EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p779-812

Los recorridos de estudio e investigación en la construcción de buenas prácticas docentes en los estudios de ingeniería

Study and research course in the building of good teaching practices in the engineering studies

Os percursos de estudo e investigação na construção de boas práticas pedagógicas nos estudos de engenharia

Cecilio Fonseca [1]
Departamento de Matemática Aplicada I, Universidade de Vigo (UVIGO)
Doctorado en ciencias matemáticas - UVIGO
https://orcid.org/0000-0003-1087-8346
José Manuel Casas [2]
Departamento de Matemática Aplicada I, Universidade de Vigo (UVIGO)
Doctorado en matemáticas – Universidade de Santiago de Compostela (USC),
https://orcid.org/0000-0002-6556-6131
Ixchel Dzohara Gutiérrez-Rodríguez [3]
Departamento de Matemáticas, Universidade de Vigo (UVIGO)
Doctorado en matemáticas – Universidade de Santiago de Compostela (USC)
https://orcid.org/0000-0003-0035-5963
Xabier García-Martínez [4]
Departamento de Matemáticas, Universidade de Vigo (UVIGO)
Faculty of Engeneering, Vrije Universiteit Brussel (VUB)
Doctorado en matemáticas – Universidade de Santiago de Compostela (USC),
https://orcid.org/0000-0003-1679-4047

Resumen

En este trabajo nos proponemos, utilizando la Teoría Antropológica de lo Didáctico y un modelo particular de Recorrido de Estudio e Investigación, articular modelos de prácticas docentes que se pueden trasladar al primer curso de las escuelas de ingeniería. Lo haremos con un ejemplo de práctica docente que recubre una parte importante del programa de Álgebra Lineal, prioriza la enseñanza funcional de las matemáticas, introduce la razón de ser de la actividad matemática siempre a partir de situaciones problemáticas, entiende la enseñanza

[1] cfonseca@uvigo.es
[2] jmcasas@uvigo.es
[3] ixchel.dzohara.gutierrez.rodriguez@uvigo.es
[4] xabier.garcia.martinez@uvigo.gal

como un proceso de investigación y asigna nuevas responsabilidades a las matemáticas, al profesor y a los alumnos.

Palabras-clave: Teoría antropológica de lo didáctico, recorrido de estudio e investigación, razón de ser, enseñanza funcional de las matemáticas, buenas prácticas docentes.

Abstract

In this work we provide practical teaching models that can be moved to the first year of Engineering schools, using the Anthropological Theory of Didactics and a particular Study and Research Course. We will procced with an example of teaching practice that covers a considerable portion of the Linear Algebra programme, prioritising the functional teaching of mathematics, introducing the *reason for being* of the mathematical activity from riddles, understanding teaching as a research process designating new responsibilities to the mathematics, to the teacher and to the students.

Keywords: anthropological theory of didactics, study and research course, reason for being, functional teaching of mathematics, fine teaching practices.

Resumo

Neste trabalho propomos, a partir da Teoria Antropológica da Didática e de um modelo particular da Rota de Estudo e Pesquisa, articular modelos de práticas pedagógicas passíveis de transferência para o primeiro ano das escolas de engenharia. Faremos isso com um exemplo de prática de ensino que cobre uma parte importante do programa de Álgebra Linear, prioriza o ensino funcional da matemática, apresenta a lógica da atividade matemática sempre a partir de situações problemáticas, entende o ensino como um processo de pesquisar e atribuir novas responsabilidades à matemática, ao professor e aos alunos.

Palavras-chave: Teoria antropológica da didática, Percurso de estudo e pesquisa, Razão de ser, Ensino funcional da matemática, Boas práticas de ensino.

Los recorridos de estudio e investigación en la construcción de buenas prácticas docentes en los estudios de ingeniería

Hay múltiples declaraciones e investigaciones que ponen de manifiesto la necesidad de cuestionar el modelo docente actualmente predominante en una gran mayoría de las instituciones académicas universitarias. La Comisión del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) para el estudio de la renovación de las metodologías educativas en la universidad, formuló en 2006 una serie de objetivos de un proceso de renovación pedagógica general. Destacamos los referidos a la dimensión técnico-pedagógica:

- La renovación metodológico-didáctica implica un nuevo estilo de trabajo del profesorado.
- Es preciso aproximar más los estudios universitarios al ejercicio profesional, potenciando la dimensión práctica de la enseñanza: el saber, sí, pero también el saber hacer y el saber ser/estar.
- Debemos aproximarnos a los planteamientos didácticos que subyacen al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES): dar mayor protagonismo al estudiante en su formación, fomentar el trabajo colaborativo, organizar la enseñanza en función de las competencias que se deban adquirir, potenciar la adquisición de herramientas de aprendizaje autónomo y permanente, etc.

En el terreno de las medidas concretas, mencionar la necesidad de hacer "visibles" y diseminar "buenas prácticas docentes" y definir, planificar y dinamizar un modelo educativo propio, con mención expresa a las metodologías.

Llinares (2013) escribe que en el documento OCDE (2003) se usa el término alfabetización matemática para enfatizar el conocimiento matemático puesto en funcionamiento en una multitud de contextos diferentes. Es decir, la capacidad de enfrentarse con los problemas más variados por medio de las matemáticas. Para ello se caracterizan cinco fases de la actividad matemática:

- comenzar un problema situado en la realidad.
- organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos.
- despegarse progresivamente de la realidad ante procesos tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema, generalizar y formalizar.
- resolver el problema, y
- proporcionar sentido a la solución, en términos de la situación inicial.

En Mallart y Deulofeu (2017) se escribe que las matemáticas se aprenden en interacción con situaciones problemáticas y con otros sujetos, que obligan al alumno a ir modificando su estructura cognitiva mediante la experimentación, haciéndose preguntas, particularizando situaciones, generalizando resultados o encontrando contraejemplos.

La fragmentación del conocimiento (Michavila, 2009) en parcelas no conectadas entre sí suficientemente y la escasa interdisciplinariedad, que contemplan los tradicionales planes de estudios universitarios, deben de ser revisados.

> […] A través de prácticas docentes estándar, los alumnos obtienen un razonable éxito en cuestiones estándar, pero nada más. Por ejemplo, si se plantea a los estudiantes cuestiones de modelización para que decidan por sí mismos si un problema requiere un proceso integral para su resolución, se quedan estancados por completo o basan sus respuestas en "pistas" lingüísticas, en caso de haberlas, que han aprendido a percibir en las versiones estándar de tales tareas. La mayoría de los alumnos piensa que la forma más segura de enfrentarse con éxito a este dominio no es intentar comprender, sino simplemente comportarse mecánicamente. Me gustaría añadir que no tenemos que ver esto como una especie de fatalidad cognitiva. Simplemente observamos las formas económicas de adaptación de nuestros alumnos a prácticas docentes inadecuadas (ARTIGUE, 2003).

Diversos trabajos de investigación realizados por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Bosch et al., 2004; Lucas et al., 2014) nos hablan de restricciones que dificultan e impiden el estudio de la actividad matemática escolar tales como:

- Atomización del currículum escolar, lo que provoca un desajuste de la matemática escolar, que se observa entre los principales contenidos matemáticos de Secundaria.

- Desarticulación entre Secundaria y Universidad.
- Fuerte rigidez en la matemática escolar que se manifiesta en las grandes dificultades de los estudiantes para resolver problemas “no rutinarios” y, especialmente, cuando éstos son problemas complejos que involucran algunos aspectos de la modelización matemática.

