rápida e mais prática, pois os alunos vêem o que estão calculando no gráfico. Isso facilita muito na aprendizagem já que é uma matéria um pouco abstrata. Além de que é uma tecnologia muito usada em todo o mundo e nos prepara para o futuro profissional onde iremos usar softwares.*
>
> *O uso do software é bom, pois é possível realizar os cálculos com facilidade e ver como eles são representados nos gráficos ajudando assim a aprender melhor.*

Em relação aos pontos negativos, o mais importante deles, levantado por vários alunos, é surpreendente e pode ser resumido na frase a seguir de um deles:

> *Por um lado é muito bom pela facilidade e economia de tempo com os cálculos muito complicados, mas também pode ser prejudicial em matérias futuras se os professores não liberarem o uso.*

Uma questão importante já apontada por Artigue (1991) é o fato de que em uma aula tradicional de Cálculo, aspectos conceituais são reduzidos aos algoritmos que, por excesso de "algebrização", escondem as ideias essenciais do Cálculo. Isso foi apontado por 35 alunos que consideram desnecessário o tempo gasto com a resolução de exercícios demasiadamente longos e difíceis.

Outras características da atividade tais como a possibilidade de discussão e trocas de ideias, a aplicabilidade prática dos problemas e a diminuição do estresse causado pelas avaliações de matemática, foram também pontos positivos relatados por muitos alunos.

O uso do DERIVE deixou o aluno mais livre para a tarefa mais importante que é a interpretação e com isso responder à questão proposta na atividade: para minimizar a quantidade de material usado na confecção da lata devemos escolher r = 5,4cm e h = 10,8 cm.

Os valores de r e h sugerem que h = 2r, o que pode levar a uma nova indagação se de fato esta relação é exata. Com os cálculos exatos no DERIVE o aluno pode concluir que de fato h = 2r. Aqui ainda uma questão subsiste uma vez que a lata com que os cálculos foram efetuados deveria conter 1 litro de líquido: a relação entre h e r se mantém para um volume V qualquer da lata? Essas e outras questões podem surgir a medida que as atividades vão sendo desenvolvidas e com a ajuda de um programa computacional desta natureza elas podem ser respondidas sem que para isto os cálculos sejam penosos e desestimulantes.

O caminho escolhido para o esboço desta curva foi o de obtê-la no plano cartesiano diretamente com o DERIVE: sentido **1→4**. Em seguida, a partir da observação das unidades básicas gráficas (**4→3**), as unidades básicas simbólicas correspondentes foram obtidas por meio dos tratamentos de cálculo efetuados no próprio DERIVE (**3↔2←1).** Deste modo o procedimento (**4→3↔2←1**) se completa.

A facilidade com que estes trânsitos podem ser efetuados com a ajuda deste programa, propicia ao aluno mais tempo para que ele possa refletir no que de fato tem importância: reconhecer as unidades básicas gráficas e poder confirmá-las associando-as às unidades básicas simbólicas e com isso poder interpretar e responder de forma correta às questões propostas.

Conclusões

No ensino superior a conversão da função da representação simbólica para a gráfica devido a maior complexidade das funções passa a ser efetuada por programas computacionais. Esta tendência é assinalada por Machín (2008, p.51) referindo-se às instituições européias quando diz que "... nos últimos anos tem havido um reconhecimento, por parte das instituições, da importância e necessidade de integrar diferentes ferramentas tecnológicas aos estudos universitários".

No Brasil observamos uma resistência dos professores no uso da informática, isso mesmo no ensino superior, enquanto que em muitos países há anos utilizam a calculadora no ensino fundamental e a calculadora gráfica no ensino médio.

A frase apontada anteriormente no trabalho de Luiz (2010, p.112) como um dos aspectos negativos no uso de tecnologias em aula de cálculo do ensino universitário mostra bem em que pé estamos no Brasil em relação ao uso da informática: "Por um lado é muito bom pela facilidade e economia de tempo com os cálculos muito complicados, **mas também pode ser prejudicial em matérias futuras se os professores não liberarem o uso**”. Enquanto isso:

> - os PCN para o Ensino Fundamental do 1º e 2º ciclos (Brasil, 1997, p. 46-48) e 3º e 4º ciclos (Brasil, 1998, p. 43-46) recomendam o recurso às novas tecnologias de comunicação no processo de ensino e aprendizagem de matemática já para este nível de ensino;
>
> - os Princípios e Normas para a Matemática Escolar que é um documento elaborado por uma organização mundial a National Council of Teachers of Mathematics – NCTM empenhada na melhoria da aprendizagem matemática escolar para os 12 primeiros anos de escolaridade descrevem, como um dos seis princípios para uma **educação matemática de elevada qualidade**, o princípio da tecnologia (NCTM, 2008, p. 11, 26-29): a tecnologia melhora a aprendizagem; a tecnologia apóia um ensino eficaz e; a tecnologia influencia a matemática que é ensinada.

