

**Desenvolvimento do pensamento teórico de professores dos anos iniciais sobre frações**

**Development of the theoretical thinking of early years teachers about fractions**

**Desarrollo del pensamiento teórico de los maestros de los primeros años sobre las fracciones**

Lidiane C. Zeferino <sup>1</sup>

Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)

Mestrado em Educação - UNIFESP

<https://orcid.org/0000-0002-9390-1988>

Vanessa D. Moretti <sup>2</sup>

Professora Associada da Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)

Doutora em Educação - USP

<https://orcid.org/0000-0003-2435-5773>

**Resumo**

O artigo analisa o desenvolvimento de aspectos do pensamento teórico do professor sobre frações, em particular: mediação de grandezas contínuas e a equivalência de frações. Apoiada teoricamente na perspectiva histórico-cultural e na Teoria da Atividade, a pesquisa adotou a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como referência para a organização de ações de uma formação continuada de professores. A análise dos dados produzidos junto aos professores revela a superação da ideia de fração como a quantificação discreta de partes já dadas de um inteiro, a criação de subunidade como estratégia para a quantificação de grandeza contínua e a apropriação do sentido de comparação de frações por meio de frações equivalentes. Concluímos que tais elementos revelam aspectos da superação do pensamento empírico pelo pensamento teórico.

**Palavras-chave:** Teoria histórico-cultural; Fração; Formação de professores.

---

<sup>1</sup> lidianecz@bol.com.br

<sup>2</sup> vanessa.moretti@unifesp.br

## **Abstract**

The article analyzes the development of aspects of the teacher's theoretical thinking about fractions, specifically: the mediation of continuous quantities and the equivalence of fractions. Supported theoretically by the cultural-historical perspective and the Theory of the Activity, the research adopted the Teaching Guiding Activity (TGA) as a reference for the organization of continuing teacher education. The analysis of the data produced with teachers reveals the overcoming of the idea of the fraction as the discrete quantification of parts already given of a whole, the creation of a subunit as a strategy for the quantification of continuous magnitude, and the appropriation of the sense of comparing fractions through equivalent fractions. We conclude that such elements reveal aspects of the overcoming of empirical thinking by theoretical thinking.

**Keywords:** Cultural-historical theory; Fraction; Teacher training.

## **Resumen**

El artículo analiza el desarrollo de aspectos del pensamiento teórico del docente sobre las fracciones, específicamente: la mediación de cantidades continuas y la equivalencia de fracciones. Apoyado teóricamente en la perspectiva histórico-cultural y la Teoría de la Actividad, la investigación adoptó la Actividad de Orientación Docente (TGA) como referente para la organización de la formación continua docente. El análisis de los datos producidos con los docentes revela la superación de la idea de fracción como cuantificación discreta de partes ya dadas de un todo, la creación de una subunidad como estrategia para la cuantificación de la magnitud continua y la apropiación del sentido de comparar fracciones a través de fracciones equivalentes. Concluimos que tales elementos revelan aspectos de la superación del pensamiento empírico por el pensamiento teórico.

**Palabras clave:** Teoría histórico-cultural; Fracción; Formación docente.

## **Desenvolvimento do Pensamento Teórico de Professores dos Anos Iniciais sobre Frações**

Compreender e ensinar frações, de forma geral, é um grande desafio para professores dos anos iniciais do ensino fundamental. A representação fracionária do conceito de número racional é comumente associada a partes enumeráveis de um inteiro dividido em partes iguais. Embora evidentemente, isso não esteja errado, lidar exclusivamente com a quantificação discreta não explicita a potencialidade do conceito e acaba sendo tomado no senso comum como algo que mais complica do que ajuda o conhecimento matemático. Afinal, precisamos indicar dois terços de uma quantidade de objetos ou ainda três quintos de uma pizza? Evidentemente, a resposta a essas questões depende do que entendemos por necessidade e uma análise um pouco menos cotidiana nos indica a relevância da manipulação matemática da representação fracionária de números racionais como etapa possível para a atribuição de sentidos de número racional, por exemplo, em sua representação decimal.

No entanto, a redução do ensino e o uso dos racionais a essa abordagem cotidiana de frações não tem sido suficiente para desenvolver uma compreensão teórica do professor sobre o conceito e tão pouco para engajá-lo de forma autônoma na organização do ensino desse tema que ainda se configura como um grande desafio para os professores dos anos iniciais (Magina & Campos, 2008; Rosa et al., 2013; Perlim, 2014; Abrahão, 2016; Mocrosky et al., 2019).

Partindo desse contexto, desenvolvemos uma pesquisa que, tomando como referencial as contribuições da Teoria histórico-cultural (Vigotski, 2007, 2010) e da Atividade Orientadora de Ensino (Moura, 1996), teve por objetivo investigar como a organização do ensino do conceito de Fração, influencia e é influenciada pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática. Para os fins desse artigo, analisamos o desenvolvimento de aspectos do pensamento teórico do professor sobre frações. Para isso, discutiremos alguns episódios que exploraram a relação entre a representação fracionária de racionais, medição de

grandezas contínuas e equivalência de frações. Começamos apresentando brevemente a fundamentação teórica da pesquisa e suas implicações para a organização do ensino de frações.

### **A teoria histórico-cultural e a organização do ensino de frações**

A pesquisa desenvolveu-se utilizando as lentes teóricas da Teoria Histórico-Cultural (THC) advinda das produções de Vigotski (2007, 2010), Leontiev (1978), Davidov (1982, 1988), entre outros estudiosos. Nesse referencial, pensamento e linguagem, aprendizagem e desenvolvimento, são pares que andam de mãos dadas, se constituem como processos dialéticos. Vigotski (1988, p.114) nos diz que o “o único bom ensino é o que se adianta ao desenvolvimento”, mas o que caracteriza a aprendizagem humana? Junto com essa questão emergem outras como: O ser humano já nasce humano? As características da espécie humana estão presentes desde o nascimento? O que diferencia os seres humanos dos animais?

Todas essas questões permeiam premissas da THC e sua relação indissociável com a atividade humana. Partindo dos estudos de Marx (1984) sobre o conceito de trabalho, a Teoria Histórico-Cultural (Vigotski, 1988) propõe que a distinção entre o homem e o animal fundamenta-se no conceito de consciência humana. Vigotski (1988, p. 25) afirma que o comportamento consciente pode estar presente nas relações sociais que os sujeitos estabelecem com seu ambiente e assegura que “o homem não é apenas um produto de seu ambiente, é também um agente ativo no processo de criação deste meio”.

Do mesmo modo, as obras de Leontiev (1978, p.70) descrevem a relação entre a consciência humana e trabalho ao afirmar que o trabalho “criou também a consciência do homem” sendo “condição primeira e fundamental da existência do homem”. Para Leontiev (1978) o trabalho é o processo que estabelece uma ponte entre o homem e a natureza. Sendo o homem um ser ativo, essa relação com a natureza acontece por meio da sua ação que ao transforma a natureza, ao mesmo tempo também modifica a ele mesmo. Nesse contexto,

Leontiev (1978) apresenta o conceito de atividade como aquele no qual se dá a coincidência entre o motivo que leva o sujeito a agir e o objeto da sua atividade.

