ISSN 1983-3156
A2

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p*483-510*

O desenvolvimento do pensamento algébrico: o papel da congruência semântica na elaboração de problemas aditivos por discentes

The development of algebraic thinking: the role of semantic congruence in students' elaboration of additive problems

El desarrollo del pensamiento algebraico: el papel de la congruencia semántica en la elaboración de problemas adictivos por estudiantes

Celia Finck Brandt[1]
Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG)
Doutora em Educação Científica e Tecnológica - UFSC
https://orcid.org/0000-0002-1620-3633
Méricles Thadeu Moretti [2]
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)
Doutor em Didática da Matemática pelo Université de Strasbourg, França
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873
Carine Scheifer [3]
Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG)
Mestre em Educação - UEPG
https://orcid.org/0000-0002-1104-2017
Fátima Aparecida Queiroz Dionizio[4]
Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG)
Doutora em Educação - UEPG
https://orcid.org/0000-0003-3006-8447
Ettiène Cordeiro Guérios[5]
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Doutora em Educação - UNICAMP
https://orcid.org/0000-0001-5451-9957

Resumo

Este artigo apresenta os resultados de uma investigação voltada para o papel da congruência semântica na elaboração de problemas aditivos por alunos, à luz das ideias de Raymond Duval, relacionadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico. A pesquisa foi realizada a partir da aplicação de um instrumento de coleta de dados a noventa e quatro alunos do sétimo, oitavo e

[1] brandt@bighost.com.br
[2] mthmoretti@gmail.com
[3] carine.scheifer@gmail.com
[4] faqdionizio@uepg.br
[5] ettiene@ufpr.br

nono anos de escolas públicas, com o objetivo de analisar a manifestação do fenômeno da congruência semântica na atividade de elaboração de problemas. Neste artigo, apresentamos uma análise das respostas dos alunos para uma questão que solicita a elaboração de problemas. Os problemas elaborados pelos alunos apresentam a estrutura do campo conceitual de problemas aditivos de Gérard Vergnaud. Os resultados encontrados evidenciaram que a essa proposta, além de apresentar contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico, enfrenta o fenômeno da congruência semântica, que não pode ser ignorado. Para elaborar problemas, conforme a proposta de Duval, é preciso levar em consideração o fenômeno da congruência semântica, que se reflete diretamente na designação das relações algébricas oriundas dos encaminhamentos das soluções dos problemas.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, Álgebra, Ideias de Duval.

Abstract

This article presents the results of an investigation focused on the role of semantic congruence in students' elaboration of addictive problems, in the light of Raymond Duval’s ideas, related to the development of algebraic thinking. The research was carried out from the application of a data collection instrument to ninety-four students from the seventh, eighth, and ninth grades of public schools, aiming to analyze the manifestation of the phenomenon of semantic congruence in the activity of elaboration problems. In this article, we present an analysis of the students' answers to a question that requests the elaboration of problems. The problems that the students elaborate present the structure of Gérard Vergnaud’s conceptual field of additive problems. The results showed that this proposal, besides contributing to the development of algebraic thinking, faces the phenomenon of semantic congruence, which cannot be ignored. To elaborate problems, according to Duval’s proposal, it is necessary to consider the phenomenon of semantic congruence, which is directly reflected in the designation of algebraic relations arising from the forwarding of solutions to problems.

Keywords: Algebraic thinking; Algebra, Duval's ideas.

Resumen

Este artículo presenta los resultados de una investigación centrada en el papel de la congruencia semántica en la elaboración de problemas adictivos por parte de los estudiantes, a la luz de las ideas de Raymond Duval, relacionadas con el desarrollo del pensamiento algebraico. La investigación se llevó a cabo a partir de la aplicación de un instrumento de recolección de datos a noventa y cuatro estudiantes de los grados séptimo, octavo y noveno de escuelas públicas, con el objetivo de analizar la manifestación del fenómeno de la congruencia semántica en la actividad de elaborar problemas. En este artículo presentamos un análisis de las respuestas de los estudiantes a una pregunta que solicita dicha elaboración. Los problemas que los alumnos engendran presentan la estructura del campo conceptual de problemas aditivos de Gérard Vergnaud. Los resultados mostraron que esta propuesta, además de contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico, enfrenta el fenómeno de la congruencia semántica, que no puede ser ignorado. Para elaborar problemas, de acuerdo con la propuesta de Duval, es necesario considerar el fenómeno de la congruencia semántica, que se refleja directamente en la designación de relaciones algebraicas que surgen del avance de soluciones a problemas.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, Álgebra, Ideas de Duval.

Duval (2012)[6] apresenta cinco ideias que considera importantes no processo de ensino da álgebra. São elas: 1) não são as letras que são importantes, mas as operações discursivas de designação dos objetos feitas por meio da língua natural ou formal; 2) para compreender como representar, por meio de uma sentença algébrica, um enunciado de um problema, ou as heurísticas de resolução, não devemos propor apenas a resolução de problemas, mas a elaboração de problemas; 3) deve-se propor, no ensino, a resolução de problemas com recurso a uma representação auxiliar condicional; 4) para resolver problemas reais, não são as equações que são úteis, mas sim as fórmulas, que codificam o termo genérico, dando lugar às medidas; 5) é preciso propor aos alunos listas abertas de números, para a identificação da ocorrência das letras na determinação do padrão de regularidade das relações entre os elementos das listas.

Na pesquisa objeto deste artigo, os autores propuseram-se a investigar o papel da congruência semântica na elaboração de problemas aditivos por alunos em situação da aprendizagem. Com esse objetivo, foi elaborado um instrumento contendo uma questão que procurava contemplar a elaboração de problemas por alunos. Os participantes da pesquisa foram alunos do sétimo, oitavo e nono anos de escolas públicas das cidades de Arapoti, Araucária e Ponta Grossa, no estado do Paraná. A elaboração de problemas foi solicitada a 33 alunos do sétimo ano de uma escola de Ponta Grossa; 30 alunos do oitavo ano de uma escola de Arapoti; e 30 alunos do nono ano de uma escola de Cascavel. Esses alunos serão identificados pela denominação Sn, em que n indica um número que vai de 1 a 93. Temos, deste modo, alunos S1 a S33 da escola de Ponta Grossa, S34 a S63 da escola de Arapoti, e S64 a S93 da escola de Cascavel.

[6] Palestra proferida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso, em 2012.

