ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p683-712

Quando as Frações não São Apenas Partes de um Todo…!

When Fractions Are Not Just Parts of a Whole…!

Cuando las Fracciones no son Sólo Partes de un Todo...!

Sofia Graça[1]
Universidade de Lisboa
https://orcid.org/0000-0003-2521-2184
João Pedro da Ponte[2]
Universidade de Lisboa
https://orcid.org/0000-0001-6203-7616
António Guerreiro [3]
Universidade do Algarve
https://orcid.org/0000-0002-4711-4270

Resumo

Este estudo tem como objetivo analisar os conhecimentos de alunos do 5.º ano relativos aos significados das frações antes e após uma experiência de ensino que segue uma abordagem exploratória com ênfase na resolução de problemas. Os participantes são alunos de uma turma do referido ano. Para a recolha de dados foram usados dois testes, inicial e final, complementados com a realização de entrevistas semiestruturadas individuais. Os dados indicam que, antes da experiência de ensino, os alunos tinham um conhecimento muito limitado dos significados das frações, nomeadamente como medida e como quociente. Demonstravam apenas algumas ideias associadas à relação parte-todo e ao operador, mas este último apenas ao nível procedimental. Após a experiência de ensino, estes alunos mostraram alguma flexibilidade com todos os significados, embora o significado de medida ainda constitua um desafio para um dos alunos participantes.

Palavras-chave: Números racionais, Frações, Significados de frações, Aprendizagem, Abordagem exploratória.

[1] soffiagraca@hotmail.com
[2] jpponte@ie.ulisboa.pt
[3] aguerrei@ualg.pt

Abstract

This study aims to analyze grade 5 students' knowledge regarding the meanings of fractions before and after a teaching experiment following an exploratory approach, with emphasis in problem solving. The participants are students from the same class. For data collection, two tests were used, pre-test and post-test, complemented with individual semi-structured interviews. The data indicate that, before the teaching experiment, the students had a very limited knowledge related to the meanings of fractions, in particular measure and quotient. They demonstrated only a few ideas associated with the part-whole relationship and operator, but this last meaning only at the procedural level. After the teaching experiment, these students showed some flexibility with all meanings of fractions, although the meaning of measure is still a challenge for one of them.

Keywords: Rational numbers, Fractions, Meaning of fractions, Learning, Exploratory approach.

Resumen

Este estudio tiene como objetivo analizar el conocimiento de los estudiantes de quinto grado sobre el significado de las fracciones antes y después de una experiencia de enseñanza que sigue un enfoque exploratorio con énfasis en la resolución de problemas. Los participantes son estudiantes de la misma clase. Para la recopilación de datos, se utilizaron dos pruebas iniciales y finales, complementadas con entrevistas semiestructuradas individuales. Los datos indican que, antes de la experiencia de enseñanza, los estudiantes tenían un conocimiento muy limitado de los significados de las fracciones, en particular de medida y cociente. Demostraron sólo unas pocas ideas asociadas con la relación parte-todo y el operador, pero esto último significado sólo a nivel de procedimiento. Después de la experiencia de enseñanza, estos estudiantes mostraron cierta flexibilidad con todos los significados, aunque el significado de la medida todavía plantea un desafío para uno de los estudiantes participantes.

Palabras clave: Números racionales, Fracciones, Significados, Aprendizaje, Enfoque exploratorio.

Quando as Frações não São Apenas Partes de um Todo…!

Os números racionais são fundamentais no Ensino Básico e a sua importância tem sido reconhecido por diversos autores (e.g. Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Hunt, Westenskow & Moyer-Packenham, 2017). Contudo, os alunos, muitas vezes, não os compreendem. Uma das razões apontadas para a dificuldade na sua compreensão é a existência de diferentes representações simbólicas e cada representação ter subjacente uma variedade de conceitos. As frações, por exemplo, envolvem os significados: parte-todo, quociente, operador e medida (as razões, podendo ser representadas por frações, constituem índices comparativos).

Uma abordagem aos números racionais enfatizando apenas um significado das frações, designadamente a relação parte-todo, frequente na sua abordagem, também pode originar um fraco desempenho por parte dos alunos, apesar da sua indiscutível importância na compreensão destes números (Llinares & Sánchez, 1997). Também o conhecimento dos números inteiros pelos alunos influencia o seu desempenho no trabalho com números racionais, levando-os, por vezes, a considerar uma fração como dois números inteiros, demonstrando fragilidades na noção quantitativa de número racional (Post, Behr & Lesh, 1986; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Importa ainda referir a influência da metodologia de ensino na abordagem a estes números que se traduz, frequentemente, em procedimentos, que os alunos não atribuem significado (Lamon, 2007). Multiplicar o número inteiro pelo numerador da fração e, em seguida, dividir o resultado pelo denominador, no significado operador das frações, é um exemplo.

Segundo Moseley (2005), a resolução de problemas na qual surgem os significados das frações é necessária para a sua abordagem e compreensão. Igualmente importante é a metodologia de ensino-aprendizagem exploratório na realização das tarefas, que permite a discussão das diferentes estratégias de resolução. Os alunos verificam a sua adequação a cada situação e ampliam o seu conhecimento das várias formas de resolver os problemas (Ponte &

Quaresma, 2016). Também o conhecimento e flexibilidade com as diferentes representações dos números racionais pode ajudar os alunos na resolução dos problemas, permitindo efetuar conversões para representações mais adequadas para si ou para o seu modo de raciocinar (Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel, 1993). O presente estudo tem como objetivo saber que compreensão revelam alunos do 5.º ano dos diferentes significados das frações, antes de uma experiência de ensino seguindo uma abordagem exploratória com ênfase na resolução de problemas, bem como os conhecimentos que revelam após essa experiência de ensino.

Significados das Frações

Relação Parte-todo

Na relação parte-todo das frações, a representação $\frac{a}{b}$ indica o número de partes iguais em que a unidade está dividida (b) e o número de partes consideradas dessa unidade (a). No caso de grandezas contínuas, as partes deverão ser equivalentes em dimensão, enquanto nas grandezas discretas, deverão ter a mesma quantidade de itens. A abordagem a este significado, maioritariamente através do sombreamento de partes de figuras geométricas, leva a que os alunos compreendam a fração como dois números inteiros separados e não atribuam significado a frações impróprias (Lamon, 2007; Norton, Wilkins & Xu, 2018). Para Post et al. (1993), encontrar partes do todo ou reconstruir o todo dadas as partes são exemplos de tarefas igualmente importantes, bem como o uso de diferentes tipos de grandezas (contínuas e discretas). Muitas vezes, os alunos mostram um desempenho inadequado quando são solicitados a sombrear $\frac{2}{5}$ de um conjunto com 15 itens, pois não consideram obter 5 grupos com o mesmo número de itens (Barnett-Clarke, Fisher, Marks & Ross, 2010). Neste sentido, o conceito de *unitizing* (compreensão da unidade) é fundamental (Lamon, 2007).

