EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p324-354

O *movimento* e suas implicações na aprendizagem de matemática: um olhar fenomenológico

The *movement* and its implications in mathematics learning: a phenomenological look

El movimiento y sus implicaciones en el aprendizaje de las matemáticas: un punto de vista fenomenológico

José Milton Lopes Pinheiro [1]
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
https://orcid.org/0000-0002-0989-7403
César Osvaldo Vásquez Flores [2]
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
https://orcid.org/0000-0003-1298-9920
Giovana Alves [3]
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
https://orcid.org/0000-0002-9952-3391
Caleb da Silva Araujo Campelo [4]
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
https://orcid.org/0000-0001-5328-0825

Resumo

Este estudo foca *o movimento* como fenômeno de pesquisa, explicitando-o a partir de diferentes perspectivas teóricas, quais sejam: a física, a matemática e a fenomenologia, porém, assumindo a terceira para efetuar a análise. Mediante estudo no âmbito dessas áreas e análise de uma atividade desenvolvida em ambiente de Geometria Dinâmica, o objetivo da investigação é apresentar compreensões sobre *como a percepção do movimento pode direcionar o pensar e contribuir com a aprendizagem de matemática.* Para tanto, realizamos um estudo qualitativo de cunho bibliográfico, que forneceu compreensões que uma vez articuladas com a análise da atividade, permitiram ao estudo o entendimento de que o movimento é correlato a um sujeito que se move, movendo, e o permite *conhecer* as implicações desse ato materializando-se em

[1] jose.pinheiro@uemasul.edu.br
[2] cesar.vasquez@uemasul.edu.br
[3] giovana.alves@uemasul.edu.br
[4] juscimararaujo@uemasul.edu.br

seu mundo circundante e em seu corpo, que é o ponto zero do movimento e das percepções que realiza. Assim, o aprender dá-se na unidade *movimento-percepção-conhecimento*.

Palavras-chave: Movimento, Fenomenologia, Educação matemática.

Abstract

This study focuses on the *movement* as a research phenomenon, explaining it from different theoretical perspectives, namely: physics, mathematics, and phenomenology, however, assuming the third one to carry out the analysis. Through study in the scope of these areas and analysis of an activity developed in a dynamic geometry environment, this study aims to present understandings about *how the perception of movement can direct thinking and contribute to the learning of mathematics*. To this end, a qualitative study of a bibliographic nature is carried out, providing understandings that, once articulated with the analysis of the activity, allowed the study to recognize that the movement is correlated to a subject who moves, moving, and allows it to *know* the implications of this act materialising in his surrounding world and also in their body, which is the base of the movement and the perceptions it realises. Thus, learning occurs in the *movement-perception-knowledge* unit.

Keywords: Movement, Phenomenology, Mathematical Education.

Resumen

Este estudio enfoca el movimiento como fenómeno a ser investigado, explicándolo a partir de diferentes perspectivas teóricas, sean: la física, la matemática y la fenomenología, sin embargo, asumiremos la tercera para efectuar nuestro análisis. El objetivo es, mediante el estudio en el ámbito de esas areas y el análisis de una actividad desarrollada en el ambiente de la geometría dinámica, presentar *cómo la comprensión de la percepción del movimiento pode direccionar el pensamiento y contribuir al aprendizaje de la matemática*. Para ese objetivo, se realiza un estudio cualitativo de carácter bibliográfico, que ofreció comprensiones que una vez articuladas con el análisis de la actividad, permitieron al estudio la comprensión de que el movimiento está relacionado a un sujeto que se mueve, moviéndose, y le permite *conocer* las implicaciones de ese acto materializándose en su mundo circundante y también en su cuerpo, el cual es el punto cero del movimiento y de las percepciones que realiza. Así, el aprendizaje se da en la unidad *movimiento-percepción-conocimiento.*

Palabras clave: Movimiento, Fenomenología, Educación matemática.

O *movimento* e suas implicações na aprendizagem de Matemática: um olhar fenomenológico

Enquanto sujeitos perceptivos, vivenciamos o mundo e, de imediato, o percebemos como *mundo em movimento*, ao passo que, nas ações junto a ele nos percebemos como *sujeitos-móveis-moventes*. Esse é um saber original, ou seja, que nos é dado na imediaticidade da experiência vivenciada, que é anterior a qualquer ato de teorização, seja ele produzido pelo senso comum ou pelas ciências, quando descrevem ou formalizam o móvel, o estático, o movimento e a ausência dele (repouso).

No entanto, as ciências, com seus métodos, se voltaram a esse mundo buscando conhecê-lo e dá-lo um estatuto científico. Com isso, o movimento e suas implicações foram ganhando representações formais. As teorias lógicas-matemáticas substituíram o mundo de vivências pela natureza idealizada na linguagem dos símbolos. Esse processo diz de uma estruturação lógica de organização e ocupação de um espaço com suas regras.

Assim, sobre o simples lançar de uma pedra, agora, pode-se escrever artigos e livros, podendo ser eles com abordagens distintas, diversificando, especialmente, nas concepções de espacialidade e temporalidade. Deste modo, tem-se por exemplo, um distanciamento entre uma concepção fenomenológica e uma cartesiana sobre movimento.

Pretende-se, neste texto expor alguns desses modos de conhecer o movimento. Em especial, não poder-se-ia deixar de trazer a concepção da Física, ciência cujo cerne é o movimento com o qual, uma vez formalizado em leis, tenta explicar o mundo, apresentando compreensões sobre o infinito, o espaço, o lugar, o vazio, o tempo etc.

Correlato à presença de movimento, há aplicação de forças variáveis, que produzem aceleração, ou desaceleração. A Matemática, especialmente em abordagens do Cálculo e de Equações Diferenciais é ciência que se aplica ao estudo do movimento e de suas implicações. Considera-se o surgimento do Cálculo na presença de necessidades matemáticas de cientistas do século XVI e XVII (principalmente Newton e Leibniz), sendo elas relacionadas especialmente à mecânica. Portanto, faz-se relevante a este estudo trazer uma abordagem matemática a respeito do movimento.

A Física e a matemática aplicada a ela levantam propriedades cinemáticas e estudam trajetórias por meio de fragmentos que dão pontos notáveis de posição de um móvel. Tempos cronológicos distintos permitem a percepção de posições mudadas em relação a anteriores. Essa maneira de analisar pressupõe o tempo e a posição como elementos que fundamentam o movimento, sendo ele consequência da relação *posição vs tempo*. No entanto, há outros modos de compreender o movimento, que, por exemplo, o entende como contemporâneo ao tempo e posição, não sendo, portanto, uma formulação dada por relações, mas por um fluxo que abarca o espaço e o tempo como unidade.

Esta é a compreensão da Fenomenologia (assumida neste texto), que tem por característica olhar para as coisas apresentadas em suas individualidades e, mediante forte argumentação, dizer do quanto estão umas *com* as outras, entrelaçadas, desconstruindo a ideia cartesiana de um mundo de coisas dispostas, uma diante de outras, mas ainda assim isoladas, podendo ser relacionadas por atos reflexivos. Na perspectiva fenomenológica, não se vê ou se estuda o movimento ausentando-se seu realizador. É o movimento, portanto, uma possibilidade que, mediante intencionalidade, é atualizada por um sujeito, que se move, movendo.

Com as articulações que se fazem possíveis, dadas estas perspectivas de visada, e pensando o movimento como uma atualização intencional, quer-se explicitar neste texto: *como a percepção do movimento pode direcionar o pensar e contribuir à aprendizagem de matemática?* Buscar pela percepção do movimento solicita um voltar-se a experiências vivenciadas. Portanto, visando compreender o que indaga a questão de pesquisa realiza-se um estudo qualitativo, de cunho bibliográfico, atentando-se ao que dizem autores sobre o aqui interrogado e traz-se a discussão acerca do desenvolvimento de uma atividade (realizada por licenciandos em Matemática) que apresenta o movimento como um modo de resolução e de validação de conjecturas.

O movimento tal como compreendido pela Física

Tudo está constantemente em transformação. No âmbito das científicas, o objeto ou ente que experimenta a transformação mostra ao mundo exterior uma característica que pode ser observada ou mensurada, como por exemplo, o crescimento de uma flor, o aumento de população de um país, o ganho de calor de um litro de água etc.

Em Física o estudo do movimento é fundamental e tem sido foco de muita atenção. Especificamente o movimento de um objeto pode ser entendido como uma mudança na sua posição, percebida por nós ou por instrumentos de laboratório. Como exemplos de objetos em movimento pode-se mencionar um automóvel em movimento na rua, a terra orbitando em torno do sol, o movimento errático de partículas muito pequenas, um oscilador harmônico simples (OHS), o movimento de um pêndulo etc.