En Barquero (2009) se afirma que:

- La modelización matemática está desaparecida de casi todos los programas de Álgebra Lineal de las Escuelas de Ingeniería.
- *La razón de ser* (matemática o extramatemática) de los contenidos que deben adquirir los estudiantes no forma parte del programa de estudio.
- Las matemáticas no se enseñan a partir de la necesidad de modelizar situaciones o cuestiones que surgen en el ámbito de las instituciones donde se realiza el estudio, sino que se presentan como unas herramientas básicas que el estudiante debe aprender a manejar sin saber de antemano qué tipos de problemas le permitirán resolver. Una enseñanza poco funcional de las matemáticas (monumentalismo) que según Chevallard (2013) provoca el “olvido” de la razón de ser de la mayoría de las organizaciones matemáticas que se construyen en el aula.

En el campo concreto de las matemáticas, se observa al mismo tiempo en estos últimos años que existe una progresiva disminución de las matemáticas de los currículos de Secundaria, de los planes de estudio de las diferentes especialidades de los maestros en las universidades españolas y de determinadas carreras científicas y tecnológicas, que puede estar relacionado con el fenómeno de la *invisibilidad cultural de las matemáticas*.

Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en que se sitúa este artículo, venimos trabajando sobre el problema de la enseñanza de la matemática como herramienta de modelización, centrándonos en el caso de la modelización algebraica y funcional en

Secundaria y primer ciclo universitario. Para ello se han diseñado y experimentado Recorridos de Estudio e Investigación (REI), introducidos en Chevallard (2004, 2006) para algunos ámbitos curriculares concretos, todos ellos relativos a la modelización algebraico-funcional en Secundaria y primer ciclo universitario, ver (Barquero, 2006, 2011; Serrano et al., 2010; Parra y Otero, 2017). Desde un punto de vista más local, se analizan las nuevas condiciones que se requieren en distintos entornos universitarios para la implementación y gestión de los recorridos (Fonseca et al., 2009; Fonseca et al., 2010; Fonseca, 2004; Fonseca, Casas et al., 2011; Fonseca, Pereira et al., 2011). Se considera que un REI viene generado por el estudio de una cuestión viva Q, con fuerte poder generador, capaz de imponer un gran número de cuestiones derivadas que generan múltiples cuestiones a las que hay que dar respuesta. Los REI permiten desarrollar actividades prolongadas de estudio e investigación que muestran la funcionalidad de los contenidos matemáticos del programa para describir, crear y analizar procesos didácticos, en los que se parte de una cuestión más o menos definida y no se sabe de antemano qué tipo de herramientas se necesitarán ni qué proceso es conveniente seguir para su resolución.

En este artículo nos proponemos, a partir de un modelo particular de REI, elaborar material didáctico para el sistema escolar. El objetivo es construir buenas prácticas docentes (Zabalza, 2012) que se puedan llevar a cabo en una Escuela de Ingeniería que aparezcan como respuesta a cuestiones problemáticas que le aportará su razón de ser.

Esta construcción de práctica docente que aquí presentamos no es más que una parte de un proyecto que se articula alrededor de un REI que pretende recubrir el programa de Álgebra Lineal de una escuela de ingeniería, articulando varios temas que aparecen aislados y poco conectados. El diseño completo de dicho REI y su experimentación forma parte de un proyecto de investigación en el que estamos involucrados, que pretende poner de manifiesto una posible razón de ser del Álgebra Lineal en instituciones como pueden ser las escuelas de ingeniería.

Marco teórico

La modelización en la TAD *reformula la modelización como procesos de construcción y articulación de praxeologías matemáticas de complejidad y completitud crecientes* (Bosch et al., 2004) con el objetivo de dar respuesta a ciertas cuestiones problemáticas con sentido que se han planteado en cierto ámbito de la realidad matemática o extramatemática (Barquero, 2009).

Los recorridos de estudio e investigación. A partir de la propuesta de REI desarrollado por la TAD, desde la Universidad de Vigo (Fonseca, Pereira et al., 2011) venimos trabajando en un modelo particular de REI, que queremos trasladar a instituciones como pueden ser las escuelas de ingeniería. Describimos a continuación lo que caracteriza el modelo de REI que estamos diseñando y experimentando, para un ejemplo concreto de práctica docente, con la infraestructura *matemático-didáctica* que lo hace posible. Sus principales características son:

a) *Problema didáctico-matemático*: Elaborar una "buena práctica docente" en la Escuela de Ingeniería Industrial (EII) de la Universidad de Vigo situada en el Álgebra Lineal, construyendo o reconstruyendo no solo conocimiento matemático, sino también conectando la actividad matemática de Secundaria con la Universidad y también las propias organizaciones matemáticas (OM) involucradas (matrices, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y aplicaciones lineales) que en el sistema educativo actual aparecen aisladas, alrededor de un proyecto que combina competencias específicas y transversales que pueden ser útiles en la formación futura del ingeniero. El REI que aquí presentamos no pretende recubrir todo el programa de Álgebra Lineal, sino una parte importante del mismo, y queda abierto a nuevas ampliaciones, añadiendo y conectándolo con las OM correspondientes al espacio euclídeo, diagonalización de matrices y formas cuadráticas.

b) *Institución*: En nuestro caso se desarrolla en la Escuela de Ingeniería Industrial (EII) de la Universidad de Vigo. El nivel donde se realiza es el primer curso del Grado en Ingeniería Industrial. La propuesta que presentamos ha sido experimentada durante dos cursos 2015/16 y 2016/17 que, por problemas de espacio, restringiremos al segundo año. Se realizó en un laboratorio de la EII dotado de ordenadores y de acceso a internet, con un grupo de 14 estudiantes voluntarios. Las sesiones se desarrollaron en horario distinto al oficial para evitar conflictos con el horario escolar.

c) *Razón de Ser*: Son las cuestiones problemáticas a las que las OM responden. Tendremos en cuenta lo siguiente:

Legitimidad Matemática: Debe formar parte de la construcción de cualquier OM el momento histórico en que aparece, cuál es el contexto y cuáles fueron los obstáculos que hubo que salvar. Funciona siempre como una buena fuente de motivación para los estudiantes.

Legitimidad Social: Viene determinada por las cuestiones que la institución propone que se estudien en la escuela. El programa de Álgebra Lineal de la EII establecido en su guía docente abarca: el conjunto de los números complejos; matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales; espacios vectoriales y aplicaciones lineales; espacio vectorial euclídeo; endomorfismos diagonalizables y formas cuadráticas. Es un programa muy denso, que hay que impartir en 13 sesiones de 2 horas del primer cuatrimestre del primer curso, muy alejado de la visibilidad de las matemáticas en ingeniería. Hay mucho conocimiento teórico, pero poca información de su utilidad. Un océano de técnicas, que aparecen aisladas, sin conocer la utilidad de la mayoría de ellas. Se puso a disposición de los alumnos la utilización de varios recursos (guía docente, bibliografía, apuntes de teoría, colecciones de problemas, programas informáticos, manuales, páginas Web accesibles a través de la plataforma institucional de teledocencia de la Universidad de Vigo por medio de la aplicación Telematerias (TEMA)).