Quociente

O significado quociente das frações está associado a contextos de partilha equitativa, por exemplo, a partilha de 3 tartes igualmente entre 4 crianças, em que o resultado da divisão é $\frac{3}{4}$. Neste significado, os alunos devem compreender que o numerador ou dividendo se refere ao número de partes iguais que cada participante recebe e que o denominador ou divisor nomeia essas partes. Na resolução de problemas que envolvem o significado quociente das frações, é frequente os alunos representarem o número de itens e dividirem, cada um deles, pelo número de pessoas, distribuindo as partes obtidas de igual forma aos participantes - estratégia da distribuição (Hunt et al., 2017; Lamon, 1996).

Para Toluk e Middleton (2001), o aluno passa por diferentes níveis de compreensão até chegar a um bom entendimento do significado quociente das frações, os quais designou por esquemas. No *esquema de fração como comparação parte-todo*, o aluno compreende uma fração $\frac{a}{b}$ como o número de partes em que a figura está dividida (*b*), e o número de partes consideradas (*a*). No *esquema de quociente de números inteiros*, o aluno representa todas as situações de divisão como um quociente de números inteiros, evitando escrever quocientes fracionários como resposta. No *esquema de fração como partilha equitativa*, o aluno distribui equitativamente a quantidade, mas não nomeia o resultado da partilha. Não associa uma partilha equitativa a uma divisão e considera que o dividendo é sempre maior que o divisor e, quando isso não se verifica, reverte a sua ordem.

No *esquema de quociente fracionário*, o aluno começa a representar simbolicamente o resultado de uma situação de divisão com quociente fracionário e associa uma partilha equitativa a uma divisão. No *esquema de divisão como fração*, o aluno antecipa o resultado de uma situação de divisão sem a resolver analiticamente (*a* dividido por *b* grupos iguais origina o resultado $\frac{a}{b}$). Quando o aluno compreende uma fração como uma divisão, encontra-se no *esquema de fração como divisão* ($\frac{3}{4}$ é visto como 3 a dividir por 4) e compreende que qualquer situação de divisão pode ser representada por uma fração e vice-versa. No *esquema de divisão como número*, o aluno generaliza a relação entre uma situação de divisão e a fração que representa o seu quociente para todos os casos de divisão. Deste modo, Toluk e Middleton (2001) enfatizam a importância de uma abordagem, em simultâneo, da operação de divisão e das frações para que os alunos desenvolvam uma compreensão mais completa do significado quociente das frações.

Operador

O significado operador das frações pode ser visto como uma transformação, isto é, como algo que atua sobre uma situação modificando-a, quer por ampliação, quer por redução, estando associadas as operações de multiplicação e divisão (Llinares & Sánchez, 1997). Por exemplo, ao aplicar o operador $\frac{2}{3}$ à quantidade 15, o aluno divide a quantidade inicial em 3 partes iguais (denominador). Encontrada a quantidade correspondente a cada parte, o aluno considera duas delas (numerador), obtendo a quantidade 10. Contudo, é frequente os alunos efetuarem em primeiro lugar a multiplicação pelo numerador, seguida da divisão desse resultado pelo denominador. Para Charalambous e Pitta-Pantazi (2007) e Behr et al. (1983), uma boa compreensão do significado operador das frações envolve: (i) interpretar um multiplicador fracionário de diferentes formas. Por exemplo, $\frac{3}{4}$ como $3\times\frac{1}{4}$ (de uma unidade) – associado à função esticar/encolher, cuja transformação resulta no mesmo número de unidades de diferentes grandezas; ou $\frac{1}{4}\times 3$ unidades – associado à função duplicar/particionar, cuja transformação provoca um número diferentes de unidades da mesma grandeza; e (ii) compreender que multiplicar uma quantidade por $\frac{3}{4}$ envolve dividir a quantidade por quatro e multiplicar o resultado por três.

Medida

O significado de medida das frações, no qual se compara uma quantidade com outra, que é tomada como unidade de medida, é um dos significados em que os alunos demonstram mais dificuldade, em parte devido à pouca ênfase que usualmente recebe na abordagem aos números racionais (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Contudo, para Lamon (2007), a sua compreensão é fundamental e parte integrante de uma boa compreensão destes números. Norton et al. (2018) sugerem que a compreensão adequada do significado de medida das frações passa por quatro esquemas. No *part-whole scheme*, o aluno compreende a fração $\frac{m}{n}$ como um todo contínuo dividido em *n* partes iguais (*partitioning*), considerando *m* dessas partes (*disembedding*). No *partitive unit fraction scheme*, o aluno particiona um todo em *n* partes iguais por forma a encontrar a fração unitária $\frac{1}{n}$, que pode ser iterada (*iterating*) para obter o todo.

No *partitive fraction scheme*, o aluno determina a grandeza de uma fração própria em relação ao todo obtendo a fração unitária que lhe corresponde ($\frac{1}{5}$ corresponde à fração unitária da quantidade $\frac{3}{5}$). Posteriormente, obtém a fração própria e o todo através de iterações dessa fração unitária. O *reversible partitive fraction scheme* envolve a reconstrução da unidade a partir da sua fração própria. O aluno divide a fração própria para obter a fração unitária (*splitting*) ($\frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$) e repete essa fração para obter o todo (*iterating*) ($\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$). Esta progressão permite aos alunos compreender frações impróprias e a grandeza de uma fração, sendo uma das compreensões associadas ao sentido de número racional (Lewis & Perry, 2014; Norton et al., 2018).

Metodologia de Investigação

Este estudo, qualitativo e interpretativo (Erickson, 1986), envolve 4 dos 20 alunos de uma turma do 5.º ano de uma escola pública no Algarve (Portugal), que constitui um Território

Educativo de Intervenção Prioritária. Integra uma pesquisa mais ampla que tem como objetivo principal investigar como os alunos do 5.º ano evoluem na sua compreensão dos números racionais no quadro de uma experiência de ensino envolvendo resolução de problemas e tarefas de exploração. Este estudo seguiu uma metodologia de *Design Experiment* que contemplou dois ciclos de experimentação, sendo os dados aqui apresentados respeitantes ao 2.º ciclo (que resultou da elaboração dos materiais do 1.º ciclo).

O professor titular da turma onde foi desenvolvido o estudo colaborou anteriormente com a primeira autora deste artigo, mostrando-se disponível para futuras colaborações sendo por isso que o estudo foi desenvolvido numa das suas turmas. Os alunos participantes foram selecionados pela sua relativa facilidade na comunicação oral e por apresentarem resoluções com diferentes níveis de desempenho, representativas do trabalho da restante turma. Contudo, são alunos que, globalmente, apresentam dificuldades a Matemática.