Cabe evidenciar que este artigo centra a sua atenção na elaboração dos problemas e na manifestação do fenômeno da congruência semântica, considerando sua influência na resolução de problemas que envolvem relações algébricas.

Elaboração de problemas segundo Raymond Duval

Segundo Duval et al. (2013, p. 26), os matemáticos veem a resolução de problemas como uma atividade emblemática – ou seja, "fazer matemática é resolver problemas". Porém, ainda segundo os autores, mesmo que o professor explique a solução de um determinado problema, isto não prepara, de maneira alguma, os alunos para resolverem outros problemas, até mesmo aqueles que utilizam o mesmo conhecimento do problema resolvido anteriormente. Os problemas propostos aos alunos normalmente são construídos para serem resolvidos pela aplicação de um ou vários conhecimentos matemáticos determinados por quem os elabora. Porém, para que os alunos realmente entendam o que é um problema, e para que se tornem capazes de resolvê-lo, é necessário levá-los a descobrir como fazer elaborações a partir de um conhecimento matemático. Para evitar que os alunos elaborem problemas apenas reproduzindo exemplos já trabalhados em sala de aula, os autores apontam que é necessário organizar sequências de tarefas específicas, em função de variáveis cognitivas concernentes à "face oculta da atividade matemática".

Convém evidenciar que esse caminho leva em conta um ponto de vista cognitivo. Como consequência, é preciso considerar a face oculta da atividade matemática, voltada para o desenvolvimento de "gestos intelectuais que constituem o caráter cognitivo e epistemológico específico da matemática" (Duval et al., 2013, p. 17).

Segundo Duval et al. (2013, p. 18):

> Para compreender bem o impacto das especificidades da matemática em relação aos processos de compreensão na aprendizagem, é preciso considerar as duas faces da atividade matemática. Existe aquela que eu chamaria de face exposta. Ela corresponde aos objetos matemáticos (números, funções, equações, polígonos, poliedros etc.), às

> suas propriedades, às fórmulas e algoritmos aos quais eles dão origem, às demonstrações. O ensino se faz no quadro institucional da escolha de certos conhecimentos de base desses objetos que todos os alunos devem ter adquirido ao término do currículo. Esses conhecimentos de base são decompostos em uma sequência de conteúdos pré-requisitos, cujas aprendizagens são distribuídas ao longo de vários anos. A outra face é a face oculta. Ela corresponde aos gestos intelectuais que constituem o caráter cognitivo e epistemológico específicos da matemática. [...] face "oculta" porque ela não é direta e imediatamente perceptível em relação ao que observamos do trabalho dos alunos em sala de aula.

Duval (2012) defende que a elaboração de problemas pelo aluno facilita a compreensão de como transformar em uma equação um problema a partir de uma formulação em língua natural. Esse processo precisa vir acompanhado de procedimentos que devem contemplar dois tipos de variações relacionadas: (1) a descrição completa da operação matemática a escrever; e (2) as várias maneiras de suprimir um dado do problema para que os dados restantes permitam encontrá-lo. Como exemplo, podemos citar: os dados numéricos 3, 5 e 8, e as relações a serem estabelecidas entre esses dados: + e =. Com esses dados, é possível estabelecer a relação de igualdade: 3 + 5 = 8, que pode ser resultante do problema: "Tenho 3 balas, ganhei 5 balas e fiquei com 8 balas". Outros problemas podem ser solicitados a partir de variações ou supressões. Por exemplo, com os dados 3, 8, + e =. Nesse caso, com a supressão do valor 5, a igualdade estabelecida poderá ser: 3 + ... = 8, e o problema resultante seria: "Tenho 3 balas, ganhei algumas e fiquei com 8 balas". Com base nas variações e supressões exigidas para a elaboração de problemas, e no desenvolvimento do pensamento algébrico, propusemos uma questão aos alunos, que solicitava a elaboração de problemas. Essas variações podem ser verificadas nas questões propostas aos alunos, que podem ser observadas na Figura 1, a seguir.

Figura 1.

Questão referente à ideia de elaborar problemas

3. Observe os problemas a seguir para completar a tabela.

	75	30	105	João tinha R$ 75,00. Ganhou R$ 30,00. Ficou com R$ 105,00.
	80	___	200	João tinha R$ 80,00. Ganhou algum valor e ficou com R$ 200,00. Quanto ganhou?
	___	7	16	Leo tinha algumas bolinhas. Deu 7 para seu amigo e ficou com 16. Quantas bolinhas Leo tinha?
	Agora elabore outros problemas com os valores apresentados na tabela. Em seguida, resolva-os:			
A	__	40	90	____
B	85	__	205	____
C	30	120	__	____

Os três problemas aditivos que se encontram nas três primeiras linhas da Figura 1 foram trabalhados nas turmas antes da aplicação das questões de elaboração de problemas. Nas três últimas linhas, estão presentes os valores numéricos para os alunos elaborarem seus próprios problemas. Cada problema apresenta um valor faltante em uma das três posições: o primeiro, denominado de A na primeira posição, o B na segunda, e o C na terceira.

Tendo em vista considerações sobre a elaboração de problemas, e em consonância com aspectos cognitivos que envolvem este tipo de atividade, buscou-se apoio teórico em Gerard Vergnaud (1990), pois é preciso considerar que essa questão envolve problemas pertencentes ao campo conceitual aditivo. O campo conceitual aditivo é um dos dois grandes campos de estudo de Vergnaud (1990) na Teoria dos Campos Conceituais. O outro é o campo conceitual multiplicativo. Para Vergnaud (1998, citado por Moreira, 2002, p. 8), o campo conceitual é "um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição".

Pesquisadores têm investigado a aprendizagem matemática à luz da teoria dos campos conceituais. Significativa é a contribuição de Magina et al. (2008), com estudos acerca do desenvolvimento cognitivo de crianças em relação aos campos conceituais à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Nas palavras das autoras, essa teoria parte do princípio de que "existe uma série de fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento de conceitos e que o conhecimento conceitual deve emergir de dentro de situações-problema" (Magina et al., 2008, p. 6). Ou seja, para que haja a compreensão de um conceito, são necessários diversos tipos de situações, e um longo período para que um sujeito possa ter tal domínio. Também é importante considerar que cada situação irá contemplar diversos conceitos, e não apenas um, e por isso a Teoria trata de campos conceituais, e não de conceitos abordados de forma isolada.