La guía docente es el documento oficial que recoge, además del programa, los objetivos concretos que se persiguen y también el procedimiento de evaluación de los alumnos. La evaluación consta de dos pruebas de evaluación continua, con un peso del 20% en la evaluación final, y un examen final, con un peso del 80% en la evaluación final. Les preguntamos a los alumnos si estarían dispuestos a participar de forma voluntaria en un proceso de estudio en el que el 20% de la nota de la evaluación continua consistiese en la construcción y presentación de un proyecto en el que figurase una parte importante del programa de Álgebra Lineal que podía ser útil en su futuro profesional. El proyecto lo tendrían que defender públicamente antes de terminar el curso. Decidieron participar 14 alumnos. Se realizó en un aula con equipamiento informático que permitía disponer de un ordenador por alumno.

Legitimidad Funcional: Al comienzo del estudio de la OM el profesor debe proponer cuestiones problemáticas (CP) que puedan vincularse a la institución en la que se sitúe. Actualmente el sistema de enseñanza oculta las cuestiones problemáticas que constituyen la razón de ser de los contenidos a enseñar. El estudio de estas cuestiones problemáticas debe formar parte de la "razón de ser" de cualquier OM porque son las que pueden otorgar legitimidad a las posibles respuestas que puedan aparecer. Para este caso concreto, planteamos a los alumnos CP muy potentes, muy cercanas a sus intereses, que dan lugar a gran variedad de problemas que aparecen conectados y que pueden ser resueltos por el Álgebra Lineal como: el estudio de diversos planes de pensiones de una empresa, corrientes eléctricas que circulan por un circuito, urbanizaciones en las que se necesita contratar distintos tipos de trabajadores, dietas de alimentación semanal de distintos enfermos en un hospital, etc.

d) *Cuestión generatriz* (CG): Es la que provoca e impulsa todo el proceso de estudio. De todas las CP planteadas en la legitimidad funcional, les proponemos a los alumnos la elección de una de ellas. Nos parecía importante que, tal y como figura en (Fonseca et al., 2011), en esa elección se tuviese en cuenta su potencial, que fuese cercana a su futuro profesional, que tuviese necesidad de tratamiento informático y que permitiese conectar la enseñanza secundaria con la universitaria y las propias OM. Se eligió el estudio de la situación económica de una empresa automovilística, por la importancia que tiene este tipo de industria en nuestra escuela de ingeniería y en la propia ciudad de Vigo, en donde está instalada la escuela. La articulación de la matemática escolar tiene que integrar en el programa de estudios las razones de ser de las OM enseñadas con CG muy potentes.

e) *Contrato didáctico*: Es un conjunto de normas que rigen el funcionamiento de la clase y de las relaciones entre profesor y alumnos. En un REI se establece un nuevo contrato que representa una ruptura con el contrato didáctico habitual, con nuevas responsabilidades para el profesor, el alumno y las propias matemáticas.

<u>*Las matemáticas*</u>*:* Los REI apuntan a una nueva epistemología escolar tal como dice Chevallard (2004) que busca un mayor compromiso con el conocimiento más funcional y menos monumentalista o reverencial hacia el saber. Hay una ruptura con la atomización de la actividad matemática escolar. Su función principal consiste en permitir realizar en clase el estudio en profundidad de un tipo de problemas, en contraposición a la simple exploración de problemas nuevos con técnicas nuevas (Fonseca, 2004). Es una enseñanza por indagación. Puede tener distintos niveles de desafíos. Puede haber un primer desafío que tenga que ver con el estudio de cuestiones del proyecto cuya respuesta es posible con el equipamiento matemático inicial que ya tiene el alumno (Momento Praxeológico del alumno). Después puede haber una segunda etapa en la que aumentamos el nivel de desafío y para el que no tenemos una respuesta con la actividad matemática desarrollada. Provocará, por un lado, la llegada de nueva actividad matemática con la aparición de nuevas técnicas que permitirán ampliar el equipamiento matemático del alumno e ir completando cada vez más el proyecto. En el ejemplo de práctica docente propuesta lo tenemos muy en cuenta.

Profesor: Actúa como un guía. Les plantea una cuestión problemática cercana al mundo de los alumnos, que le supongan un reto que deben aceptar, sin definir previamente cuales son los conocimientos que deben aprender. Son los propios alumnos los que tienen que averiguar qué conocimientos son los que dan una respuesta que permita resolver esa cuestión. Termina aportando una posible razón de ser del estudio de las matemáticas.

Alumno: El alumno está obligado mediante un proceso de investigación a construir una respuesta en forma de proyecto a partir de una cuestión inicial limitada (CG) que plantea nuevas cuestiones por estudiar.

Proceso de Estudio: En el modelo de REI con el que estamos trabajando, el proceso de estudio se articula como un proyecto que se genera desde una cuestión generatriz Q_0, que sirve de hilo conductor de todo el proceso a partir de la cual se derivan distintas cuestiones Q_i, que surgen como una consecuencia (y no como el origen) del estudio de las cuestiones, que transita por la construcción o reconstrucción de distintas OM que aparecen vinculadas y conectadas entre sí y que afloran como respuesta a las Q_i. El principio que respalda los REI es el de situar el estudio de las CP en el corazón de la matemática escolar y que aquellas sean cuestiones "vivas" y potentes, cuya respuesta requiera la construcción o reconstrucción de organizaciones matemáticas locales relativamente completas (OMLRC) (Fonseca, 2004), en las que, por un lado, está la construcción del producto (ingeniería didáctica) de la propia OM, que vendrá descrito en términos de los momentos didácticos (Praxeológico Inicial, Primer Encuentro, Exploratorio, Trabajo de la Técnica, Tecnológico-Teórico, Institucional, Evaluación) y, por otro lado, aparece el resultado del producto construido (ingeniería matemática), articulado alrededor de diez indicadores (OML1-OML10) asociados a objetivos concretos, que permiten estudiar el grado de completitud del producto final construido. Estos indicadores se resumen en:

OML1. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al "cuestionamiento tecnológico".

OML2. Se puede disponer de diferentes técnicas para cada tipo de tareas y es posible discernir criterios para elegir entre ellas.

OML3. Los ostensivos (símbolos, palabras y gráficos) son suficientemente ricos y variados como para permitir diferentes representaciones de la actividad matemática.

OML4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas".

OML5. Interpretación de las técnicas.

OML6. Existencia de tareas matemáticas "abiertas" que incluyan modelización matemática.

OML7. Necesidad de construir técnicas nuevas.

OML8. Uso de las TIC y utilización de calculadoras simbólicas.

OML9. Debe existir la posibilidad de modificar la situación inicial.

OML10. Deben aparecer las "razones de ser" que legitimen la OM a construir.

Hay que subrayar, que la noción de "completitud" es relativa. No tiene sentido hablar de OML "completas" ni de OML "incompletas". Se trata, en todo caso, de una cuestión de grado: existen OML más o menos "completas" que otras en función del grado en que sus componentes cumplan las condiciones descritas por los indicadores OML1-OML10. La utilización de estos indicadores, que pueden tener diversos componentes, produce una mejora en el proceso de estudio. En Godino et al. (2009) se aporta un sistema de componentes e indicadores empíricos que permiten formular criterios de idoneidad para las distintas facetas implicadas en un proceso de estudio matemático.

Descripción del REI experimentado

Tal como figura en Fonseca et al. (2014), presentamos a continuación el diseño matemático de una parte de un REI que puede ser descrito en términos de una arborescencia de cuestiones y respuestas (no predeterminadas de antemano), donde estas últimas constituyen praxeologías cada vez más amplias y relativamente más completas en el sentido descrito en Bosch et al. (2004).