Para a recolha de dados foram usados dois testes. O teste inicial, aplicado antes da experiência de ensino, foi construído a partir do teste inicial do ciclo de experimentação anterior da experiência de ensino, com base numa revisão de literatura sobre o tema e nas orientações curriculares em vigor. Pretendia identificar os conhecimentos prévios dos alunos relativos aos significados das frações (entre outros conceitos relativos aos números racionais). O teste final, aplicado no final da experiência, pretendia verificar as aprendizagens dos alunos resultantes desta experiência, designadamente no que diz respeito aos significados das frações, comparativamente com o desempenho no teste inicial. Os significados das frações presentes nos testes e em análise neste artigo foram a relação parte-todo, quociente, operador e medida. O professor titular da turma optou por abordar as razões numa fase posterior, razão pela qual não integraram a experiência de ensino.

De forma a interpretar o raciocínio dos alunos na resolução das questões, foram realizadas entrevistas semiestruturadas individuais aos quatro alunos, conduzidas pela primeira autora deste artigo, gravadas em áudio e, posteriormente, transcritas e analisadas na íntegra. O conteúdo das entrevistas foi confrontado com as resoluções dos alunos nos testes no sentido de analisar os resultados de forma mais aprofundada. O foco nos significados baseou-se nas dificuldades que os alunos evidenciam na sua compreensão e no facto de, frequentemente, durante a sua abordagem, a relação parte-todo ser o significado dominante, apesar de todos os significados serem fundamentais para uma boa compreensão dos números racionais.

A Experiência de Ensino

A experiência de ensino desenvolvida no 2.º ciclo de experimentação contou com um total de 15 tarefas em que os diferentes significados das frações eram um dos focos principais. Devido à dificuldade demonstrada pelos alunos com estes significados no teste inicial, houve a necessidade de os abordar separadamente. A relação parte-todo surgiu ao longo de várias tarefas, juntamente com outros significados e conceitos. A conversão entre representações, também objeto de atenção na experiência de ensino, esteve presente em algumas das tarefas em que surgiram os significados. As tarefas que integraram a experiência de ensino foram construídas pela primeira autora deste artigo, com apoio dos restantes autores, tendo em conta os dados do 1.º ciclo de experimentação, as planificações dos professores do grupo disciplinar, as orientações curriculares e as ideias de vários autores que estudam este tema. Também foi tido em consideração o facto de consistirem na resolução de problemas, constituírem uma trajetória de aprendizagem (Simon 1995) dos números racionais e possibilitarem o uso de várias estratégias de resolução.

Esta experiência de ensino, em que a primeira autora deste artigo atuou como professora e como investigadora, seguiu uma abordagem exploratória (Ponte & Quaresma, 2016), ou seja, cada tarefa era apresentada aos alunos, que resolviam, maioritariamente, de modo individual e, no final, havia uma discussão coletiva das estratégias utilizadas e uma síntese, realizadas pela professora. Durante o trabalho autónomo procurou-se não intervir nas resoluções dos alunos, realçando o facto de todas as estratégias de resolução serem admissíveis, independentemente do uso de cálculos ou resoluções mais esquemáticas.

A tarefa que envolvia o significado operador era constituída por três problemas com diferentes contextos, que os alunos resolveram livremente. Para iniciar a sua discussão coletiva, ao contrário da metodologia usada habitualmente, começou-se por resolver esquematicamente no quadro um dos problemas, que consistia em determinar $\frac{2}{5}$ de 10 livros. Usou-se um modelo retangular, dividindo em cinco partes, onde foi distribuído equitativamente o número de livros. Ficaram dois em cada parte, sendo sombreadas duas dessas partes. Os alunos compreenderam que a divisão permitia saber a quantidade em cada uma das partes em que se dividiu o todo e a multiplicação permitia obter o valor das partes solicitadas. Optou-se por esta metodologia pois a maioria dos alunos mostrou dependência de operações para resolver estes problemas, sem considerar outras estratégias de resolução.

A tarefa que envolvia o significado quociente era constituída por três problemas de partilha equitativa. Para resolver um desses problemas, que envolvia a partilha equitativa de quatro pizas entre cinco amigas, um dos alunos da turma foi ao quadro mostrar a sua resolução. Representou as quatro pizas e dividiu, cada uma delas, pelo número de participantes, compreendendo que cada um iria receber quatro fatias. A discussão centrou-se na nomeação dessa quantidade. Analisando o esquema do colega, os alunos perceberam que seria $\frac{4}{5}$, pois todas as unidades estavam divididas em cinco partes. Mencionaram o facto de ser uma situação de divisão, associando a fração $\frac{4}{5}$ a uma divisão entre dois números inteiros, cujo resultado é 0,8. O contexto deste problema permitiu aos alunos obter e interpretar o resultado adequadamente, e atribuir significado a situações nas quais o dividendo é inferior ao divisor, o que antes não se verificava.

Na tarefa que envolvia o significado de medida, os alunos determinavam diferentes comprimentos, sendo a unidade de medida variável. A noção de fração unitária e a sua iteração permitiram uma melhor compreensão deste significado das frações, designadamente em situações nas quais o objeto a medir é maior que a unidade de medida. A reta numérica e a equivalência de frações também foram elementos importantes nesta tarefa.

Resultados

Teste inicial

Numa questão que envolvia a relação parte-todo das frações, os alunos tinham de converter a percentagem 75% numa fração e fazer a respetiva representação pictórica. De um modo geral, os alunos mostraram um fraco desempenho nesta questão, fazendo representações como as exemplificadas na figura 1.

Figura 1.

Resolução de Helena e de Maria de uma questão envolvendo a relação parte-todo das frações (teste inicial)

Tendo convertido a percentagem nas frações $\frac{7}{5}$ ou $\frac{5}{7}$, estes alunos fizeram representações pictóricas, contínuas ou discretas, correspondentes à fração $\frac{5}{7}$. Justificaram "neste aqui fiquei na dúvida, porque a gente não pode tirar 7 de 5" (Maria) ou "tive de trocar para conseguir fazer!" (Tiago). Este significado das frações também esteve presente numa questão em que os alunos tinham de sombrear a quantidade expressa pela fração $\frac{1}{5}$ num conjunto formado por 5 círculos. Todos os alunos tiveram um desempenho positivo, sombreando um círculo, com a justificação "porque $\frac{1}{5}$ são 5 bolinhas e tenho de pintar uma" (Maria).

Numa questão em que os alunos tinham parte de uma figura, constituída por duas luas, e a respetiva quantidade fracionária ($\frac{1}{3}$), tendo de reconstruir toda a figura, o seu desempenho foi menos adequado. Maria e Tiago acrescentaram mais uma lua, apresentando diferentes justificações. Maria ignorou o numerador 1 e compreendeu que deveria ter um total de 3 luas, como indicado pelo denominador. Tiago referiu "fiz 3, que é 1 livre e 2 pintados. Eu pensei, como são 3, e 2 já estão pintados…!". Apenas Pedro teve um desempenho adequado nesta questão, acrescentando 4 luas, com a justificação "se eu tenho 2 luas e 2 luas é $\frac{1}{3}$, significa que tinha de fazer mais 4 luas, para a gente chegar aos $\frac{3}{3}$!". Em contextos contínuos os alunos mostraram uma boa compreensão deste significado das frações. Perante um modelo retangular totalmente sombreado e a indicação dessa quantidade relativamente ao todo ($\frac{1}{4}$), a maior parte dos alunos reconstruiu corretamente toda a figura, acrescentando mais 3 quadrados. A justificação de Pedro "se 1 já está feito, tenho de fazer mais 3, para ter 4 ao todo!" mostra a forma como estes alunos compreenderam esta questão.