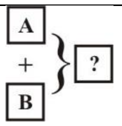
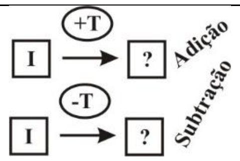
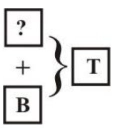
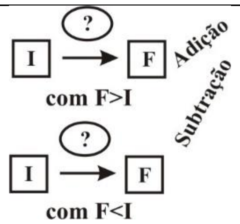
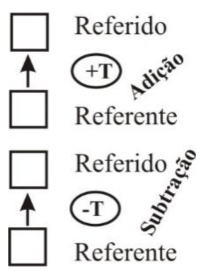
No campo conceitual aditivo, Vergnaud (1990) classifica os problemas conforme as dificuldades e os raciocínios requeridos para resolvê-los. Tais problemas podem ser classificados em três principais grupos: composição (também chamado parte-todo), transformação e comparação. Os problemas de composição estão relacionados a situações que compreendem a soma das partes para se obter o todo, ou à subtração de uma das partes para encontrar a outra. No caso dos problemas de transformação, há uma ideia temporal. Assim, parte-se de uma quantidade inicial, seguindo-se a uma transformação (para mais ou para menos), para se chegar ao estado final, com a quantidade alterada. Problemas de comparação referem-se às situações de comparação entre duas quantidades. Ainda há os problemas chamados mistos, que envolvem diferentes tipos de situações simultaneamente (Magina et al., 2008, p. 6). É necessário ainda explicar os tipos de problemas aditivos. Para a categorização dos problemas elaborados pelos alunos no instrumento de coleta de dados, utilizou-se como referência a classificação das relações aditivas de base, apresentadas por Vergnaud (1990, p. 152):

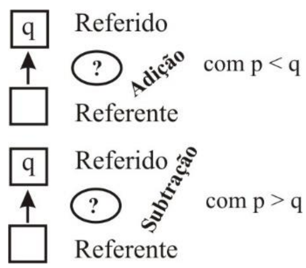
I. A decomposição de duas medidas em uma terceira
II. A transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma medida final
III. A relação (quantificada) de comparação entre duas medidas
IV. A decomposição de duas transformações
V. A transformação de uma relação
VI. A composição de duas relações

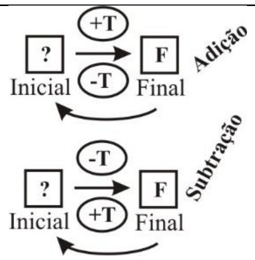
A partir dos estudos das estruturas aditivas de Gérard Vergnaud, as autoras Magina et al. (2008) apresentam alguns dos problemas com essa estrutura, especificando o nível de complexidade entre eles. Na Figura 2, pode-se observar alguns desses problemas, os chamados protótipos, os quais – segundo Magina et al. (2008), e Moretti & Brandt (2014) – as crianças dominam com maior facilidade.

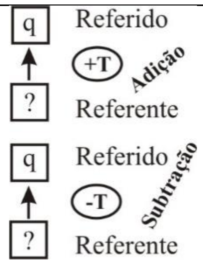
Figura 2.

Tipos de situação-problema segundo as estruturas aditiva de Gérard Vergnaud (Elaborado a partir de Magina et al., 2008, p. 51)

	Tipos de situação problema		
	Composição	Transformação	Comparação
Protótipo	 Todo desconhecido	 Estado final desconhecido	
1ª extensão	 Parte desconhecida (Probl. com inversão)	 Transformação desconhecida	
2ª extensão			 Referido desconhecido

<table>
<tr><td>3ª extensão</td><td></td><td></td><td>

Relação desconhecida</td></tr>
<tr><td>4ª extensão
(inversão)</td><td></td><td>

Estado inicial desconhecido
(problema com inversão)</td><td>

Referente desconhecido
(problema com inversão)</td></tr>
</table>

O nível de dificuldade vai aumentando conforme aumentam as extensões das estruturas aditivas, o que exige trabalho sistemático em sala de aula, para que as crianças possam avançar nessa compreensão, que geralmente não acontece de modo espontâneo. Os problemas elaborados pelos alunos tinham a estrutura de transformação e de parte-todo, considerados protótipos (PP e IT Quadro 2), e de 1a extensão (PT e IF Quadro 2) e 4a extensão (TF Quadro 2), que permitiram uma categorização conforme a Tabela 1, a seguir.

Tabela 1.

Categorização referente aos tipos de problemas elaborados pelos alunos

Categoria	Estruturas dos problemas
IT	Problema com estrutura de transformação conhecidos o Estado **I**nicial e o valor da **T**ransformação
IF	Problema com estrutura de transformação conhecidos o Estado **I**nicial e o Estado **F**inal
TF	Problema com estrutura de **T**ransformação conhecidos o valor da transformação e o Estado **F**inal
ITF	Problema com estrutura de transformação conhecidos o Estado **I**nicial, o valor da **T**ransformação e o Estado **F**inal
PT	Problema de Composição conhecido uma **P**arte e o **T**odo
PP	Problema de Composição conhecidas as duas partes (**P**arte e **P**arte)

Na realidade, os valores propostos para os alunos foram pensados para a elaboração de problemas do tipo TF (item A), IF (item B) e IT (item C). No entanto, essa estrutura não foi contemplada nos problemas elaborados pelos alunos. Foi o fenômeno da congruência semântica que comandou a elaboração desses problemas, conforme análises a serem apresentadas adiante. Isso significou que as variações e supressões sugeridas por Duval como procedimento para a elaboração de problemas têm que considerar a interferência do fenômeno da congruência semântica.

Para a elaboração da Tabela 2, foram consideradas as categorias supracitadas, conforme o problema elaborado pelo aluno.

Tabela 2.

