

**Generalização de padrões e tecnologias digitais: um experimento com alunos do Ensino Fundamental**

**Pattern generalization and digital technologies: an experiment with Elementary School students**

**Generalización de patrones y tecnologías digitales: un experimento con estudiantes de primaria**

**Généralisation des patrons et technologies numériques : une expérience avec des élèves du primaire**

Gerson Pastre de Oliveira<sup>1</sup>

CEETEPS (Fatec Jundiaí) – UNIP (Universidade Paulista)

<https://orcid.org/0000-0001-8113-936X>

Marcos Lopes de Oliveira<sup>2</sup>

<https://orcid.org/0000-0003-0730-0383>

**Resumo**

Este artigo traz os resultados de uma pesquisa, baseada em um experimento didático, que teve como sujeitos um grupo de alunos do nono ano do ensino fundamental. O estudo teve como tema a generalização de padrões e previu a realização de sessões para resolução de problemas que tinham como parte da estratégia o emprego de tecnologias, inclusive de caráter digital, com destaque para o software GeoGebra. Assim, a investigação assumiu um caráter qualitativo, com um delineamento suportado pelos conceitos da engenharia didática. Em termos teóricos, a investigação encontrou sustentação na teoria das situações didáticas e nos autores relacionados à temática central, como Dreyfus, Zazkis e Mason. As interações entre as duplas formadas para resolução dos problemas evidenciaram que a estratégia didática planejada proporcionou que os sujeitos refletissem sobre as propostas abordadas, provendo soluções matematicamente válidas para as atividades, com o recurso a um conjunto de tecnologias disponíveis, digitais e não digitais, em convergência.

---

<sup>1</sup> [gerson.oliveira@fatec.sp.gov.br](mailto:gerson.oliveira@fatec.sp.gov.br) [gerson.oliveira1@docente.unip.br](mailto:gerson.oliveira1@docente.unip.br)

<sup>2</sup> [bortoliveira@uol.com.br](mailto:bortoliveira@uol.com.br)

**Palavras-chave:** Generalização de Padrões, Tecnologias na Educação Matemática, Teoria das Situações Didáticas, Engenharia Didática, GeoGebra.

### **Abstract**

This article presents the results of a research, based on a didactic experiment, which had as subjects a group of students from the ninth grade of elementary school. The study had as its theme the generalization of standards and foresaw the realization of sessions to solve problems that had as part of the strategy the use of technologies, including digital ones, with an emphasis on the GeoGebra software. Thus, the investigation assumed a qualitative character, with an outline supported by the concepts of didactic engineering. In theoretical terms, the investigation found support in the theory of didactic situations and in authors related to the central theme, such as Dreyfus, Zazkis and Mason. The interactions between the pairs formed to solve the problems showed that the planned didactic strategy allowed the subjects to reflect on the proposals addressed, providing mathematically valid solutions for the activities, using a set of available technologies, digital and non-digital, in convergence.

**Keywords:** Pattern generalization, Technologies in mathematics education, Theory of didactic situations, Didactic engineering, GeoGebra.

### **Resumen**

Este artículo muestra los resultados de una investigación, basada en un experimento didáctico, que tuvo como sujetos a un grupo de estudiantes del noveno año de la enseñanza básica. El estudio tuvo como tema la generalización de estándares y previó la realización de sesiones de resolución de problemas que tenían como parte de la estrategia el uso de tecnologías, incluso digitales, con énfasis en el software GeoGebra. Así, la investigación asumió un carácter cualitativo, con un diseño sustentado en los conceptos de la Ingeniería Didáctica. En términos teóricos, la investigación encontró apoyo en la Teoría de las Situaciones Didácticas y en autores

afines al tema central, como Dreyfus, Zazkis y Mason. Las interacciones entre las parejas formadas para resolver los problemas mostraron que la estrategia didáctica planificada permitió a los sujetos reflexionar sobre las propuestas abordadas, brindando soluciones matemáticamente válidas para las actividades, utilizando un conjunto de tecnologías disponibles, digitales y no digitales, en convergencia.

**Palabras clave:** Generalización de Estándares, Tecnologías en Educación Matemática, Teoría de las Situaciones Didácticas, Ingeniería Didáctica, GeoGebra.

### **Résumé**

Cet article présente les résultats d'une recherche, basée sur une expérience didactique, qui avait comme sujets un groupe d'élèves de la neuvième année de l'école fondamentale. L'étude avait pour thème la généralisation des modèles et prévoyait la réalisation de sessions pour résoudre des problèmes qui avaient comme stratégie l'utilisation des technologies, y compris numériques, en mettant l'accent sur le logiciel GeoGebra. Ainsi, la recherche a assumé un caractère qualitatif, avec un schéma soutenu par les concepts de l'Ingénierie Didactique. Sur le plan théorique, l'investigation a trouvé un appui dans la Théorie des situations didactiques et chez des auteurs liés au thème central, tels que Dreyfus, Zazkis et Mason, par exemple. La convergence entre les paires formées pour résoudre les problèmes a montré que la stratégie didactique prévue permettait aux sujets de réfléchir sur les propositions adressées, en fournissant des solutions mathématiquement valables pour les activités, en utilisant un ensemble de technologies disponibles, numériques et non numériques, en convergence.

**Mots-clés :** Généralisation des patrons, Technologies dans l'enseignement des mathématiques, Théorie des situations didactiques, Ingénierie didactique, GeoGebra.

## **Generalização de padrões e tecnologias digitais: um experimento com alunos do Ensino Fundamental**

Emprega-se, no contexto da matemática, a expressão “padrão” quando se quer encontrar regularidade, repetição e/ou simetria, com o propósito de compreender ordem ou estrutura (Orton e Orton, 1999). Logo, a ideia de padrão abrange uma lógica de regularidades marcadas pela forma como certos resultados ou expressões se repetem. Esta ideia pode ser entendida, na matemática escolar, não apenas como um tema a investigar, mas como um componente que perpassa toda a trajetória de aprendizagem da disciplina (Vale, 2013).

Neste sentido, os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) indicam que os padrões formam o alicerce do pensamento algébrico e que, por meio de sua exploração, é possível envolver os estudantes em tarefas de identificação de relações e na percepção de generalizações. O referido documento propõe que o reconhecimento de padrões conste entre os objetivos de todos os níveis escolares. Para Mason (1996), por exemplo, construir conhecimentos que permitam, com desenvoltura, a expressão de generalidades, é uma conquista sobremaneira relevante, uma vez que este saber é básico em relação ao desenvolvimento e consolidação do aprendizado sobre álgebra.

O conhecimento desta natureza deve, entre outras possibilidades, habilitar um aprendiz a reconhecer a existência de padrões em seu cotidiano, perceber a generalidade envolvida nesta iniciativa e, sobretudo, prover descrições matematicamente válidas, do ponto de vista da correção, em um primeiro momento, e da formalidade, em um segundo (Oliveira, 2008). Considerando a centralidade do conhecimento acerca de padrões na aprendizagem de álgebra, em particular, e de matemática, de forma mais ampla, Vale (2013, p. 65) menciona que uma série de estudiosos já se referia à matemática como “ciência dos padrões”. A mesma autora sugere, então, a análise de propostas didáticas alicerçada na resolução de tarefas desafiadoras, envolvendo padrões em contextos visuais, por meio de múltiplas resoluções e representações, que levariam o aprendiz a compreender conceitos matemáticos estruturantes. Assim, a

generalização, na visão da autora, permitiria estimular a criatividade do aluno e do professor do ensino básico, e competiria à escola desenvolver mecanismos para facilitar tal estímulo, tendo em vista a melhora das competências matemáticas dos estudantes (Vale, 2012).

Para Dreyfus (1991), generalizar é tirar como resultado ou induzir a partir de dados, para reconhecer particularidades comuns; ir de um caso particular para um caso geral e estender os domínios de validade de uma conclusão. Neste sentido, Mason (1999, p. 9), indica que “a generalização tem a ver com a observação de padrões e com propriedades comuns a várias situações”.