Ao longo da evolução da Física, as ideias sobre o movimento também foram evoluindo, graças a profundos avanços teóricos e experimentais. Consequência disso tem-se a mecânica newtoniana que está relacionada ao movimento de corpos cuja velocidade é muito menor que a velocidade da luz (Newton, 2016). Tem-se, também, a mecânica relativística que foi obtida por Albert Einstein, da qual pode-se concluir a existência de corpos se movendo perto da velocidade da luz (Einstein, 1905). Nesta seção destaca-se o uso da mecânica newtoniana, devido a sua simplicidade operacional e conceitual.

Como na mecânica newtoniana o movimento pode ser definido como a mudança de posição de um corpo com respeito ao tempo, é logicamente necessário ter estabelecido antes um sistema de coordenadas e um relógio de boa precisão. Inicialmente para simplificar a descrição do movimento, considera-se também que o corpo é puntiforme, isto é, uma partícula.

Para tanto, considera-se que as dimensões do objeto sejam muito pequenas quando comparadas com as distâncias percorridas.

Por outro lado, é conhecido que o avanço na Física é obtido progressivamente, com poucas considerações e ao mesmo tempo com o estudo de sistemas simples. Uma vez que se obtêm resultados para esses sistemas se procede a incrementar a complexidade. Exemplos de sistemas simples são uma partícula em movimento numa linha reta, uma partícula em movimento circular, uma partícula acoplada a uma mola (sistema massa mola), dentre outros. Nesta seção foca-se em dois sistemas simples: o movimento de um projétil e o oscilador harmônico simples (OHS).

Pode-se definir um projétil como qualquer corpo lançado com uma velocidade inicial e cuja trajetória é determinada pela força gravitacional e a resistência do ar. Como exemplos de projéteis pode-se mencionar o lançamento de uma pedra, uma bala disparada, uma bola depois de ser chutada, etc. Devido à força gravitacional a trajetória do projétil é restrita a um plano vertical, portanto o movimento é em duas dimensões. O plano do movimento é geralmente fixado para coincidir com o plano formados pelos eixos XY, sendo o eixo X o eixo horizontal e o eixo Y o eixo vertical. Uma vez especificada a velocidade inicial e a direção do lançamento, podem ser obtidas as equações de movimento. Uma equação importante pode ser obtida ao relacionar o comportamento da posição x e y do projétil, esta é a equação da trajetória dada por $y = (tan\,\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha_0}\,x^2$, onde α_0 e v_0 são, respectivamente, a direção e velocidade no instante inicial do lançamento. Assim, pode-se ver que o movimento de um projétil tem uma conexão intrínseca com a geometria de uma parábola.

Outro sistema muito importante é o OHS. Este sistema serve como base para estudar fenômenos mais complexos, como por exemplo o movimento ondulatório em uma corda, de ondas de som, de sismos e ondas eletromagnéticas. O OHS também serve como ingrediente principal para estudo de sistemas quânticos, e num estágio mais avançado, no estudo da teoria quântica de campos (TQC).

Um OHS consiste em uma partícula de massa *m* acoplada a uma mola de constante *k*. Considera-se aqui que a partícula e a mola estão em um arranjo horizontal. Se a partícula se desloca uma distância x, então a mola exerce uma força da forma $F = -k.x$. A energia potencial associada a esta força é $V = \frac{1}{2}k.x^2$.

A equação de movimento pode ser obtida a partir da segunda lei de Newton:

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0,$$

cuja solução tem comportamento senoidal em torno de uma posição de equilíbrio:

$$x = A.sen(\omega_0 t + \theta),$$

sendo $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ e A e θ constantes arbitrárias que dependem das condições iniciais. A solução para este sistema representa mudanças pequenas de posição em torno de um ponto de equilíbrio. A simplicidade da solução permite uma análise completa do movimento da partícula que está acoplada à mola, e a partir dela pode-se obter o comportamento da velocidade, aceleração, energia, etc. (Nussenzveig, 2002).

Algumas abordagens sobre movimento na Matemática

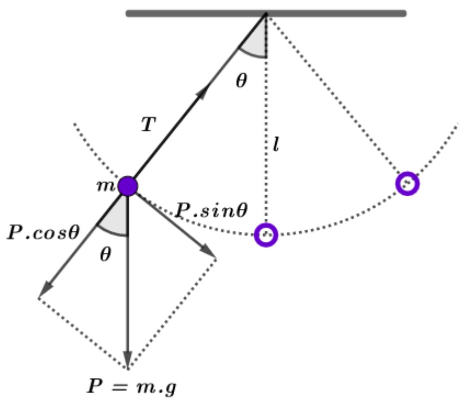
Entende-se que a ciência mais direcionada aos estudos do movimento e suas causas e implicações é a Física, porém, a Matemática tem interposta em suas aplicações tal conceito. Matematicamente, não há preocupação com a gente que o faz iniciar ou cessar o movimento, abstrai-se as causas e preocupar-se apenas com sua descrição/modelagem e/ou seus resultados.

A Matemática permite descrever, interpretar e prever a evolução de movimentos de corpos e partículas nas mais diversas situações. Faz-se isso, muitas vezes, via equações diferenciais. Um problema físico clássico que pode ser estudado por meio das equações diferenciais é o *movimento de um pêndulo*. Denomina-se Pêndulo Simples o sistema que é composto por um corpo preso a um fio flexível, sem massa e inextensível por uma de suas extremidades e livre por outra.

Ao afastar o corpo da posição de repouso e soltá-lo, o pêndulo realiza oscilações. Desconsiderando a resistência do ar, as únicas forças que atuam sobre o pêndulo são a tensão com o fio e o peso do corpo, tal como expressa a Figura 1:

Figura 1.

Pêndulo e as forças que atuam sobre a massa (os autores)



A componente da força peso que é dado por $-P.\cos(\theta)$ se anulará com a força de tensão do fio, sendo assim, a única causa do movimento oscilatório é a $-P.sin\,(\theta)$. Então, F é dado por:

$$F = -P.sin(\theta) = -m.g.\sin(\theta)$$

Logo, é possível concluir que o movimento de um pêndulo simples não descreve um oscilador harmônico simples (OHS), já que a força não é proporcional ao ângulo θ, e sim ao seno do mesmo. No entanto, para ângulos pequenos, $\theta \ll 1$, considera-se $\sin(\theta) \approx \theta$ e, deste modo, o movimento de um pêndulo pode ser descrito como um OHS, isto é

$$F = -m.g.\theta.$$

Por outro lado, usando a Segunda Lei de Newton e o fato de que a aceleração é a derivada segunda do espaço percorrido, em relação ao tempo, conclui-se que

$$F = m.a = m.\frac{d^2(\theta l)}{dt^2}.$$

Deste modo, a equação linearizada do movimento do Pêndulo Simples é dada por

$$m.\frac{d^2(\theta l)}{dt^2} + m.g.\theta = 0, \text{ ou ainda: } \frac{d^2\theta}{dt^2} + g.\ \frac{\theta}{l} = 0.$$

Do ponto de vista físico, esta equação impõe uma condição sobre os possíveis movimentos do Pêndulo Simples. Para caracterizar tal movimento, é necessário que se especifique o ponto de partida, θ_0, e sua velocidade inicial, $v_0 = \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0}$. Estas condições podem ser reunidas em um problema matemático:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + g.\dfrac{\theta}{l} = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = v_0, \end{cases}$$

que é chamado de problema de Cauchy para a equação do Pêndulo Simples (Bassanezi & Ferreira Jr., 1988).

Um estudo de movimento, modelado por equações diferenciais, que contribuiu significativamente não só na área da Física Moderna, como também na Biologia, na Química e na Economia é o *movimento browniano.*

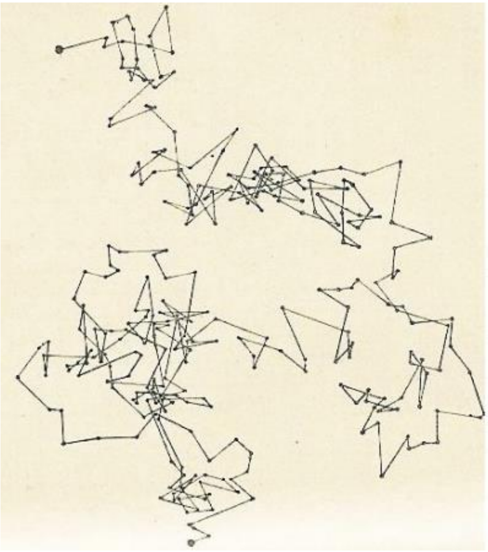
Bassanezi & Ferreira Jr. (1988) expõe que em 1827, o botânico inglês Robert Brown (1773-1858) observou que partículas diminutas de pólen suspensas em água realizavam um movimento incessante e aparentemente caótico, sem um direcionamento preferencial. Várias hipóteses foram apresentadas para a explicação deste fenômeno, mas nenhuma delas teve aceitação definitiva e o assunto ficou relativamente afastado do interesse principal da ciência por um longo período.