Estrutura dos problemas elaborados pelo sujeito S18, S39, S71 e S88[7]

Sujeito	Problemas propostos (Quadro 1)				Problemas elaborados	Estrutura
S18	A	130	40	90	Rafael tinha 90 carrinhos, ganhou mais 40. Com quantos ficou?	IT
	B	85	120	205	Joel tinha r$ 205,00, gastou 85. Com quanto ele ficou?	IT
	C	30	120	150	Lucas tinha 120 bolinhas, ganhou mais 30. Com quantas ele ficou	IT
S39	A	____	40	90	Ana tinha uma certa quantidade de balas, deu 40 e ficou com 90. Quantas balas tinha?	TF
	B	85	120	205	Para comprar uma televisão eram necessários 205 reais, mas Rô só tinha 85 para a prestação. Quanto falta?	PT
	C	30	120	150	Juliana, para andar de lancha, foi comprar um óculos que custava um valor que o dinheiro seu e do amigo era perfeito para comprar. Quanto era o óculos?	PP
S71	A	50	40	90	Pedro tem 50 elásticos ganhou 40 e ficou com 90	ITF
	B	85	120	205	Carlos tem R$ 85,00. Ganhou R$ 120,00 de seu pai. Ele ficou com R$ 205,00.	ITF
	C	30	120	150	Maria tinha 30 pirulitos e ganhou 120 e ficou com 150 pirulito	ITF

Os três problemas elaborados com os dados do item A apresentam diferentes estruturas: um é do tipo TF (S39), outro é do tipo IT (S18), e outro ainda é do tipo ITF (S71). Cabe evidenciar que o problema de S39 segue a estrutura pensada, pois o valor faltante era o valor inicial. Por essa razão, os dois outros valores foram utilizados como valor de transformação

[7] Quadros de elaboração de questões pelos alunos digitados a partir das suas próprias respostas.

(deu 40) e valor final (ficou com 90). No entanto, S18 utilizou 90 como valor inicial, apesar de estar na terceira coluna (que seria o valor final); e o valor 40 como valor de transformação (ganhou 40). Já S71 resolveu o problema e utilizou a solução para elaborar o problema. Na realidade, o valor faltante (50) foi utilizado como valor inicial. Já os três problemas elaborados com os dados do item B apresentam estrutura IT (S18), PT (S39) e ITF (S71), e os 3 problemas elaborados com os dados do item C apresentam estrutura IT (S18), PP (S39) e ITF (S71).

No caso dos valores do item B, o problema elaborado por S18 utilizou o valor 205 como valor inicial, apesar de estar na terceira coluna (seria valor final); e o valor de 85 como valor de transformação (gastou 85), mas era o valor inicial. Já S39 utiliza o valor 205 como "todo" (era valor final), e o valor 85 como parte do "todo 205", ainda que fosse valor inicial. S71 procedeu igualmente ao que havia feito no problema A.

No caso dos problemas elaborados com os dados do item C, temos S18 que utilizou o valor 120 como valor inicial (seria o valor da transformação), e o valor 30 como valor de transformação (seria valor inicial). S39 utilizou os valores 30 e 120 como partes de um "todo"; na realidade, tratava-se do valor inicial e do valor de transformação, respectivamente.

As diferentes estruturas dos problemas elaborados nos levam a apontar que a variação de dados ou a sua supressão, como procedimento para a elaboração de problemas, conta com o fenômeno da congruência semântica. Cabe, por essa razão, esclarecer o que significa o fenômeno da congruência semântica, segundo Raymond Duval. Na sequência, seguiremos com análises dos problemas elaborados pelos alunos, os quais sofrem interferência do fenômeno de congruência semântica e, como consequência, se projetam na resolução desses problemas e na designação das relações algébricas presentes nessas resoluções.

O fenômeno da congruência semântica

Segundo Duval (1988), as representações que têm por referência o mesmo objeto colocam em cena a diferenciação entre sentido e referência. A referência depende dos objetos a serem representados, enquanto o sentido depende da significação atribuída ao registro utilizado para representar um objeto. Por exemplo, a palavra razão é um registro escrito (um significante), que pode ter por referência objetos distintos, dependendo da significação atribuída pelo sujeito. Se a significação for de uma pessoa que tem razão ou que está certa, o objeto de representação é um. Se a significação for de um quociente entre duas grandezas, a referência é a um objeto da área da matemática.

O sentido depende também da significação atribuída pelos sujeitos do conhecimento a diferentes registros (significantes), que têm por referência o mesmo objeto. É o caso, por exemplo, segundo Duval (1988), dos registros 4/2, (1+1), $\sqrt{4}$. O autor assevera que o primeiro registro exprime o número em função das regras de divisibilidade, e o segundo em função da recorrência à unidade. Se não houver conhecimento de determinadas regras ou propriedades, o objeto referenciado não será reconhecido.

A distinção entre significação e referência está relacionada ao princípio da substituição, que ocorre quando mudamos de sistemas semióticos para representar um mesmo objeto (por exemplo, linguagem algébrica e linguagem gráfica), ou quando permanecemos no interior do mesmo sistema semiótico de representação (por exemplo, em procedimentos de cálculo ou dedução).

A substituição entre duas expressões referencialmente equivalentes implica custo cognitivo. Esse custo também sofre a interferência de um outro fenômeno, no momento da substituição de registros pertencentes a sistemas semióticos diferentes: trata-se do fenômeno de congruência semântica. Isso significa que, entre dois registros de representação, há duas relações a considerar (Duval, 1988): a equivalência referencial e a relação de congruência semântica.

Dois registros podem ser referencialmente equivalentes, sem serem necessariamente congruentes. São necessárias três condições para que dois registros de representação sejam congruentes: a) correspondência semântica das unidades de significado; b) univocidade semântica terminal; c) mesma ordem das unidades de significado nos registros de partida e chegada.

Como exemplo, podemos citar os registros referencialmente equivalentes e não congruentes: escrita algébrica “xy > 0”, e “o produto de dois números é positivo”. Nesse caso, não existe univocidade semântica terminal, e nem correspondência semântica das unidades de significado entre a palavra “positivo” e o registro algébrico “>0”. Isso acarreta custo cognitivo para o sujeito converter uma representação de um registro em outra representação de um outro registro. Já não é o caso da sentença “Tenho 2 balas, ganhei 3 balas e fiquei com 5 balas” e da sentença matemática “2 + 3 = 5”.

As três condições para a congruência semântica estão presentes e, por essa razão, o custo cognitivo para a passagem de um registro para outro é baixo, praticamente automático.

A razão para apresentarmos essas questões relacionadas à equivalência referencial e ao fenômeno da congruência semântica entre representações referencialmente equivalentes deve-se à sua presença no momento da elaboração de problemas por alunos. A elaboração de problemas, por sua vez, tem a ver com o desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme o problema elaborado e conforme a solução apresentada para a sua resolução. Essas duas questões embasam as análises das respostas apresentadas pelos alunos, em atendimento à solicitação de elaboração de problemas a partir de variações e supressões, conforme exigência colocada por Duval para essa elaboração.