Neste texto apresentamos uma possibilidade de trânsito entre as representações simbólicas e gráficas de funções de modo que a interpretação global possa ser mantida. Para isto, o uso de elementos do cálculo é imprescindível, são esses elementos que irão dar às formas básicas da curva, formas essas que denominamos unidades básicas gráficas. A interpretação de curvas para o ensino superior passa necessariamente pelo estudo dessas unidades básicas gráficas que compõem a curva. No exemplo tratado anteriormente a curva $A(r) = 2\pi r^2 + 2000/r$, para $r > 0$, é uma composição das formas básicas gráficas: um mínimo relativo no ponto (5,4; 553,6) e a assíntota horizontal $r = 0$. Como sabemos que há um mínimo ou assíntota? A relação com as unidades básicas simbólicas com os tratamentos do cálculo é que irão dar a resposta a esta questão. O gráfico e os tratamentos de cálculo podem ser facilmente feitos em um programa computacional e com isso deixar o aluno com mais tempo livre para a tarefa mais importante que é a interpretação e com isso responder com mais segurança a questão proposta na atividade.

Os processos que desenvolvemos em Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) e Luiz (2010), completados neste texto, tratam dessas unidades básicas, ora percebidas globalmente na curva, ora destacadas e relacionadas com as unidades básicas simbólicas. É este o caminho que propomos para o ensino universitário com a ajuda de algum programa que possibilite desenvoltura neste trânsito.

Duval (1988B) propôs conversões diretas nos dois sentidos (**1→4** e **4→1)** entre as representações simbólicas e gráficas de funções para que o procedimento de interpretação global possa ser alcançado. Para a maioria das curvas que ocorrem no nível universitário, a conversão no sentido da representação simbólica para representação gráfica (**1→4**) é possível ainda que com grande dificuldade caso nenhum programa computacional é utilizado; já a conversão no sentido inverso, o sentido da representação gráfica para a simbólica (**4→1**) é impraticável para muitas delas.

Propomos para esses tipos de curvas, para que a interpretação global possa ser ainda alcançada, o procedimento informático de interpretação global representado no esquema da **Figura 1**, ou seja, as operações representadas por **1→4** e **4→3↔2←1:**

> **1→4:** conversão direta da representação simbólica (**1**) para a gráfica (**4**) da função por meio informático;
>
> **4→3**: tratamentos na curva (visuais inicialmente) em sua representação gráfica (**4**) para reconhecer e destacar as unidades básicas gráficas (**3**);
>
> **2←1:** tratamentos de cálculo na função em sua forma simbólica (**1**) para determinar as unidades básicas simbólicas (**2**) relacionadas às unidades básicas gráficas (**3**);
>
> **3↔2:** conversão que confirma as correspondências entre as unidades básicas gráficas (**3**) e as unidades básicas simbólicas (**2**).

Assim, as conversões diretas nos sentidos **1→4** e **4→1** propostas por Duval (1988B) se realizam desta forma: **1→4** e **4→3↔2←1**.

Referências

ARTIGUE, Michele et al. Un esquema para la investigación y la innovación en la ensenãnza y el aprendizaje de las matemáticas. En Educación Matemática. México: Grupo editorial Iberoamérica, 1996.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática para o primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/CEF, 1997.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática para terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/CEF, 1998.

DUVAL, R. Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. Annales de didactique et de sciences cognitives, v1, IREM de Strasbourg, 1988A.

DUVAL, R. Graphiques e équations: l'articulation de deux régistres. Annales de didactique et de sciences cognitives, v1, IREM de Strasbourg, 1988B.

DUVAL, R. Registre de représentation sémiotique et foucionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, 1993.

DUVAL, R.. Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. Quel cognitive retenir em didactique des mathématiques? Recherches em didactique des mathématiques. La Pensée Sauvage, v. 16.3, n. 48, 1996.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. p.11-33. in MACHADO, Silvia D.A. de (org). Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

LUIZ, Learcino dos S. Esboço de curvas no ensino superior: uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias. Dissertação de Mestrado. Florianópolis: PPGECT/UFSC, 2010. Orientação de Méricles T. Moretti.