O conceito de atividade emerge do conceito de trabalho e traz importantes contribuições para a compreensão de atividade de ensino “como um modo de realização da educação escolar” (Moura, 2010). A atividade de ensino organizada na perspectiva da atividade humana e ancorada nos princípios da THC pode favorecer que conhecimentos produzidos historicamente pela humanidade sejam apropriados pelos sujeitos de forma sistematizada, organizada, com finalidades predefinidas. Nesse sentido, compreender a formação docente como processo de aprendizagem converge com o conceito da formação humana entendido como um processo que promove o desenvolvimento como aponta Moretti e Moura (2011, p. 347) uma vez “que é no trabalho docente, ao desenvolver ações intencionais que tenham por objetivo dar conta dos desafios cotidianos do ensinar, que o professor constitui-se professor”.

Assim, partimos do princípio que a aprendizagem docente ao ter o seu alicerce em uma teoria que investiga o processo de aprendizagem por meio de uma educação promotora do desenvolvimento humano, pode favorecer a organização do ensino e potencializar momentos de análises, reflexões e planificações das ações docentes (Davidov, 1988).

Nessa mesma direção e abraçando a fundamentação da teoria histórico-cultural Moura (1996) propõe o conceito de Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como referência para a organização do ensino da matemática. Conforme Moura (1996), a AOE pode contribuir com o processo de aprendizagem da docência em Matemática ao indicar elementos que, uma vez considerados pelo professor na produção de situações desencadeadoras de aprendizagem, podem favorecer a aprendizagem dos educandos e explicitar para todos os sujeitos envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem quais os elementos essenciais do conceito a ser ensinado.

Designamos por atividade orientadora de ensino a atividade que permite colocar a criança em situação de construção de um conhecimento matemático, que tenha um problema desencadeador da aprendizagem e que possibilite compartilhar significados na solução desse problema com características lúdicas [...] (Moura, 1996, p. 63).

A Atividade Orientadora de Ensino propõe uma organização intencional da atividade de ensino e de aprendizagem que considere elementos como a síntese histórica do conceito; os recursos teórico-metodológicos do processo de apropriação do conceito; as situações-desencadeadoras (baseadas em história virtual; jogos; situações emergentes do cotidiano); análise e síntese da solução coletiva ao problemas proposto. Ao incorporar características do conceito de atividade (Leontiev, 1983), tais como necessidades, motivos, ações e operações, a AOE pode ser compreendida como elemento de mediação entre a atividade de ensino e a atividade de aprendizagem, uma vez que a “AOE, enquanto mediação é instrumento do professor para realizar e compreender seu objeto de estudo: o processo de ensino de conceitos” (Moura, 2010, p.227)

Sendo a síntese histórica do conceito um aspecto essencial da AOE, ao nos pautarmos nessa referência para o desenvolvimento do trabalho com os professores, buscamos na história do conceito de frações elementos que nos permitissem elaborar situações desencadeadoras da aprendizagem docente sobre esse tema da matemática. Com base de relatos históricos (Caraça, 1989) podemos afirmar que as primeiras ideias de números racionais na sua representação fracionária surgiram da necessidade humana de medir. Caraça (1989) apresenta um relato do historiador grego Heródoto no qual ele descreve a relação entre divisão de terras entre os egípcios e o pagamento de impostos, e como essa relação era afetada pela cheia do Nilo que alterava o tamanho das terras cultiváveis. Embora Heródoto refira-se às origens da Geometria, Caraça (1989, p. 32) destaca como “as relações do indivíduo para com o Estado, com base na propriedade, impuseram cedo (Sesóstris viveu aproximadamente há perto de 4000 anos) a necessidade da expressão numérica da medição”.

Na situação narrada por Heródoto, a contagem numérica já não era suficiente para quantificar a divisão de terras egípcias. Para medir os terrenos, como na passagem narrada por Heródoto, os agrimensores utilizavam a corda como instrumento de medida e faziam a demarcação com nós periódicos, contendo a unidade de medida estabelecida - a medida do cúbito do Faraó, estirava-se a corda e contavam quantas vezes o cúbito cabia no comprimento do terreno. No entanto, nem sempre a unidade de medida estabelecida cabia de forma inteira no terreno. O enfrentamento desse conflito foi decisivo para se reconhecer que o campo dos números inteiros é insuficiente para medir grandezas contínuas, sendo necessária sua ampliação, criando-se então a subunidade (Dias & Moretti, 2011). Assim, a partir da necessidade humana de subdividir a unidade de medida definida, estabelece-se a limitação do campo numérico dos naturais e surge a necessidade de sua expansão com o campo numérico dos racionais, que inclui as representações fracionárias.

Neste contexto, emerge como fundamental a questão da medição e do tratamento de grandezas contínuas que, de forma geral, é pouco abordada no ensino de frações. Segundo Rosa et al. (2013), o desenvolvimento de números fracionários nos livros didáticos ou apostilas e a introdução deste conceito se dá de forma superficial, com exemplos de situações de contagem (quantificação discreta), se limitando a contextos do cotidiano, afastando-se da gênese do conceito de frações e das situações que permitam o desenvolvimento da quantificação contínua que é própria do conceito, a comparação de grandezas, sua representação geométrica de área e sua localização na reta numérica. Isso torna o ensino de frações um obstáculo para professores e alunos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental no Brasil (Zeferino, 2016).

Conforme podemos reconhecer, a relação histórica entre a medição e o surgimento das frações apresenta-se como um dos elementos centrais para o ensino de fração ou, apoiando-nos em Moura (1996), podemos dizer que essa relação é essencial para compreendermos a síntese histórica do conceito. Desta forma, compreendemos que a organização do ensino de frações

precisa contemplar tal relação no desenvolvimento de processo de ensino e de aprendizagem, o que se torna possível por meio da proposição de situações desencadeadoras de ensino, ou aprendizagem docente, que considerem a essência da necessidade que se manifestou no contexto histórico, o que não significa reproduzir a história factual. Assim, tomando as premissas da perspectiva histórico-cultural torna-se fundamental ao professor considerar tal contexto histórico ao planejar o ensino do conceito de fração. Segundo Rosa et al. (2013), é fundamental que o professor planeje atividades para desenvolver o conceito de fração com a base teórica histórica, significando-o aritmeticamente, algebricamente e geometricamente. Como afirma Moretti (2007, p. 97) “[...] compreender a essência das necessidades que moveram a humanidade na busca de soluções que possibilitaram a construção social e histórica dos conceitos é parte do movimento de compreensão do próprio conceito”.

Tendo como base o conceito de atividade (Leontiev, 1983) e a busca pela coincidência entre necessidade e motivo, entendemos ser possível favorecer a aprendizagem do conceito ao criar situações desencadeadoras por meio das quais os estudantes percebam a necessidade que está impregnada na produção histórica do conceito.

A seguir apresentaremos como, a partir das compreensões expostas até aqui, organizamos o experimento didático que caracterizou a parte empírica da pesquisa desenvolvida.