Análises dos resultados encontrados à luz da segunda ideia anunciada por Raymond Duval

As análises apresentadas a seguir compreendem os problemas elaborados pelos alunos. Duval (2012) sublinha a importância da elaboração de problemas pelos alunos. No entanto, essa elaboração não pode ser realizada de qualquer maneira. O autor reforça que essa atividade deve compreender a supressão de dados e a variação de dados ou operações. Por essa razão, propusemos os problemas e solicitamos a elaboração de outros, já variando dados e apresentando espaços em branco para a variação das operações (somar ou subtrair). Essa variação possibilitou que os alunos elaborassem outros problemas, cuja solução já encaminha para a utilização de letras, se a opção for a resolução algébrica. Por exemplo, o problema 1, apresentado por S88: "Ana tinha uma certa quantidade de bolas, deu 40 e ficou com 90, quantas bolas tinha?". Ele tem estrutura TF, mas com retirada do valor inicial desconhecido; assim, a sentença "x – 40 = 90" pode ser utilizada para designar as relações entre os dados numéricos do problema e a operação matemática (nesse caso, a estratégia utilizada é de natureza algébrica). No entanto, se o procedimento de resolução compreende a reversibilidade do pensamento, isto é, se perde na ida ganha na volta, a sentença correspondente à solução poderá ser "90 + 40 = x". Do mesmo modo, a sentença "x + 40 = 90", para designar as relações entre os dados do problema elaborado com os dados do item A por S71: "Pedro tem 50 elásticos ganhou 40 e ficou com 90". Aqui, a estrutura é ITF, mas com acréscimo ao valor inicial desconhecido. A solução aritmética para esse problema, com essa estrutura, pode ser "90 – 40 = 50", se o procedimento de diferença for utilizado (nesse caso, a reversibilidade do pensamento entra em ação operatória, pois ganhar na ida significa perder na volta), ou "40 +10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 90", ou "40 + x = 90", se o procedimento do complemento for utilizado (nesse caso, a comutatividade entra em jogo, pois somar alguns com 40 é o mesmo que somar 40 com alguns).

Esse problema pode ser analisado à luz da congruência semântica, pois os dados 40 e 90 foram utilizados na mesma ordem em que aparecem no quadro. No entanto, o valor 50, utilizado para a elaboração do problema, exigiu que S71 enfrentasse o fenômeno da não congruência semântica, pois exigiu que o valor 90, que estava no final, fosse utilizado por primeiro, para a retirada do valor 40, com obtenção do valor 50.

Os problemas elaborados foram diferentes, apesar da supressão proposta (ora supressão do valor inicial, ora do valor de transformação, e ora do valor final) e da variação dos valores numéricos. Foi interessante observar que os problemas protótipos não foram os que mais apareceram ("tenho, ganho, fico?" ou "tenho, perco, fico?", do tipo IT; ou ainda "tenho, tenho, tenho?" do tipo PP), mesmo que os dados não estivessem na mesma posição. A Tabela 3 apresenta a contabilização dos tipos de problemas cujas estruturas são do tipo TF, IF, IT, ITF, PT, PP e OUTROS.

Tabela 3.

Problemas do tipo TF, IF, IT, ITF, PT, PP e OUTROS para os problemas propostos A, B e C

	TIPOS	A	B	C
		TF	IF	IT
ELABORADOS	TF	35 (38%)	3 (3%)	3 (3%)
	IF	15 (16%)	48 (52%)	0 (0%)
	IT	18 (19%)	12 (13%)	62 (67%)
	ITF	14 (15%)	11 (12%)	7 (8%)
	PT	0 (0%)	2 (2%)	2 (2%)
	PP	0 (0%)	0 (0%)	6 (6%)
	Outros	3 (3%)	6 (6%)	4 (4%)
	Em branco	8 (9%)	11(12%)	9 (10%)

Os dados apresentados na Tabela 3 apontam que os problemas elaborados pelos alunos com os dados da Figura 1 não apresentavam a estrutura proposta. Considerando que os dados utilizados nos problemas não estavam na mesma ordem dos apresentados, a não ser os dados do problema C (ver última linha da Figura 1), inferimos que os alunos inverteram a posição dos dados, considerando-os ora valor inicial, ora valor de transformação, ora parte de um "todo", ou ora um "todo". As diferentes formas de utilização dos dados apontam para a presença do fenômeno da não congruência semântica, que é contornado conforme os conhecimentos dos alunos ou suas estratégias de resolução.

Observamos, na Tabela 4, três exemplos de problemas elaborados pelos alunos S18 e S57, que trazem à baila o fenômeno de congruência semântica.

Tabela 4.

Problemas que evidenciam o fenômeno da não congruência

S18	A	____	40	90	Rafael tinha 90 carrinhos, ganhou mais 40. Com quantos ficou?
S57	B	85	<u>120</u>	205	Para comprar uma televisão era necessário 205 reais, mas Rô só tinha 85 para a prestação. Quanto falta?
S57	C	30	120	<u>150</u>	Juliana, para andar de lancha, foi comprar um óculos que custava um valor que o dinheiro seu e do amigo era perfeito para comprar. Quanto era o óculos?

Os problemas apresentados na Tabela 4 evidenciam que o fenômeno da não congruência é contornado com a utilização de dados em qualquer ordem. Essa forma de proceder contribui também para contornar as diferentes competências (comutatividade, reversibilidade, entre outras), uma vez que os problemas protótipos são resolvidos com mais facilidade, por envolverem ações como ganhar ou perder a partir de um valor inicial, conforme resultados de pesquisas. Elaborados dessa maneira, basta retirar ou acrescentar algum valor ao valor inicial para obter o estado final. A resolução do problema necessita de uma mesma sentença matemática, cujas unidades significantes encontram-se na mesma ordem das unidades significantes do enunciado; existe correspondência semântica terminal e univocidade semântica (ganhar, perder, quanto era): 90 + 40 para o caso do problema apresentado por S18; 205 – 85 = para o caso do problema apresentado por S57; e 30 + 120 = 150 para o problema apresentado por S57.

Também foram apresentados outros tipos de problemas, com outra estrutura. Os resultados encontrados (ver Tabela 3) apontam que 15 alunos elaboraram problemas com estrutura IF utilizando os dados do item A, e 48 alunos utilizando os dados do item B.

Alguns exemplos de problemas do tipo IF elaborados pelos alunos podem ser visualizados na Tabela 5.

Tabela 5.

Problemas elaborados pelos sujeitos S20 e S25

Problema elaborado por S20 com os dados do item A	**Problema elaborado por S25 com os dados do item B**
Marcelo tinha 90 bolinhas perdeu 40. Quantas bolinhas sobraram?	Fulano tinha 85 pastéis, ganhou mais um tanto de seu chefe e ficou com 205. Quantos pastéis ele ganhou?