A importância do tema “generalização de padrões”, amplamente tratado em Educação Matemática, inspirou a realização da pesquisa descrita neste artigo, que foi desenvolvida no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), no âmbito das investigações do grupo PEA-MAT3. Trata-se de um trabalho que tem a álgebra e suas inserções curriculares na escola básica como escopo e a generalização de padrões como temática específica, em um contexto com estratégias didáticas e tecnologias digitais, tendo como sujeitos os integrantes de um grupo de alunos do nono ano do Ensino Fundamental. Mais especificamente, procurou-se responder à seguinte questão: *quais contribuições podem ser proporcionadas na aprendizagem do tema “generalização de padrões” para um grupo de alunos do nono ano do Ensino Fundamental a partir do uso de estratégias didáticas com tecnologias digitais?*

Entende-se, como em Oliveira (2018), que o uso de tecnologias digitais nos processos de ensino de matemática não representa um fim em si, mas um componente de uma estratégia didática que tem o conhecimento matemático a ser construído como foco. Esta visão influencia, entre outros pontos, a escolha das interfaces que compõem as atividades e os processos pelos

---

<sup>3</sup> PEA-MAT (Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática). Este trabalho foi realizado no âmbito de três projetos de pesquisa, um financiado pelo CNPq (Processo no. 477783/2013-9), outro pela FAPESP (Processo no. 13/23228-7) e outro, ainda, pelo PIPEq - PUC-SP (Solicitação número 3363).

quais os participantes de determinada atividade formam, em relação aos dispositivos midiáticos envolvidos, configurações que representam coletivos de pessoas-com-tecnologias. Esta proposta é inspirada nas ideias de Borba e Villarreal (2005). Para eles, a construção do conhecimento matemático deve ser vista como produto das interações constituídas a partir de um coletivo de seres-humanos-com-mídias, de forma indissociável.

Parte-se do princípio, também, de que o uso de tecnologias permite a reorganização do pensamento das pessoas em torno de novas possibilidades que vão além da mera substituição ou suplementação de seus recursos originais (Tikhomirov, 1981). Finalmente, a abordagem aqui assumida leva em conta que a construção de conhecimento a partir de um coletivo formado por pessoas e tecnologias não prescinde do desenvolvimento de fluência sobre as mídias em uso, tanto em relação ao funcionamento dos dispositivos presentes nas interfaces utilizadas, como à lógica subjacente às distintas ferramentas (Oliveira, 2018).

Desta forma, a investigação que aqui se descreve partiu da construção de problemas a serem solucionados pelos sujeitos em conjunto com as abordagens com tecnologias digitais mais apropriadas, como construções cognitivas que permitiriam ao sujeito refletir, conjecturar e alinhar propostas por conta própria, de acordo com a estrutura teórica abordada a seguir.

### **Sobre os elementos teóricos, metodológicos e suas articulações**

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) constitui um dos elementos teóricos no qual se apoiam os processos relativos à análise dos dados coletados nesta investigação. Por meio deste construto, procura-se dar conta de subsidiar as reflexões que surgiram a partir do trabalho dos sujeitos com a resolução de problemas no âmbito das chamadas situações didáticas. Neste âmbito, Brousseau (1986; 2002) defende o engajamento dos aprendizes nestas situações, que seriam aquelas em relação às quais não é dado perceber a intencionalidade didática do professor. Um dos elementos primordiais da dinâmica subjacente é o processo de devolução,

que consiste na propositura de um problema pelo docente e sua aceitação, com a responsabilidade do provimento de respostas, por parte dos aprendizes. Além disso:

Deste ponto de vista, a propositura do problema prevê um contexto material, didático e teórico de caráter antagônico (*o milieu*), no âmbito do qual o processo investigativo do estudante segue por três dialéticas distintas: de ação, de formulação e de validação. O professor retoma o caráter didático da proposta quando se propõe a discutir e esclarecer sobre o estatuto do conhecimento matemático válido, o que se dá pela dialética de institucionalização (Oliveira & Marcelino, 2015, p. 822).

Na visão de Brousseau (2002), professor, aluno e saber se relacionam intensivamente como componentes do processo de ensino e/ou aprendizagem em Matemática, constituindo o que o autor chama de triângulo didático. As relações entre esses agentes ocorrem no âmbito do *milieu*, que precisa ser estruturado a partir de uma lógica antagônica, no sentido de representar um elemento de desequilíbrios, de dificuldades e de contradições. A partir da construção de fatores de interação (instrumentos, como sequências didáticas, por exemplo), e considerando o caráter múltiplo da natureza deste componente (objetivo, material, social), espera-se o engajamento dos sujeitos, que passam a estruturar a construção do conhecimento a partir de retroações em relação ao *milieu*. Assim, pode-se aventar que este é o encaixe das estratégias didáticas com tecnologias em relação à TSD, como aduzem Oliveira e Gonçalves (2018, p. 12):

É, justamente, no âmbito do *milieu* que se pode compreender o papel das mídias componentes das estratégias didáticas empregadas em determinado sistema de ensino em um dado momento: adotadas a partir do planejamento do professor, constituem uma possibilidade para a promoção da reorganização do pensamento dos estudantes, com vistas à constituição de um saber.

Estes autores recorrem a Oliveira (2009) para indicar que as tecnologias podem oferecer outra visão ao triângulo didático original, não em substituição, mas em complemento, como se pode ver na figura 1.



Figura 1.

*Reconfigurações do triângulo didático (Oliveira, 2009, p. 229)*

Na interpretação desta representação gráfica, reforça Oliveira (2009, p. 229-230):

As setas representam os fluxos, nos sentidos pretendidos por Lévy (1993), que proporcionam, através das mediações negociadas entre as figuras humanas do processo (professores e alunos), a construção do conhecimento matemático de múltiplas maneiras (individualmente, cooperativamente, colaborativamente), previstas pelas estratégias didático-pedagógicas, as quais, também, admitem reconfigurações de acordo com a dinâmica que se efetiva no saber ensinado. As mediações são as ambiências das TICs e das mais diversas tecnologias envolvidas dos processos de ensinar e aprender Matemática.

Em termos processuais, o docente deve apresentar determinado problema aos alunos, que deverão construir estratégias para resolver a situação proposta, fase denominada de dialética de ação. Em seguida, os alunos são convidados a elaborar conjecturas em torno desse problema e comunicá-las aos seus colegas, o que permitirá o desenvolvimento da dialética da formulação. Face à discussão proposta, os alunos devem organizar suas proposições em torno de demonstrações mais robustas sobre o tema e convencer seus colegas de que elas são válidas dentro de um sistema de regras predeterminadas, marcando a dialética da validação. Deve-se entender, apesar da exposição estruturada aqui feita, que as fases mencionadas não se apresentam de forma linear e/ou hierárquica, mas se interpenetram e sobrepõem, de maneira a permitir múltiplas e distintas trajetórias, marcadas por idas e vindas ao longo das dialéticas. Por fim, cabe ao professor o reconhecimento externo, conferindo a validade cultural do que foi proposto, além de organizar e sintetizar o novo conhecimento, o que compõe a institucionalização.



Desta forma, estes elementos da TSD foram adaptados, no âmbito da investigação aqui relatada, de modo a envolver os alunos selecionados como sujeitos, já que se pretendeu que percorressem, no âmbito das tarefas, “um percurso investigativo, não direcionado pelo pesquisador, e mediado pelas tecnologias” (Oliveira & Marcelino, 2015, p. 823). Assim, coube a esta pesquisa entender quais avanços cognitivos o aluno eventualmente apresentou ao trabalhar com tarefas que previam o uso de tecnologias e que tinham a generalização de padrões como tema matemático principal. Neste contexto, o uso de tecnologias digitais é compreendido como forma de constituir um coletivo – seres-humanos-com-mídias, na forma como entendem Borba e Villarreal (2005). A partir desta proposta, e considerando que as mídias podem permitir a reorganização do pensamento (Tikhomirov, 1981), a estratégia didática foi estabelecida no intuito de empregar estes instrumentos para promover a autonomia dos sujeitos. Como forma de aproximar os sujeitos da fluência necessária para o emprego das interfaces do software GeoGebra, foram utilizadas as reflexões teóricas de Oliveira (2013; 2018), que indica uma trajetória para uso de tecnologias em processos de ensino e de aprendizagem.

Esta pesquisa tem a engenharia didática (Artigue, 2008) como perspectiva metodológica. Trata-se de uma proposta baseada nas chamadas “realizações didáticas”, planejadas para ocorrerem em ambientes como os da sala de aula. Assim, as sequências didáticas pretenderam engajar os sujeitos em trajetórias autônomas para a constituição de conjecturas, de validações e de revisitas às formulações iniciais.

Em termos organizacionais, a engenharia didática é uma metodologia experimental e estruturada em fases bem definidas. A primeira delas, chamada de análises preliminares, diz respeito a um questionamento epistemológico do conteúdo matemático em estudo no contexto de uma dada investigação, o que inclui uma discussão acerca da necessidade de sua presença no contexto escolar (Barquero e Bosch, 2015).

A fase seguinte é conhecida como construção das situações (ou design) e análise a priori, e corresponde à forma pela qual o conteúdo em questão é trabalhado em termos de modelos no contexto da pesquisa didática. Nesta fase, são construídas as sequências didáticas, geralmente constituídas por problemas que visam provocar os movimentos dialéticos de ação, formulação e validação por parte dos estudantes, que precisam se engajar em trajetórias investigativas que permitam compor conjecturas, a exemplo do matemático que busca recursos teóricos para o desenvolvimento de seu trabalho.