### **Experimento didático: o conceito de fração e a organização do ensino a partir de atividades orientadoras de ensino**

Na busca de compreendermos como a organização do ensino do conceito de Fração, a partir das contribuições da Teoria histórico-cultural e da Atividade Orientadora de Ensino - AOE, influencia e é influenciada pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática no quarto e quinto ano do ensino fundamental, desenvolvemos um trabalho com professores da rede municipal de Guarulhos pautado na proposição de situações



desencadeadoras de aprendizagem docente. A organização de situação desencadeadora de aprendizagem - SDA é coerente com a adoção do referencial teórico-metodológico indicado uma vez que, como vimos no item anterior, a situação desencadeadora é elemento constituinte da AOE. Tal atividade junto aos professores teve como referência metodológica o experimento didático, que tem como base teórica os estudos de Vigotski e Davidov, apresentado por Moura e Cedro (2012) como um método de investigação que possibilita estudar a natureza do desenvolvimento psíquico dos sujeitos, o ensino e sua educação. A partir da concepção de Davidov (1988), o experimento didático pode ser definido como

[...] um método de investigação psicológica que permite estudar a essência das relações internas entre os diferentes procedimentos da educação e do ensino e o correspondente caráter de desenvolvimento psíquico do sujeito. Um dos pontos essenciais dessa perspectiva é que ela pressupõe a intervenção ativa do pesquisador nos processos psíquicos que ele estuda (Moura & Cedro, 2012, p. 31).

Partindo dessa compreensão teórico-metodológica, o experimento didático da pesquisa foi organizado por meio de um curso de extensão voltado à formação continuada de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Foram quinze encontros que ocorreram em escola da rede municipal de Guarulhos na denominada hora-atividade, um horário de trabalho coletivo de professores destinado a planejamento e estudo. O grupo foi constituído por vinte professores, todos com licenciatura em Pedagogia, sendo: cinco professores que lecionavam nos 1º anos, dois professores nos 2º anos, quatro professores nos 4º anos, cinco professores nos 5º anos, três professores que atuavam na educação infantil e a professora coordenadora da unidade escolar. A participação dos professores que lecionavam em anos diferentes do foco dessa pesquisa – professores dos 4º e 5º anos – é justificada pelo fato do grupo escola ser formado por professores polivalentes, que podem atuar na Educação Infantil e no Ensino Fundamental do 1º ao 5º ano, escolha que ocorre no final de cada ano letivo. No entanto, foram tomados para análise os dados obtidos junto a nove professores, sendo que quatro lecionavam

para os educandos dos 4º anos e cinco para os 5ºanos. Daqui em diante denominados: Cleo, Fátima, Leo, Rute, Márcia, Cida, Rita, Ana e Nina.

Os professores foram organizados conforme a necessidade de cada etapa do experimento didático. Nos encontros que demandavam a solução de situações-desencadeadoras optamos por trabalhar com grupos menores com até cinco participantes, formados por professores que atuavam no mesmo ano, em outros que abrangiam discussões gerais e socializações das produções dos pequenos grupos, priorizamos pela organização da sala em semicírculo com a participação de todos.

As discussões que se deram durante esse processo, entre os professores e entre professores e pesquisadora, foram gravadas em áudio e vídeo. Tais gravações foram transcritas e juntamente com as notas do diário de campo da pesquisadora e os registros escritos pelos participantes, constituíram-se dados para a análise. Para nos referirmos aos diferentes dados utilizamos a seguinte notação:

- Transcrição da gravação audiovisual,
- Folha de registro coletivo para a resolução da AOE,
- 📖 Diário de campo.

Assim, para a referência aos dados no processo de análise indicamos o nome fictício do professor, ano que está lecionando, o encontro em que o dado foi coletado e a indicação do instrumento utilizado, por exemplo, a indicação (Cleo, profa. 4º ano, E-1, ●) refere-se aos dados obtidos da professora Cleo, que leciona para turma do quarto ano, durante o primeiro encontro e por meio da transcrição audiovisual.

Para a organização dos encontros apoiamo-nos nos pressupostos teóricos do conceito de Atividade (Leontiev, 1983) e de Atividade Orientadora de Ensino (Moura, 1996), proporcionando condições para que os docentes trabalhassem coletivamente na produção de propostas de ensino que objetivassem as suas necessidades efetivas de ensino (Moretti, 2007).

Para que as apresentações e as discussões provenientes das propostas fossem desenvolvidas, buscamos garantir o princípio do trabalho coletivo destacado por Rubtsov (1996):

Compreensão mútua, permitindo obter uma relação entre, de um lado, a própria ação e seu resultado e, de outro, as ações dos parceiros com vistas a obter um resultado comum; (...) Reflexão, permitindo ultrapassar os limites das ações individuais em relação ao esquema geral da atividade (assim, é graça à reflexão que se estabelece uma atitude crítica dos participantes com relação às suas ações, a fim de conseguir transformá-las, em função de seu conteúdo e da forma do trabalho em comum). (Rubtsov, 1996, p. 136)

Além desses princípios acerca do trabalho coletivo, também buscamos garantir uma organização adequada do espaço físico, proporcionando um ambiente mais acolhedor e favorável ao diálogo.

Para a abordagem do conceito da Fração foi desenvolvido um estudo sobre seus aspectos históricos e conceituais, apresentando exemplos de AOE e convidando os professores a produzirem propostas de ensino voltadas para seus educandos, em coerência com a realidade na qual estavam inseridos e os conceitos abordados. As situações desencadeadoras de aprendizagem desenvolvidas sobre frações foram duas: a primeira denominada “No Egito antigo...” e a segunda “As famílias egípcias e o pagamento de impostos”, que serão detalhadas no item seguinte.

Na análise dos dados decorrentes do experimento didático buscou-se acompanhar o movimento de superação do pensamento empírico dos professores, o qual se apoia em caráter externo, imediato e cujas representações são resultados da experiência sensorial Davidov, (1988, p. 106), pelo pensamento teórico que objetiva “revelar a essência dos objetos, as leis internas de seu desenvolvimento”. Sendo esse como um processo de superação, compreende-se que o pensamento empírico não deixa de existir, necessariamente. As ações da pesquisadora no decorrer do experimento didático buscaram criar condições para o desenvolvimento das características do pensamento teórico o qual, como afirma Davidov (1988), “se esforça para passar da descrição dos fenômenos ao descobrimento da essência, da conexão interna dos

mesmos. Sabe-se que a essência tem um conteúdo diferente dos fenômenos e das propriedades dos objetos diretamente dados” (Davidov, 1988, p. 104).

A análise foi estruturada a partir da ideia de isolado, proposta por Caraça (2002, p. 105), como sendo “um conjunto de seres e fatos abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados. Uma seção da realidade, nela recortada arbitrariamente”. Cedro (2008, p. 112) especifica que “A ideia de isolado surge como uma ferramenta metodológica de análise, uma vez que, sabendo da impossibilidade de compreender de uma só vez a totalidade das relações, faz-se um recorte da realidade”.

Segundo Caraça (2002), esse recorte deve compreender nele todos os fatores importantes e relevantes para o fenômeno estudado de modo que o isolado apresente-se como uma seção da realidade que conserve “todos os fatores que, ao se interdependerem, têm influência marcante no fenômeno a estudar” (Moura, 2004, p. 267). Desse modo, o isolado abrange as propriedades do todo, sendo isolado para o estudo, mas integrante da sua totalidade pesquisada. O isolado, por sua vez, é constituído por episódios que buscam revelar as ações da aprendizagem docente no processo de mudança na qualidade do pensamento: pensamento empírico para a aproximação do desenvolvimento do pensamento teórico.

Na nossa pesquisa constituímos um único isolado de análise denominado “O movimento do pensamento teórico e a organização do ensino de frações”. Por sua vez, o isolado constituiu-se de cinco episódios: I - Nos limites do visual empírico; II - Frações e seus significados; III - AOE – No Egito Antigo; IV – AOE: As famílias egípcias e o pagamento de impostos; V - Análise, Reflexão e planificação das ações: Indícios da formação do pensamento teórico.