No caso em questão, o problema do tipo B já apresenta os dados de acordo com um problema de estrutura IF, pois o que está faltando é o valor do meio (no caso de um problema de transformação, estaria faltando o valor da transformação). No entanto, os dados do tipo A não estão na ordem de um problema com estrutura IF, pois o estado inicial não é dado. Mesmo assim, o aluno inverte a ordem dos dados e trata o valor 90 como estado inicial. S20 parte do valor 90, e considera o valor 40 como valor de transformação. Procedendo dessa forma, há elaboração de um problema protótipo: tem, perde, fica. Como o exercício pede tanto a elaboração como a solução, o problema apresentado já explicita o procedimento do complemento, que retira de um valor inicial certa quantidade (valor da transformação em problemas com estrutura de transformação), para obter o valor final. Para procedimentos algébricos de resolução, a sentença matemática correspondente para o problema do tipo A, com utilização do procedimento do complemento, seria: “40 + x = 90”, para o problema apresentado por S20, e “85 + x = 205”, para o problema apresentado por S25. Se o procedimento da diferença for utilizado, exigindo a reversibilidade do pensamento, as sentenças algébricas correspondentes seriam, nesta ordem, “90 – 40 = x” e “205 – 85 = x”.

Já não é o caso de S65, que elaborou o seguinte problema: “Larissa comprou 40 cards em um jogo e sua amiga uma certa quantidade que as deixou com 90. Quantos cards as duas compraram?”. Os dados desse problema foram tratados como partes (40 e x) de um todo (90); a estrutura do problema apresentado é PT. A ordem dos dados também é invertida: o problema inicia com uma das partes. Na realidade, o problema seria mais congruente se iniciasse com a parte desconhecida: “A amiga de Larissa comprou uma certa quantidade de cards e ela própria comprou 50 cards. Ao final, as duas juntas ficaram com 90 cards.” A formulação do problema por S65 contornou a comutatividade, pois fica mais fácil partir de 40 e ir acrescentando cards para atingir 90. Se o problema fosse elaborado respeitando a ordem dos dados, a comutatividade teria que ser invocada para encontrar a solução do problema: “$x + 40 = 40 + x$”.

A análise dos problemas elaborados e a designação das relações entre os dados numéricos e as operações induzem à utilização de letras para a indicação dos valores que foram suprimidos. Se o problema for elaborado pelo próprio aluno, a designação se tornará mais espontânea e natural, pois o problema já é elaborado de acordo com o procedimento de resolução.

Duval (1995) afirma que a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica de problemas com estrutura aditiva, apresentados por Vergnaud (1990), enfrenta o fenômeno da não congruência semântica. Para o autor, esse fenômeno pode estar relacionado às dificuldades apresentadas por crianças e alunos na resolução de problemas aditivos. Nessa perspectiva, Vergnaud (1990) argumenta que essas dificuldades são oriundas da estrutura dos problemas e do cálculo relacional exigido. Já para Duval (1995), as dificuldades são de outra natureza. Elas são oriundas do fenômeno da não congruência semântica, que se manifesta no momento da conversão dos dados do problema apresentados em linguagem natural, para a sentença aritmética ou algébrica correspondente. São argumentos diferentes para explicar a dificuldade das crianças na resolução de problemas aditivos. O argumento de Vergnaud diz respeito à estrutura do problema. Por conta dessa estrutura, o fenômeno da não congruência semântica pode se manifestar em maior ou menor grau. A noção de congruência semântica é ampla e pode ser utilizada em qualquer situação de aprendizagem matemática em que a operação cognitiva de conversão se faz necessária, enquanto a ideia avançada por Vergnaud (1990) sobre as dificuldades na resolução em certos problemas relacionando-as à estrutura desses problemas aplica-se exclusivamente para esses casos. Para os problemas aditivos essas duas noções não se contradizem, mas completam-se.

Por exemplo: no problema "Tenho 4, ganho 5, fico com 9", o fenômeno da não congruência não se manifesta, considerando aqui os três critérios exigidos para que a congruência semântica seja garantida: dados do enunciado aparecem na mesma ordem na redesignação verbal; existe univocidade semântica terminal (tenho, ganho, fico. a operação de adição + e a relação de igualdade =) e existe correspondência semântica das unidades de significado (tenho 4, ganho 5 +5 fico com 9 =9). A Tabela 6 explicita essa congruência.

Tabela 6.

Exemplo de problema em que o fenômeno da não congruência não se manifesta

Designação verbal	**Dados numéricos e operações**	**Redesignação verbal**
Tenho 4, ganho 5, fico com 9	4, 5, 9, +, =	4 + 5 = 9

Os valores numéricos encontram-se na mesma ordem, há correspondência entre as unidades significativas, e o verbo ganhar é portador de informação semântica. No momento da redesignação verbal, o fenômeno da não congruência semântica não se manifesta.

Esse não é o caso do problema "Tenho alguns, ganho 5 e fico com 9." Nesse caso, temos a manifestação do fenômeno da não congruência, pois a solução exigirá a inversão dos dados do enunciado (tenho alguns, ganho 5; tenho que inverter e começar a contar a partir de 5 até atingir 9). Na Tabela 7, estão contempladas as duas designações (verbal e algébrica). As estratégias de solução, discutidas na sequência, é que de fato permitem a identificação dos critérios não contemplados, para garantir congruência semântica.

Tabela 7.

Exemplo de problema cujo fenômeno da não congruência se manifesta

Designação verbal	**Dados numéricos e operações**	**Redesignação verbal**
Tenho alguns, ganho 5 e fico com 9. Quantos tenho?	?, 5, 9, +, =	x + 5 = 9

A redesignação verbal induz à estratégia de solução. Se for utilizado como estratégia, o procedimento do complemento seria necessário à aplicação da propriedade comutativa: somar alguns com 5 é o mesmo que somar 5 com alguns, e assim a sentença algébrica seria "5 + x = 9", que não guarda a mesma ordem, ou "9 – 5 = x", se for utilizado o procedimentos da diferença que exige a reversibilidade (se ganha na ida, perde na volta). Neste caso, a operação de subtração não corresponde ao verbo ganhar, e a ordem dos dados numéricos na sentença algébrica não se encontra na mesma ordem dos dados no problema. Este é, portanto, um exemplo de problema em que o fenômeno da não congruência se manifesta.