No es objetivo del proceso de estudio hacer una transición pormenorizada por todas las OM que queremos estudiar, sino ver como esas OM pueden articularse y conectarse entre ellas, cosa que no ocurre en la matemática escolar, alrededor de una "práctica docente" en forma de proyecto que sea útil para aplicar en las aulas docentes de los estudios de ingeniería.

El REI se diseña para ser desarrollado en siete sesiones (las dos primeras de introducción a un programa de cálculo simbólico) de dos horas cada una. Se articula alrededor de cuatro grandes bloques, cada uno de los cuales responde al estudio de una cuestión problemática determinada. El primer bloque, alrededor de la OM de las matrices, para dar respuesta a la problemática de los ingresos y beneficios de una empresa. El segundo, alrededor de la OM de los espacios vectoriales, para dar respuesta a las formas de distribución de los productos fabricados por la empresa. El tercer bloque, que está relacionado con sistemas de ecuaciones, se articula con problemas inversos. El cuarto bloque, aparece como la necesidad de crear modelos matemáticos que actúen como máquinas para aportar información a las diversas cuestiones problemáticas de la empresa. Es donde adquiere protagonismo la OM de las aplicaciones lineales. En todos estos bloques juegan un papel muy importante los indicadores OML6 y OML10.

Cada bloque comienza con el diseño de una cuestión Q_i determinada, de la que se derivan otras Q_{ij}, y termina con las correspondientes respuestas, es decir, la CG se va desarrollando y completando a medida que va siendo tratada por la comunidad escolar.

En la cuestión inicial Q_i de cada sesión tiene un importante protagonismo el profesor, porque aquella se elige en función de la OM que se considera como objetivo. El paso de una sesión a la otra viene siempre provocado por la ampliación de la OM creada en la sesión anterior a partir de un cuestionamiento tecnológico que dará lugar a la formulación o reformulación de nuevas cuestiones con nuevas técnicas y con nuevo discurso tecnológico que actúa como un motor que promoverá que la OM generada en la sesión anterior se integre en otra más amplia y completa.

Los estudiantes se distribuyeron en 3 grupos (dos de 5 alumnos y otro de cuatro alumnos). Cada uno de los grupos, tal como propone Ruiz-Munzón (2010), debería entregar todas las semanas un avance de lo que se había hecho en la sesión anterior, describiendo cual era la OM estudiada hasta ese momento, qué cuestiones forman parte por el momento del proyecto, si tienen respuestas por la OM estudiada, cómo se articula el uso de un programa de cálculo en cada una de las sesiones, cómo se gestiona el trabajo del grupo, cuáles son las dificultades que se están encontrando y qué posibles cuestiones se pueden seguir estudiando para mejorar el proyecto. Al comienzo de cada sesión, cada grupo resume cuál es la situación del proyecto. Por problemas de espacio, no podemos describir con detalle todos los componentes de las praxeologías que figuran en este trabajo. Por este motivo, describiremos sus partes esenciales, aquellas que tienen que ver con la construcción del proyecto y lo haremos focalizándolo sobre todo en el grupo A.

Partiremos de una empresa automovilística con una producción determinada de modelos de coches, con tres versiones distintas. Tomamos como cuestión generatriz, que servirá como hilo conductor de todo el proceso de estudio:

Q_0: ¿Qué pueden hacer los estudiantes de 1º de Ingeniería Industrial para aportar información a una empresa automovilista sobre los ingresos, beneficios y distribución de los coches a los concesionarios utilizando el Álgebra Lineal?

Sesiones preliminares 1 y 2. Es donde tenemos en cuenta el *Momento Praxeológico inicial del alumno,* es decir, el conjunto de praxeologías u organizaciones matemáticas que se supone forman parte del saber del alumno y que puede utilizar en un instante determinado.

En esta doble sesión se les introdujo en el manejo del sistema de álgebra computacional wxMaxima (software libre disponible en https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/) (OML8). Los alumnos, además de utilizar el material que figuraba en la plataforma institucional de teledocencia de la Universidad de Vigo TEMA, buscaron en la web distintos manuales sobre wxMaxima y se le facilitaron manuales propios enfocados en los procesos que se iban a manejar. El profesor insistió en que el material informático era muy conveniente saberlo utilizar desde el primer momento, porque ello les facilitaría el trabajo en las restantes sesiones. En consecuencia, deberían trabajar en su conocimiento de forma autónoma, ofreciéndosele tutorización al respecto.

Al terminar la segunda sesión sobre el conocimiento y manejo del programa wxMaxima se empezó a construir un proyecto articulado alrededor de un REI.

Momento del primer encuentro: Es donde debe concretarse y pulirse la CG en bruto. A diferencia de lo que se hace en la matemática escolar, donde el profesor plantea siempre el problema y los alumnos dan la respuesta, se les propuso que concretasen una situación realista. Fueron el profesor y los propios alumnos los que debatieron y propusieron, después de estudiar diversas fuentes de información, el estudio de la CG para unos datos determinados. La cuestión generatriz consensuada del proceso de estudio puede resumirse en los siguientes términos:

Una empresa de automóviles fabrica 3 modelos de coches M1, M2, M3. Cada uno de ellos tiene tres versiones distintas dependiendo de la motorización: TD1, TD2, TD3. La producción diaria, los precios de coste y venta de cada tipo de coche vienen dados en la Tabla:

Tabla 1.

Producción, precios y venta de los distintos tipos de coches.

	Producción (PR)			**Precios coste (PC)**			**Precios venta (PV)**		
	TD1	TD2	TD3	TD1	TD2	TD3	TD1	TD2	TD3
M1	160	220	980	18000	15060	14820	25200	24000	21800
M2	100	120	560	14050	16580	18350	25050	24500	28240
M3	60	80	320	20000	21000	25000	28000	29000	32000

Sesión 3. En esta sesión se respondió a la siguiente cuestión:

Q_1: ¿Cómo simbolizar las matrices producción, precio coste y precio venta de los tres modelos de coches y de sus versiones respectivas? ¿Cómo interpretar los coeficientes de esas matrices? ¿Cuáles son los costes de la fabricación de todos los modelos? ¿Y los ingresos? ¿Y los beneficios?

Momento Exploratorio: Es donde se explora una técnica potencialmente útil para resolver un determinado tipo de tareas. En este caso se propusieron tareas muy simples que tienen que ver con la simbolización, el trabajo y manipulación del concepto de matriz. Es un momento de familiarización con un tipo de tareas que pueden poder resolverse con el Momento Praxeológico inicial del alumno. En todo el trabajo desarrollado tuvo un fuerte protagonismo el uso de wxMaxima.

Tipos de tareas:

Q_{11}: Tareas que tienen que ver con la construcción de matriz (OML3).

Q_{111}: Escribe los datos de la tabla anterior en forma de matriz. Denotamos por (PR) la matriz de producción, por (PC) la que representa el precio de coste y (PV) la que representa el precio de venta.

Q_{112}: Describe las distintas versiones (TD1, TD2, TD3) de los coches mediante una matriz columna y los distintos modelos (M1, M2, M3) con una matriz fila.

Q_{12}: Tareas que tiene que ver con la interpretación de la técnica (OML5).

Q_{121}: Interpreta elementos, filas y columnas de las matrices (PR), (PC) y de (PV).

Q_{122}: Interpreta la matriz transpuesta de la matriz (PR).

Q_{13}: Tareas que tienen que ver con la producción y el coste (OML1).

Q_{131}: Calcula la producción y coste total diarios, mensuales, anuales, por modelos y por versiones.

Q_{14}: Tareas que tienen que ver con los ingresos y beneficios (OML1).