A partir de 1860 começou a tomar forma o ponto de vista moderno de que o "ziguezague" das partículas brownianas poderia ser devido às colisões com as moléculas do fluido. Verificou-se que suas trajetórias não apresentavam tangentes (ou seja, as curvas não seriam diferenciáveis), e também que o movimento randômico aparentemente nunca cessava. No entanto, a verdadeira causa do fenômeno permaneceu um mistério até 1905, quando finalmente foi elucidado por Albert Einstein (1879-1957) no seu artigo: *Sobre o Movimento de Pequenas Partículas Suspensas em um Líquido Estacionário Causado pela Teoria Molecular-Cinética do Calor*. Ao escrevê-lo, Einstein ignorava as observações de Brown, mas a conexão entre os dois fatos foi logo apontada a ele que, em seguida, publicou um outro artigo sobre o assunto em que analisava e verificava esta conexão *Sobre a Teoria do Movimento Browniano*.

O modelo e o tratamento matemático de Einstein possibilitaram que Jean Perrin determinasse o número de Avogadro ($6{,}023 \text{ x } 10^{23}$) a partir de experimentos com o movimento browniano (pelo qual ganhou o prêmio Nobel, em 1926) e assim confirmasse definitivamente a estrutura atômica molecular da matéria.

Figura 2.

Trajetória de uma partícula executando movimento browniano (Silva & Lima, 2007, p. 26)



O estudo de Einstein sobre o movimento browniano é tipicamente físico nos seus argumentos e nas suas conclusões. Contudo, um modelo matemático rigoroso, a partir das hipóteses físicas fundamentais é uma iniciativa complexa. A formulação matemática destas ideias tem constituído uma fonte de novas teorias de enorme significado em matemática. Pode-se citar, por exemplo, o trabalho de Langevin (1908), no qual o movimento browniano de uma partícula, é analisado pela equação diferencial estocástica

$$m\,\frac{dv}{dt} = -kv + F(t),$$

onde v denota a velocidade da partícula de massa m, k é o coeficiente de viscosidade do meio e o termo $F(t)$ representa a resultante das colisões microscópicas que esta partícula recebe das moléculas (Silva et. al., 2007).

No âmbito da Matemática, o movimento também pode ser destacado na noção de Grupo de Transformações, conceito que se entende aparecer com uma formulação mais clara em Felix Klein (1849-1925), no *Programa de Erlangen*. Ao trazer sua ideia de Grupo de Transformações, Klein (1984) classifica como sendo um deles, o Grupo de Isometrias, constituído pela rotação, translação e reflexão, e que ele chama também de Grupo de Deslocamento, que diz da possibilidade de "levar" um objeto geométrico de um lugar para outro, que tecnicamente, chama-se *transformação de posição*, que preserva na figura transformada as mesmas distâncias entre pontos da figura original, de tal forma que: "Se Π e Π′ são dois planos, uma transformação T: Π→ Π′ é uma *isometria* quando a distância entre os pontos T(A) e T(B) é igual à distância entre os pontos A e B, para quaisquer pontos A e B; ou seja, quando d(T(A), T(B)) = d(A, B) para quaisquer pontos A e B" (Wagner, 2007, p. 70).

Klein (1984, p. 6) explicita que "um exemplo de grupo de transformações é dado pelo conjunto dos movimentos (considerando cada movimento como uma operação efetuada sobre todo o espaço. Um grupo contido neste é, por exemplo, o das rotações ao redor de um ponto". Ao explicitar a rotação como sendo um movimento, Klein deixa implícita a ideia de não diferenciação entre deslocamento e movimento.

Quando o movimento de uma figura é realizado em espaços matemáticos distintos (o cartesiano e o esférico, por exemplo) pode-se perceber as características desses espaços e da própria figura quando ela, em movimento, preserva *invariantes* em sua estrutura na deformação provocada por esse movimento. Em espaços distintos, têm-se configurações distintas para um mesmo objeto. Desta forma, um quadrado pode manter-se quadrado em um espaço e pode assumir uma forma “arredondada” em outro. Nesse segundo caso, “as propriedades geométricas se conservam somente em parte. O restante aparece como propriedade não mais dos próprios entes, mas como propriedades do sistema resultante do acréscimo de um ente especial aos entes originais” (Klein, 1984, p. 11).

Em outra abordagem na Matemática, o movimento vem como modo de explicação de conceitos abstratos, tal como o conceito de infinito e infinitésimo. Para tanto, por exemplo, em aulas de Cálculo geralmente se faz referências aos paradoxos de Zenão, dos quais se destaca aqui a Dicotomia e Aquiles. No paradoxo da Dicotomia, segundo Morris (1998), não se pode cobrir um número infinito de pontos num tempo finito; tem-se que percorrer a metade de uma dada distância antes de percorrê-la inteiramente, e a última metade antes de cobri-la no seu todo. E assim vai *ad infinitum*. No paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, o argumento é semelhante. Aquiles não pode alcançar uma tartaruga, pois deve primeiro alcançar o lugar do qual partiu a tartaruga. Ambos os paradoxos suscitam a ideia de percorrer, de mover-se num espaço. Tem-se, assim, modos de explicar o infinito valendo-se de situações que solicitam movimentos, nesse caso, um *sempre movimento*, portanto, também infinito.

O movimento no entorno fenomenológico

Em *Fenomenologia da Percepção*, Merleau-Ponty (2011) explicita o movimento do corpo-próprio[5] sob a ótica da motricidade e da percepção. Expõe que o movimento se dá em atos desse corpo, se materializa como intencionalidade dele e, assim, deixa evidências de sua *presença* espacial e temporal (mudanças, transformações) no mundo e no corpo que o atualiza. O movimento se configura como mudança e configura mudanças que se expõem e constituem

[5] Entendido como *Leib*, corpo com movimento intencional. Nele, está compreendida todas as experiências vivenciadas, sendo ele também, ponto zero para novas experiências. Ele realiza e se realiza em movimento, assumindo perspectivas diversas e pondo-se em movimento no mundo-vida que incessantemente vai se configurando junto às também incessantes configurações e reconfigurações desse corpo (Merleau-Ponty, 2011).

a espacialidade, entendida nessa vertente filosófica como um campo cinestésico e criador de sentidos.

Pinheiro et al. (2018, p. 278), afirmam “que todo movimento, em sua realização, vai se atualizando e atualiza um fundo também móvel que, portanto, é abertura ao movimento”. Assim, o “fundo do movimento não é uma representação associada ou ligada exteriormente ao próprio movimento, ele o anima e o mantém a cada momento” (Merleau-Ponty, 2011, p. 159). Cada “movimento e cada objeto convidam à realização de um gesto, não havendo, pois, representação, mas criação, novas possibilidades de interpretação das diferentes situações existenciais” (Nobrega, 2008, p. 142).

A Fenomenologia entende o sujeito que observa como aquele sem o qual não existiria o movimento. O conhecimento que o permite dizer que um objeto está em movimento é, antes de qualquer formalização, um conhecimento original que tem de si como sujeito-movente, que lhe permite uma autopercepção de variação, de projeção, de profundidade, que se manifesta em seu corpo e em seu modo de ocupar uma espacialidade. É com essa consciência de si que ele pode olhar um objeto e afirmar seu movimento. Assim, o observador, nessa concepção, está em/com/no movimento, percebendo-o e percebendo-se, não fora dele.

O pensamento das ciências naturais prefere interpretar o movimento como algo em separado, como fenômeno desvinculado de um sujeito experienciador. Falar de fenômeno aqui, inclusive, é usar de uma vocação usual do termo, já que o que se mostra, isto é, as aparências, é tido como obscuro e carente de clarificação. Clarificar, para esse pensamento clássico, é decompor o fenômeno em partes significativas para um enquadramento em propriedades físicas espaço-temporais. O próprio móvel é tomado como dispensável, permanecendo o mesmo durante o movimento, sendo este um “acidente” que o afeta (Husserl, 2012).