A Tabela 3 permite visualizar que, com os mesmos dados, diferentes tipos de problemas podem ser elaborados pelos alunos.

Os resultados apontam que os problemas apresentam estrutura de natureza dos problemas protótipos (de composição PP ou transformação IT), ou de 1ª extensão (de composição PT) e de 2ª extensão TF (de transformação), de 4ª extensão IF (transformação). As mesmas análises podem ser feitas em relação ao fenômeno da não congruência e às sentenças algébricas que designam as relações entre os dados numéricos e as operações (Moretti & Brandt, 2014).

Na sequência, apresentaremos alguns dos diferentes tipos de problemas elaborados, acompanhados de suas respectivas sentenças algébricas.

Estrutura TF: problemas elaborados por 35 alunos utilizando os dados do item A; por 3 alunos utilizando os dados do item B; e por 3 alunos utilizando os dados do item C.

Tabela 8.

Problema elaborado por S81 com estrutura TF utilizando os dados do tipo A

A	"Eu tinha algumas balas, ganhei 40 e fiquei com 90. Quantas balas eu tinha?

As sentenças matemáticas que expressam a solução desse problema podem ser: "x + 40 = 90", "90 – 40 = x", ou ainda "40 + x = 90".

Estrutura PT: problemas elaborados por nenhum aluno com os dados do item A; por 2 alunos com os dados do item B; e 2 alunos com os dados do item C.

Tabela 9.

Problema elaborado por S04 com estrutura PT utilizando os dados do item B

B	Marquei 30 pontos da prova que valia 120. Quantos pontos ficaram sem acertos?

As sentenças matemáticas que expressam a solução desse problema podem ser: “120 – 30 = x”, com uma redesignação verbal direta e funcional, ou “x + y = 120” e “x = 30”; logo, “30 + y = 120 “ por uma dupla designação, considerada por Duval (2012) mais difícil.

Tabela 10.

Problema com redesignação verbal direta e funcional ou dupla designação

Designação verbal direta e funcional	**Dados numéricos e operações**	**Redesignação verbal**	**Dupla designação**
Marquei 30 pontos da prova que valia 120. Quantos pontos ficaram sem acertos?	120, 30, -, =	120 - 30 = x	x + y = 120 x = 30 30 + y = 120

Estrutura PP: um aluno elaborou um problema com essa estrutura com os dados do item A; e 6 alunos com os dados do item A.

Tabela 11.

Problema elaborado por S06 utilizando os dados do item C

C	Marcos vendeu um objeto por 30 reais e outro por 120. Quantos reais Marcos já tem?

Nesse caso, os valores numéricos foram utilizados como duas partes de um todo; ou seja, o valor de um objeto que custava 30, mais o valor de outro objeto que custava 120.

Tabela 12.

Problema de redesignação verbal do tipo PP

Designação verbal direta e funcional	**Dados numéricos e operações**	**Redesignação verbal**
Marcos vendeu um objeto por 30 reais e outro por 120. quantos reais Marcos já tem?	30, 120, +, =	30 +120 = x

Os resultados revelam que um mesmo aluno pode ora elaborar um tipo de problema, ora elaborar outro tipo. Interessante observar que o fenômeno da não congruência pode ou não ser contornado no momento da elaboração do problema. Ao mesmo tempo, pelas análises realizadas, revela-se que a elaboração do problema já implica na sentença matemática correspondente, o que ajuda a minimizar as dificuldades oriundas da operação cognitiva de conversão, uma vez que o próprio sujeito é quem elabora os problemas. Essa conclusão corrobora a afirmação de Duval (2012) sobre as contribuições da elaboração de problemas para colocar dados numéricos e operações matemáticas em equação.

O objetivo da pesquisa foi analisar a manifestação do fenômeno da congruência semântica na atividade de elaboração de problemas. Os resultados encontrados, oriundos dessa análise, foram apresentados no artigo, sendo retomados nas considerações finais.

Considerações finais

O presente artigo apresentou os resultados de uma pesquisa que buscou investigar especificidades relativas à aprendizagem da álgebra. Essas especificidades são apontadas por Raymond Duval por meio de 5 ideias apresentadas como essenciais para conduzir um ensino voltado para a aprendizagem da álgebra. Dentre elas, destacamos a importância, apontada pelo autor, de fazer os alunos elaborarem problemas, ao invés de simplesmente levá-los a resolver problemas a eles propostos. O foco do artigo foi a elaboração de problemas e sua importância para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

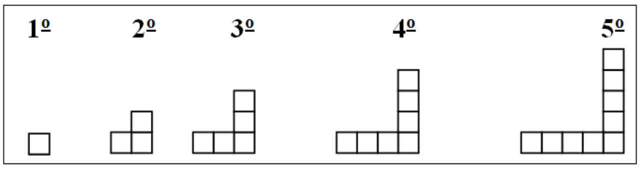
Duval (2012) assevera que o ensino da álgebra pode ser conduzido segundo um ponto de vista matemático, com objetivos globais voltados para a resolução de equações ao longo da escolarização. Pode, no entanto, ser conduzido segundo um ponto de vista cognitivo, no qual os objetivos globais voltam-se para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nessa perspectiva, a elaboração de problemas aparece, segundo Duval (2012), como processo importante para o desenvolvimento desse pensamento, pois criará condições para que os alunos utilizem letras para a designação de relações algébricas que envolvem números e operações aritméticas. Essa forma de conduzir o ensino é radicalmente diferente de outra forma proposta por professores, segundo um ponto de vista matemático a partir do qual é preciso aprender a operar com letras para resolver equações. Do ponto de vista cognitivo, não é a aprendizagem das letras que é importante, e sim a designação de relações ou de padrões de regularidade por meio de letras. As letras devem surgir de modo espontâneo, como uma necessidade, quando precisamos anunciar e comunicar diferentes relações matemáticas, sejam elas de natureza aritmética, algébrica ou geométrica.

A proposta de elaboração de problemas apontou que, de fato, a designação da solução pode colocar em cena as letras, conforme a estrutura do problema ou o procedimento de resolução. A metodologia de elaboração de problemas, que exige variação ou supressão dos dados ou das operações matemáticas do problema, colocou em evidência diferentes estruturas de problemas e diferentes procedimentos de resolução, os quais podem exigir diferentes maneiras de designação: direta, dupla, funcional, verbal, redesignação, entre outras. Por essa razão, há uma atribuição de significação à letra, como representativa da solução do problema, com diferentes estatutos, de valor desconhecido, incógnita ou variável.