A terceira fase contém a implementação do processo didático previamente engendrado, sua observação e a coleta de dados. Neste nível, de caráter experimental, uma análise in vivo é desenvolvida tipicamente, com uma interpretação simultânea (ou quase) do que ocorre na sala de aula. Em seguida, uma análise a posteriori representa a última etapa do procedimento, sendo organizada em termos de comparação, validação e desenvolvimento das hipóteses de pesquisa e propostas de design estruturadas nas fases anteriores, principalmente na análise a priori, o que acarreta, frequentemente, a formulação de novos problemas, relacionados tanto à pesquisa em si quanto ao desenvolvimento do ensino (Barquero e Bosch, 2015). Desta forma, as quatro fases indicadas por Artigue (2014) em sua proposta de estrutura metodológica podem ser vistas na figura 2.

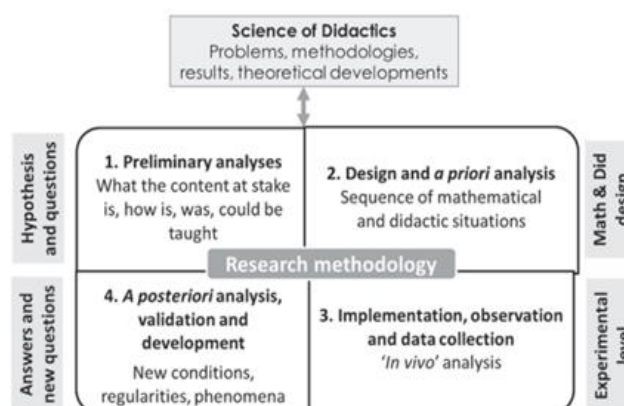


Figura 2.

*Fases da metodologia de pesquisa Engenharia Didática no contexto da TSD (Barquero e Bosch, 2014, p. 252)*

Por conseguinte, a organização do design do estudo que se descreve aqui permite articular as teorias e a abordagem metodológica. Isto possibilita justificar os elementos contidos no estudo a partir da lógica descrita, esquematicamente, na figura 2.

### **Sobre aspectos específicos da investigação**

Para a pesquisa de campo, foram voluntários oito alunos do nono ano do ensino fundamental de uma escola particular da zona norte da cidade de São Paulo, com idades entre 13 e 14 anos, devidamente autorizados pelos responsáveis e com o aval da instituição escolar. Os três encontros ocorreram em um laboratório de informática, após um intervalo de uma hora do término das aulas regulares. As interações no GeoGebra foram registradas por meio de gravações com o software OBS Studio<sup>4</sup>, que é gratuito e de código aberto. Também foram feitas anotações em papel durante as sessões, a partir das observações do ambiente, visando registrar diálogos, questionamentos e outras ocorrências relacionadas à resolução das atividades.

A escolha do GeoGebra implicou, de acordo com o quadro teórico empregado nesta investigação, em certos cuidados relativos à fluência no uso deste software:

A relevância da fluência na tecnologia escolhida para um processo de ensino pode ser de tal ordem que, se não desenvolvida de forma adequada, pode oportunizar que a interface concorra mais para atrapalhar do que para subsidiar o processo de construção do conhecimento matemático pelo sujeito, inclusive surgindo para impedir o desenvolvimento das conjecturas necessárias à investigação matemática (Oliveira & Lima, 2018, p.1168).

Dessa maneira, os sujeitos tiveram algumas orientações iniciais em relação aos comandos dos recursos digitais empregados na pesquisa, como, por exemplo, alternar de uma tela para outra no contexto do GeoGebra, gravar a tela e o som com o OBS Studio, gravar e

---

<sup>4</sup> Originalmente, o OBS Studio (*Open Broadcaster Software*) é um programa usado para *streaming* de vídeos na Internet. Entre suas funcionalidades, existe a possibilidade de captar imagens da tela e sons a partir de um computador, forma como foi usado nesta pesquisa.

transferir o arquivo resultante da atividade para um pen drive no final da sessão, entre outras práticas consideradas fundamentais.

Os sujeitos da pesquisa trabalharam em duplas, constituídas aleatoriamente, tendo à disposição computadores com os softwares e atividades instaladas. As duplas foram identificadas por D1, D2, D3 e D4 e os sujeitos A, B, C, D, E, F, G e H. Desse modo, A e B pertenciam a dupla D1, C e D pertenciam a dupla D2, E e F pertenciam a dupla D3 e, por fim, G e H pertenciam a dupla D4. O trabalho em duplas permitiu incentivar a ocorrência de trocas de ideias e discussões acerca das conjecturas elaboradas; esta foi, sobretudo, uma maneira de implementar e gerir o movimento que se esperava que ocorresse em torno das dialéticas de ordem adidática (Brousseau, 1986).

As sequências empregadas nesta pesquisa foram constituídas a partir de instrumentos que solicitavam respostas por escrito, o que permitiu analisar as resoluções propostas pelos participantes. Tais elementos, no entanto, previam que as respostas aos problemas ali elencados surgissem após o uso do software GeoGebra, que representava a tecnologia digital que poderia ser usada pelos estudantes para apoiar seu trabalho. Eventualmente, os sujeitos poderiam empregar outros aplicativos existentes nos computadores, como softwares de planilhas eletrônicas (Microsoft Excel, por exemplo), e calculadoras. Além disso, cada dupla deveria gravar em arquivos próprios suas propostas para a resolução dos problemas. Não estava previsto o auxílio de outras fontes de pesquisa para a resolução das atividades, em função da proposta deste estudo, que previa apenas interações entre os pares e com os pesquisadores, de modo que os alunos viessem a avançar autonomamente na construção do conhecimento em jogo. Desta forma, o acesso à Internet foi interrompido no laboratório, e os estudantes não puderam usar seus celulares.

### **Descrição da atividade e análise a priori**

A proposta desta atividade envolveu conhecimentos básicos de geometria euclidiana plana, principalmente no que se refere à soma dos ângulos internos de polígonos convexos. Com a finalidade de garantir certa generalidade das explicações relativas aos fatos observados e às contribuições do uso da tecnologia digital, citam-se as variáveis didáticas percebidas durante a experimentação:

- A escolha dos tipos de polígonos envolvidos e o fato de serem convexos. Tal variável condiciona a natureza dos conhecimentos prévios envolvidos, os quais se relacionam majoritariamente à lógica subjacente, em termos matemáticos, aos ângulos internos de um polígono convexo;
- A escolha do software GeoGebra, em lugar de algum outro que permitisse interações de outra natureza. Conforme explica Oliveira (2018), cada interface disponibiliza um potencial interativo, de modo que a escolha de uma em detrimento de outra abre algumas possibilidades e restrições;
- A organização da atividade, constituída por duplas, e as restrições de acesso a outras fontes de consulta que não fossem o debate entre os pares e com os pesquisadores.

Pretendeu-se que os sujeitos manipulassem uma aplicação no GeoGebra, contendo um triângulo, um quadrilátero e um pentágono. O software GeoGebra disponibiliza diversos recursos, entre eles a possibilidade de movimentar os objetos nele construídos. Quando o sujeito movimenta os vértices do polígono, ocorrem reconfigurações da representação em tela e, consecutivamente, novas composições dos ângulos internos. Desse modo, o sujeito podia observar que a soma dos ângulos internos do novo polígono com a mesma quantidade de vértices permanecia a mesma. Isso permitia que o sujeito começasse a fomentar conjecturas e expandisse de modo gradativo sua compreensão sobre os padrões presentes. Esperava-se, assim, que os sujeitos desvendassem o padrão presente na situação didática proposta, valendo-

se do dinamismo possível no GeoGebra para subsidiar suas conjecturas e determinar a generalização (Figura 3).