MACHÍN, Matias C. CAS (Computer Álgebra System) em La enseñanza y aprendizage Del cálculo. Algunos resultados de investigation. In CANAVARRO, A. P., MOREIRA, Darlinda e ROCHA, Maria Isabel (org.) Tecnologias e Educação Matemática. Lisboa: Ed. da Soc. Portuguesa de Ciências da Educação, 2008.

MORETTI, Méricles T. A translação como recurso no esboço de curvas através da interpretação global de propriedades figurais. In MACHADO, Silvia D.A. de (org). Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

MORETTI, Méricles T. FERRAZ, A. G. FERREIRA, G. G. Estudo da conversão entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. Quadrante. v. XVII, n, 2. Lisboa: APM, 2008.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. Princípios e Normas para a Matemática Escolar. (Trad. Magda Melo de Principles and Standards for School Mathematics, 2000). Lisboa: Associação Portuguesa de Matemática, 2008.

ROMANO, E. e PONTE, J. P. A calculadora gráfica e o ensino da matemática. In CANAVARRO, A. P., MOREIRA, Darlinda e ROCHA, Maria Isabel (org.) Tecnologias e Educação Matemática. Lisboa: Ed. da Soc. Portuguesa de Ciências da Educação, 2008.

SILVA, Madeline. O Esboço de curvas: Uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. Dissertação de Mestrado. Florianópolis: PPGECT/UFSC, 2008. Orientação de Méricles T. Moretti.

ANEXO - UNIDADES BÁSICAS GRÁFICA, LINGUÍSTICA E SIMBÓLICA

Variação e concavidade

Tabela 1

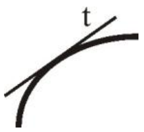
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	t é uma tangente. Função crescente. Concavidade negativa.	t: $y = ax + b, a > 0$ $y'(x) > 0$ $y''(x) < 0$

Tabela 2

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	t é uma tangente. Função crescente. Concavidade positiva.	t: $y = ax + b, a > 0$ $y'(x) > 0$ $y''(x) > 0$

Tabela 3

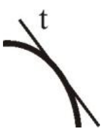
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	t é uma tangente. Função decrescente. Concavidade negativa.	t: $y = ax + b, a < 0$ $y'(x) < 0$ $y''(x) < 0$

Tabela 4

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	t é uma tangente. Função decrescente. Concavidade positiva.	t: $y = ax + b, a < 0$ $y'(x) < 0$ $y''(x) > 0$

Retas assintóticas

Tabela 5

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Assíntota vertical.	$\lim_{x \to a^-} y(x) = -\infty$ x = a

Tabela 6

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Assíntota vertical.	$\lim_{x \to a+} y(x) = -\infty$ x = a

Tabela 7

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Assíntota vertical.	$\lim_{x \to a^+} y(x) = +\infty$ x = a

Tabela 8

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Assíntota vertical.	$\lim_{x \to a^-} y(x) = +\infty$ x = a

Tabela 9

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Assíntota horizontal.	$\lim_{x \to +\infty} y(x) = b$ y = b

Tabela 10

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Assíntota horizontal.	$\lim_{x \to +\infty} y(x) = b$ y = b

Tabela 11

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Assíntota horizontal.	$\lim_{x \to -\infty} y(x) = b$ y = b

Tabela 12

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Assíntota horizontal	$\lim_{x \to -\infty} y(x) = b$ y = b

Determinação de pontos importantes: extremos relativos

Tabela 13

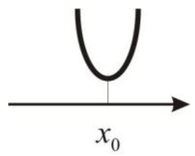
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Mínimo relativo x_0. Derivada primeira de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0; ou efetuar o teste da derivada 2ª ou de ordem superior.	$\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y'(x)<0,\ x\in V^-(x_0) \\ y'(x)>0,\ x\in V^+(x_0) \end{cases}$ $y''(x_0)>0$; $y^{(n-1)}(x_0)=0$ e $y^{(n)}(x_0)>0$, n > 2, par.

Tabela 14

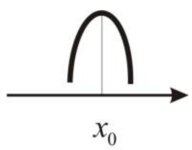
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Máximo relativo x_0. Derivada primeira de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0; ou efetuar o teste da derivada 2ª ou de ordem superior.	$\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y'(x)>0,\ x\in V^-(x_0) \\ y'(x)<0,\ x\in V^+(x_0) \end{cases}$ ou $y''(x_0)<0$. $y^{(n-1)}(x_0)=0$ e $y^{(n)}(x_0)<0$, n > 2, par.