Q_{141}: Calcula los ingresos y beneficios diarios, mensuales, anuales.

Q_{142}: ¿Cuál es el modelo que produce más ingresos diarios? ¿Y la versión?

Q_{143}: Describe mediante una matriz: los costes, ingresos y beneficios de todos los modelos después de un año.

Podemos decir que los grupos, después de pequeños intercambios de información y con la ayuda del profesor, trabajaron en esta sesión con pequeñas dificultades y con una buena participación, aunque no fueron capaces de terminar todas las tareas propuestas.

Cuando estaba a punto de terminar la sesión, dos alumnos plantearon la posibilidad de modificar las condiciones iniciales de la CG. El profesor aceptó el reto argumentando que en el desarrollo futuro de la empresa podía haber variaciones en los modelos y versiones, proponiendo hacer modificaciones (OML9) en las condiciones iniciales de (PR), (PC) y (PV). Problematizamos la CG formulando nuevos problemas y nuevas cuestiones. Esta propuesta fue la que nos introdujo en el *Momento del Trabajo de la Técnica*. Se trabajó la técnica (Fonseca et al., 2010) para evitar que su aplicación se redujese a un tipo restringido de problemas.

Sesión 4. El profesor recordó al comienzo de la sesión que es la propia comunidad de estudio la que debe proponer nuevas cuestiones derivadas de la CG que permitan completar, mejorar y ampliar el proyecto. Retomando las cuestiones pendientes de la sesión anterior, se acordó hacer modificaciones en las condiciones iniciales de (PR), (PC) y (PV), que pueden considerarse como un desarrollo de Q_1, y analizar el impacto que producen esas modificaciones en los ingresos y ventas. Se propuso en esta sesión trabajar sobre la siguiente cuestión.

Q_2: Variación en las condiciones iniciales de la producción, precio de coste y precio de venta y construcción de modelos. OML6 y OML9

Se trataba de escapar de la rigidez de las situaciones. Se llegó al acuerdo, en una primera etapa, que cada grupo podía variar los niveles de producción de acuerdo a un porcentaje de crecimiento y decrecimiento concreto, que pueden resultar de meses en los que las ventas aumentan o disminuyen. El proyecto debe ser lo suficientemente rico y amplio de forma que permita obtener información a la empresa, por si se prevén en el futuro situaciones distintas a la inicial.

Los alumnos del grupo B propusieron que esas variaciones viniesen asociadas por cambios de porcentajes en la producción. El profesor aceptó el reto y les propuso que la tarea se reformulase de la siguiente forma: el grupo A trabajaría con los datos iniciales de producción. Los grupos B y C deberían utilizar datos distintos en la producción.

Algunas de las tareas que se trabajaron inicialmente y se reformularon en tareas más sencillas fueron:

Q_{21}: ¿Cuál sería la nueva producción diaria al terminar el primer año si las previsiones de la empresa son aumentar la producción de TD1, TD2 en un 3%, 5%, respectivamente, y disminuir la producción de TD3 en un 1%?

También se les pidió que encadenasen subidas y bajadas en los porcentajes. Podían calcular la producción de la empresa después de dos años en los que hubiesen subidas en los dos años, o bien, subidas en un año y bajadas en el otro. Por ejemplo:

Q_{22}: Durante un período de dos años, las previsiones de la empresa para el primer año son: aumentar la producción de M1, M2 respectivamente en un 3%, 5%, y disminuir la producción de M3 en un 1%; para el segundo año son: aumentar la producción un 0.5 % de M1, una disminución de un 1% de M2, y un aumento del 0.25% de M3.

Los alumnos tuvieron serias dificultades para encadenar en una sola expresión dos subidas y una subida y bajada en los porcentajes. Además, predominó la técnica “aditiva” $y = x + r\,x$ frente a la técnica “multiplicativa” $y = (1 + x).r$ (OML2).

El profesor propuso reformular la cuestión anterior convirtiendo todos los datos iniciales de la producción en variables.

Q_{23}: Denotamos la producción por (PR) = (pr_{ij}), el precio de coste por (PC) = (pc_{ij}) y el precio venta por (PV) = (pv_{ij}).

Q_{24}: Crear un modelo de los ingresos y beneficios convirtiendo los datos iniciales de la producción en variables, manteniendo fijos (PC) y (PV), e interpretar el modelo (OML6 y OML5).

Q_{25}: Aplicar el modelo anterior a una situación concreta propuesta por el grupo.

Los alumnos tuvieron muchas dificultades en la construcción del modelo y su manipulación con wxMaxima (OML8) les resultó muy complicada. El profesor explicó que el modelo, como máquina productora de información, implica saber construirlo.

Igual que la sesión anterior, las tareas no se completaron en el horario presencial. El profesor propuso a cada grupo terminar estas tareas fuera del horario escolar y trasladar las respuestas al cuaderno de clase para ir completando y mejorando el proyecto en que estábamos involucrados. Al terminar la sesión, se debatió la importancia de la modelización de los ingresos y los beneficios y como esos modelos ampliaban, completaban y mejoraban el proyecto construido (OML1). En una empresa automovilística el número de modelos y versiones de coches es mucho mayor que el que aquí se describe y, por lo tanto, el volumen de datos de la matriz podía aumentar de forma considerable. La necesidad de dar respuestas a cuestiones que aparecen con mucha frecuencia en ingeniería donde proliferan matrices (también sistemas de ecuaciones lineales) muy complejas con dimensiones importantes, conduce mediante un nuevo cuestionamiento tecnológico a estudiar lo que ocurre en el interior de la matriz, es decir, si existe relación entre filas y columnas de la matriz, en otras palabras, si podemos eliminar “ruido” en la matriz, que en el lenguaje matemático equivale a hablar de dependencia e independencia lineal (OML7), lo que provoca la aparición de una nueva OM, el espacio vectorial de matrices. De esta forma aparece una posible razón de ser para el estudio de la OM de los espacios vectoriales en nuestro proyecto, una OM que tiene un carácter muy abstracto para los alumnos y que aparece siempre como un edificio muy bien construido, pero muy alejado de cuestiones problemáticas extramatemáticas.

Sesión 5. Para seguir completando y mejorando el proyecto, en esta sesión se plantea como cuestión problemática a estudiar el aportar información sobre la distribución diaria en contenedores de los modelos M1, M2, M3 (OML7).

Q_3: Como distribuir los coches en contenedores.

El objetivo era que los alumnos pasasen del "saber" al "saber hacer" es decir, se trataba de validar los contenidos teóricos, restringiendo la actividad matemática de esta sesión a la dependencia e independencia lineal, rango y base de un espacio vectorial.

El profesor propuso que cada grupo aportara una respuesta a las cuestiones demandadas y que después se debería hacer una propuesta común que debería tener cabida en el proyecto. La propuesta para el grupo A fue:

Para realizar la distribución de la producción diaria entre sus concesionarios, la fábrica organiza las entregas en contenedores que contienen los diferentes modelos de una única motorización. Así, el contenedor 1 ($C1$) contiene 5 coches modelo M1, 3 M2, 1 M3, todos ellos TD1; el contenedor 2 ($C2$) contiene 6 coches M1, 2 M2 y 2 M3, todos ellos TD2; el contenedor 3 ($C3$) contiene 4 coches M1, 3 M2 y 3 M3, todos ellos TD3.

Q_{31}: Escribir una matriz H que nos proporcione los coches de distintos modelos por contenedor.

Q_{32}: Analizar las relaciones entre los vectores contenedores (dependencia e independencia lineal).