Para os fins desse artigo, detalharemos a seguir o desenvolvimento e análise dos episódios III e IV. O episódio III apresenta a AOE “No Egito Antigo” que aborda a relação entre a mediação de grandezas contínuas e frações, enquanto o episódio IV traz a análise do

desenvolvimento da AOE “As famílias egípcias e o pagamento de impostos” que por sua vez trata da equivalência de frações.

### **Medição, grandezas contínuas e equivalência de frações**

Como parte do experimento didático desenvolvido com os professores de quarto e quintos anos do ensino Fundamental, apresentamos situações desencadeadoras de aprendizagens, desenvolvidas com a orientação metodológica da AOE, que tiveram por objetivo problematizar a relação entre a representação fracionária de números racionais e a noção de medição de grandezas contínuas. Para isso, nos amparamos no movimento lógico-histórico do conceito ao buscarmos colocar os professores diante da necessidade do conceito e da produção de estratégias coletivas de solução para as situações apresentadas. Nessa direção, as Atividades Orientadoras de Ensino apresentadas a seguir abordaram a relação entre medir grandezas contínuas e o conceito de fração, bem como o sentido da equivalência na comparação entre frações. Ambas foram estruturadas a partir de histórias virtuais que trazem personagens inseridos na busca de resolução de alguma situação-problema em uma história que “revela uma semelhança com algum problema vivido pela humanidade. A história virtual é, portanto, uma situação-problema que poderia ser vivida pela humanidade em algum momento. Por isso, ela é virtual: é como se fosse a situação real” (Moura & Lanner, 1998, p. 14).

### **Episódio III – Atividade Orientadora de Ensino “No Egito Antigo”**

A AOE “No Egito antigo” foi inspirada nas pesquisas de Catalani (2002), Dias (2007) e Perlin (2014) e apresenta a relação entre medir grandezas contínuas e o conceito de fração, a partir de uma adaptação do excerto de Heródoto apresentado por Caraça (Caraça, 2002) e retratado anteriormente nesse artigo.

### NO EGITO ANTIGO...

O rei Sesóstris repartiu todo o Egito entre os egípcios e deu a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Sendo ele um faraó justo, comunicou aos súditos que se a porção de terra fosse diminuída pelo Rio Nilo, era necessário procurar o faraó e lhe expor o que tinha acontecido a sua terra e que seriam enviados medidores ao local para medir a terra a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra.

*Como realizar a distribuição da terra entre as famílias numa época em que não se conhecia os instrumentos de medidas que temos hoje?*

O problema não termina aí...

No ano de 1852 a.C algumas famílias egípcias tiveram sua porção de terra reduzida devido à cheia do Rio Nilo. Assim, solicitaram ao faraó Sesóstris que enviasse medidores ao local para que pudessem fazer o pagamento dos tributos de forma justa, conforme o que tivesse ficado de terra.

*Com o instrumento de medida, utilizado pelo seu grupo, como representar a terra que ficou após a cheia do rio Nilo?*

A situação desencadeadora de aprendizagem foi apresentada aos professores e, para seu desenvolvimento, disponibilizamos materiais diversos como: rolo de barbante, fita decorativa, papel pardo, cartolinas. A ideia era que cada grupo buscasse uma forma representar a divisão da terra sem utilizar instrumentos de medição ou unidades do SI<sup>3</sup>. Os dois encontros seguintes foram destinados para a resolução, debate e elaboração coletiva da síntese sobre os elementos presentes na AOE – “No Egito antigo”. No registro da resolução dessa situação desencadeadora

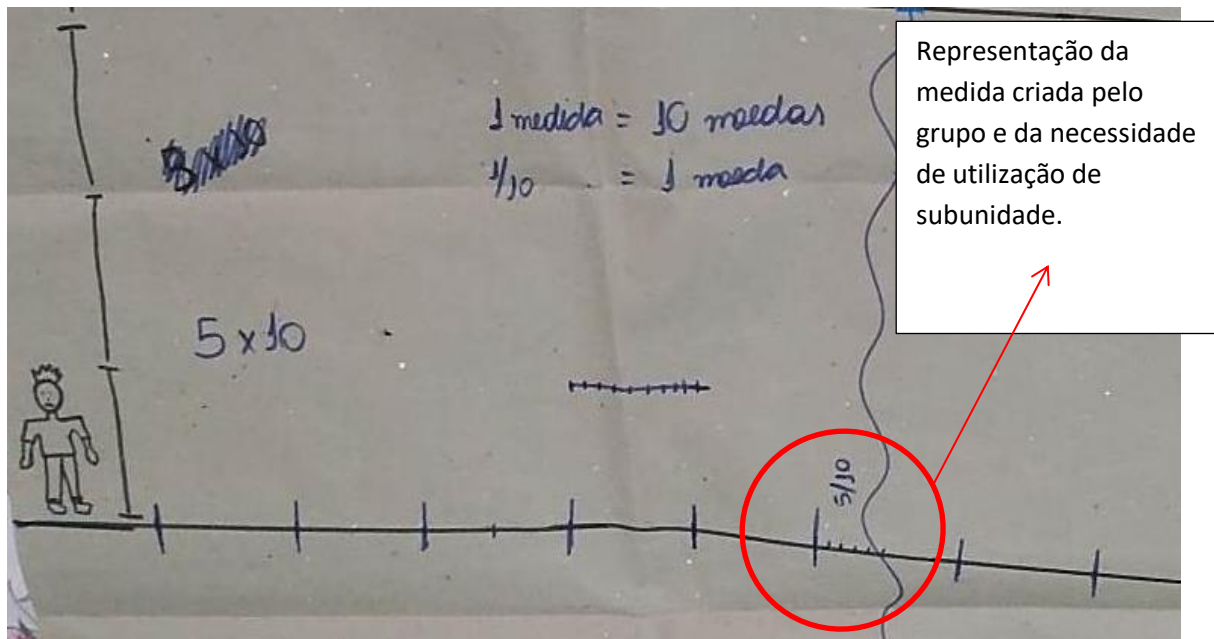
---

<sup>3</sup> Sistema Internacional de Unidade.

os professores dos quartos anos revelaram a necessidade de estabelecer uma unidade de medida para dividir as terras às margens do Rio Nilo.

Imagem 1.

*Resolução da AOE - No Egito antigo. Registro dos professores dos 4º anos (Zeferino, 2016, p. 91)*



O grupo utilizou como referência de unidade de medida a representação do tamanho de figura humana, que denominaram “estatura do rei”. A partir da elaboração dessa unidade de medida, o grupo realizou a marcação no papel para indicar o tamanho do terreno, que tinha correspondência de 5 reis (unidade de medida) de largura por 10 reis de comprimento. No decorrer da atividade coletiva de resolução, ao se debruçarem sobre a questão de como representar o comprimento da porção de terra, antes da cheia e depois da cheia do rio Nilo, os professores chegaram à constatação da insuficiência dos números inteiros para a resolução da situação apresentada quando se depararam com a não reprodução da unidade uma quantidade

inteira de vezes no objeto a ser medido, o que originou um dilema. Assim, depararam-se com a necessidade das subunidades, ou seja, a divisão da unidade em partes iguais (Imagem 1).