Tabela 15

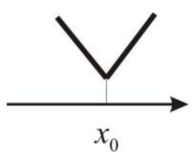
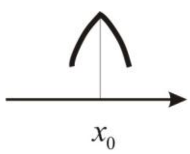
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Mínimo relativo x_0. Derivada primeira de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0 e não existe em x_0.	$\begin{cases} y'(x_0)\ \nexists \\ y'(x)<0,\ x\in V^-(x_0) \\ y'(x)>0,\ x\in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 16

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Máximo relativo x_0. Derivada primeira de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0 e não existe em x_0.	$\begin{cases} y'(x_0)\ \nexists \\ y'(x)>0,\ x\in V^-(x_0) \\ y'(x)<0,\ x\in V^+(x_0) \end{cases}$

Determinação de pontos importantes: pontos de inflexão

Tabela 17

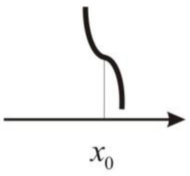
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Ponto de inflexão x_0. Derivada primeira de y não muda de sinal na vizinhança de x_0. Derivada segunda de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0.	$\begin{cases} y'(x_0) \neq 0 \\ y'(x) < 0,\ x \in V(x_0) \\ y''(x) > 0,\ x \in V^-(x_0) \\ y''(x) < 0,\ x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 18

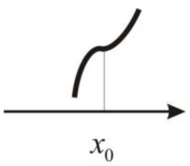
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Ponto de inflexão x_0. Derivada primeira de y não muda de sinal na vizinhança de x_0. Derivada segunda de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0.	$\begin{cases} y'(x_0) \neq 0 \\ y'(x) > 0,\ x \in V(x_0) \\ y''(x) < 0,\ x \in V^-(x_0) \\ y''(x) > 0,\ x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 19

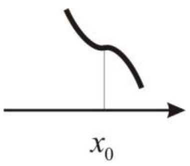
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Ponto de inflexão x_0. Derivada primeira de y não muda de sinal na vizinhança de x_0. Derivada segunda de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0.	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x) < 0,\ x \in V(x_0) \\ y''(x) > 0,\ x \in V^-(x_0) \\ y''(x) < 0,\ x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 20

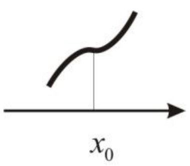
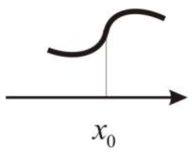
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Ponto de inflexão em x_0. Derivada primeira de y não muda de sinal na vizinhança de x_0. Derivada segunda de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0.	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x) > 0,\ x \in V(x_0) \\ y''(x) < 0,\ x \in V^-(x_0) \\ y''(x) > 0,\ x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 21

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Ponto de inflexão em x_0. Derivada não existe em x_0, pois a tangente em x_0 é vertical. y é contínua em x_0. Derivada segunda de y não existe em x_0, mas muda de sinal positivo para negativo na vizinhança deste ponto.	$y'(x_0)\ \nexists$ $\lim_{x\to x_0} y = y(x_0)$ $\begin{cases} y''(x_0)\ \nexists \\ y''(x) > 0,\ x \in V^-(x_0) \\ y''(x) < 0,\ x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Determinação de pontos importantes: continuidade

Tabela 22

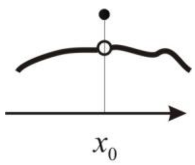
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Limites laterais em x_0 são iguais. Descontínua em x_0.	$y'(x_0)\ \nexists$ $\lim_{x\to x_0^+} y = \lim_{x\to x_0^-} y \neq y(x_0)$

Tabela 23

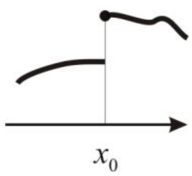
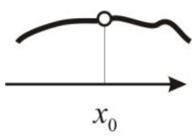
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Limites laterais em x_0 são diferentes. Descontínua em x_0.	$y'(x_0)\ \nexists$ $\lim_{x\to x_0^+} y \neq \lim_{x\to x_0^-} y$ $y(x_0)\ \exists$

Tabela 24

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Limites laterais em x_0 são iguais. x_0 não pertence ao domínio de y.	$\lim_{x\to x_0^+} y = \lim_{x\to x_0^-} y$ $y(x_0)\ \nexists$