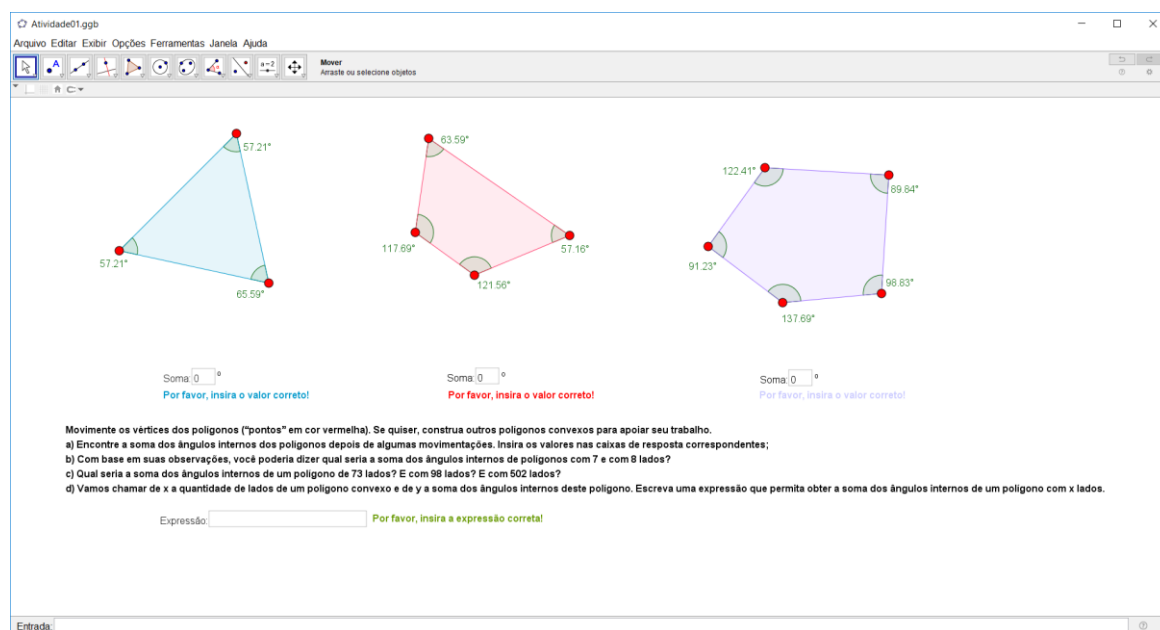


Figura 3.

*Aplicação construída para apoiar a resolução da Atividade 01 (elaborado pelos autores)*

Em termos operacionais, os sujeitos poderiam manipular as construções relativas aos três polígonos por meio de seus vértices, modificando as dimensões de cada uma delas, ou seja, promovendo alterações em relação aos ângulos internos, assinalados em suas posições, assim como em outros componentes constitutivos, como área e perímetro, não assinalados. As modificações realizadas promoviam a possibilidade de visualizar diferentes valores para as medidas dos ângulos, bem como realizar diversas experimentações em relação a eventuais conjecturas. Abaixo de cada figura, caixas de entrada solicitavam que os estudantes digitassem os valores relativos à soma das medidas dos ângulos internos de cada um dos polígonos. O software foi programado para indicar, por meio de mensagens escritas, se a proposição dos usuários era correta ou não (figura 4).

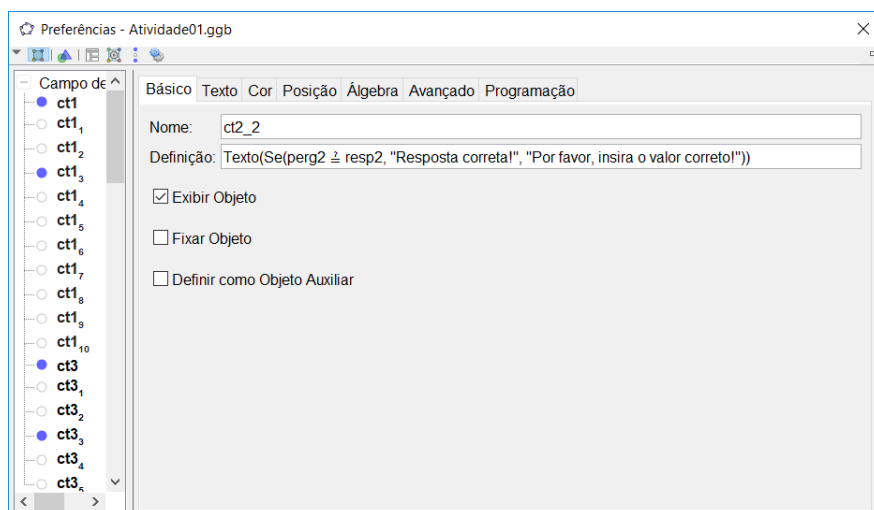


Figura 4.

*Funções programáveis no GeoGebra para verificar respostas da Atividade 01 (elaborado pelos autores)*

Da mesma forma, havia outra caixa de entrada, localizada abaixo das instruções da atividade, cujo objetivo era permitir que o estudante escrevesse uma expressão que correspondesse à generalização do padrão existente em relação à soma das medidas dos ângulos internos de polígonos convexos, capaz, também, de indicar acerto ou erro por meio de uma mensagem de texto (figura 5).

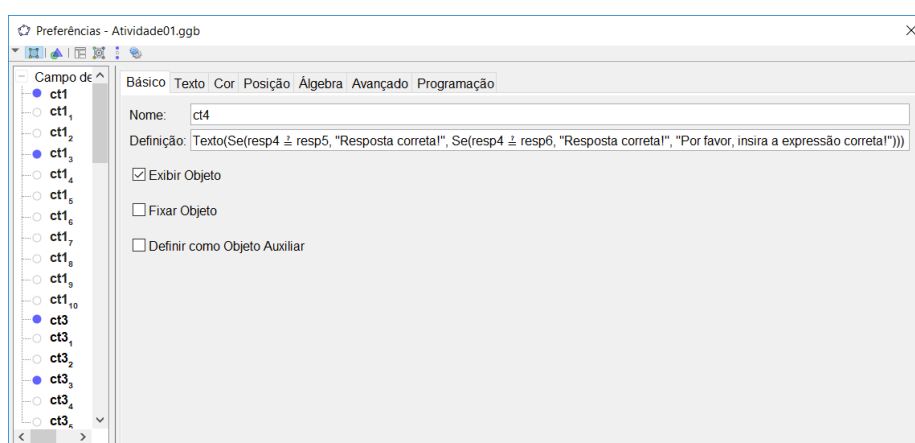


Figura 5.

*Funções programáveis no GeoGebra para verificar respostas da Atividade 01 (elaborado pelos autores)*

Em seguida, são descritos os problemas e instruções relativas à atividade, constantes da sequência entregue aos alunos:

- *Localize no computador que você está usando o arquivo chamado “Atividade”. Clique sobre o nome do arquivo duas vezes para abri-lo;*

O arquivo do GeoGebra, relativo à figura 3, estava disponível nos computadores utilizados para esta atividade. Assim, cabia aos estudantes abrir o respectivo arquivo e iniciar a tarefa. Evidentemente, neste momento, a organização das duplas para o trabalho já tinha sido feita.

- *Note que são exibidos três polígonos convexos na tela do GeoGebra. Caso tenha dúvidas sobre o que são polígonos convexos, converse com seu colega de atividade. Ao final, os pesquisadores solicitarão que cada dupla fale um pouco sobre suas conclusões a este respeito, que devem ser registradas no espaço abaixo:*

Aqui, os estudantes deveriam começar a mobilizar algum conhecimento anteriormente construído acerca da ideia e do significado da expressão “polígonos convexos”, em termos matemáticos, ou, se esse não fosse o caso, abrir uma discussão sobre este termo com base nas experimentações possíveis com a interface digital. De fato, em termos matemáticos, a definição de um polígono convexo, para Schorn e Fischer (1984), começa com a definição de um conjunto convexo, ou seja, “um conjunto de pontos  $S$  é convexo se, para qualquer segmento construído entre dois pontos deste conjunto  $S$ , todos os pontos do mencionado segmento também pertencem a este conjunto” (p. 9, tradução nossa). Esta definição permite afirmar, então, que um polígono convexo é um polígono tal que todo e qualquer segmento componente, traçado a partir de dois pontos, não se sobrepõe concorrentemente a outro segmento do mesmo polígono.

- *Observe que cada um dos polígonos possui vértices na cor vermelha. Estes elementos podem ser manipulados. Movimente os vértices e observe o que ocorre com os polígonos e seus ângulos. Registre suas conclusões no espaço abaixo:*



Neste item, a ideia foi proporcionar que os estudantes explorassem características ligadas à visualização, experimentação e dinamismo, de modo a observarem a regularidade existente em relação à medida dos ângulos. Os sujeitos poderiam, inclusive, antecipar as respostas dos itens posteriores da atividade.

- *Para as próximas tarefas, você pode construir outros polígonos para apoiar seu trabalho. Use outro arquivo do GeoGebra para isto.*

A possibilidade de usar construções advindas das próprias reflexões dos estudantes indica que as interações não ficariam subordinadas ao arquivo original, preparado para as atividades de pesquisa, mas que haveria possibilidade de explorar outros aspectos de uma eventual fluência na tecnologia, de acordo com trajetórias próprias e demandas pessoais.