O significado quociente das frações surgiu num problema em que os alunos tinham de dividir 3 tartes igualmente entre 4 pessoas e determinar a quantidade de tarde que cada pessoa iria receber. Maria atribuiu duas tartes inteiras a duas pessoas e dividiu ao meio a terceira tarte, atribuindo metade às restantes duas pessoas. Durante a entrevista, realcei o facto de a partilha ser equitativa, ao que a aluna respondeu "não as posso dividir em dois porque, senão, dá 6 e eles são 4! Não estou a ver outra maneira!". A seguir, Maria referiu que podia realizar uma divisão das quantidades. Tentou dividir 4 por 3, mas abandonou o cálculo por não o conseguir realizar. À pergunta se, eventualmente, poderia usar frações para resolver o problema, mostrou total estranheza perante a sugestão, referindo "Frações? Aqui?".

Outra aluna, Helena, dividiu cada uma das tartes no número de pessoas, atribuindo a cada pessoa uma parte de cada tarte, porém, não conseguiu nomear essa quantidade, tendo abandonado a sua estratégia. Durante a entrevista, com um olhar mais atento sobre o problema, sugeriu que podia dividir o número de tartes pelo número de pessoas, mas não conseguiu resolver o cálculo, uma vez que "o número maior é que se divide pelo mais pequeno. Aqui está ao contrário!". Tiago também dividiu cada tarte pelo número de pessoas, mas representou simbolicamente a parte de tarte atribuída a cada pessoa como $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. No entanto, considerou que o resultado da operação seria $\frac{3}{3}$, tendo justificado "eu não sei se é $\frac{3}{4}$ ou $\frac{3}{3}$. Acho que é $\frac{3}{3}$ porque eram 3 tartes. O de baixo não sei mesmo qual é!". João, por seu lado, percebeu que teria de dividir o número de tartes (3) pelo número de pessoas (4), associando a situação de divisão à fração $\frac{3}{4}$. Porém, converteu-a no numeral decimal 0,75, dando como resposta "0,75 de uma tarte". Durante a entrevista, referiu ainda que "sempre que há uma situação assim, fazemos da mesma maneira. As pizas a dividir pelas pessoas!".

O problema "O João tinha no seu mealheiro 150 euros. Gastou $\frac{2}{3}$ desse valor numa prenda de aniversário para a mãe. Quanto custou a prenda?" envolvia o significado operador das frações. Para a sua resolução, Maria, do valor inicial (150 euros) subtraiu 23 porque "a fração $\frac{2}{3}$ dá 23. Depois fiz de menos porque, se gastamos, temos de tirar!". Deste cálculo (incorreto), obteve 137. A seguir, subtraiu (incorretamente) este valor da quantidade inicial (150 euros), obtendo 23 euros, que referiu ser o valor da prenda. Helena multiplicou o operador $\frac{2}{3}$ pela quantidade 150, obtendo $\frac{300}{3}$, que indicou como resposta ao problema. Durante a entrevista, surgiu o seguinte episódio:

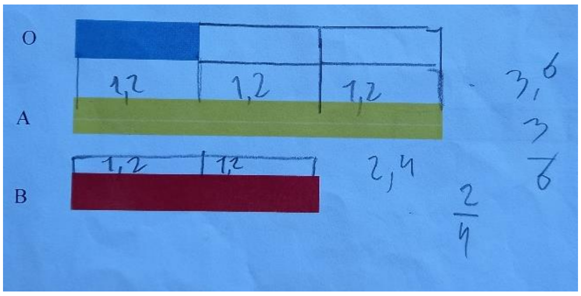
> Investigadora: Como é que chegaste a este resultado?
>
> Helena: Então, multipliquei os de cima. O número de baixo nunca se multiplica por este aqui [número inteiro].
>
> Investigadora: Mas, afinal, qual é o valor da prenda, em euros?
>
> Helena: Assim, é 300 euros porque o de baixo não se conta!

Após este diálogo, a aluna foi convidada a analisar o seu resultado de acordo com o contexto do problema, no entanto, não percebeu onde se encontrava o erro. Pelo seu lado, Tiago e Pedro tiveram um desempenho positivo neste problema. Compreenderam que deveriam dividir a quantidade total (150) pelo denominador da fração operador (3), multiplicando o resultado obtido por 2 (numerador), respondendo corretamente 100 euros. Pedro justificou que "cada $\frac{1}{3}$ iria ser 50 euros, por isso, $\frac{2}{3}$ é 100 euros!".

O significado de medida das frações surgiu num problema no qual os alunos tinham de determinar o comprimento de duas barras, A (amarela) e B (vermelha), tendo outra (barra azul) como referência e a respetiva medida, $\frac{1}{2}$. Neste problema, os alunos demonstraram dificuldades significativas. Tiago (figura 2) converteu o comprimento da unidade de medida ($\frac{1}{2}$) no numeral decimal 1,2, por pensar que o numerador correspondia à parte inteira do numeral e o denominador correspondia à parte decimal. A partir daí, verificou quantas vezes conseguia adicionar esse comprimento em cada uma das barras. As linhas horizontais e verticais que acrescentou a lápis foram usadas para facilitar a sua estimativa.

Figura 2.

Resolução de Tiago de uma questão envolvendo o significado de medida das frações (teste inicial)



Para indicar a resposta, voltou a converter os resultados obtidos em frações, seguindo o mesmo critério. O comprimento da barra amarela (A) foi convertido na fração $\frac{3}{6}$ e o comprimento da barra vermelha (B) foi convertido na fração $\frac{2}{4}$. Helena manteve o numerador

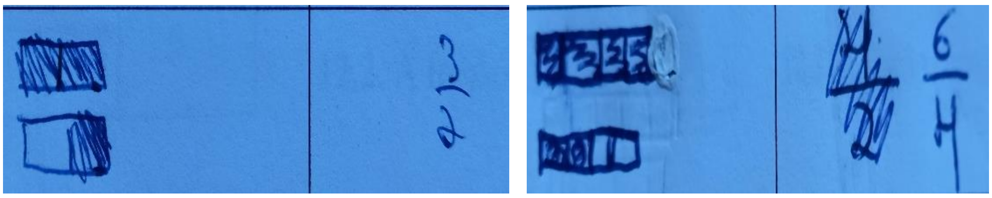
1 no comprimento das barras a medir, referindo “a gente aqui não vê os de cima, quando é 1!”. Como denominador, atribuiu 3 e 4 às barras B e A, respetivamente, com a justificação “esta [vermelha] é um bocadinho maior que a azul e a amarela ainda é um bocadinho maior que a vermelha! Então, aqui em baixo é 3 [barra vermelha] e aqui é 4 [barra amarela]. Ali fica o 2!”. Maria não conseguiu resolver a questão. Apenas durante a entrevista, com alguma ajuda da minha parte, verificou que a barra B seria o dobro da azul e que “metade mais metade dá 1”, indicando o número 1 como resposta. A barra A, por sua vez, compreendeu que correspondia a “um e meio”, no entanto, não o conseguiu indicar simbolicamente. Pedro resolveu corretamente a questão verificando que duas barras azuis correspondiam a uma barra vermelha, pelo que esta tinha uma unidade de comprimento. Relativamente à barra amarela, verificou que esta correspondia a 3 barras azuis, à “barra vermelha ao lado da barra azul”, ou a “uma vez e meia o comprimento da barra vermelha”, atribuindo 1,5 ao seu comprimento.