A explicação clássica, mesmo trabalhando com infinitésimos, fragmenta o movimento ao tomá-lo como somatório integralizante de momentos discretos, fazendo sínteses mediante observação e experimentação. Nessa explicitação, a Matemática se põe como instrumento de modelagem, interpretando com linguagem lógico-matemática as sínteses das observações realizadas. A fenomenologia investiga o movimento do corpo-próprio e faz a crítica a esse pensar: o sujeito, situado em sua própria experiência de movimento *é* e se percebe em movimento; nele, e para ele, o movimento é *absoluto*[6], isto é, não pode o sujeito ser e não ser na alternância de momentos discretos. Mais uma vez a fenomenologia vai firmar a condição espacial como temporalidade, dizendo que o movimento só permanece como fato fenomenal se o sujeito o retém na sua relação mundana com o móvel, quando eles se dão um ao outro numa experiência que permite o devir do movimento. Tal relação é orgânica e imediata, e não inscrita num jogo de referências (do móvel com algo parado) que o sujeito faria por atos reflexivos.

A unidade do movimento vem de uma síntese realizada no sujeito que vê e que percorre o movimento na imediaticidade de sua realização. Para a percepção imediata não há propriedades matemáticas (geométricas), há um *modo de ser*- tal como o modo de ser circular, que dá a unidade de identidade de todos os diâmetros de um prato que gira em todos os planos sob meu olhar. Há algo que assinala que há um móvel em movimento, solicitando que o olhar siga se reorganizando para a compreensão contínua. O "continuum" espaço-temporal é percebido em situação na experiência do móvel e toda percepção é *mediada* no corpo-próprio. A historicidade desse corpo-próprio não possui vazios, ele sempre *é*.

Nas realizações espaço-temporais, o movimento *em ato* tem uma duração, é fluido e contínuo, visto que no agora de sua realização, traz o passado e abre possibilidades ao futuro. A cada instante de um movimento, o instante precedente está presente, sendo fundo no qual o movimento agora realizado se expõe e avança. Essa constituição que enlaça o movimento

[6] Não se diz, aqui, 'absoluto' no sentido newtoniano, como do tempo absoluto ou do espaço absoluto por serem universais; absoluto, em Merleau-Ponty tem sentido no imediato experienciado.

sendo realizado agora e o que o precedeu, enlaça também o que está por vir enquanto possibilidade de movimento. “Cada momento do movimento abarca toda a sua extensão, e em particular o primeiro momento, iniciação cinética, inaugura a ligação entre um aqui e um ali, entre um agora em um futuro, que os outros momentos se limitaram a desenvolver” (Merleau-Ponty, 2011, p. 194).

O movimento é, então, antes de um fenômeno físico, um fenômeno de permanência do sujeito em sua experiência. É um fenômeno de espacialidade enquanto só é possível a um sujeito orientado e posicionado imediatamente no mundo (Husserl, 2012). O mundo, antes de objetivo (organizado à espera de um sujeito capaz de se adequar ao conhecer suas leis de formação), é vivencial, e, portanto, doa-se em plenitude de possibilidades perceptivas. Ele se doa na sua multiplicidade como fundo familiar aos campos organizativos do sujeito. Este, é capaz de focar, estruturar e reestruturar seu mundo de fenômenos móveis, que movem sua vontade de ser e estar no espetáculo que rege e é regido por mudanças, configurações e desconfigurações, possíveis pelo/com movimento. É assim que o movimento *é* intencionalidade.

O *entorno* fenomenológico é mais amplo do que aquele que diz do ambiente natural e que se descreve em relações absolutas. Há nele um *nível* de *presença*. O *espaço* é um fenômeno de *nível*, para Merleau-Ponty (2011). O *nível* é o campo de ações possíveis que vem como fundo no qual o sujeito percebe o movimento, a profundidade, a orientação espacial. Ele é existencial enquanto não se estabelece como relação entre objetos, mas *depende* da disposição que o sujeito dá a esse campo. Merleau-Ponty (2011) explicita esse existencial ao descrever a experiência de um sujeito num trem em movimento: descansando em sua cabine, as árvores lá fora se movimentam, passando apressadas e oblíquas em relação às verticais do seu quarto de repouso; quando o sujeito abandona a cabine e vê o cenário que deixa de sua porta, as árvores quedam-se verticais, e são as verticais da cabine que se apressam e se reorganizam numa nova *geometria* em movimento. É nesse sentido que se diz, na fenomenologia, de um *espaço* relativo.

A percepção do movimento e possibilidades que abre à aprendizagem: um olhar à Geometria Dinâmica

Evidencia-se até o momento modos de mostrar-se o movimento, situando-o em diferentes compreensões de espaço: naquele estruturado pelas ciências Física e Matemática, e naquele entendido como mundo de vivências, sob perspectiva fenomenológica. Aqui, quer-se focar fenomenologicamente o espaço cibernético, compreendendo-o como um *modo de ser* do espaço mundano de nossas vivências (Bicudo & Rosa, 2010), que se abre à realização de movimento e percepção das mudanças que com ele fluem. Portanto, uma explicitação sobre o movimento em softwares pode ser expandida para se compreender, de modo mais generalizado, *como a percepção do movimento pode direcionar o pensar e contribuir à aprendizagem de matemática.* Com tal explicitação pode-se também vislumbrar o movimento em um papel, na lousa, no chão, no lançar de uma pedra, no silêncio do pensamento articulador etc.

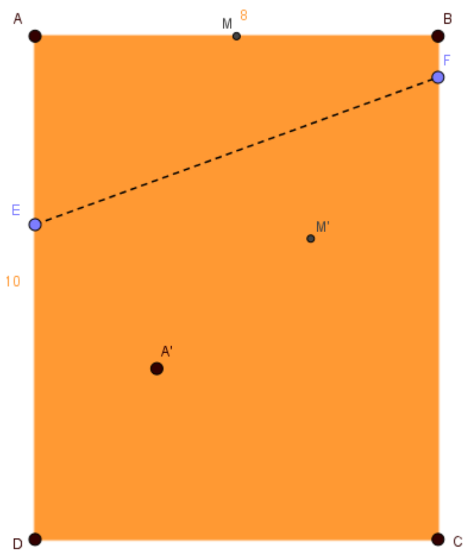
Este, mediante estudos já realizados, poderia ser mais um tópico puramente teórico sobre o movimento. No entanto, a articulação já feita diz de um olhar para o movimento como sendo ato atualizante de um sujeito que se põe em movimento, movendo-se. Portanto, traz-se uma atividade desenvolvida em ambientes de Geometria Dinâmica (GD), para que a pretensão de aqui teorizar o movimento, tenha correlato numa experiência vivida. Trata-se de uma atividade apresentada na tese de doutorado de Pinheiro (2018), um dos autores deste artigo, a *Atividade 5 - Dobrar uma folha de papel,* desenvolvida pelo grupo de sujeitos nomeado "Grupo 2", que na voz dos alunos A2 e H2, apresentou o modo pelo qual desenvolveram a atividade. Outros alunos se manifestaram durante a apresentação do grupo. Logo abaixo é exposto o enunciado da Atividade 5 e, em seguida, o Tabela 1 com a expressão do desenvolvimento realizado.

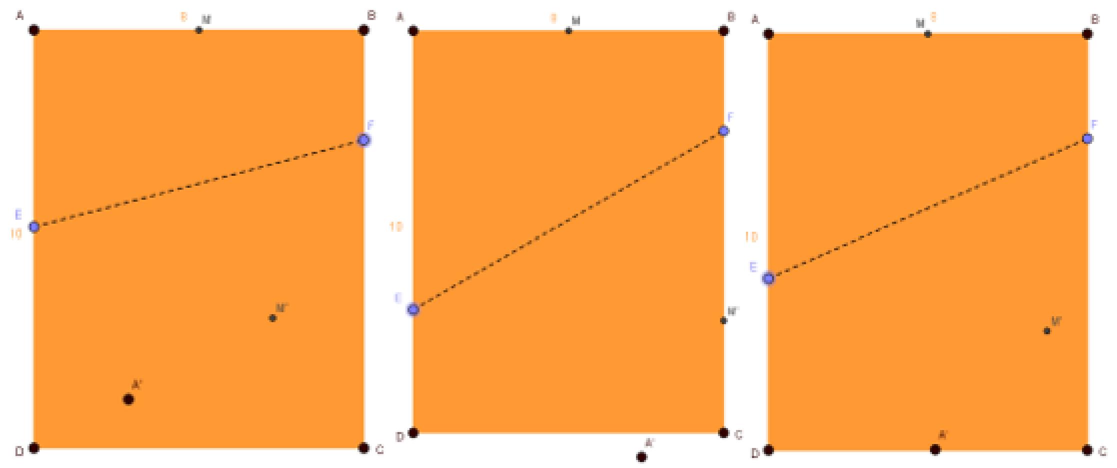
Atividade 5 - Dobrar uma folha de papel

Uma folha de papel, no formato retangular de dimensão 8x10 e vértices A, B, C e D, deve ser dobrada para que o vértice A seja posto sobre o lado CD e o ponto médio de AB, fique sobre o lado BC. Determine o posicionamento da reta que representaria a dobra que deve ser feita (a reta EF é apenas ilustrativa dessa dobra).