- a) Encontre a soma dos ângulos internos dos polígonos depois de algumas movimentações. Insira os valores nas caixas de resposta correspondentes, disponíveis no arquivo do GeoGebra. Registre, a seguir, suas respostas e conclusões.*

Este item se destinava a consolidar uma das respostas buscadas com a proposta da atividade, mais especificamente ligada a casos individuais (três polígonos), o que eventualmente permitiria criar resoluções individuais antes de partir para a generalização propriamente dita.

- b) Com base em suas observações, você poderia dizer qual seria a soma dos ângulos internos de polígonos com 7 e com 8 lados? Como chegou às suas conclusões?*

Após a determinação dos casos individuais, o próximo item propõe aquilo que Zazkis e Liljedahl (2002) chamam de *near generalization*, ou seja, generalizações que são deduzidas em casos próximos aos individuais, por meio de um processo que pode ser visto como de generalização expansiva – como o próprio nome diz, há apenas a expansão do raciocínio generalizador, sem que o esquema original seja reconstruído (Zazkis & Liljedahl, 2002, p. 381).

- c) *Qual seria a soma dos ângulos internos de um polígono de 73 lados? E com 98 lados? E com 502 lados? Como chegou às suas conclusões?*

Este item propõe, em continuidade aos raciocínios anteriores, a implementação da proposta de Zazkis e Liljedahl (2002) em torno da chamada *far generalization*, aquelas que se referem a elementos numericamente (no caso) distantes dos contextos originais. Como se trata de elementos para os quais não seria possível realizar extensões, o tipo de generalização proposta aqui é a reconstrutiva, ou seja, para responder ao problema proposto, é preciso reconstruir o esquema constituinte da sequência, o que permite obter uma expressão do caso genérico (Zazkis & Liljedahl, 2002, p. 381).

- d) *Vamos chamar de  $x$  a quantidade de lados de um polígono convexo e de  $y$  a soma dos ângulos internos deste polígono. Escreva uma expressão que permita obter a soma  $y$  dos ângulos internos de um polígono com  $x$  lados. Registre sua expressão no espaço deixado no GeoGebra para esta finalidade. Você pode usar, além das variáveis  $x$  e  $y$ , os símbolos  $+$  (adição),  $-$  (subtração),  $.$  (ponto; multiplicação),  $:$  (dois pontos; divisão) e  $=$  (igualdade), além dos parênteses. Não esqueça de colocar espaços entre os símbolos que usar. Registre sua resposta e suas conclusões no espaço a seguir:*

Finalmente, este item solicitava a explicitação do esquema que levava à construção da sequência, dentro de certos parâmetros que permitiriam obter a soma dos ângulos internos de quaisquer polígonos, considerando  $x$  lados. Neste caso, a resposta esperada seria algo como  $y = 180 \cdot (x - 2)$ .

- e) *Para finalizar esta atividade, escreva sobre o que achou dela. Fale um pouco, também, sobre o que achou do GeoGebra neste trabalho: como ele ajudou?*

A finalidade deste item é apurar, por meio de depoimentos dos estudantes, as formas pelas quais acreditam que a tecnologia digital com a qual se associaram concorreu para subsidiar suas conjecturas e hipóteses acerca dos problemas em tela.

### **Análises relativas à atividade**

A análise a posteriori tem como referência os dados coletados na experimentação, o que inclui os diálogos entre os participantes. Dessa maneira, as duplas seguiram as orientações do protocolo e fizeram os acessos aos arquivos no Microsoft Word e no GeoGebra sem questionamentos iniciais. Os sujeitos demonstraram certa fluência em relação à mídia, pois são alunos habituados a trabalhar com estes softwares. Entretanto, antes de começarem a experimentação, os pesquisadores explicaram alguns recursos a serem usados e que eram desconhecidos dos sujeitos.

A princípio, os alunos discutiram entre si sobre os conhecimentos prévios que o questionamento pedia, como se previu no planejamento das atividades, procurando estratégias e concebendo propostas de resolução especialmente em relação às dialéticas de ação e de formulação (Brousseau, 1986; Brousseau, 2002). Como relatado anteriormente, apenas a dupla D1, mais especificamente o sujeito B, conseguiu recordar o significado de polígono convexo, e socializou com o sujeito A. A socialização de conhecimentos que aconteceu nesse momento exemplificou a importância de se trabalhar em dupla. Como resultado das discussões e da colaboração entre os estudantes mencionados, as respostas foram assinaladas, conforme se pode ver na Figura 6.

De outra forma, observou-se que as demais duplas apresentaram dificuldades em lembrar-se desse conteúdo. Assim, os pesquisadores mediarão a retomada da noção de polígono convexo por meio de questionamentos que os levassem à reflexão e resgate dos conhecimentos prévios que viessem a subsidiar a construção do conhecimento. Essa

providência é parte do processo de devolução (Brousseau, 1986), já que a consecução das atividades ficou estabelecida como de responsabilidade dos sujeitos da pesquisa.

$$\begin{array}{l}
 \text{b) } 7 \text{ lados} = 900^\circ, 8 \text{ lados} = 1080^\circ \\
 \text{c) } 73 \text{ lados} = 12780^\circ, 98 \text{ lados} = 17280^\circ, 502 \text{ lados} = 90000^\circ \\
 \text{d) } X - 2 \cdot 180 = Y \\
 \text{a) } \Delta = 180^\circ, \square = 360^\circ, \square = 540^\circ
 \end{array}$$

Figura 6.

*Respostas da dupla D1 à Atividade 01 (dados da pesquisa)*

Note-se que os alunos desta dupla foram aqueles que demonstraram, de forma mais evidente, o resgate em relação aos conhecimentos relativos aos polígonos convexos e uma maior fluência em relação ao GeoGebra. De outro modo, as duplas D2, D3 e D4 não o fizeram, ao que tudo indica, já que manifestaram verbalmente certa perplexidade em relação aos conceitos relacionados com os objetos matemáticos em questão. Este percalço também foi registrado no protocolo da atividade, conforme pode ser visto na figura 7.

DUPLA D2

No momento nenhuma da dupla sabe o que são polígonos convexos.

DUPLA D3

Não sabemos o que são 'polígonos convexos'.

DUPLA D4

Não sabemos a diferença entre polígonos convexos e côncavos. Também que se movimentamos uma vértice o valor de todos os ângulos mudam, porém a soma continua a mesma.

Figura 7.

*Anotações das duplas D2, D3 e D4 sobre o tema “polígonos convexos” (dados da pesquisa)*

Na resposta da dupla D4, surge a frase "não sabíamos a diferença entre polígonos convexos e côncavos"; entretanto, conforme o relato oral da dupla D4, os alunos sabiam

diferenciar os polígonos, mas não sabiam expressar formalmente. Na verdade, a maior dificuldade neste caso foi a de usar a linguagem corrente para expressar o que visualmente sabiam identificar por meio das representações geométricas envolvidas. Em outras palavras, os alunos da dupla D4, por exemplo, sabiam que estavam manipulando polígonos convexos. Quando escrevem "percebemos que se movimentarmos um vértice o valor de todos os ângulos mudam, porém a soma continua a mesma", os sujeitos G e H da dupla D4 anteciparam a resposta da próxima questão, o que, em si, não representa qualquer problema. Na verdade, este comentário reforça a noção de que, ao explorar a interface disponibilizada, os sujeitos tiveram a oportunidade de pensar com a tecnologia, encaminhando a formação de uma configuração do tipo "pessoas-com-GeoGebra", conforme indicam Oliveira (2018) e Borba e Villarreal (2005), fortalecendo a hipótese que o *milieu* do qual a mídia fazia parte teve alguma efetividade nas retroações nas quais os sujeitos se envolveram. Como consequência, a compreensão do padrão subjacente se deu mais rápido do que se imaginava a partir do manuseio dos vértices do polígono. Isso foi confirmado por meio dos dados coletados com as gravações no OBS Studio: a dupla D1 levou 8 minutos para a realização da atividade, enquanto a dupla D4 dispendeu 6 minutos. Assim, compreende-se que a conexão entre os conhecimentos matemáticos necessários, ainda que expressos de maneira menos formal, e a fluência nas tecnologias empregadas na resolução de determinado problema matemático podem concorrer para o surgimento de conjecturas consistentes, passíveis de impulsionar os sujeitos em direção de respostas corretas.

Adicionalmente, neste ponto, pode-se dizer que a ação de movimentar os vértices estimulou os sujeitos a elaborar conjecturas a respeito de regularidades relacionadas com a soma dos ângulos internos de cada polígono, embasando os movimentos seguintes e não lineares de formulação de propostas de resolução e validação. Pode-se aventar que tais manipulações aceleraram a obtenção de generalizações próximas (*near generalizations*) e

aquelas de cunho expansivo, e, de certa forma, representaram importantes recursos quando da obtenção da expressão geral (que os alunos chamavam de “fórmula”), a partir de generalizações mais amplificadas (*far generalizations*) e de caráter reconstrutivo (Zazkis & Liljedahl, 2002).