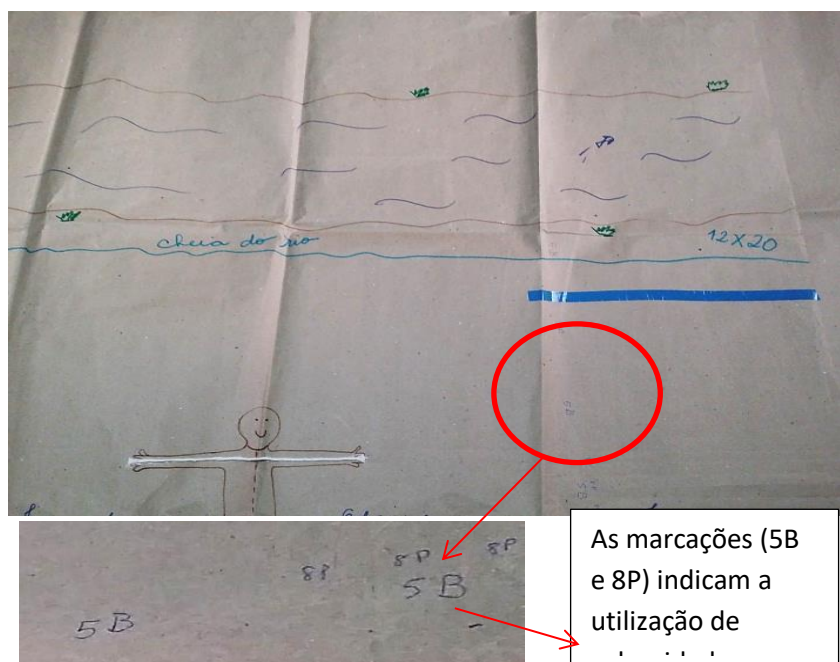
Segundo Caraça (1989), ao nos depararmos com uma situação de dilema é que avançamos a níveis superiores de conhecimento, pois a formulação de caminhos, diante de uma dificuldade, possibilita a compreensão e apropriação do conceito. A partir dessa constatação, ou seja, da não reprodução da unidade uma quantidade inteira de vezes no objeto a ser medido, foi que o grupo propôs a criação de subunidades:

Com a cheia do rio, observou-se que a água poderia invadir uma medida não exata de um rei, então pensamos em subdividir essa medida em 10 considerando os dedos das nossas mãos (registro dos professores dos quartos anos, E - 8, □).

Da mesma forma, o grupo de professores dos quintos anos também criou uma unidade padrão de medida, chamada braçada.

Imagem 2.

*Resolução da AOE - No Egito Antigo. Registro dos professores dos 5º anos (Zeferino, 2016, p. 93)*



Para o enfrentamento do conflito sobre a insuficiência dos números naturais para a quantificação da grandeza contínua no processo de medição, esse grupo propõe:



Utilizamos a braçada como padrão, dividimos a braçada em palmos e os palmos em polegadas.

1 braçada = 8 palmos

1 palmo = 10 polegadas. (Registro dos professores dos quintos anos, E – 8, □)

Embora ambos os grupos tenham recorrido a novas unidades, na busca por subunidades, a situação desencadeadora de aprendizagem “No Egito antigo” possibilitou a compreensão de elementos essenciais do conceito de fração, criação de subunidade como estratégia para a quantificação de grandeza contínua. Isso permitiu a superação da ideia de fração como a quantificação discreta de partes já dadas de um inteiro, o que se relaciona com a simples observação das propriedades particulares e observáveis baseadas nas características do pensamento empírico sobre o ensino de frações.

Ao proporem a transformação dos objetos e a busca por sua explicação, tal como demonstrado em seus registros, os professores demonstraram aproximarem-se das particularidades do pensamento teórico uma vez que “a ação de construção e transformação do objeto mental constitui o ato da sua compreensão e explicação, o descobrimento da sua essência” (Davidov, 1988, p. 127).

#### **Episódio IV– Atividade Orientadora de Ensino “As Famílias Egípcias e o Pagamento de Impostos”**

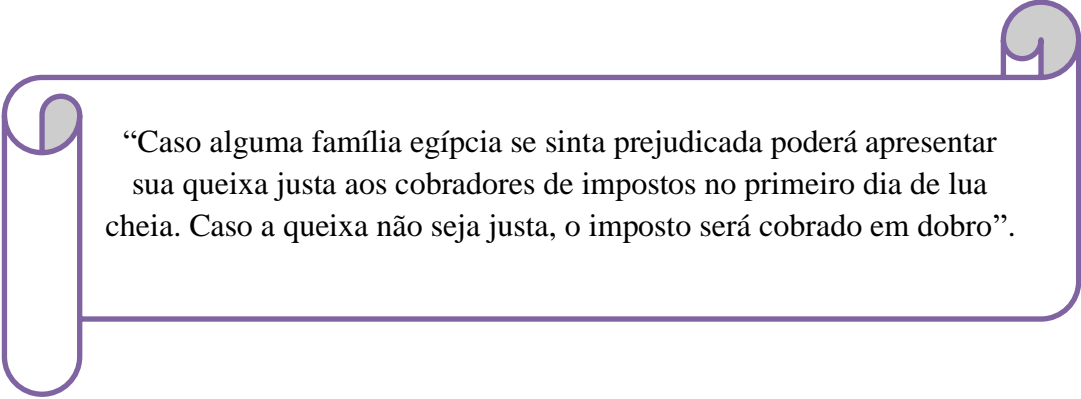
A AOE “As famílias egípcias e o pagamento de impostos” teve por objetivo abordar a relação entre a medição de grandezas contínuas e a comparação de frações, perpassando as ideias de equivalência de frações. Tal objetivo justifica-se uma vez que, como afirmam Rosa et al.(2013, p. 235), se atingem as “abstrações científicas próprias do conceito de fração, como um número racional, a partir do estudo das grandezas, não só discretas, mas também contínuas, na inter-relação das significações aritméticas, algébricas e geométricas.”.

## AS FAMÍLIAS EGÍPCIAS E O PAGAMENTO DE IMPOSTOS

No antigo Egito, os faraós eram considerados representantes divinos e eram os administradores máximos do Egito.

No governo do faraó Sesóstris, houve a divisão de terra entre todos os egípcios de modo que cada família recebia uma porção retangular igual de terra às margens do Rio Nilo. Para essa divisão, a unidade de medida padrão utilizada pelos agrimensores era o cúbito, que era o comprimento equivalente à distância compreendida entre a ponta do dedo médio e o cotovelo do faraó, depois era transferidos para uma corda vários cúbitos, separados por nós. Após a cheia do Nilo as terras eram medidas novamente e eram cobrados impostos proporcionais à terra restante para cada família.

Durante a troca de reinado do faraó Sesóstris para o seu sucessor Amenemés houve muitas reclamações sobre o pagamento dos impostos. Como Amenemés era um soberano muito justo, decidiu que a partir do ano seguinte todas as medições de terrenos seriam refeitas com novas medidas, mas em compensação o imposto desse ano seguiria as medições já feitas no reinado de Sesóstris. Então ordenou que todas as cordas com o cúbito do antigo faraó fossem queimadas e providenciadas novas cordas utilizando o seu cúbito. Para acalmar os egípcios, foi espalhado o seguinte comunicado divino:



“Caso alguma família egípcia se sinta prejudicada poderá apresentar sua queixa justa aos cobradores de impostos no primeiro dia de lua cheia. Caso a queixa não seja justa, o imposto será cobrado em dobro”.