Tabela 1.

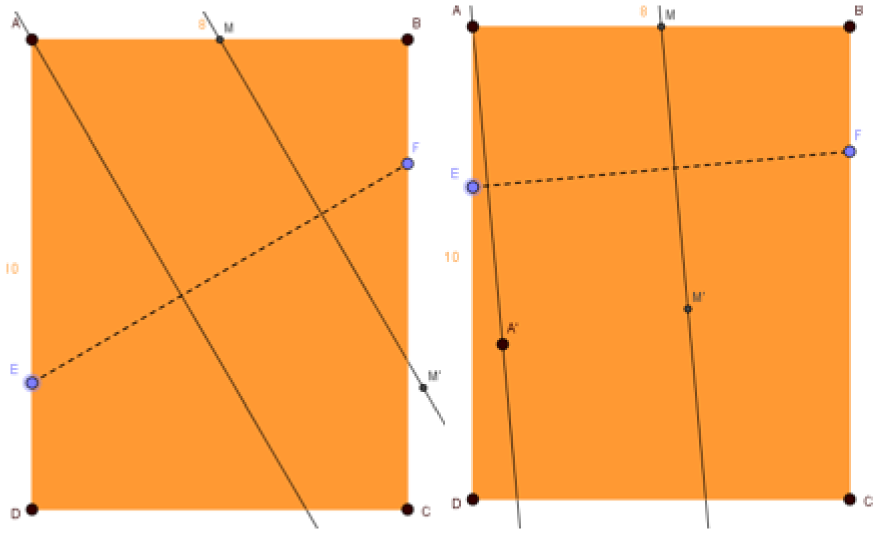
Desenvolvimento da atividade "Dobrar uma folha de papel" (Pinheiro, 2018, p. 216 - 219)

Transcrição – Atividade 5
Aluno G2: Primeiro, nós pegamos a folha do exercício (a que lhes foi entregue impressa) e dobramos até o outro lado [pega o vértice superior esquerdo da folha e o posiciona sobre o lado menor inferior da mesma. Firma o vértice sobre esse lado com uma das mãos e, com a outra mão, realiza a dobra da folha]. Fizemos outras dobras [pega o mesmo vértice e posiciona em diferentes lugares da folha], fomos percebendo que a dobra fica sempre na metade entre o vértice e o lugar onde colocamos ele.
Aluna H2:É, daí concluímos que deveríamos fazer a reflexão do vértice com relação à reta, e do ponto médio do lado (se refere ao lado AB), pois quando puxamos o A ele vai vir junto. Vou antes, criar o ponto médio [clica sobre a ferramenta *Ponto Médio* e, em seguida, sobre o lado AB], vou renomear aqui de M [com o botão direito do *mouse* clica sobre o ponto médio, seleciona *Renomear* e o determina como M]. Então, fiz os simétricos aqui com relação à dobra (dobra = segmento pontilhado) [seleciona a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta*, clica sobre o ponto A, em seguida, sobre o segmento EF. Depois, clica sobre o ponto M e sobre o segmento EF, respectivamente. Com isso, gera-se A' e M'] **Aluno G2:** A' e M' são as reflexões.  **Aluno G2:** No início ficamos movendo o segmento tentando sobrepor o A' em cima de CD e o M' ao lado BC, nada dava certo. Na hora que a gente conseguia colocar um, o outro ficava fora. Olha aí, o A' fica no lado, mas o M' não. Agora, nenhum dos dois. O M' fica, mas o A' não, e aí vai. **Aluna H2:** [Enquanto o Aluno G2 vai falando, arrasta sucessivas vezes os pontos E e F, de forma a tentar sobrepor A' e M' aos lados CD e BC, respectivamente]

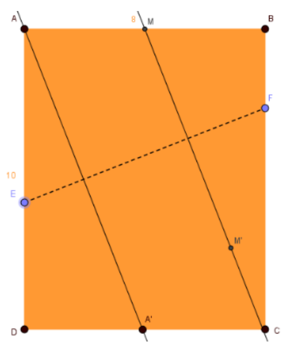


Aluno G2: Desse jeito a gente podia até conseguir, mas ia ser bem difícil. Mas**,** fazendo esses movimentos aí tivemos outra ideia. Pensamos em deixar um ponto já resolvido. Nosso problema era que tentar arrumar os dois pontos ao mesmo tempo estava difícil. Pensamos então em deixar um A' fixo em cima do lado CD.

Aluna H2: Nós vimos que temos duas retas paralelas aqui, olha, uma passando por A e A' e outra por M e M'. Dá pra ver isso nas várias posições desses pontos. Vou fazer [Seleciona a ferramenta *Reta* clica sobre os pontos A e A', depois sobre os pontos M e M'], viu aí? São paralelas [afirma após mover o ponto E para cima e para baixo]



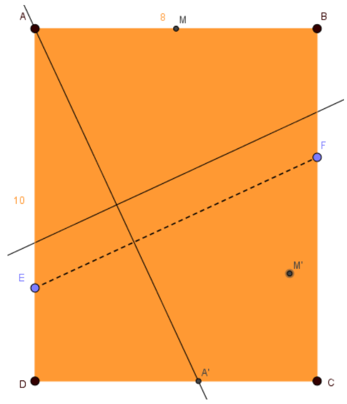
Aluno G2: As retas ajudaram quando a gente colocou o A' sobre o lado CD. A gente viu na hora que o segmento EF tem que ser mediatriz desse segmento AA'.
Aluna H2: Move o ponto E de forma a sobrepor o ponto A' ao lado CD]
Aluno G2: Aí que veio a ideia de passar uma reta por A, perpendicular ao segmento EF, marcar o ponto de interseção desta reta com o lado CD e traçar uma mediatriz. Faz aí pra ver (solicita à Aluna H2



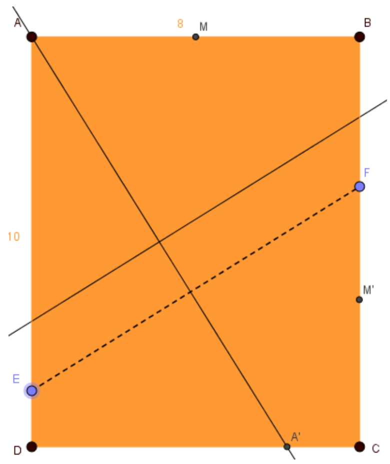
Aluna H2: Já to fazendo, mas antes, vou deletar essas retas aqui [clica sobre as retas e, em seguida sobre a tecla *delete*] Agora sim, primeiro a perpendicular [seleciona a ferramenta *Reta Perpendicular* e clica sobre o segmento EF], marco a interseção [seleciona a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* e clica sobre o encontro da reta com o segmento], e agora chamo ela de A'[renomeia o ponto gerado]. Mediatriz, mediatriz, onde? [Procura a ferramenta *Mediatriz*. Ao encontrá-la seleciona a mesma e clica sobre os pontos A e A', respectivamente, gerando com isso a mediatriz do segmento AA'], pronto!

Aluno G2: Viu? Agora fica mais fácil, só temos que cuidar do ponto médio, de M.

Aluna H2: A é, vou fazê-lo de novo [seleciona a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta*, clica sobre o ponto M e, em seguida, sobre a reta mediatriz traçada, gerando M']



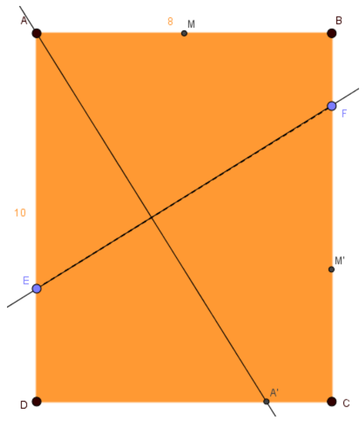
Aluna H2: Desço o ponto E, e o ponto, M' vai se aproximando de BC. Daí continuo movendo até ele ficar sobre BC. Pronto, M' sobre BC. Resolvido!