Q_{33}: ¿Es posible hacer una distribución de modelos (M1 = 1360, M2 = 780, M3 = 460) a partir de los contendores $\{C1, C2, C3\}$? ¿Es única esa distribución?

Ante las dificultades mostradas por los alumnos para resolver estas tareas, el profesor tuvo que intervenir con frecuencia para aconsejar a los alumnos que consultasen lo que se había estudiado en el momento tecnológico-teórico relativo a los espacios vectoriales. Los alumnos habían hecho en el laboratorio problemas intramatemáticos relativos al concepto de base, pero cuando estas nociones se trasladaban a situaciones prácticas, entonces se manifestaba una vez más los conflictos entre el "saber" y el "saber hacer" (OML10).

Las tareas eran las mismas para los grupos B y C, aunque partían de situaciones distintas:

Grupo B: el contenedor 1 ($C1$) contiene 5 coches modelo M1, 3 M2, 2 M3, todos ellos TD1; el contenedor 2 ($C2$) contiene 6 coches M1, 2 M2 y 4 M3, todos ellos TD2; el contenedor 3 ($C3$) contiene 4 coches M1, 3 M2 y 1 M3, todos ellos TD3.

Grupo C: La distribución en los contenedores era la misma, pero se había hecho una variación en la producción diaria, que ahora era (1360, 780, 580).

A partir de estos nuevos cuestionamientos tecnológicos, los alumnos aportaron propuestas que reflejaban las distintas relaciones de dependencia e interpretaban que daban lugar a distintas formas de distribuir los coches en los contenedores: la del grupo A decía que solo había una forma; la del grupo B, que no era posible colocar toda la producción diaria en los contenedores; la del grupo C, que había más de una forma de colocar la producción en los contenedores.

Sesión 6. Al comienzo de la sesión y después de la intervención de cada grupo explicando cual era la situación en la que estaba el proyecto, el profesor propuso a los alumnos que la fábrica tenía que colocar los coches en el mercado y que por lo tanto sería importante la siguiente cuestión:

Q_4: ¿Cómo se podrían atender las solicitudes de los concesionarios?

El profesor planteó la posibilidad de recuperar la información obtenida en la sesión anterior y concretar cuantos contenedores eran necesarios para distribuir la producción diaria de la fábrica. El trabajo ya realizado con el rango facilitó de una forma importante las respuestas y condujo a la OM de los sistemas de ecuaciones lineales (OML10). Las cuestiones que surgieron fueron:

Q_{41}: ¿Existen x, y, z tales que $x * C1 + y * C2 + z * C3$ = producción diaria = (1360, 780, 460)^T? ¿Son x, y, z únicos? ¿Hay diferentes opciones de entrega de contenedores?

Q_{42}: ¿Qué ocurre si los contenedores se organizan $C1 = (5, 3, 2)^T$, $C2 = (6, 2, 1)^T$, $C3 = (4, 3, 1)^T$?.

Q_{43}: ¿Qué ocurre si los contenedores se organizan $C1 = (5, 3, 2)^T$, $C2 = (6, 2, 4)^T$, $C3 = (4, 3, 1)^T$ y la producción del modelo M3 se aumentase hasta 580 coches?.

Al resolver Q_{41} se encontraron con un sistema compatible indeterminado como se muestra en la siguiente figura:

Figura 1.

Sistema compatible indeterminado de Q_{41}

```
(%i16)   solve([5*x+6*y+4*z=1360,3*x+2*y+3*z=780,2*x+4*y+1*z=580],[x,y,z]);
solve: dependent equations eliminated: (3)
```

(%o16) $[[x = -\frac{5\,\%r2 - 980}{4}, y = \frac{3\,\%r2 + 180}{8}, z = \%r2]]$

El profesor propuso que se interpretase la solución, un problema que en el campo intramatemático es muy frecuente que aparezca, pero sin pedir la interpretación. No fue inmediata la respuesta. Un alumno del grupo A dijo que las incógnitas no podían ser negativas y que deberíamos resolver una inecuación.

El profesor planteó que, con el equipamiento matemático del que se dispone en este momento, se pueden recuperar cuestiones anteriores y proponer otras nuevas relacionadas con los beneficios, que permiten ampliar y completar el proyecto.

Q_{44}: ¿Cuántas unidades hay que añadir a la producción actual para que, cuando el incremento se produzca en los modelos M1/TD1, M2/TD2 y M3/TD3 (cada modelo puede tener un incremento diferente), el beneficio aumente hasta 20227150 €; sin embargo, si el mismo incremento (en el mismo orden) se produce en los modelos M2/TD1, M3/TD2 y M1/TD3, entonces el beneficio es de 20942300 €; y si se produce en los modelos M3/TD1 M2/TD3 y M1/TD3, el beneficio es de 20728600 €?.

En esta cuestión el profesor tuvo que intervenir bastante porque los alumnos tenían problemas similares a los de la cuestión anterior para construir el modelo y después articularlo con wxMaxima. El trabajo no pudo ser finalizado y se acordó terminarlo fuera del horario escolar.

Sesion 7. Al comienzo de la sesión se invita a los alumnos a dar respuesta a la siguiente cuestión:

Q_5: Construye un modelo funcional que relacione el número de coches que podemos distribuir a los concesionarios en función del número de contenedores utilizados y usarlo como máquina para transferir información a la empresa. (OML6)

Los alumnos tuvieron dificultades para construir el modelo funcional. En Secundaria existe una ausencia de la actividad matemática que utiliza las funciones como modelos matemáticos dinámicos, flexibles y manipulables. El profesor tuvo que intervenir para guiar el proceso de construcción del modelo. Sugirió qué si utilizamos x contenedores $C1$, y contenedores $C2$, z contenedores $C3$, entonces el número de modelos M1, M2, M3 que se pueden distribuir a los concesionarios viene dado por la siguiente función en la Figura 2:

Figura 2.

Función de la distribución de los modelos en Q_5

```
(%i11)    f(x,y,z):= [5*x+6*y+4*z,3*x+2*y+3*z,1*x+2*y+3*z];
(%o11)    f(x,y,z):=[5 x+6 y+4 z,3 x+2 y+3 z,1 x+2 y+3 z]
```

Una vez construido el modelo, se comenzó a trabajar en él.

Q_{51}: El profesor propone que los alumnos elaboren tareas donde sea necesario calcular imágenes e interpretar los resultados. (OML5)

El siguiente desafío propuesto a los alumnos implica profundizar en el manejo de las aplicaciones lineales (OML7):

Q_{52}: ¿Cuántos modelos de coches podemos distribuir si se duplica el número de contenedores, si se triplica, etc.?

Se acuerda poner varios ejemplos, que se reflexione sobre los resultados y que se interpreten. A continuación, la Figura 3 muestra algunos de los ejemplos:

Figura 3.

Ejemplo construido mediante el modelo Q_5

```
(%i14)    [f(2,3,5),f(4,6,10),f(6,9,15)];
(%o14)    [[48,27,23],[96,54,46],[144,81,69]]
```

Los alumnos concluyen qué si el número de contenedores se incrementa, por ejemplo, se duplica, pasando de C a $2C$, entonces el número de coches se incrementa en el mismo factor: $f(C)$ a $2\,f(C)$.

Q_{53}: Si $u = (10, 25, 50)$, $v = (15, 20, 30)$, calcula $f(u)$; $f(v)$; $f(u + v)$; $f(u) + f(v)$; e interpreta los resultados (OML5).