As duplas usaram outros recursos ligados à tecnologia digital disponível, como a calculadora do computador, por exemplo, para verificar se suas conjecturas estavam corretas em termos locais. Foi uma maneira de maximizar e acelerar o aspecto inicial, expansivo, das generalizações e chegar ao entendimento que, independentemente da composição dos ângulos internos dos polígonos envolvidos, proporcionada pelas movimentações dos vértices e consequente recomposição das representações, o valor da soma dos ângulos internos seria sempre a mesma, se se considerar cada polígono. Assim, os alunos entenderam o padrão subjacente e registraram respostas corretas.

a) Encontre a soma dos ângulos internos dos polígonos depois de algumas movimentações. Insira os valores nas caixas de resposta correspondentes, disponíveis no arquivo do Geogebra. Registre, a seguir, suas respostas e conclusões.

36 Triângulo: 180°  
 Quadrilátero: 360°  
 Pentágono: 540°

3	= 180	= 540
4	= 360	= 900
5	= 540	= 1800
6	= 720	= 900

$$2x = 30 = y$$

$$2 \cdot 3 = 30$$

$$6 \cdot 30 = y$$

$$180 = y$$

Concluimos que todos os triângulos, quadriláteros e pentágonos terão sempre os mesmos valores e acrescentando 180° vão se formando um polígono a mais.

Figura 8.

*Respostas da dupla D2 – Atividade 01, item “a” (dados da pesquisa)*

Na moldura retangular, indicada na figura 8, observa-se o movimento de generalização próxima da dupla D2, o que levou à percepção da variação da soma dos ângulos internos da ordem de 180 graus. Ainda que o sinal de igualdade esteja empregado de modo inadequado, a

dupla pretendeu relatar que, para um polígono de três lados, a soma dos ângulos internos resultaria  $180^\circ$ ; para o de quatro lados, resultaria  $360^\circ$ , e assim por diante. A moldura em elipse representa uma conjectura que não prosperou, no sentido de que a construção da expressão geral que representasse uma generalização não foi obtida. Entretanto, é importante observar que a dinâmica das dialéticas de ordem adidática, propostas por Brousseau (1986) e adotadas no quadro teórico desta investigação, ocorria e era subsidiada pelas características do milieu antagonista que foi constituído.

Importante aduzir também que as trajetórias foram marcadas por reconstituições que tiveram a tecnologia digital como importante elemento. Da trajetória investigativa, os sujeitos testavam suas conjecturas, induziam a partir de dados disponíveis e/ou descobertos e percebiam que suas realizações ainda não eram suficientes para suprir suas indagações, ou seja, não conseguiam ir do caso particular para o caso geral e estender os domínios de validade de uma conclusão (Dreyfus, 1991). No caso que aqui se analisa, o software GeoGebra permitiu que os sujeitos abrissem novas janelas e construíssem outros polígonos de maior número de lados, tornando mais dinâmica as experimentações destinadas a produzir generalizações expansivas. Neste sentido, então, partiram das particularidades já percebidas para estender o seu domínio, ou seja, a descoberta da soma dos ângulos internos para polígonos com maior quantidade de lados, mais distantes do triângulo, que exigiram a compreensão da estrutura da regularidade envolvida – um movimento de ensaio das *near generalizations* para as *far generalizations*. Tal particularidade pode ser observada até nas expressões da dupla D2, quando descrevem que, para obter a soma dos ângulos internos do próximo polígono da sequência, seria necessário acrescentar  $180^\circ$ .

Este movimento continua nas respostas providas para o item “b”: as duplas D1, D2 e D3, em síntese, utilizaram o mesmo princípio: adiciona-se  $180^\circ$  à soma dos ângulos internos do polígono anterior para se obter este resultado para o próximo polígono. Assim, foi possível

expandir os primeiros ensaios da generalização para polígonos próximos, de 7 lados ( $900^\circ$ ) e 8 lados ( $1080^\circ$ ), por exemplo. Adicionalmente, para subsidiar estas generalizações próximas, as duplas D1 e D4 construíram polígonos regulares em uma nova janela do GeoGebra, conforme sugerido no comando da atividade (figuras 9 e 10). Na reconstituição da ação destas duplas, percebe-se que, após a construção dos polígonos em questão, os alunos mediram os ângulos, ainda que com algumas imprecisões, e multiplicaram a medida encontrada pela quantidade de lados do polígono de modo a determinar a soma dos ângulos internos.

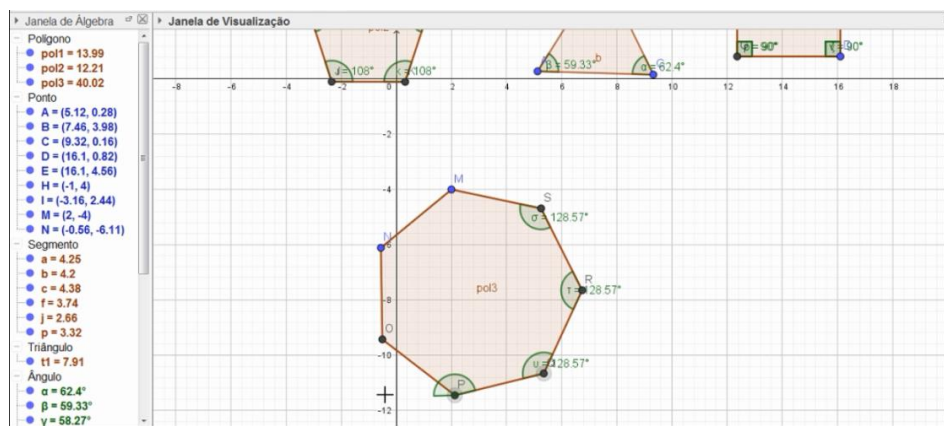


Figura 9.

*Construções adicionais da dupla D4 no GeoGebra (dados da pesquisa)*

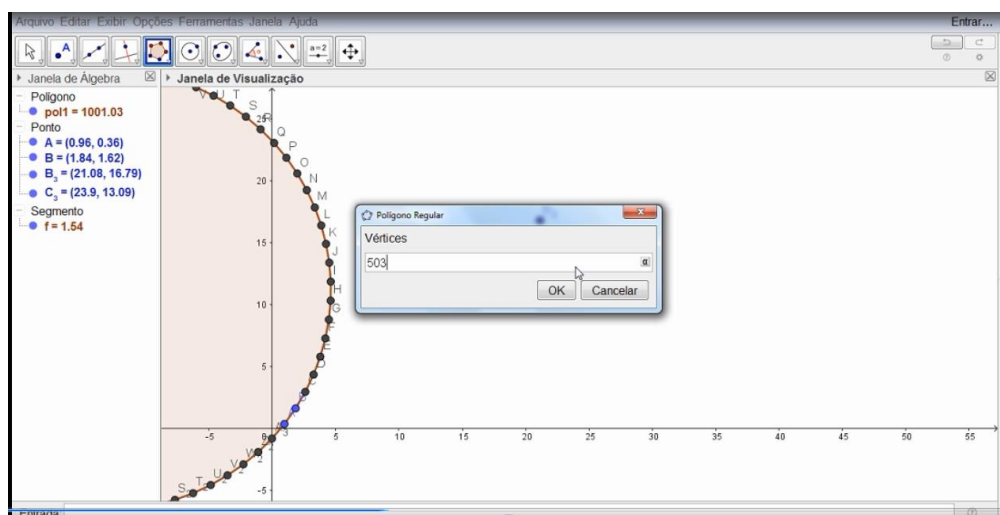


Figura 10.

*Construções adicionais da dupla D1 no GeoGebra (dados da pesquisa)*



Por outro lado, as duplas D3 e D4 construíram listas com os dados coletados nos episódios de experimentação com o GeoGebra, utilizado o recurso “planilha” para anotação e análise dos dados, conforme se vê na figura 11 (para a dupla D3). Além disso, a dupla D3 também usou o Microsoft Excel e anotações em papel para a mesma finalidade.