Teste final

Numa das questões apresentadas aos alunos no teste final, eles tinham de converter a percentagem 150% numa fração e fazer a sua representação pictórica, surgindo o significado parte-todo das frações envolvendo frações impróprias. Todos os alunos compreenderam que a percentagem representava uma unidade mais metade de outra. As resoluções de Pedro (figura 3a) e de Helena (figura 3b) exemplificam a forma como estes alunos resolveram esta questão.

Figura 3.

Resoluções de Pedro e de Helena de uma questão envolvendo a relação parte-todo das frações (teste final)



De acordo com a representação pictórica utilizada, assim indicaram a fração da respetiva quantidade como $\frac{6}{4}$ ou $\frac{3}{2}$, contudo, de um modo geral, compreenderam que $\frac{3}{2}$ seria a fração irredutível. As justificações “a unidade são dois bocados. Se fosse $\frac{2}{2}$, era a unidade completa […] como é mais metade de outra, é $\frac{3}{2}$ porque são 3 metades! E uma unidade mais metade de outra é 1,5” (Pedro) ou “aqui eu fiz 4 [quadrados], que é um número par. Tinha sempre de ser par! Então, fica 100 aqui em cima […] e aqui [em baixo] fazia os 200%. Como só tenho metade em baixo, dá os 150%!” (Tiago) mostram a compreensão destes alunos de frações impróprias. Esta questão permite verificar a compreensão destes alunos da relação parte-todo das frações envolvendo grandezas contínuas.

Na mesma questão do teste final também foi possível perceber a compreensão destes alunos da relação parte-todo das frações envolvendo grandezas discretas. Para representar pictoricamente a quantidade associada à fração $\frac{1}{2}$, apesar de, na sua maioria, terem representado um retângulo dividido ao meio com uma das suas metades sombreadas, Maria sugeriu outra forma de o fazer: “podiam ser 6 estrelas e pintávamos 3” (Maria). Por outro lado, para representar a quantidade associada à fração $\frac{1}{5}$, Helena sugeriu “podemos ter, tipo, 5 grupinhos iguais e um deles está pintado! Um quinto é um grupinho!”.

Num problema que envolvia o significado quociente das frações, onde os alunos teriam de determinar qual a fração de piza que receberia cada uma de 5 amigas, resultante da partilha equitativa de 4 pizas entre si, os resultados foram positivos. Todos os alunos apresentaram a divisão do número de pizas (4) pelo número de participantes (5), na representação em fração. Apesar de o enunciado do problema solicitar a resposta em fração (neste caso, $\frac{4}{5}$), alguns alunos entrevistados realizaram a divisão dos seus termos, indicando que cada menina ia receber 0,8. Este resultado foi interpretado adequadamente: “não fazia sentido ser de todas porque assim era quase as pizas todas para uma pessoa e os outros ficavam só com um bocadinho” (Tiago) ou “5 vezes 0,8 dá 4, que são as 4 pizas” (Pedro). Alguns alunos entrevistados reforçaram a sua compreensão deste significado das frações ao referir “então, podemos fazer sempre um a dividir por outro como uma fração!” (Tiago) ou “podemos sempre fazer assim e é mais fácil, mas a minha professora da outra escola não tinha ensinado assim!” (Maria).

O significado operador das frações surgiu numa questão na qual os alunos teriam de determinar $\frac{2}{3}$ de 15 quilómetros, o que correspondia a uma parte percorrida desta distância. Todos os alunos tiveram um bom desempenho neste problema, tendo realizado mentalmente o cálculo. Baseando-se na sua compreensão do todo e de fração unitária, compreenderam que $\frac{3}{3}$ correspondia ao todo (15 km), pelo que $\frac{1}{3}$ corresponderia a 5 km e $\frac{2}{3}$, a 10 km. Porém, também o fizeram simbolicamente como forma de mostrar o seu raciocínio: $\frac{2}{3} \times 15 = \frac{30}{3}$. O resultado obtido foi encarado como uma divisão, da qual obtiveram o quociente 10, que compreenderam ser o resultado do problema.

Num problema que envolvia o significado de medida das frações, foi dada uma barra cinzenta que correspondia à unidade de medida e os alunos teriam de determinar a fração correspondente ao comprimento de uma barra A (metade da unidade de medida) e de uma barra B (o dobro da unidade de medida). Todos os alunos tiveram facilidade em verificar que a barra A correspondia a metade da unidade de medida (fração $\frac{1}{2}$). Também demonstraram facilidade em determinar o comprimento da barra B, através de iterações da barra A. Tiago referiu “imaginemos que estavam aqui mais 3 traços, que dá 4 bocadinhos como este [barra A]. Aqui representava $\frac{1}{2}$… $\frac{2}{2}$… $\frac{3}{2}$… $\frac{4}{2}$! Fui fazendo por meios, por meios, até chegar aos $\frac{4}{2}$, que é cá em cima!”. Pedro acrescentou “se descobrirmos a fração que é 1 sobre qualquer coisa [fração unitária], conseguimos saber sempre o comprimento se juntarmos essa fração até estar tudo completo. Vamos contando!”. Maria, por seu lado, mostrou compreender a fração como divisão: “a fração $\frac{4}{2}$, se a gente dividir, dá 2, que são duas unidades”.

Helena teve alguma dificuldade em representar por meio de uma fração o "dobro". Durante a entrevista, sugeriu que seria $\frac{2}{2}$, mas compreendeu que "se dividimos em dois e pintamos 2, dá uma unidade à mesma!". Sugeri-lhe que se baseasse na fração unitária associada à barra A e tentasse iterá-la de forma a preencher toda a barra B. Helena aceitou a minha sugestão e, com algum auxílio da minha parte, acabou por compreender a iteração da fração unitária $\frac{1}{2}$ de forma a perfazer o todo ou a quantidade pretendida.