Les cuesta interpretar que si $f(u + v) = f(u) + f(v)$, entonces el número de coches que podemos distribuir en los contenedores asociadas a $u + v$ es precisamente $f(u) + f(v)$.

Este último tipo de tareas que aportaba información importante al proyecto para un caso concreto le sirve al profesor para proponer la posibilidad de generalizar el modelo a dos vectores cualesquiera.

La comprobación de que esa aplicación verifica esas dos propiedades para dos vectores cualesquiera $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$ y para un número real cualquiera $\lambda \in R$ origina una posible razón de ser para introducir las aplicaciones lineales (OML7, OML10) en nuestro proyecto, cuyo marco teórico-tecnológico se desarrollaría en la siguiente clase de teoría.

En este momento se interrumpió la sesión a la espera de abordar el momento tecnológico-teórico que se estudiaría en la clase de teoría. Cuando se retomó la sesión, los alumnos, de acuerdo con el profesor, propusieron elaborar tareas, en las que figurase para cada grupo, primeramente, la construcción del modelo, para después pasar a trabajar con el modelo y su interpretación. Formó parte de la sesión comprobar que estamos ante un modelo lineal y como se interpreta (OML5) en este caso, calcular imágenes de vectores cualesquiera y de los vectores de la base canónica e interpretar ambos resultados en nuestro contexto, calcular la matriz asociada a la aplicación lineal en la base canónica, calcular la aplicación inversa (OML4), si existe, utilizar la aplicación inversa para calcular el número de contenedores necesarios para colocar toda la producción diaria de la fábrica, lo que ha originado un debate muy rico en los tres grupos dando lugar a tres tipos de tareas distintas y sirvió para ver que si la aplicación inversa existe (Grupo A) se pueden resolver los sistemas con solución única, pero que es una técnica restringida a ese tipo de tareas y que no se puede aplicar cuando no existe, en cuyo caso se recurre a las técnicas de resolución de sistemas, que es lo que ha realizado el Grupo B. De nuevo los estudiantes se encontraron con muchas dificultades a la hora de trabajar con el modelo y saber interpretarlo. Estudiaron el momento teórico (saber) de las aplicaciones lineales, pero cuando se les pidió que lo experimentasen en nuestro contexto (saber hacer), aparecieron muchas dificultades. Se acordó seguir el proceso de estudio, como en las sesiones anteriores, en horas no lectivas, lo que puede ayudar a madurar en la comprensión y aprovechamiento de los conocimientos y a que los grupos trasladasen al cuaderno del proyecto estas cuestiones con sus respuestas.

El grupo A lo completó con el estudio de cómo se puede distribuir el tráfico en una red de calles a la salida de la fábrica, en donde hay calles de sentido único y de doble sentido, con restricciones en las calles.

El grupo B completó el proyecto analizando una propuesta sobre el proceso de fabricación de los coches al pasar en cadena por una zona de pintura, después por una zona de electricidad y finalmente por la zona mecánica, en las que se instalan los componentes del vehículo. Con el fin de disponer de una planificación adecuada, buscaban una representación funcional del número de horas empleadas en cada zona de la fábrica en función del número de vehículos producidos según los diferentes modelos, que permitiese planificar el trabajo de cada sección.

El grupo C analizó una propuesta del departamento de recursos humanos de la fábrica para poner en práctica una política de movilidad entre los trabajadores de las oficinas, que están distribuidos en tres categorías. Su objetivo era conocer la distribución de las categorías a lo largo del tiempo al aplicar la citada política de movilidad a una distribución inicial de los trabajadores de las oficinas.

Momento de la evaluación. El momento de la evaluación en un REI se focaliza en los alumnos, profesores y también en las praxeologías matemáticas creadas.

- **Los alumnos:**

o Debatimos sobre la visibilidad del proyecto y de las matemáticas. Los alumnos sintieron el proyecto como un buen reto. Lo encontraron muy interesante para su futuro profesional. En todo el desarrollo del REI, a pesar de las dificultades de los estudiantes para trabajar con una situación que no formaba parte de su equipamiento docente, el hecho de visibilizar y trasladar toda la herramienta matemática a una situación que puede formar parte de su futuro profesional, fue siempre para ellos un elemento motivador. En ningún momento se plantearon la posibilidad de abandonarlo e integrarse con el resto de los compañeros en el otro modelo más conocido. Se les notaba satisfechos con los avances que iban logrando en el proyecto, a pesar de las dificultades que estaban teniendo en su construcción. El compartir las clases de teoría con los alumnos que no formaban parte del proyecto, les permitió comprobar que ambos disponían de mucha información matemática pero los que figuraban en el proyecto la valoraban más al ver que ese conocimiento estaba validado por la experimentación.

- Los estudiantes mostraron grandes dificultades en la elaboración de tareas que el contrato vigente asigna en exclusiva al profesor, todas aquellas que figuran asociadas al cuestionamiento tecnológico, esto es, que hagan referencia a la interpretación, justificación, fiabilidad y economía y alcance de las técnicas, así como la comparación entre ellas. La poca familiaridad de trabajar con modelos como el propuesto se nota en el cuaderno de clase a la hora de describir los indicadores (OML1-OML10) que los alumnos deberían utilizar en el proceso de estudio de la actividad matemática. Cualquier cuestión que resolvían autónomamente, les generaba muchas dudas sobre su correcta resolución y necesitaban la aprobación del profesor.

- La modelización matemática, que siempre supone una tarea conflictiva para los alumnos, porque como tal está desaparecida del modelo de enseñanza dominante, representó un problema en el REI. En las sesiones en las que había que construir el modelo se puso siempre de manifiesto.

- Es una demanda muy importante en el mundo empresarial el manejo de tecnologías de información y un estudiante de ingeniería debe poder utilizar herramientas informáticas que le permitan eliminar cálculos exhaustivos que tendrían que hacer a mano. La utilización por parte de los alumnos del programa wxMaxima facilitó mucho el costoso trabajo del cálculo matricial. Manifestaron que al principio tuvieron dificultades, pero cuando se empezaron a familiarizar con el programa, les resultó útil, no sólo para el proyecto construido, sino también como una herramienta que podían utilizar en otras asignaturas y también en su futuro profesional. Agradecieron que utilizáramos software libre.

- Las cuestiones matemáticas y sus respuestas, que supusieron bastantes dificultades en casi todas las sesiones, al final aparecen en el cuaderno bien estructuradas con las posibles razones de ser.

- **El profesor**

- Este modelo poco habitual en la epistemología escolar supuso grandes dificultades para todos los alumnos y también para los profesores involucrados en todo el desarrollo del REI. Hay dificultades para trabajar en este nuevo contrato didáctico, porque según el contrato didáctico imperante en la enseñanza universitaria, lo que se debe hacer es presentar a los estudiantes unos conocimientos predeterminados por la propia institución, que los estudiantes deben asumir y aprender a manipular.

- Muchas de las responsabilidades que como profesores quisimos transferir a los alumnos no resultaron exitosas porque en el contrato actualmente imperante no forman parte de su responsabilidad, están asumidas por el profesor. Los alumnos, en particular, se encuentran muchos más cómodos cuando es el profesor quien se responsabiliza de todo el proceso de estudio.

Momento Institucional

El REI que hemos desarrollado en este artículo constituye un ejemplo de buena práctica docente que se puede institucionalizar en las escuelas de ingeniería porque:

- Mejora notablemente la atomización tradicional del estudio escolar de las matemáticas. Amplía el equipamiento inicial del alumno, conectando la actividad matemática de Secundaria con la actividad matemática de la Universidad.