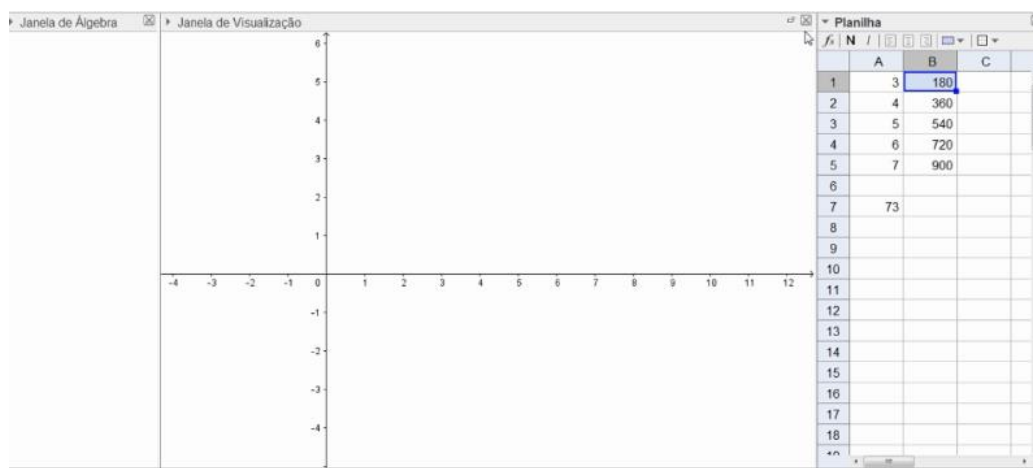


Figura 11.

*Uso da planilha do GeoGebra pela dupla D3 (dados da pesquisa)*

Tais dados posteriormente serviram de base para criar conjecturas para validação (Brousseau, 1986). Deve-se destacar a importância da fluência na tecnologia digital empregada, exemplificada pelo domínio que o sujeito G apresentou em relação ao GeoGebra, perceptível nas experimentações iniciais da dupla e que resultaram rapidamente em avanços. Vale entender, contudo, que a presença da tecnologia midiática por si só não é garantia de sucesso do aprendizado, mas pode representar um dos fatores importantes a considerar em uma estratégia didática bem articulada que leve o sujeito a refletir sobre suas próprias ações e, a partir dessas reflexões, chegar a novos entendimentos.

A questão "c" é uma retomada da questão "b", porém para polígonos “mais distantes”, com 73 lados ( $12780^\circ$ ), 98 lados ( $17280^\circ$ ) e 502 lados ( $90000^\circ$ ). Observando essas situações, os sujeitos entraram em um processo de revisitas às conjecturas e validações anteriores com o objetivo de encontrar padrões úteis que pudessem ser usados em novas formulações. Assim, com uso do GeoGebra, novas situações foram simuladas, tendo a planilha como meio de

registro dos dados coletados para analisar as relações entre o número de lados de um polígono e a correspondente soma de seus ângulos internos. A figura 12 representa parte da trajetória da dupla D4 para descobrir a generalização procurada, e contém dados importantes para o entendimento do processo cognitivo desenvolvido pelos sujeitos em questão.

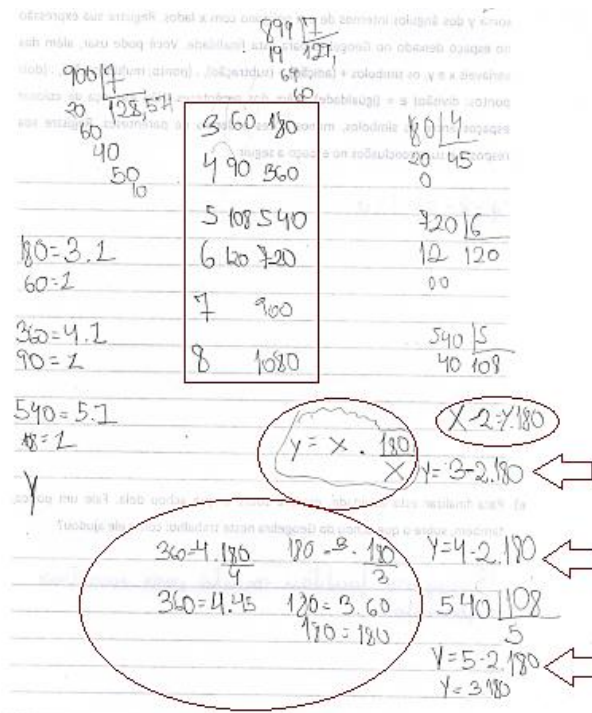


Figura 12.

*Expressões das conjecturas da dupla D4, subsidiadas pelo GeoGebra (dados da pesquisa)*

O contorno retangular é uma representação da relação encontrada entre a quantidade de lados do polígono e a respectiva soma dos ângulos internos. Tais dados foram coletados durante a experimentação da dupla D4 ao construir os polígonos na nova janela aberta no GeoGebra e registrar os dados na planilha. Como se pode observar, a extensão da conjectura fica inviável para polígonos mais distantes, ou seja, com muitos lados. Então, a dupla parte para uma nova conjectura, expressa no contorno circular maior da figura supramencionada, que não prospera.

Depois de várias hipóteses e experimentações, acabam observando que  $180^\circ$  seria o fator a ser multiplicado pela quantidade de lados diminuída de duas unidades. Esse desenvolvimento pode ser observado na figura 12 e é apontado por setas. Ressalte-se que,

apesar do raciocínio estar correto, faltou uma anotação algébrica adequada, pois a dupla grafou  $y = x - 2 \cdot 180$ , que é diferente de  $y = (x - 2) \cdot 180$ .

Ainda sobre as tecnologias digitais, o sujeito E da dupla D3, por ter maior afinidade com o Microsoft Excel, levou a dupla a analisar os dados por eles coletados usando este recurso, articulado com as anotações feitas em papel relativas às tentativas de formulação e validação. Como se percebe, a pesquisa não se limitou apenas ao uso do software GeoGebra, mas abriu outras possibilidades, de modo a promover, se fosse o caso, a convergência entre distintas formas de emprego de tecnologias, digitais e não digitais (Oliveira, 2018).

Em relação ao tempo gasto em cada atividade, o item “a” demandava a percepção de que, independentemente da configuração do polígono, estruturada pelo movimento dos vértices, a soma de seus ângulos internos seria sempre a mesma. O tempo despendido para esse reconhecimento foi relativamente curto: as duplas levaram, em média, 11 minutos. Aqui, é de se crer que o uso do GeoGebra permitiu diminuir consideravelmente o tempo, já que as experimentações em ambiente dinâmico ocorreram de forma intensiva, permitindo visualizações que concorreram, por sua vez, para subsidiar as conjecturas.

O item “b” pedia que o sujeito percebesse a regularidade a partir da soma dos ângulos internos de um triângulo, polígono que possui a menor quantidade de lados, e se estende para polígonos próximos, até aqueles com 7 e 8 lados; neste caso, a média foi de 15 minutos. Os sujeitos usaram planilhas no GeoGebra, novas construções de polígonos e desenvolvimentos em papel, além da interface já disponível. As estratégias foram um pouco diferenciadas: as duplas D1 e D4 mediram um dos ângulos dos polígonos regulares construídos e multiplicaram pela quantidade de lados, enquanto as duplas D2 e D3 foram somando  $180^\circ$  aos polígonos com somas conhecidas até chegar nos resultados esperados.

O distanciamento da quantidade de lados dos polígonos da questão “b” para “c” provoca nos sujeitos das duplas D2 e D3 algumas perplexidades quando perceberam que a estratégia de

somar 180 graus não era mais viável. Já as duplas D1 e D4 mantiveram suas propostas, construindo os polígonos de 73, 98 e 502 lados, como ilustrado nas figuras anteriores.

A dupla D3, particularmente, em relação aos itens “b”, “c” e “d”, usou amplamente lápis e papel, tanto quanto a calculadora do computador para acelerar os cálculos julgados necessários.

O item “d” foi, justamente, aquele que pedia para elaborar a expressão algébrica, a “fórmula” que representaria matematicamente a generalidade da situação proposta. Esse momento correspondeu ao maior dispêndio de tempo, pois, nesse instante, entravam em jogo as vivências matemáticas de cada sujeito, a articulação dos dados coletados por cada um durante a experimentação, a troca de ideias entre os integrantes da dupla, a fluência em relação à mídia e a estratégia adotada. De certo modo, portanto, trata-se de uma situação matemática complexa, onde estão presentes os processos de abstrair, generalizar, sintetizar e criar representações algébricas.

O item “e” trazia a solicitação de que os sujeitos elaborassem um depoimento sobre o processo de consecução da atividade e o papel do GeoGebra neste contexto (figura 13).

e) Para finalizar esta atividade, escreva sobre o que achou dela. Fale um pouco, também, sobre o que achou do Geogebra neste trabalho: como ele ajudou?