Pesquisador: Olha só, que bacana! Bom mesmo. Mas bateu uma curiosidade aqui, o segmento e a reta mediatriz me parecem que são paralelas, por que isso?

Aluna I2: É porque eles fizeram uma perpendicular ao segmento EF e depois a mediatriz dessa perpendicular (se referindo à mediatriz do segmento AA'), como a mediatriz é perpendicular a AA', ela é paralela ao segmento EF.

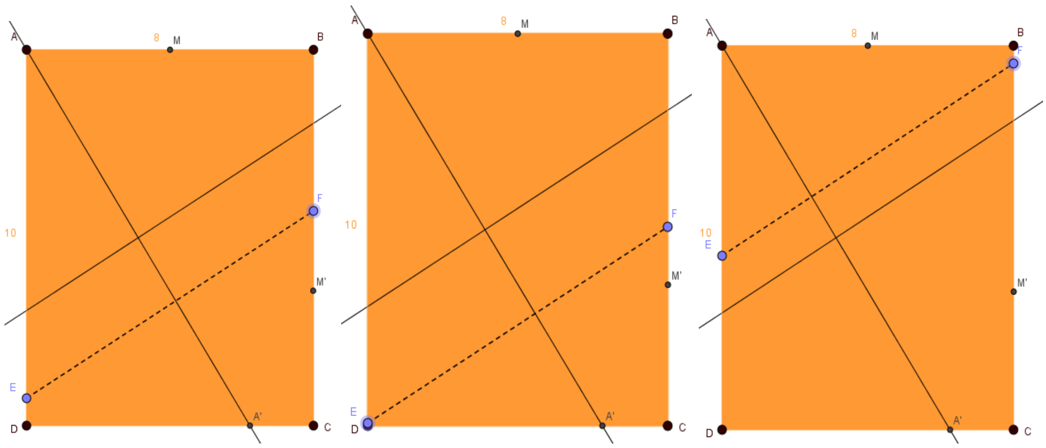
Aluna H2: Isso, mas agora vem a melhor parte. Olha, a dobra tem que ser aqui na mediatriz [agita o cursor sobre a mediatriz]. Pra acabar é só transladar o segmento EF pra cima dela, então. Aí ó, fica assim! [Clica sobre o segmento EF o arrasta até que ele fique sobre a reta mediatriz]



Aluno J2: Se, por exemplo, o A' ficar em outro lugar sobre o segmento (segmento CD), o M' vai ser ajustado pra outro lugar, certo? Aí dá pra ver que não tem só uma dobra possível, tem infinitas.

Pesquisador: Vamos ver isso. Teste, Aluna H2.

Aluna H2: Beleza. Ééé (pausa) não sei não (pausa). Quando mexo no E, o A' muda de lugar, mas quando mexo no F pra ajustar o M', parece que o A' e o M' voltam pra onde estavam. [Com o *mouse*, arrasta o ponto E alterando a posição de A' e, em seguida, ajusta M' ao arrastar F. Realiza esse processo por três vezes]

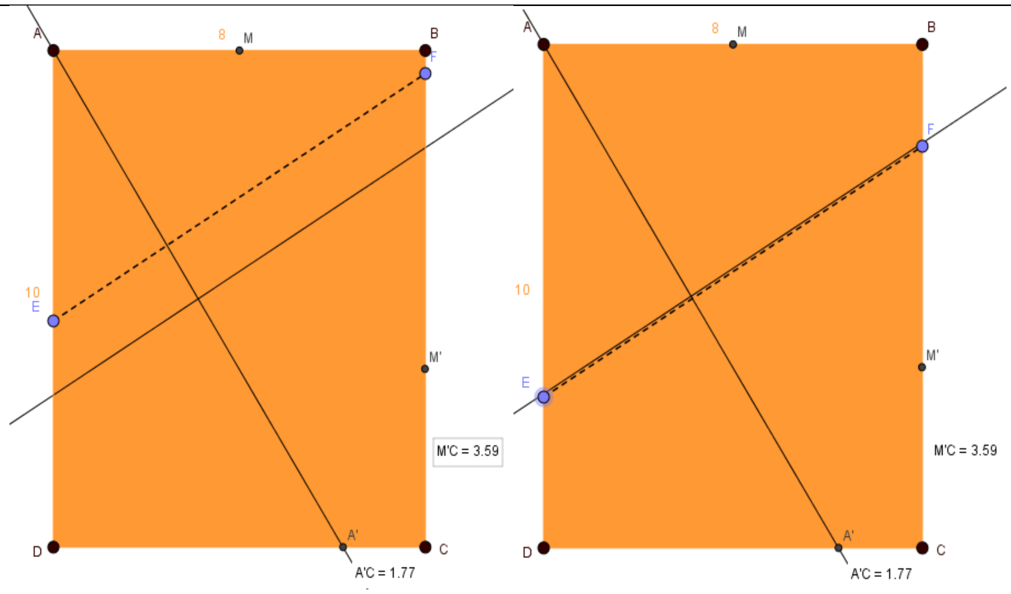


Aluno J2: Realmente, parece ter apenas uma dobra possível.

Pesquisador: Já se convenceu? Eu ainda não [por provocação]. Vocês estão deduzindo "no olho". Conseguem validar isso de alguma forma?

Aluna K2: Uma forma é tirar as medidas, por exemplo, pode medir a distância de A' até D e de C até M'. Depois mover os pontos pra ver se preserva a distância, entendeu?

Aluna H2: Tem razão. Pronto! [Selecionar a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clicar sobre os pontos A' e C, depois sobre M' e C, gerando assim as medidas das distâncias A'C e CM']. (17) Está aí, 1,77 e 3,59, as distâncias. Vou ver outra posição agora [desloca F para baixo e em seguida faz o mesmo com E para ajustar M' sobre BC]



Aluna H2: Nossa! Agora tá mais que comprovado, são sempre iguais as medidas, então só tem uma dobra possível.

Analisando a atividade compreende-se que na duração de um movimento realizado por um sujeito junto ao mouse, dar-se conta de possibilidades de movimentos, dentre as quais as configurações de sua continuidade, assim como se pode compreender em uma das falas: "*Desço o ponto E, e o ponto M' vai se aproximando de BC. Daí continuo movendo até ele ficar sobre BC. Pronto, M' sobre BC. Resolvido!".* Nela, entende-se que vai se configurando um "rastro" do movimento agora realizado, que lança à percepção o *por vir*, a continuidade desse rastro direcionada a um segmento, o BC. Com isso, pode-se conjecturar que a continuidade de um movimento se evidencia ao sujeito perceptivo, antes mesmo de sua materialização na tela.

Quando um sujeito move na interface do *software* um ponto qualquer, tal como expresso em "*Desço o ponto E*", e em determinado momento para de movê-lo, ele se dá conta que havia uma posição inicial e que agora há uma posição final de sua mão, do *mouse* e do ponto movido. Na duração do movimento desse ponto, sua posição inicial desaparece na tela, e a posição final ainda não se tem. Portanto, o sujeito não vê posições intermediárias, uma vez que não há um intervalo (delimitado por um ponto inicial e um ponto final) que as contenham.

No entanto, nas configurações do movimento do ponto, que avança em um ambiente que é familiar ao sujeito, ele tem uma percepção viva do movimento que está realizando e das implicações desse movimento que se expressa na unidade sujeito-*mouse*-ponto-interface, sendo o movimento-ele-mesmo um existencial que abarca e faz dinâmica esta unidade. Assim, vivenciando a duração/continuidade do movimento que "passa diante dos olhos", sem analiticamente interrogar quando começou ou quando terminará, sem premeditar o *por vir* como ponto objetivo, entende-se que se dá a vivência(percepção) da continuidade no espaço cibernético da GD, compreensão essa que pode ser direcionada ao mundo de vivências organizado por um corpo-próprio-movente.

Na percepção do *ponto-em-movimento* e das implicações desse movimento, o sujeito-movente não está preocupado em criar procedimentos e regras para o movimento do *mouse*, não busca descrever o movimento percebido. Ele pode perceber a continuidade, ou invariantes geométricos, mas não busca de imediato fazer uma asserção caracterizando-os, não busca antecipar o percurso ou o fim de um movimento, nem descrever convergências ou divergências que se mostram. Apenas, lança-se à vivência de vê-las convergindo ou divergindo com o movimento realizado.