Como exemplo, podemos citar a generalização da sequência de números ímpares, que pode ser obtida com a ajuda de padrões geométricos:

Figura 3.

Sequência de padrões geométricos



No caso, qualquer número da sequência é representado por 2(n – 1) + 1, em que n representa a posição do número na sequência. Cada número pode ser representado por quadrados dispostos em L invertido. Nessa configuração geométrica, os dois braços do L contêm n – 1 quadrados e 1 quadrado no vértice do L. Nesse acaso, o número total de quadrados é igual a 2n – 1, o que significa que o 7º número ímpar é igual a 13: 2 x 7 – 1.

Já não é o caso, por exemplo, da sentença x + 3 = 8, que representa os dados do problema "Tenho alguns, ganhei 3 e fiquei com 8". Nesse caso, a letra tem o estatuto de uma incógnita. Por exemplo, na generalização de uma lista aberta, a letra assume o status de variável.

A significação está presente na relação triádica de representação de objetos (Duval, 1995). Essa relação triádica tem por referência um objeto de conhecimento. Nessa estrutura triádica, temos o significante (em que entram as letras); o significado (relacionado ao objeto que se quer representar); e a significação, dada pelo sujeito que determinará a referência ao objeto.

A existência de diferentes problemas, com diferentes estruturas, segundo os resultados analisados, ocorrera em função do fenômeno de congruência semântica. Esse fenômeno interveio de maneira significativa na elaboração de problemas. Por essa razão, os dados do quadro para a elaboração dos problemas foram utilizados de diferentes formas, e com diferentes status: ora como medidas estáticas (em problemas de comparação ou de composição), ora como medidas dinâmicas (em problemas de transformação). Também os espaços em branco foram utilizados de diferentes maneiras, representando medidas estáticas (calcular o valor de um todo) ou dinâmicas (calcular o valor da transformação). Essas diferentes formas de utilizar os dados ou os espaços em branco interferem na resolução e, como consequência, na designação das relações entre os dados por meio de operações matemáticas. Isso porque as diferentes designações levaram em conta as estratégias utilizadas para a resolução dos problemas.

Nossas análises anteciparam algumas das possíveis estratégias utilizadas para a resolução dos problemas, apresentados como uma análise a priori. Esse procedimento permitiu apontar de que maneira a elaboração de problemas pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico. No caso em questão, com relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico, as especificidades da álgebra constituem-se como aspectos essenciais do ensino, de modo a contemplar as cinco ideias de Duval (1995). Essas ideias dizem respeito à face oculta da matemática, pois estarão na base da organização do ensino, não sendo objeto de avaliação. Elas constituem o terreno sobre o qual o edifício algébrico poderá ser construído, de modo a permitir que os alunos atribuam significação às letras e à sua utilização.

Brandt et al. (2018) apresentaram resultados de uma pesquisa que apontou a importância da função referencial de designação antes do ensino de letras propriamente dito para a aprendizagem da álgebra. De acordo com os autores

> As diferentes designações das relações apresentadas pelos alunos revelaram como as letras poderão ser introduzidas no ensino. As situações poderão ser apresentadas aos alunos e ao professor cabe a forma de conduzir os alunos à passagem das designações diretas e verbais às redesignações também diretas e verbais com a utilização de léxicos associativos. Cabe ao professor, também, no momento do ensino a solicitação das designações indiretas para identificar a significação atribuída às letras pelo próprio aluno e a tomada de consciência dessa significação. (p. 197)

Na presente pesquisa avançamos ao buscar investigar a importância da elaboração de problemas para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Encontramos como resultados que nas 5 ideias para a aprendizagem da álgebra, no que tange à elaboração de problemas, o fenômeno da não congruência semântica apresenta-se como fenômeno cognitivo essencial, não podendo ficar de fora de qualquer análise cognitiva na produção dos alunos.

Isso significa que as ações de supressão de dados ou de alteração das operações, exigidas para o desenvolvimento da prática de elaboração de problemas no ensino, são comandadas pelo fenômeno da congruência semântica. Os alunos elaboram seus problemas de modo a contemplar dados e operações, conforme problemas protótipos, cuja solução é obtida com maior grau de sucesso, conforme apontam as pesquisas. Procura-se a mesma ordem nas unidades significantes no enunciado, por meio da língua materna e por meio da sentença matemática. A univocidade semântica terminal é buscada por meio de termos como ganhar, perder ou quanto ficam, enquanto a correspondência semântica terminal é buscada por meio dos valores numéricos envolvidos e suas respectivas operações de adição ou subtração.

Esse foi um resultado essencial encontrado na pesquisa, que deve ser considerado na atividade de elaboração de problemas. Inferimos sobre a necessidade de investigar a atividade de elaboração de problemas, como possibilidade do desenvolvimento da comutatividade, da reversibilidade e do pensamento algébrico, também das formas de superação das dificuldades apresentadas pelas crianças, para encontrarem a solução de problemas com estruturas mais complexas.

Referências

Brandt, C.; Méricles, T. M.; Scheifer, C.; Dionizio, F. A. Q. (2018). A importância da função discursiva de designações de relações algébricas para o desenvolvimento do pensamento algébrico**.** *Educação. Matemática Pesquisa.* São Paulo, v.20, n.1, p.182-198.

Duval, R. (1988). Écarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problèmes de congruence. (M. T. Moretti, C. Flores, Trad.). *Annales de didactique et de Sciences Cognitives,* 1 (1), p. 7-25.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Suisse: Peter Lang.

Duval, R. (2012). *Deux regards opposés sur les points critiques sur l'enseignement de l'algèbre au collège (11-15 ans)*. Palestra proferida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso.

Duval, R.; Freitas, J. L. M. & Rezende, V. (2013). Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 2 (3), p. 10-34.

Magina, S.; Campos, T.; Nunes, T. & Gitirana, V. (2008). *Repensando adição e subtração: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.* (3a ed.). São Paulo: PROEM.

Moreira, M. A. (2002). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências*, 7 (1), p. 7-29. Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf

Moretti, M. T. & Brandt, C. F. (2014). Dificuldades na resolução de problemas aditivos a uma operação: ponto de encontro esclarecedor à luz da noção de congruência semântica, *Acta Scientiae,* 16 (3), p. 553-577. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/1173/1083

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10 (23).

Recebido em: 27/04/2020
Aprovado em: 27/05/2020