DUPLA D1

*TIRAR as próprias conclusões, gradualmente é algo muito interessante e o geogebra só auxilia nestas conclusões por apresentar a representação gráfica*

DUPLA D4

*O geogebra facilitou muito para encontrar a fórmula.*

DUPLA D2

*Conseguimos perceber muitas coisas que sem o Geogebra seria impossível. Foi difícil, mas depois que chegamos a fórmula tudo se tornou mais fácil.*

DUPLA D3

*Foi interessante fazer esta atividade pois que pudemos criar fórmulas usando um pouco de dados. O Geogebra nos ajudou a achar um caminho para fazer a fórmula.*

Figura 13.

### *Comentários dos sujeitos sobre a atividade e o GeoGebra (dados da pesquisa)*

As duplas D1 e D3 usaram a palavra “interessante” para classificar a atividade; ainda que um termo bastante geral, no contexto das respostas apresentadas, a palavra está relacionada ao desenvolvimento da possibilidade de o sujeito organizar por si mesmo suas investigações

sem qualquer dependência dos pesquisadores, cujas intervenções ocorreram em momentos pontuais. A dupla D4 achou que o GeoGebra “facilitou” o processo de expressão da generalidade buscada. Já a dupla D2 menciona que a atividade foi considerada difícil e o que o GeoGebra foi fundamental para o reconhecimento dos padrões envolvidos.

A dupla D2, particularmente, apresentou maiores dificuldades a partir da questão "c". Como os sujeitos não puderam, apenas por eles mesmos, estender o padrão para polígonos com maior número de lados, os pesquisadores efetuaram uma mediação no sentido de induzir os sujeitos C e D à reflexão, por meio de perguntas e da sugestão de usarem mais os recursos do GeoGebra. Assim, a dupla, ainda que com bastante esforço, acabou por concluir a atividade.

### **Considerações finais**

Quanto à experiência em si, a trajetória percorrida pelos sujeitos foi marcada por peculiaridades, compondo uma complexa gama de dados que foram analisados a partir do suporte teórico-metodológico assumido. A proposta de uma estratégia didática com a temática generalização de padrões permeou todos os momentos investigativos, nos quais os sujeitos buscaram a descoberta de padrões, realizaram generalizações próximas e extensivas, formalizaram generalizações mais distantes e sínteses reconstrutivas (quando buscaram estender as conjecturas acerca das generalizações para resultados mais distantes na sequência).

Ainda que nem todos os resultados tenham surgido da forma como se havia previsto nas análises a priori, os progressos surgiram de maneira bastante evidente, quando os estudantes puderam descrever os padrões que as atividades evidenciavam e escrever expressões algébricas muito próximas daquelas que estariam, por assim dizer, completamente corretas. As explicações providas pelos sujeitos, suas descrições e o uso que fizeram da interface do GeoGebra permitem afirmar que o processo de construção do conhecimento alcançou êxito em seus propósitos. A institucionalização, indicada por Brousseau (1986), ocorreu sem percalços:

os pesquisadores efetuaram os ajustes que permitiram a reconstituição significativa do estatuto formal do conhecimento matemático relativo ao conteúdo em tela.

Ao longo das atividades, os sujeitos tiveram contato com uma estratégia que privilegia o desenvolvimento do pensamento algébrico e a autonomia do sujeito, favorecida pelo dinamismo da tecnologia digital. A constituição de uma configuração do tipo pessoas-com-tecnologias, com espaço para convergência entre as tecnologias digitais e não digitais, criou uma ambiência a partir da qual foram articuladas e estabelecidas relações lógicas entre diversos conceitos matemáticos e ocorreram trocas de ideias e informações entre os sujeitos que mobilizaram seus conhecimentos prévios, junto aos dados coletados, para formular conjecturas e, posteriormente, buscar elementos para validá-las. O trabalho em dupla favoreceu este processo, oportunizando a ocorrência de discussões e fornecendo uma maneira de implementar e gerir o movimento que se esperava que ocorresse em torno das dialéticas (Brousseau, 2002). Deve-se destacar que as intervenções diretas dos pesquisadores nas interações ocorridas foram mínimas.

Evidentemente, alguns obstáculos e perplexidades estiveram presentes, e devem ser indicados. Puderam ser confirmadas as observações oriundas do estudo seminal de Zazkis e Liljedahl (2002) acerca da tensão entre o pensamento algébrico e a notação equivalente. Ainda que as descrições dos sujeitos fossem capazes de descrever os padrões identificados, mostrar a percepção das regularidades e indicar os processos de abstração que envolviam generalizações e sínteses, o processo de tradução destas etapas em notações algebricamente válidas apresentou alguns prejuízos quanto à precisão. Os autores mencionam que há uma “tensão” permeando esta transição, do pensamento à notação, caracterizada por dificuldades de tradução das conjecturas em linguagem matemática. A observação desta realidade no estudo que ora apresentamos mostra a necessidade de ampliar as investigações neste sentido. Por outro lado, ousa-se afirmar que a proximidade dos resultados expostos pelos sujeitos, no que se refere à

construção de expressões algebricamente válidas, apontam para um caminho promissor em relação ao uso de estratégias didáticas com tecnologias digitais, em trajetórias que permitam a discussão, a elaboração de protocolos colaborativos e a convergência com outras tecnologias. O aporte das tecnologias digitais, aliás, no que se pode apurar nesta investigação, concorreu para reduzir ou melhor equacionar o esforço operacional para elaboração das conjecturas, o que se traduziu por uma redução significativa do tempo empregado pelos sujeitos na construção de seus raciocínios ao longo das atividades.

### Referências

- Artigue, M. (2008). Didactical design in mathematics education. In Winslow, C. (Ed.). *Nordic research in mathematics education: Proceedings from NORMA08* (pp. 7–16). <https://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=212293>.
- Artigue, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. In Lerman, S. (Ed.). *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 159–162). New York: Springer. [http://www.springerreference.com/docs/navigation.do?m=Encyclopedia+of+Mathematics+Education+\(Humanities%2C+Social+Sciences+and+Law\)-book188](http://www.springerreference.com/docs/navigation.do?m=Encyclopedia+of+Mathematics+Education+(Humanities%2C+Social+Sciences+and+Law)-book188).
- Barquero, B., & Bosch, M. (2015). Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths. In Watson, A. e Ohtani, M. (Eds.). *Task Design in Mathematics Education: New ICMI Study Series*. DOI 10.1007/978-3-319-09629-2\_8.
- Borba, M. C., & Villareal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: didactique des mathématiques, 1970–1990*. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, Grenoble, 2 (7), 33-115.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Mason, J. (1999). *Learning and doing mathematics*. York: QED.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In Bednarz, N.; Kieran, C.; Lee, L. (Eds.). *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Oliveira, G. P. (2018). Sobre tecnologias e Educação Matemática: fluência, convergência e o que isto tem a ver com aquilo. In Oliveira, G. P. (Org.). *Educação Matemática: epistemologia, didática e tecnologia*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

- Oliveira, G. P., & Gonçalves, M. D. (2018). Construções em geometria euclidiana plana: as perspectivas abertas por estratégias didáticas com tecnologias. *BOLEMA*, 32 (60), 92-116.
- Oliveira, G. P., & Lima, N. S. M. (2018). Estratégias didáticas com tecnologias na formação continuada de professores de Matemática: uma investigação sobre homotetia. *Educação Matemática Pesquisa*, 20 (1), 2018, 385-418.
- Oliveira, G. P., & Marcelino, S. B. (2015). Estratégias didáticas com o software Superlogo: adquirir fluência e pensar com tecnologias em Educação Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, 17 (4), 816 – 842.
- Oliveira, G. P. (2009). Transposição didática: aportes teóricos e novas propostas. In Witter, G. P.; Fujiwara, R. *Ensino de Ciências e Matemática: análise de problemas*. São Paulo: Ateliê Editorial. p. 209-236.
- Oliveira, G. P. (2008). Generalização de padrões, pensamento algébrico e notações: o papel das estratégias didáticas com interfaces computacionais. *Educação Matemática Pesquisa*, 10, (2), 2008, 295 – 312.
- Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In Orton, A. (Ed.). *Pattern in the teaching and learning of mathematics*. London: Cassell.
- Schorn, P., & Fisher, F. (1994). Testing the convexity of a polygon. In Heckbert, P. S. *Graphics Gems IV* (pp. 7–15). San Diego: Morgan Kaufman Academic Press, 1994.
- Tikhomirov, O. K. (1981). The psychological consequences of computerization. In Wertsch, J. V. (Ed.). *The Concept of Activity in Soviet Psychology* (pp. 256 – 278). New York: M.E. Sharpe Inc.
- Vale, I. (2013). Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. *Revemat*, 8 (2), 64 – 81.
- Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de Matemática: um desafio para professores e alunos. *Interacções*, 20, 181 – 207.
- Zazkis, R., & Liljedahal, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379-402.