Discussão

Teste inicial

Antes de iniciar a experiência de ensino, os alunos evidenciaram alguma dificuldade relativamente à relação parte-todo das frações, nomeadamente na compreensão de frações impróprias. Na sua conceção de fração, o denominador indicava o número de partes em que o todo estava dividido e o numerador indicava o número de partes consideradas que, desta forma, não podiam exceder o todo. Uma vez que, atendendo a esta conceção, a fração imprópria $\frac{7}{5}$ não lhes fazia sentido, estes alunos fizeram representações pictóricas associadas ao seu inverso, $\frac{5}{7}$. A justificação "a gente não pode tirar 7 de 5" (Maria) mostra a falta de familiaridade destes alunos com frações impróprias. Esta (in)compreensão está associada a uma abordagem às frações limitada à relação parte-todo, nomeadamente o tradicional sombreamento de partes iguais de uma figura, e à ênfase em frações próprias (Norton et al., 2018; Post et al., 1993). Os alunos não atribuem sentido a uma fração na qual o numerador é superior ao denominador e, tal como referem Alkhateeb (2019) e Stafylidou e Vosniadou (2004), ficam com a ideia errada de que uma fração representa sempre uma quantidade menor que a unidade.

O desempenho dos alunos variou ainda de acordo com o tipo de grandeza envolvida. Nas questões que envolviam grandezas contínuas, o seu desempenho foi positivo. Os alunos mostraram compreender que o denominador da fração indicava o total de partes e que o numerador indicava o total de partes sombreadas, pelo que compreenderam a necessidade de acrescentar três quadrados.

Nas grandezas discretas, o desempenho dos alunos apenas foi positivo quando o número de itens do conjunto correspondia ao denominador da fração. Quando não correspondia, o seu desempenho foi menos adequado. Na sua maioria, os alunos não consideraram a possibilidade de obter subgrupos com igual número de itens dentro da unidade. Apenas Pedro alcançou esta compreensão. Isto reflete a dificuldade dos alunos na compreensão da unidade (unitizing), ou seja, em compreender que o denominador de uma fração pode não corresponder ao número de itens, mas ao número de conjuntos iguais que devem ser considerados, como referem Lamon (2007) e Llinares e Sánchez (1997). Estes resultados corroboram o que é indicado por Barnett-Clarke et al. (2010), ao referirem que os alunos mostram mais dificuldade em questões que envolvem grandezas discretas, quando o número total de itens de um conjunto não coincide com o denominador da fração.

A compreensão do significado quociente das frações, antes da experiência de ensino, não estava ao alcance de todos os alunos. Maria apresentou níveis de raciocínio variados, de acordo com a hierarquia de Toluk e Middleton (2001). Inicialmente, mostrou uma compreensão muito pobre de situações de partilha equitativa na forma como considerou a partilha das tartes, mostrando estratégias de particionamento pouco desenvolvidas. Durante a entrevista, o facto de ter sugerido uma divisão, invertendo os valores do dividendo e do divisor, coloca-a no esquema de fração como partilha equitativa. Porém, a seguir regressa ao esquema de fração como comparação parte-todo ao demonstrar estranheza pelo uso de frações neste contexto. Isto mostra que a aluna, possivelmente, compreendia as frações apenas como partes de um todo. A eventual ênfase na relação parte-todo durante a abordagem aos números racionais pode justificar esta (in)compreensão demonstrada pela aluna perante a impossibilidade de usar frações num contexto de divisão (Behr et al., 1983; Lamon, 2007).

Helena, embora tenha atribuído corretamente a quantidade de tarte a cada pessoa, usando a estratégia da distribuição (Lamon, 1996), não conseguiu nomear a parte resultante da sua partilha, pelo que mostrou um raciocínio associado ao esquema de fração como partilha justa, de acordo com a hierarquia de Toluk e Middleton (2001), ainda primitivo na compreensão deste significado das frações. A aluna não associou uma situação de partilha justa a uma situação de divisão e não considerou a possibilidade de dividir um número menor por um número maior. Este desempenho mostrou incompreensão do significado quociente das frações, de um modo geral, e da operação de divisão, a um nível particular, nomeadamente a conceção errada de que, numa divisão, o dividendo tem de ser sempre maior que o divisor.

Tiago também se encontra no esquema de fração como partilha justa, uma vez que particionou equitativamente a quantidade a distribuir, no entanto, indicou simbolicamente a quantidade de cada tarte que cada pessoa iria receber, mostrando um raciocínio mais adequado. O facto de não ter associado o contexto do problema a uma situação de divisão (3:4) e esta a uma fração ($\frac{3}{4}$), não o coloca em níveis mais avançados de compreensão deste significado. A resposta $\frac{3}{3}$ mostrou, ainda, incompreensão da grandeza das frações, uma vez que cada pessoa nunca poderia receber o conjunto das 3 tartes, ou seja, o todo. Além disso, ao considerar que o denominador seria 3 (o número de tartes), o aluno está a misturar diferentes unidades na mesma fração (tartes e partes de tarte).

Pedro também demonstrou diferentes níveis de raciocínio nesta questão. Inicialmente, demonstrou um nível de raciocínio associado ao esquema de divisão como fração (Toluk & Middleton, 2001), uma vez que antecipou o resultado sem resolver analiticamente o problema. Associou a situação de partilha equitativa de 3 tartes entre 4 pessoas à representação simbólica $\frac{3}{4}$. O facto de ter compreendido esta fração como uma divisão de dois números inteiros (3:4), apresentando o resultado 0,75, coloca-o no esquema de fração como divisão. Por fim, Pedro generalizou a relação entre uma situação de divisão e a respetiva fração ao referir “sempre que há uma situação assim, fazemos da mesma maneira. As pizas a dividir pelas pessoas!" o que, para Toluk e Middleton (2001), coloca o aluno no esquema de divisão como número.

O significado operador das frações também constituiu um obstáculo para alguns dos alunos entrevistados antes da experiência de ensino. Maria não demonstrou qualquer compreensão deste significado das frações, tendo cometido diversos erros. Demonstrou sérias dificuldades na conversão entre representações ao converter a fração $\frac{2}{3}$ no número inteiro 23. A seguir, associou "obter uma parte de uma quantidade" a uma operação de subtração, e não a uma multiplicação. Além disso, mostrou dificuldades em conceitos básicos de Matemática, nomeadamente na realização de subtrações com números inteiros. À semelhança do que aconteceu na questão que envolvia o significado quociente das frações, também nesta questão a aluna tentou evitar o uso de frações na sua resolução, possivelmente pela mesma razão, ou seja, pelo seu desconhecimento da possibilidade de usar frações em contextos que não envolvam partes de um todo.

Helena mostrou algum conhecimento procedimental deste significado das frações na sua resolução, no entanto, não compreendeu a fração obtida como uma divisão, atribuindo uma resposta desajustada ao problema. Se uma prenda custou uma parte de 150 euros, o seu valor não poderia ser 300 euros. Isto demonstra falta de uma análise adequada da razoabilidade da sua resposta, tendo em conta os valores fornecidos no enunciado. Este é um dos processos fundamentais na resolução de problemas e que, muitas vezes, é esquecido pelos alunos, mostrando uma falta de noção quantitativa de número racional (Post et al., 1986). Apenas dois dos quatro alunos tiveram um desempenho positivo nesta questão ao dividirem a quantidade total pelo denominador da fração operador e multiplicarem o resultado obtido pelo numerador. Porém, o seu desempenho foi positivo apenas a nível procedimental pois não compreendiam qual a razão de efetuar estas operações.