- Permite visibilizar una serie de cuestiones problemáticas que determinan una posible razón de ser del Álgebra Lineal en una escuela de ingeniería. La modelización matemática está fuera de la matemática institucional en la mayoría de las escuelas de ingeniería y es importante recuperar proyectos de este tipo en los que la modelización matemática adquiere protagonismo y juega un papel importante para la formación futura del ingeniero. El partir de una CG rica y potente, que involucrase a los alumnos y sirva como hilo conductor de todo el proceso de estudio, favoreció la modelización matemática.

- Las clases que dan lugar a proyectos de este tipo son más abiertas y no se observa tanta diferencia entre el "saber" y el "saber hacer".

- El **Grupo PSA** es un fabricante francés de automóviles, de los más importantes del mundo, que tiene una de sus fábricas más valiosas donde está situada la EII. Ambas instituciones comparten proyectos de investigación y eso ha permitido vivir la CG y mantenerse además como motor de todo el proceso de estudio. Es importante partir de CG muy potentes y cercanas al mundo profesional de los alumnos.

- Establece puentes de unión con el futuro profesional de la ingeniería, comparte protagonismo con muchos de los recursos que utiliza el ingeniero y prima una enseñanza funcional de las matemáticas. No solo mejora el equipamiento matemático del alumno, sino que le dota de recursos para el futuro (trabajo en grupo como si fueran trabajadores de la empresa que aportan sus conocimientos, utilización de las TIC, construcción de modelos matemáticos, elaboración de materiales, consultar bibliografía, exposiciones orales y escritas, competencias específicas y transversales, responsabilizarse de las respuestas, hacer cuestionamientos tecnológicos, escribir distintos informes del proyecto, etc.). Se puede hablar de un equipamiento final del alumno más rico y completo que el aportado por el modelo institucional vigente, lo que nos permiten pensar en la posibilidad de institucionalizarlos en la Universidad.

Conclusiones

- Se ha diseñado y experimentado un REI como un proceso de modelización funcional cuya cuestión generatriz pretende responder a un problema económico. Esta experimentación, ausente del modelo de enseñanza dominante, ha recubierto una parte importante del programa de Álgebra Lineal de un primer curso universitario de una escuela de ingeniería.

- Aunque el modelo de práctica docente desarrollada tiene un ámbito reducido, su ámbito de aplicación es mucho mayor porque puede ser transferido a otras muchas situaciones problemáticas.

- Los REI pueden funcionar como un mecanismo de articulación de los contenidos curriculares, de forma que se retomen los contenidos estudiados anteriormente con el objeto de cuestionarlos, mostrar sus limitaciones, y reestructurarlos e integrarlos en OM cada vez más amplias y complejas.

- Introducir REI en los actuales planes de estudio favorece procesos de modelización matemática, se distancia del monumentalismo y abre caminos hacia una enseñanza funcional de las matemáticas.

- Se debe avanzar en la necesidad de arbitrar un tiempo didáctico en el diseño curricular que permita poder articular y estudiar las competencias específicas y transversales tal como se desarrollan en este REI porque conectan con el futuro profesional de los alumnos.

- Esta es una más de las practicas que queremos introducir en las instituciones docentes que permita disminuir la enorme distancia que existe entre la investigación en educación matemática y la práctica diaria en las aulas. Su propio desarrollo y puesta en práctica pondrá de manifiesto cuales son las fortalezas y las debilidades que debemos cuidar en nuestro proceso de investigación.

- El REI desarrollado en este trabajo está pendiente de completar con las OM correspondientes al espacio vectorial euclídeo; endomorfismos diagonalizables y formas cuadráticas, de forma que el proyecto final recubra todo el programa de Algebra Lineal de la EII y ponga de manifiesto una posible razón de ser del Álgebra Lineal en un Grado en Ingeniería. Es importante en una escuela de ingeniería saber gestionar la información y conectarla significativamente con el mundo real.

Finalmente, señalar que utilizando la Teoría Antropológica de los Didáctico y el modelo de Recorrido de Estudio e Investigación se articularon modelos de prácticas docentes, en donde a partir de situaciones problemáticas se introdujo la razón de ser de la actividad matemática, se entendió la enseñanza como un proceso de investigación y en general se priorizó la enseñanza funcional de las matemáticas para alumnos y profesores.

Referencias

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la Investigación Educativa en el nivel universitario?. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2, p. 117-134.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Tesis Doctoral, Universitat Autónoma de Barcelona.

Bosch, M.; Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2-3), p. 205-250.

Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.). *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d’action* (pp. 1-10). Montpellier: Université de Montpellier.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Journées de didactique comparée 2004 (Lyon, 3-4 mai 2004). Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.): *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)* (pp. 21-30). Universidad Ramon Llul, Barcelona.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), p. 161-182. DOI: 10.4471 /redimat.2013.26.

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Vigo.

Fonseca, C.; Bosch, M. y Gascón, J. (2010). El Momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. *Educación Matemática*, 22(2), p. 5-34.

Fonseca, C.; Casas, J. M. y Insua, M. A. (2011). El matemático como un profesional en los recorridos de estudio e investigación. *ARBOR Ciencia, pensamiento y cultura*, 187, 279-284. Repositorio de buenas prácticas en Innovación Docente del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Disponível em: (http://138.4.83.162/organiza/buscador_buenaspracticas/).

Fonseca, C.; Gascón, J. y Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(3), p. 289-318. DOI: 10.12802/relime.13.1732

Fonseca, C.; Pereira, A. y Casas, J. M. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática*, 23(1), p. 97-121.

Godino, J D.; Font, V.; Wilhelmi, M. R. y de Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias* 27(1), p. 59-76.

Llinares, S. (2013). Innovación en la educación matemática: más allá de la tecnología. *Modelling in Science Education and Learning* 6(1), 7-19. DOI: 10.4995/msel.2013.1819

Lucas, C.; Fonseca, C.; Gascón, J. y Casas, J. M. (2014). O Fenômeno Didático Institucional da Rigidez e a Atomização das Organizações Matemáticas Escolares. *Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1327-1347. DOI: 10.1590/1980-4415v28n50a0216.

Mallart, A. y Deulofeu, J. (2017). Estudio de indicadores de creatividad matemática en la resolución de problemas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 20(2). DOI: 10.12802/relime.17.2023

Michavila, F. (2009). La innovación educativa. Oportunidades y barreras. *ARBOR Ciencia, pensamiento y cultura*, 185 (nº extra), p. 3-8.

OCDE (2003). The PISA 2003 assessment: framework mathematics, reading. Science and problems solving knowledge and skills. Paris: OCDE. Disponível em: http://www.oecd.org/education/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/pisa2003assessmentframeworkmathematicsreadingscienceandproblemsolvingknowledgeandskills-publications2003.htm

Parra, V. y Otero, M. R. (2017). Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las "dialécticas". *Educación Matemática*, vol. 29, núm. 3, DOI: 10.24844/EM2903.01

Ruiz Munzón, N.; Bosch, M. y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del Álgebra Elemental: un análisis macro-ecológico desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Journal of Research in Mathematics Education, 14(2), 106-131. DOI: 10.17583/redimat.2015.1386

Zabalza, M. A. (2012). El estudio de las “buenas prácticas” docentes en la enseñanza universitaria. *Revista de Docencia Universitaria*, 10(1), 17-42. DOI: 10.4995/redu.2012.6120.

Recebido em: 01/07/2020
Aprovado em: 07/08/2020