Quando um sujeito voltado está a um ponto, o olhar lançado já o faz *ser com* o ponto, como unidade, não havendo, portanto, a separação entre sujeito e objeto. Nessa unidade o pensar sobre como mover vai produzindo novos entrelaçamentos. Com isso, afirma-se aqui que a continuidade do movimento não se dá apenas no software, ou em sua interface. Movimento no software *é* movimento de um sujeito-movente. Portanto, a continuidade mostra-se também nesse corpo-próprio, em seu mover-se com o software.

Nesse mover, há modos de transformações que se evidenciam. O sujeito se movimenta, movendo o *mouse*, o ponto sobre o qual clica e arrasta e a figura ligada por uma construção a esse ponto. Ao final desse movimento, o ponto em si, parece não ter sofrido transformação, ele ainda tem a mesma cor, o mesmo tamanho, a mesma fisionomia (a cada parada do movimento, o M’ ainda é M’), o que faz questionar se *o movimento gera transformação em tudo que com ele está, ou se a mudança não se dá no móvel, mas apenas na duração do percurso no qual ele é visto em trânsito*. Questiona-se se o movimento e sua continuidade não são vistos *no* ponto movido.

No pensar que foca a fisionomia do objeto na fragmentação do movimento, ele (o movimento) não é correlato ao objeto, mas constitui-se nas *relações* dele com o que o circunvizinha, com *referenciais*, em cada posição que ocupa, sendo um dos referenciais um instante cronológico. Assim se definiria o movimento de A’ como um conjunto de posições que ocupa em relação a A, a M e M’, ao segmento EF, aos lados do retângulo que representa a folha e a um instante. Longo (1999) diria que tal associação seria inviável, por compreender que o ponto não pode ser entendido em termos do tempo e vice-versa, uma vez que o instante não é cartesiano, ele flui e sempre escapa do intelecto que busca apreendê-lo, ele se move, uniformemente, para a profundidade do passado, ele é, portanto, duração. Já Husserl (2012) diria que esse pensar nega o próprio movimento, visto que separar o móvel do movimento, implica dizer que ele não se move, que ele é a materialização espacial, temporal e pontual de posições sempre visíveis, identificáveis ao olhar de um sujeito que o visa. Dessa forma, ver-se-ia o movimento como uma “linha pontilhada”, em que cada ponto é visto como idêntico ao seu anterior e ao seu sucessor.

No entanto, entende-se que esse modo/método de compreender e de estudar o movimento, discretizando-o, e valendo-se do tempo cronológico, apresenta aproximações matematicamente coerentes e relevantes (tal como feito nas modelagens com funções horárias), que historicamente sustentam as mais diversas construções da humanidade. A “ciência matemática da natureza é uma técnica maravilhosa que permite efetuar induções de uma fecundidade, de uma probabilidade e precisão, de uma facilidade de cálculo, que antes sequer se teria podido suspeitar" (Husserl, 2012, p. 81).

Entende-se que o *ponto-em-movimento* é outra coisa, não sendo mais aquele ponto que se mostrava como potencialmente móvel na interface do software. Com isso, o entrelaçamento entre ponto e movimento, produz novas configurações para o ponto e para o movimento. A ideia da preservação absoluta do ponto contribui para um pensar que o configura como sendo sempre um ponto, e não como algo que passa a nossa frente, como um vulto, um rastro, um contínuo, uma linha, ou simplesmente como um deslizar que se expõe numa tela.

Numa postura analítica, quando um sujeito visa estudar o movimento, tal como aqui compreendido, há um distanciamento, expondo em tempos e vivências distintas um *eu* que percebe e um *eu* que faz a análise do percebido. Na ação do segundo *eu*, o contínuo do movimento vivenciado já passou e, um modo de estudá-lo é discretizando-o, focando as marcas que o mesmo deixou ao passar, demarcando etapas que o constituiu. Na perspectiva fenomenológica, essas marcas não são objetivas (como pontos) mas são repletas de sentidos e significados que se doam às subjetividades. Faz-se, assim, o que aponta Bicudo (2012, p. 89), que entende que "pela atitude assumida mediante o olhar, podemos destacar unidades dentro do fluxo, focando-se e adentrando em compreensões mais profundas dessas vivências".

A atividade apresentada neste tópico apresenta evidências desse pensar, quando os sujeitos ao estudarem os movimentos realizados visualizaram e atualizaram possibilidades, tal como expresso nas falas *"fazendo esses movimentos aí tivemos outra ideia. Pensamos em deixar um ponto já resolvido" "fomos percebendo que a dobra fica sempre na metade entre o vértice e o lugar onde colocamos ele daí concluímos que deveríamos fazer a reflexão do vértice com relação à reta, e também do ponto médio do lado"; "Nós vimos que temos duas retas paralelas aqui, olha, uma passando por A e A' e outra por M e M'. Dá pra ver isso nas várias* *posições desses pontos"; "As retas ajudaram quando a gente colocou o A' sobre o lado CD, a gente viu na hora que o segmento EF tem que ser mediatriz desse segmento AA'".*

Nessas falas entende-se que o movimento e seu estudo constituem um campo criador de sentidos, com os quais ideias e conjecturas são articuladas e compreendidas como modo de resolução da atividade e, assim, como modo de aprender. Na pesquisa de Pinheiro (2018), na atividade aqui apresentada e em outras, foi explicitada a relevância do movimento, e, em alguns momentos, da necessidade de movimentos para dar conta de pensar modos de resolver as atividades. Esse entendimento dá-se com a percepção do movimento no fluir de sua duração, bem como nos constantes atos de parar o mesmo, para em cada parada estudar implicações na tela. Assim, a retomada do movimento valendo-se de atos de discretização mostrou-se como metodologia investigativa, com a qual se pode expressar e justificar conjecturas.

O movimento, em seu fluir, também se mostra como metodologia de validação de conjecturas e possibilidades que se mostram, o que pode se constatar no discurso que deu fechamento à atividade, tentando validar a existência de apenas uma dobra como resolução. Para tanto, realizou-se movimentos diversos, e junto a isso foi-se olhando as implicações dos mesmos na interface do software. Nesse fazer, foi visualizado invariantes dimensionais e de posicionamento, cuja preservação deu a "certeza" da resposta, concluindo que, de fato, só há uma dobra possível.

Embora o enunciado da atividade não sugestiona modos matemáticos de resolução, as isometrias se sobressaíram, evidenciando assim outro modo de se mostrar o movimento em atividades de ensino e aprendizagem de matemática. Foram utilizadas nessa resolução as ideias de *reflexão* (referente à isometria) e de *translação*. Elas estão no horizonte compreensivo dos alunos e a possibilidade do trabalho com as mesmas emerge da percepção do movimento expressando-se na interface do software, bem como na folha de papel utilizada para compreensões iniciais. Entende-se que com o *movimento* inicial de dobrar a folha, *percebeu-se* uma particularidade entre o posicionamento de dois pontos e de uma reta, e *conheceu-se* essa particularidade como sendo uma equidistância que pode ser trabalhada fazendo a *reflexão*. A translação aparece como meta do movimento de projeção, direcionando um segmento a determinada posição na representação gráfica do papel.

A reflexão (isometria) se realiza como uma construção, valendo-se de simetria em relação a uma reta. Esta construção mantém dois pontos sempre equidistantes, quando o referencial é uma reta, mesmo que ela fosse movida várias vezes. Já a translação, dá-se mediante propriedade preestabelecida que se refere ao paralelismo entre o segmento transladado e a reta sobre a qual ele foi justaposto. Tal movimento deu-se pela possibilidade do software de *arrastar* um objeto, esta que se abre a uma atualização na presença de um sujeito-movente, que foca o objeto em suas perspectivas, vendo-o como um todo de sentidos que abarca o sujeito, software e sua interface. Nessa presença, mostra-se possível construir e objetivar movimentos geométricos.

Por serem manifestações de corpos em movimento, movendo objetos expressos em interface computacional, não se vê aqui as isometrias como elaborações estáticas. A reflexão e a translação nessa atividade, bem como a rotação aplicada em outras atividades de Pinheiro (2018), por exemplo, só fazem sentido na dinâmica das ações significativas dos sujeitos. Tradicionalmente, a reflexão não é uma Geometria de movimentos, como a translação e rotação; mas, no caso da emergência de seus significados com o corpo-próprio dos sujeitos, todas são sutilmente expressas em gestos e movimentos. Obviamente, porém, são movimentações de características distintas: enquanto na rotação “cabe” a ideia no gesto (um dedo que gira), na simetria um gestual mais complexo vai pondo a estrutura necessária para que evidências simétricas se mostrem.