Antes de iniciar a experiência de ensino, os alunos, na sua maioria, tinham um conhecimento limitado ou quase inexistente do significado de medida das frações, o que pode mostrar que a sua abordagem, até ao referido momento, não existiu ou foi de natureza superficial (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Helena mostrou sérias dificuldades ao pensar na grandeza dos denominadores de acordo com a dimensão das barras. Além disso, o facto de ter mantido o numerador um em todas as frações mostrar uma compreensão de fração como dois números inteiros independentes. Maria, além de dificuldades evidentes neste significado das frações, mostrou também sérias dificuldades em conceitos básicos de Matemática, por exemplo, o facto de não conseguir representar simbolicamente uma unidade e metade de outra.

Tiago revelou uma compreensão mais adequada desta questão nomeadamente na forma como poderia obter o comprimento das barras. Porém, dificuldades ao nível da conversão entre representações do número racional justificam o seu desempenho inadequado nesta questão. A sua estratégia evidencia ainda dificuldades na noção quantitativa de número racional (Post et al., 1986). Não fez qualquer referência ao uso da representação em numeral decimal, tendo evitado trabalhar nesta representação. Por outro lado, Tiago pode ter associado a representação em numeral decimal a contextos que envolvem unidades métricas. Para Lee, Dewolf, Bassok e Holyoak (2016), isto é uma tendência natural entre os alunos, enquanto as frações são associadas a partes de um todo.

Pedro foi o único aluno que mostrou algum conhecimento e flexibilidade com este significado das frações, evidenciando um raciocínio associado ao esquema *partitive fraction scheme* (Norton et al., 2018). O aluno iterou a fração unitária de forma a obter os comprimentos que pretendia. Ao obter a fração unitária e considerar a sua iteração para obter os comprimentos visados, Pedro mostrou compreender a grandeza das frações, mostrando sentido de número racional (Norton et al., 2018; Lewis & Perry, 2014).

Teste final

Após a experiência de ensino, os alunos mostraram um melhor desempenho no significado parte-todo das frações, nomeadamente nas frações impróprias. Compreenderam a necessidade de usar uma segunda unidade quando o número de partes a representar era superior ao número de partes em que a unidade estava dividida. A justificação de Pedro "se fosse $\frac{2}{2}$, era a unidade completa […] como é mais metade de outra, é $\frac{3}{2}$ porque são 3 metades" mostrou que o aluno, além de compreender a fração como partes de um todo, compreendeu a fração como medida, demonstrando conhecer a sua grandeza o que, para Norton et al. (2018), representa uma boa compreensão das frações.

Compreensão deste significado das frações envolvendo grandezas discretas também foi observada no teste final, quando os alunos sugeriram o uso de conjuntos de itens para representar as diferentes quantidades solicitadas. Mostraram compreender que o denominador da fração não indica apenas o número de objetos total, mas sim o número de conjuntos que podemos obter com toda a quantidade. Consequentemente, o numerador não indica o número de objetos considerados, mas o número de conjuntos considerados.

Relativamente ao significado quociente das frações, após a experiência de ensino todos os alunos demonstraram compreensões mais adequadas, associadas a esquemas mais avançados na hierarquia de Toluk e Middleton (2001). Os alunos compreenderam que se tratava de uma situação de partilha equitativa, cujo resultado podia ser representado por uma fração (neste caso, $\frac{4}{5}$), associado ao esquema de divisão como fração. Desta forma, os alunos compreenderam uma fração como um número e não apenas como dois números separados. Além disso, também compreenderam a fração $\frac{4}{5}$ como uma divisão de dois números inteiros, obtendo 0,8. As respostas "uma fração também pode representar uma divisão" (Maria) ou "são as pizas a dividir pelos meninos que comem piza" (Helena) enfatizam esta compreensão (esquema de fração como divisão). Assim, não houve dificuldade em realizar a divisão com um dividendo inferior ao divisor, pois iria depender de o número de itens ser menor ou maior que o número de participantes. Antes da experiência de ensino, esta compreensão não era alcançada por estes alunos.

Este resultado foi, ainda, analisado quanto à sua razoabilidade à luz do contexto do problema, nomeadamente por Tiago: "não fazia sentido [0,8] ser de todas [as pizas] porque assim era quase as pizas todas para uma pessoa e os outros ficavam só com um bocadinho", demonstrando uma boa compreensão dos números racionais. Por fim, os alunos generalizaram o uso de uma fração a todas as situações de divisão (esquema de divisão como número).

Também no significado operador das frações os alunos demonstraram compreensão e flexibilidade após a experiência de ensino. Compreenderam o papel dos termos da fração operador, e as respetivas operações: o denominador indica o total de partes em que o todo se divide (cada uma dessas partes corresponde à fração unitária) e o numerador indica quantas dessas partes devem ser consideradas. A compreensão de que $\frac{1}{3}$ corresponde a 5 km, e $\frac{2}{3}$ corresponde a 5 + 5 é fundamental neste significado das frações (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Além disso, obter e compreender a fração unitária contribui para a compreensão da grandeza das frações. Ao nível simbólico, a fração resultante da multiplicação efetuada foi compreendida como uma "conta" que permite obter um número, neste caso, o número de quilómetros, tendo sido realizada a divisão do numerador pelo numerador. Porém, os valores envolvidos no enunciado deste problema podem ter contribuído para o bom desempenho dos alunos nesta questão, pois estes dividiram 15 por 3 com relativa facilidade. A compreensão de que usavam "uma conta de vezes para encontrar uma parte de outra" (Helena) pode ser justificada pela abordagem à multiplicação de frações na fase final da experiência de ensino.

O significado de medida das frações, em que os alunos mostraram mais dificuldade antes de iniciar a experiência de ensino, mostrou melhorias substanciais após a experiência de ensino. Na sua maioria, estes alunos mostraram um raciocínio associado ao *partitive fraction scheme* (Norton et al., 2018) no processo de obtenção do comprimento da barra B. Compreendendo que a unidade de medida era $\frac{2}{2}$, encontraram a fração unitária correspondente, que compreenderam ser a barra A, e iteraram essa fração unitária para obter o comprimento da barra B. Com esta estratégia, estes alunos mostraram compreender este significado das frações, de um modo geral, e a grandeza das frações, que constitui um indicador de sentido de número racional por parte dos alunos (Lewis & Perry, 2014). O comentário de Maria, "a fração $\frac{4}{2}$, se a gente dividir, dá 2, que são duas unidades", mostra ainda uma relação que a aluna estabeleceu com este significado e o significado quociente. Compreendeu que a divisão dos termos da fração origina o comprimento da barra.

Também o comentário de João durante a entrevista mostra um bom raciocínio pois o aluno compreendeu que se pode obter a fração unitária de qualquer fração própria e, a partir dela, produzir o comprimento desejado, sendo este menor ou maior que a unidade. Helena, porém, continuou a demonstrar alguma dificuldade neste significado. No entanto, durante a entrevista compreendeu a iteração do todo.