Após a divulgação do comunicado, a família Abubakar se sentiu prejudicada. Os membros dessa família não acharam justo pagarem mais impostos do que os vizinhos Fenuku.

Decidiram então que fariam uma queixa. Mas para não correrem o risco de pagarem o imposto em dobro, fizeram cuidadosamente as medições do comprimento do seu terreno usando uma antiga unidade familiar: a khamsa. Sabiam que antes da cheia, o comprimento do terreno tinha 5 khamsa e após a cheia do Rio Nilo, que foi muito rigorosa, o comprimento do seu terreno era de 3 khamsa.

Procuraram os vizinhos Fenuku e apresentaram o problema. Os Fenuku ouviram a queixa e também realizaram suas medições com a sua unidade familiar: a sabaa. O terreno dos Fenuku tinha o comprimento de 7 sabaa antes da cheia e após a cheia do rio Nilo, o comprimento do seu terreno foi de 4 sabaa.

Com essas informações os Abubakar tiveram a certeza de que estavam certos em realizar a queixa. Porém, os Fenuku não concordaram e achavam que tinham sido mais prejudicados pela cheia do Nilo!!!

*Os Abubakar tinham razão? Eles devem fazer a queixa aos cobradores de impostos?*

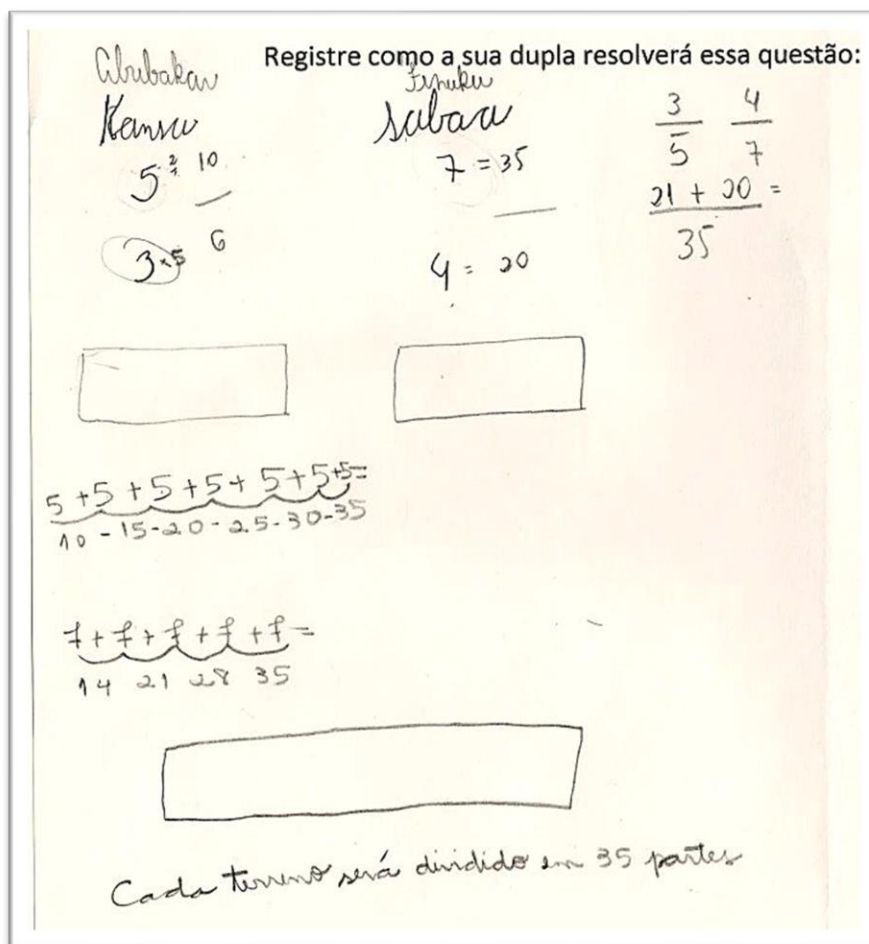
*Vamos ajudá-los a resolver essa dúvida utilizando os conhecimentos matemáticos da época.*

Após a apresentação da história virtual, os professores buscaram em duplas a resolução da situação presente na AOE e depois socializaram com o coletivo a forma como chegaram à resolução. Na análise de algumas das soluções apresentadas, destaca-se a busca dos professores por compreenderem o sentido da comparação entre frações com denominadores diferentes. Nesse percurso, eles optam por não recorrerem ao algoritmo síntese que permitiria a comparação (calcular o mínimo múltiplo comum, “dividir pelo de baixo e multiplicar pelo de cima”). Nessa busca pela compreensão do sentido de comparar frações, os professores recorreram à representação geométrica das frações a serem comparadas, que representavam os terrenos divididos em quantidade diferente de partes. Destacamos a seguir a soluções apresentadas pelas professoras Ana e Fátima.

No registro da professora Ana observamos inicialmente, na parte superior da página (Imagem 3), uma primeira tentativa da utilização do algoritmo da adição de frações com denominadores diferentes. Parece não ficar claro para professora que esse procedimento passa pelas frações equivalentes das frações originais. Desta forma, ao invés de comparar as novas frações, agora com mesmo denominador, ela indica a soma dos numeradores das duas frações encontradas, ela esboça a soma entre 21 e 20.

Imagem 3.

Registro da professora Ana, do 5º ano (Zeferino, 2016, p. 97)



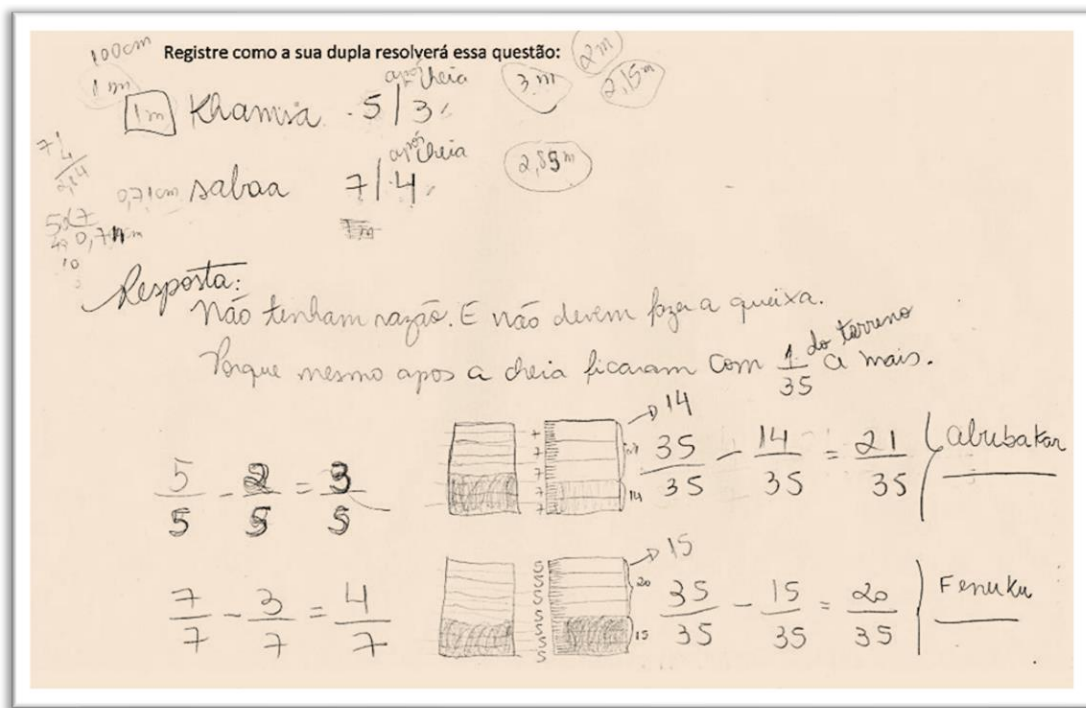
A seguir, na parte inferior do seu registro, ela demonstra uma tentativa de comparação por meio de áreas, no entanto, como podemos observar não finaliza a divisão das figuras e registra “cada terreno será dividido em 35 partes”. Essa última frase parece indicar que a

professora passa a compreender o sentido do mínimo múltiplo comum entre as frações na situação desencadeadora.