Entende-se que a atividade e o desenvolvimento dado a ela traz compreensões relevantes para se pensar uma pedagogia do/com movimento, pois o mover-se, movendo, expõe-se como ato de exploração, de investigação, de organização, de estruturação, de comunicação e de conhecimento, que são ações necessárias às práticas de ensino e de aprendizagem. Nesse entender, o movimento é sempre *movimento-percepção-conhecimento,* no sentido de que o sujeito se move, movendo, percebendo, focando, conhecendo. Esse entendimento é um convite a se pensar a sala de aula e atividades nas quais o movimento, o dinamismo, a espacialização, se sobressaiam, podendo expor compreensões que conduzam o pensar e o aprender dos alunos.

Ampliando considerações sobre movimento e aprendizagem

Fazendo uma retrospectiva a respeito do *movimento browniano*, passando pela interpretação matemática de Langevin e pela formalização de Einstein, compreende-se como primado deste conhecimento, agora instituído, uma experiência perceptiva de Robert Brown, cuja intencionalidade voltada ao movimento de partículas de pólen suspensas em água lhe deu a percepção de um movimento incessante e imprevisível, “aparentemente caótico”. Com esta explicitação quer-se enfatizar a relevância da experiência perceptiva do movimento para constituição dos conhecimentos produzidos pelos cientistas sobre a temática. Em especial, quer-se evidenciar a relevância dessa experiência para o ensino e aprendizagem em aulas de matemática.

Nas compreensões aqui explicitadas visualiza-se a importância deste estudo e do que dele emerge para a produção do conhecimento, tendo em vista que se tematiza aspectos "originários" do movimento, para além dos conceitos e definições, olhando para o movimento-ele-mesmo, para que com o estudo do que se mostra nesse olhar se possa pensar o que se tem como científico a respeito desse tema.

Com os estudos realizados, e também com a prática profissional dos pesquisadores que aqui escrevem, entende-se que há poucas atividades pedagógicas em sala de aula que promovam o conhecimento matemático constituindo-se no âmbito do movimento realizado pelo sujeito-movente, deixando às margens o que se compreende neste artigo, ou seja, que o ato *mover-se/movendo* faz mostrarem-se configurações e desconfigurações ao sujeito deste ato, que pondo-se atento ao movimento e às implicações do mesmo pode compreender o que ele lhe mostra: uma figura, uma propriedade, uma característica, um modo de validar e até mesmo uma autopercepção de si como sujeito-movente, e, portanto, de si como sujeito de sua aprendizagem. Assim, entende-se que o movimento, mesmo sendo objeto da aprendizagem, também se mostra na ação de um sujeito como correlato ao processo de aprender, constituindo, assim, a unidade *movimento-percepção-conhecimento.*

Embora se aponte aqui as divergências sobre as concepções de *movimento* no âmbito da Física e da matemática aplicada a ela e no âmbito da Fenomenologia, entende-se que essas regiões de inquérito têm em comum o campo de produção de significados, o *mundo*, diferindo-se o modo de conhecê-lo.

Dado esse espaço comum, *o mundo*, quer-se aqui propor uma sala de aula que possibilite atividades dinâmicas, que compreenda o movimento como modo de conhecer junto a uma experiência vivenciada. Assim, dar-se muito valor à usual ação do professor de Física, que lança um objeto, de modo que sua trajetória seja parabólica, e que indaga seus alunos: *o que percebem?* Dar-se o mesmo valor à postura do professor de Matemática, que faz a mesma indagação após simular diante da turma, com passos, a Dicotomia, de Zenão. Estas são experiências pré-reflexivas (de percepção) que podem dar ao professor e aos alunos a oportunidade de constituição de um pensar dinâmico ao que é tacitamente posto em leis da Física ou em propriedades Matemáticas.

Com isso, este estudo ajuda a vislumbrar redimensionadas as práticas de ensino e aprendizagem da Matemática. É endossada a crítica à pedagogia que premia os fundamentos do ensino da Matemática e também de Física em abstrações conceituais, por exemplo, do ponto, da reta e do plano amarradas por uma axiomática, isto é, à pedagogia que toma o texto-tradição em si, apaga sua história e afasta do aprendiz a oportunidade de viver as experiências que fundam essa tradição. Esse endosso desnuda a impropriedade de se querer *ensinar* aquilo que já está presente como evidência de espaço na experiência mundana.

Essa abertura do espaço didático à retomada do vivido como significativo na produção de sala de aula pode ser inspirada em certos ambientes em que se usa a mídia informática e que, por força da novidade, têm redimensionado a experiência do professor e dos alunos com relação ao programa de atividades. Entende-se que a análise da atividade apresentada neste trabalho corrobora tal compreensão. Objetivou-se com a análise mostrar que uma educação matemática em/com movimento pode ser posta como *encontro* de sujeitos em torno de intenções investigativas próximas, com visões pedagógicas de horizontes abertos, com uso de tecnologia de softwares abertos.

A proposta deste estudo, materializada com a apresentação de uma atividade, diz, especialmente, da presença de sujeitos livres para articularem significados num ambiente organizado de acordo com a intenção do professor, oportunizando material extenso para uma construção intersubjetiva, na qual o movimento se sobressaia como modo de aprender. Cabe ao professor, nesse ambiente de liberdade, desdobrar-se em atenção aos saltos que estão sendo dados. Entende-se, aqui, que esse professor deva considerar que todo ambiente didático é um tecido de intencionalidades, e a sua organização diz respeito a encontrarem-se os espaços de convergências possíveis de intenções para um foco posto, no entanto, não deixando de considerar a Matemática ou a Física como fenômenos de estrutura, com suas regras e linguagem, e com espacialização privilegiada para construções científicas.

Referências

Bassaneze R. C., & Ferreira Jr., W. C. (1988). *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Harbra Ltda.

Bicudo, M. A. V., & Rosa, M. (2010). *Realidade e cibermundo:* horizontes filosóficos e educacionais antevistos. 1 ed. Canoas: Editora da Ulbra.

Bicudo, M. A. V. (2012). A constituição do objeto pelo sujeito. In: Tourinho, C. D. C. (Org.). *Temas em Fenomenologia:* a tradição fenomenológica-existencial na filosofia contemporânea. 1 ed. Rio de Janeiro: Booklink, p. 77-95.

Einstein, A. (1905). *On the Electrodynamics of Moving Bodies*. Annalen der Physik 17, 891-921.

Husserl, E. (2012). *A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental:* uma introdução à filosofia fenomenológica. Trad. Diogo Falcão Ferrer. 1 ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária.

KLEIN, F. (1984). *O programa de Erlangen de Félix Klein:* considerações comparativas sobre as pesquisas geométricas modernas. São Paulo: IFUSP.

Langevin, P. (1908). On the Theory of Brownian Motion: Sur la théorie du mouvement brownien. C. R. Acad. Sci., Paris, 146, 530–533.

Merleau-Ponty, M. (2011). *Fenomenologia da Percepção.* Trad. Carlos Alberto Ribeiro de Moura. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes.

Morris, R. (1998). *Uma Breve História do Infinito – Dos Paradoxos de Zenão ao Universo Quântico*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor.

Newton, I. (2016). *Principia:* Principios Matemáticos de Filosofia Natural. 2 ed. São Paulo: Edusp.

Nobrega, P. T. (2008). Corpo, percepção e conhecimento em Merleau-Ponty. *Estudos de Psicologia*, Natal, v.13, n. 2, p. 141-148.

Nussenzveig, M. (2002). *Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor.* Curso de Física Básica. 4 ed. São Paulo: Edgard Blücher.

Pinheiro, J. M. L. (2018). *O movimento e a percepção do movimento em ambientes de Geometria Dinâmica.* 283p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro.

Pinheiro, J. M. L.; Bicudo, M. A. V.; Detoni, A. R. (2019). Um olhar fenomenológico à Geometria Dinâmica. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 21, n. 2, p. 264 – 287.

Silva, J. M., &; Lima, J. A. S. (2007). Quatro abordagens para o movimento browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, n. 1, p. 25-35.

Wagner, E. (2007). *Construções Geométricas.* 6 ed. Rio de Janeiro: SBM.

Recebido em: 29/05/2020

Aprovado em: 05/01/2021