Conclusão

Este estudo pretende analisar os conhecimentos de alunos do 5.º ano relativamente aos diferentes significados das frações enquanto representantes de números racionais (parte-todo, quociente, operador e medida), antes e após uma experiência de ensino que tem como um dos principais objetivos o desenvolvimento da compreensão destes significados pelos alunos. A análise dos dados dos dois testes e das entrevistas subsequentes permite algumas constatações. Em primeiro lugar, a metodologia de ensino-aprendizagem exploratória usada durante a experiência de ensino, permitiu aos alunos partir dos seus conhecimentos prévios e, assim, desenvolver a compreensão desejada sobre os problemas, e permitiu-lhes, ainda, conhecer diferentes estratégias para resolver os problemas. Quando a representação simbólica constituia uma barreira à resolução das questões, os alunos recorriam a outra estratégia, que entretanto aprendiam devido à partilha das estratégias entre si. Desta forma, também foram formalizando as suas estratégias de resolução e avaliar as diferentes abordagens aos problemas, construindo o seu próprio conhecimento.

À semelhança de resultados de estudos anteriores (Lamon, 2007; Post et al., 1993), é muito provável que estes alunos tenham sido expostos a uma abordagem às frações centrada na relação parte-todo expressa, maioritariamente, através de frações próprias. Segundo o que foi possível comprovar dos documentos escritos e das explicações dos alunos durante as entrevistas, esta abordagem deixou dificuldades na sua compreensão geral das frações. Isto é visível em diversas questões do teste inicial, nomeadamente na estranheza demonstradas por estes alunos em considerar o uso de frações em contextos diferentes, por exemplo, em partilhas equitativas (significado quociente). Também a dificuldade em considerar uma fração imprópria ou na representação pictórica de uma fração imprópria (questão 1) mostra uma compreensão de fração em que as partes não podem exceder o todo.

Durante a experiência de ensino, os alunos tiveram a oportunidade de explorar diferentes contextos nos quais as frações podem surgir. Compreenderam, assim, que uma situação de partilha equitativa pode ser representada por uma fração, na qual o numerador (a) representa a quantidade a distribuir, o denominador (b) representa o número de pessoas a quem distribuir e a expressão $\frac{a}{b}$ representa o resultado da partilha. Consequentemente, passaram a considerar a possibilidade de o dividendo poder ser inferior ao divisor, o que anteriormente não se verificava. Também passaram a compreender o papel de um operador e as operações a ele associadas, em vez de as executar apenas procedimentalmente.

Incompreensões relativas ao significado de medida das frações que, antes da experiência de ensino, constituía um obstáculo para estes alunos, deram lugar a uma compreensão deste significado com a compreensão de fração unitária e da sua iteração para produzir as quantidades requeridas. Este processo de iteração revelou-se uma mais-valia para a compreensão da grandeza das frações e contribuiu para o desenvolvimento do sentido de número racional destes alunos (Post et al., 1986).

A análise da razoabilidade das respostas dos alunos aos problemas é parte integrante da compreensão dos números racionais, e permite verificar a compreensão da sua grandeza (Post et al., 1986), contudo, tal não era uma prática regular entre estes alunos antes de iniciar a experiência de ensino. A prática de exercícios rotineiros, a que anteriormente estes alunos estavam sujeitos, a julgar pelos conhecimentos demonstrados, não permitia o desenvolvimento desta competência. Após a experiência de ensino, alguns dos alunos passaram a verificar os resultados obtidos à luz do contexto do problema, como Maria (significado de medida) e Tiago (significado quociente), o que confirma o importante papel do contexto dos problemas na compreensão das situações pelos alunos e, consequentemente, na sua aprendizagem. Além disso, o contexto permite mostrar compreensão da grandeza destes números. Assim, apesar do papel também importante dos exercícios, no sentido em que favorecem flexibilidade de cálculo, a resolução de problemas deve estar presente numa grande parte das tarefas que o professor proporciona aos alunos.

Ao desenvolverem compreensão sobre as frações, os alunos começaram a usá-las de forma flexível, em vez de tentarem evitar esta representação, como aconteceu com Maria e Tiago antes da experiência de ensino. Apesar das dificuldades inerentes a cada significado, após a experiência de ensino, estes alunos mostraram compreensão e flexibilidade com os diferentes significados das frações, o que evidencia compreensão dos números racionais (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Os alunos devem ser confrontados com todos os significados. Cada significado proporciona determinados conhecimentos que são importantes para os alunos pelo que restringir o aluno a apenas a alguns significados dificulta a sua capacidade de construir um conhecimento mais abrangente. Este estudo mostra que os diferentes significados das frações podem ser abordados de modo produtivo numa experiência de ensino no 5.º ano, onde se trabalham também outros conceitos de número racional, nomeadamente as suas diferentes representações e as quatro operações.

Referências

Alkhateeb, M. (2019). Common errors in fractions and the thinking strategies that accompany them. *International Journal of Instruction*, v. 12(2), p. 339-416. https://doi.org/10.29333/iji.2019.12226a

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers: Grades 3-5.* NCTM.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (pp. 91-125). Academic Press.

Charalambous C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, v. 64(3), p. 293-316.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). Macmillan.

Hunt, J., Westenskow, A., & Moyer-Packenham, P. (2017). Variations of reasoning in equal sharing of children who experience low achievement in mathematics: Competence in context. *Education Sciences*, v. 7(1), p. 1-14. https://doi.org/10.3390/educsci7010037

Lamon, S. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 27(2), p. 170–193. https://doi.org/10.2307/749599

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (629-668). Information Age Publishing.

Lee, H., Dewolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. (2016). Conceptual and procedural distinctions between fractions and decimals: A cross-national comparison. *Cognition*, v. 147, p. 57-69. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2015.11.005

Lewis, C., & Perry, R. (2014). Lesson study with mathematical resources: A sustainable model for locally-led teacher professional learning. *Mathematics Teacher Education and Development*, v. 16(1), p. 22-42.

Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1997). *Fracciones: La relacion parte-todo*. Sintesis.

Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics,* v. 60, p. 37-69. https://doi.org/10.1007/s10649-005-5031-2

Norton, A., Wilkins, J., & Xu, C. (2018). A progression of fraction schemes common to Chinese and U.S. students. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 49(2), p. 210-226. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.2.0210

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics,* v. 93(1), p. 51-66. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9681-z

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, v. 8(1), p. 39-48.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, T., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 327-358). Lawrence Erlbaum.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 26(2), p. 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, v. 14, p. 503-518. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Toluk, Z., & Middleton, J. (2001). The development of children's understanding of the quotient: a teaching experiment. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 265-272). Hogrefe.

Agradecimentos

Este trabalho teve o apoio financeiro da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) no âmbito de uma bolsa de doutoramento concedida à primeira autora deste artigo, com a referência SFRH/BD/130343/2017.