Já o registro da resolução da professora Fátima traz a representação da comparação de fração por meio da comparação de figuras e da posterior escrita de frações equivalentes correspondentes:

Imagem 4.

Registro da professora Fátima, 4º ano (Zeferino, 2016, p.95)



Como podemos observar na Imagem 4, a professora Fátima parte da representação de dois inteiros iguais, divididos em quantidades diferentes de partes – respectivamente 5 partes e 7 partes. A seguir, considera 3 partes do inteiro dividido em 5 partes; e considera 4 partes do inteiro que está dividido em 7 partes. Nesse ponto, a professora demonstra perceber a impossibilidade de comparar “pedaços” de tamanhos diferentes do inteiro. Para dar conta desse impasse, busca uma forma de dividir 5 e 7 de modo que os inteiros possam ficar divididos em partes de mesmo tamanho. Assim, para o inteiro dividido em 5 (por linhas horizontais) ela divide cada uma das cinco partes em 7, resultando em 35 partes. Da mesma forma, cada parte

do inteiro que estava dividido em 7 é também dividida em 5 linhas, resultando também em 35. Com este procedimento a professora Fátima consegue dividir cada um dos dois terrenos em 35 partes de mesmo tamanho, o que lhe permite comparar os terrenos das famílias Abubakar e Fenuku. Ou seja, a comparação de frações foi realizada por meio da equivalência de frações que recorreu à representação gráfica da situação.

No entanto, é importante que se destaque que a superação da utilização decorada do algoritmo, ancorada no pensamento empírico, e sua posterior compreensão aconteceu de forma mediada pela formadora. A princípio, os professores demonstraram grande resistência em não utilizar a regra para determinar a fração equivalente o que só foi possível por meio da ação intencional da formadora em favorecer a exploração e compreensão da fração equivalente:

Na resolução da AOE “As famílias egípcias e o pagamento de impostos”, os professores argumentaram que a proposta estava muito complexa, pois não conseguiam pensar na resolução da fração equivalente sem o uso da regra. (pesquisadora, E – 11, 🗨️)

A resolução mediada da situação desencadeadora de aprendizagem apresentada pôde auxiliar o grupo de professores na compreensão de regras e algoritmos acerca dos números fracionários que eram, até então, utilizados de forma empírica, apartada de seu significado social. A compreensão da necessidade que motivou a produção do conceito ancorada em elementos de sua gênese histórica permitiu a apropriação pelos professores de aspectos do conhecimento científico do conceito que favoreceram o desenvolvimento do pensamento teórico. Nesse sentido, a AOE - As famílias egípcias e o pagamento de impostos, ao permitir a “transformação do saber em teoria desenvolvida mediante dedução e explicação; elaboração por meio da análise do papel e da função de certa relação entre as coisas no interior de um sistema” (Rosa, Moraes & Cedro, 2010, p. 75) favoreceu que os professores desenvolvessem elementos do pensamento teórico sobre frações.

## Considerações finais

Tivemos por objetivo ao longo desse artigo destacarmos e analisarmos ações de formação de professores desenvolvidas no decorrer da pesquisa de Zeferino (2016) e que favoreceram o desenvolvimento de aspectos do pensamento teórico dos professores sobre o conceito de fração. Para isso, trouxemos aspectos da fundamentação teórica histórico-cultural da pesquisa; algumas das implicações desse referencial para a organização do ensino de frações; por fim, apresentamos e analisamos duas atividades orientadoras de ensino que permitiram aos professores atribuírem novos sentidos à relação entre medição, grandezas contínuas e equivalência de frações, com vistas ao desenvolvimento de elementos do pensamento teórico sobre o conceito.

As ações de formação, desenvolvidas por meio de um experimento didático, apoiaram-se no conceito da Atividade Orientadora de Ensino que, ao ser adotado como proposta de organização da atividade de ensino e de aprendizagem, se mostrou como desencadeador da apropriação do conceito e do desenvolvimento de elementos do pensamento teórico sobre o conceito da fração. Para a elaboração das situações desencadeadoras de aprendizagem foi essencial o estudo de aspectos históricos e conceituais do conceito da fração que permitiram a explicitação de elementos de sua essência e a superação da simples observação das propriedades aparentes e particulares do conceito, características do pensamento empírico.

Um dos aspectos evidenciados durante o desenvolvimento da pesquisa foi o quanto a metodologia proposta no curso, fundamentadas na Teoria Histórico-cultural, Teoria da Atividade e na Atividade Orientadora de Ensino, influenciou não só a aprendizagem do conceito de fração, mas, sobretudo, criou condições para garantir a mudança no tipo de pensamento dos docentes. A análise dos dados apresentados neste artigo nos permite afirmar que a compreensão dos professores sobre o conceito de fração se limitava inicialmente à quantificação discreta, não estabelecendo relação com a quantificação contínua e, desta forma,

limitando a compreensão do conceito aos limites do pensamento empírico. Para contrapor essa realidade, dentro da perspectiva histórico-cultural e da teoria da atividade, foram apresentadas situações desencadeadoras de aprendizagem para o desenvolvimento do conceito de frações, ancoradas na construção histórica do conceito. Isto porque entendemos que, desse modo, os elementos necessários para a concepção do conceito vislumbram a produção historicamente construída a partir da necessidade humana.

A análise da AOE “No Egito Antigo”, revelou que a compreensão de elementos essenciais do conceito de fração passa pela organização de ações que favorecem o desenvolvimento do pensamento teórico em relação ao conceito, tais como a criação de subunidade e a comparação de grandezas, que permitiram a superação da simples identificação das propriedades particulares e observáveis do conceito. Para isso, foi fundamental o apoio à síntese histórica do conceito a qual evidenciou que alguns elementos essenciais do conceito devem ser ensinados.

Já a AOE - As famílias egípcias e o pagamento de impostos, ao focar a relação entre o conceito de fração, a medição de grandeza contínua e a equivalência das frações, trouxe elementos que revelaram como os professores são capazes de superar o uso de regras e algoritmos compreendidos de forma empírica, quando colocados diante da necessidade do conceito. A transformação do objeto que resultou na comparação das frações aproxima-se de características do pensamento teórico. Conforme Davidov (1988) o conceito deve advir das teses gerais da área do saber, e não dos casos particulares. É necessário buscar a célula, a gênese e a essência do conceito.

Retomando a questão de investigação acerca da relação entre o conceito de Atividade Orientadora de Ensino e o desenvolvimento do pensamento teórico do professor sobre o conceito de fração, podemos afirmar diante dos dados analisados que o conceito de Atividade Orientadora de Ensino, quando presente no processo de formação e organização do ensino,



pode favorecer a compreensão de elementos essenciais do conceito e, nesse sentido, favorecer a superação do pensamento empírico para o pensamento teórico, ao mobilizar os docentes a reverem o sentido de sua atividade em busca da compreensão das ações desenvolvidas na resolução das situações propostas. Nesse sentido, colocar os professores diante de situações desencadeadora de aprendizagem produzidas a partir da síntese histórica do conceito possibilitou o movimento de transformação do pensamento o que, conforme Davidov (1988), ocorre a partir da compreensão das necessidades que surgem não unicamente da observação, mas, sobretudo, da análise e sistematização do fenômeno, passando pelo movimento de análise, reflexão e planificações das ações.

Tal forma de conceber a formação docente assume-a como processo de aprendizagem docente e, portanto, tanto como um meio que promove o desenvolvimento quanto como o próprio processo desse desenvolvimento, pois é na atuação docente ao ter como referência a organização do ensino que o professor constitui-se como professor (Moretti & Moura, 2011). Assim, a aprendizagem docente pode resultar de uma constante busca mediada de novas ações que reflitam novas apropriações teóricas do professor na articulação entre a teoria e a prática na resolução coletiva de situações desencadeadoras de ensino ancoradas na história do conceito, com vistas à organização do ensino de matemática. Nesse processo, ações de formação de professores que considerem aspectos da necessidade do conceito ancorados na sua história e problematizem o conhecimento empírico de algoritmos pouco compreendidos pelos professores podem favorecerem o desenvolvimento de aspectos do pensamento teórico dos professores sobre o conceito de fração e, ao mesmo tempo, contribuir para uma ação docente mais autônoma e promotora do desenvolvimento do pensar teórico de professores e estudantes.

## Referências

- Abrahão, A. M. C. (2016). *Frações e Decimais: compreender para ensinar números racionais. Perspectivas da Educação Matemática*, v. 9, n. 21.
- Caraça, B. de. (1989). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 4 ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.
- Caraça, B. de J. (2002). *Conceitos fundamentais de matemática*. 9 ed. Lisboa: Gradiva.
- Catalani, E. M. T. (2002). *A inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual da fração* [Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade de Campinas]. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/252233>
- Cedro, W. L.; de Moraes, S. P. G.; da Rosa, J. E (2010). A Atividade de Ensino e o Desenvolvimento do Pensamento Teórico em Matemática. *Ciência & Educação*, v. 16, n. 2, p. 427-445.
- Cedro, W. L. (2008). *O motivo e a atividade de aprendizagem do professor de Matemática: uma perspectiva histórico-cultural*. [Tese de Doutorado em Educação, Universidade de São Paulo]. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-17122009-080649/pt-br.php>
- Davidov, V.V. (1982). *Tipos de generalización em la enseñanza*. Havana: Pueblo y Educación.
- Davidov, V.V. (1988). *La enseñanza escolar el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental*. Moscú: Editorial Progreso.
- Dias, M. S & Moretti, V. D. (2011). *Números e operações: elementos lógico-históricos para atividade de ensino*. Curitiba: Ibpex.
- Dias, M S. (2007). *Formação da imagem conceitual da reta real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógica-histórica*. [Tese de Doutorado em Educação, Universidade de São Paulo]. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-10102007-145627/pt-br.php>
- Leontiev, A. N. (1978). *O desenvolvimento do psiquismo*. Lisboa: Horizonte Universitário.
- Leontiev, A. N. (1983). *Actividad, consciência, personalidade*. Ciudad de La Habana: Pueblo y Educación.
- Magina, S. & Campos, T. (2008). A fração na perspectiva do professor e do aluno das séries iniciais da escolarização brasileira. *Boletim de Educação Matemática*, São Paulo, v. 21, n. 31.
- Marx, K. (1984). *O Capital: Crítica da Economia Política*. Livro I, v. I, 9. ed. São Paulo: Difel.
- Mocrosky, L. F. et al. (2019). Frações na Formação Continuada de Professoras dos Anos Iniciais: fragmentos de uma complexidade. *Bolema*, Rio Claro, v. 33, n. 65, p. 1444-1463, Dec.
- Moretti, V. D. (2007). *Professores de Matemática em atividade de ensino: uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente*. [Tese de Doutorado em Educação, Universidade de São Paulo]. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-05102007-153534/pt-br.php>

- Moretti, V. D. & Moura, M. de. O. (2011). Professores de Matemática em Atividade de Ensino: Contribuições da Perspectiva Histórico-Cultural para a Formação Docente. *Ciência & Educação*, v. 17, n. 2, p. 435-450.
- Moura, M. O. (Org.). (1996). *Controle da variação de quantidades. Atividade de ensino*. São Paulo: Universidade de São Paulo.
- Moura, M. O. (2000). *O educador matemático na coletividade de formação: uma experiência com a escola pública*. [Tese de Livre Docência em Educação, Universidade de São Paulo].
- Moura, M. O. (2004). Pesquisa colaborativa: um foco na ação formativa. In: Barbosa, R. L. (Org.). *Trajetórias e perspectivas na formação de educadores*. Marília-SP: Ed. Da Unesp
- Moura, M. O. (Org.). (2010). *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasília: Liber livros.
- Moura, M. O. & Cedro, W. L. (2012). *Possibilidades Metodológicas na Pesquisa em Educação Matemática: o experimento didático*. *Educativa*, 15.1: 25-38.
- Moura, M. O. & Lanner de M. A. R. (1998). *Escola: Um Espaço Cultural. Matemática na Educação Infantil: Conhecer, (re)criar – Um modo de lidar com as dimensões do mundo*. São Paulo: Diadema/SECEL.
- Perlin, P. (2014). *A formação do professor dos anos iniciais do ensino fundamental no movimento de organização do ensino de fração: Uma contribuição da Atividade Orientadora de Ensino*. [Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Federal de Santa Maria]. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/handle/1/7129>
- Rosa, J. E. et al. (2013). *Relações entre as proposições para o ensino do conceito de fração com base no ensino tradicional e na Teoria Histórico-Cultural*. *REVEMAT*. Florianópolis, SC: Ed. Especial (dez.), v.08, p. 227-245.
- Rubtsov, V. (1996). *A atividade de aprendizado e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares*. In: Garnier, C.; Berdnarz, N.; Ulanovskaya, I. (Org.). *Após Vygotsky e Piaget: perspectivas sociais e construtivista escolas russa e ocidental*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Vigotski, L. S. (1988). *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem / Lev Semenovich, Alexander Romanovich Luria, Alex N. Leontiev; Tradução Maria da Penha Villalobos*. – São Paulo: Ícone: Editora da Universidade de São Paulo.
- Vigotski, L. S. (2007). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. In: Vigotsky, L.S. *Organização Michael Cole.... [et al.] tradução José cipolla Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange astro Afeche*. 7ed. São Paulo: Martins Fontes.
- Vigotski, L. S. (2010). *A construção do pensamento e da linguagem; Tradução Paulo Bezerra*. 2ª. Ed./ 3ª. Tiragem. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes.
- Zeferino, L. C. (2016). *Aprender A Ensinar Frações A Partir Do Conceito De Atividade Orientadora De Ensino: Um Estudo Com Professores De Quartos E Quintos Anos Do Ensino Fundamental*. [Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Federal de São Paulo]. Disponível em: <http://repositorio.unifesp.br/handle/11600/46976>

Recebido em: 21/04/2020

Aprovado em: 15/05/2020