

Metodologias de investigação no ensino de matemática: Onde estamos?

Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques : Où en sommes-nous ?

Research methodologies in didactics of mathematics: Where are we?

Metodologías de investigación en didáctica de las matemáticas: ¿Dónde estamos?

Michèle Artigue¹

Université de Paris, LDAR

<https://orcid.org/0000-0002-8176-8243>

Tradução

Saddo Ag Almouloud – UFBA

saddoag@gmail.com

Resumo

Este artigo questiona as metodologias de pesquisa em educação matemática, após uma introdução que situa esse questionamento na história deste campo de pesquisa, e as metodologias dentro das praxeologias de pesquisa. Considero, em primeiro lugar, a engenharia didática, uma metodologia que é emblemática da disposição dos didáticos em desenvolver métodos de pesquisa que atendam às suas necessidades específicas. Relembro suas características e mostro sua evolução em contato com diferentes teorias. Em segundo lugar, examino a relação entre a engenharia didática e a investigação baseada em design, incluindo o caso da engenharia didática cooperativa. Considero então diversas evoluções metodológicas ligadas à evolução das problemáticas e teorias de investigação e à evolução dos meios tecnológicos de investigação, antes de abordar, na última seção, estas questões metodológicas do ponto de vista da relação entre investigação e ação didática.

¹ michele.artigue@univ-paris-diderot.fr

Palavras-chave: Didática da matemática, Educação matemática, Metodologia de pesquisa, Praxeologia da pesquisa, Engenharia didática, Pesquisa baseada em design, Engenharia didática cooperativa.

Résumé

Dans cet article s'interrogeant sur les méthodologies de recherche en didactique, après une introduction resituant ce questionnement dans l'histoire de ce champ de recherche, et les méthodologies au sein des praxéologies de recherche, je m'intéresse dans un premier temps à l'ingénierie didactique, une méthodologie emblématique de la volonté des didacticiens d'élaborer des méthodes de recherche répondant à leurs besoins spécifiques. Je rappelle ses caractéristiques et montre aussi son évolution au contact de différentes théories. Dans un second temps, j'examine les relations entre ingénierie didactique et *design-based research*, en incluant le cas de l'ingénierie didactique coopérative. J'envisage ensuite diverses évolutions méthodologiques liées à l'évolution des problématiques et théories didactiques et à celle des moyens technologiques de la recherche, avant d'aborder dans une dernière section ces questions méthodologiques sous l'angle des rapports entre recherche et action didactique.

Mots clefs : Didactique des mathématiques, Méthodologie de recherche, Praxéologie de recherche, Ingénierie didactique, Design-based research, Ingénierie didactique coopérative.

Abstract

This article questions research methodologies in mathematics education, after an introduction that situates this questioning in the history of this field of research, and the methodologies within research praxeologies. I first consider didactic engineering, a methodology that is emblematic of the willingness of didacticians to develop research methods meeting their specific needs. I recall its characteristics and show its evolution in contact with different theories. Secondly, I examine the relationship between didactic engineering and design-based research, including the case of cooperative didactic engineering. I then consider various

methodological evolutions linked to the evolution of research problematics and theories and the evolution of technological means of research, before addressing, in the last section, these methodological questions from the point of view of the relationship between research and didactic action.

Keywords: Didactics of mathematics, Mathematics education, Research methodology, Research praxeology, Didactic engineering, Design-based research, Cooperative didactic engineering.

Resumen

Este artículo cuestiona las metodologías de investigación en educación matemática, luego de una introducción que sitúa esta cuestión en la historia de este campo de investigación, y las metodologías dentro de las praxeologías de investigación. Considero, en primer lugar, la ingeniería didáctica, una metodología emblemática de la voluntad de los didactistas de desarrollar métodos de investigación que satisfagan sus necesidades específicas. Recuerdo sus características y muestro su evolución en contacto con diferentes teorías. En segundo lugar, examino la relación entre la ingeniería didáctica y la investigación basada en el diseño, incluido el caso de la ingeniería didáctica cooperativa. Luego considero varios desarrollos metodológicos vinculados a la evolución de las cuestiones y teorías de investigación y la evolución de los medios tecnológicos de investigación, antes de abordar, en la última sección, estas cuestiones metodológicas desde el punto de vista de la relación entre investigación y acción didáctica.

Palabras claves: Didáctica de las matemáticas, Metodología de investigación, Praxeología de investigación, Ingeniería didáctica, Investigación basada en el diseño, Ingeniería didáctica cooperativa.

Metodologia de pesquisa: Onde estamos?

Devemos falar de metodologia de pesquisa didática ou de metodologias de pesquisa? Se nos referirmos à definição de metodologia como um conjunto de métodos em um campo de pesquisa, seria normal usar o singular. No entanto, o plural é muitas vezes preferido para sublinhar a diversidade existente num determinado campo e para organizar essa diversidade, por exemplo no campo da educação, com a distinção entre metodologias qualitativas e quantitativas. Por este motivo, e como geralmente é o caso na educação matemática, usarei o plural aqui.

Cada área de pesquisa desenvolve suas próprias práticas. Se nos situarmos no quadro da teoria antropológica do didático (TAD), modelizaremos essas práticas em termos de praxeologias de pesquisa (Artigue, Bosch & Gascón, 2011; Artigue & Bosch, 2014) constituídas por um bloco prático estruturado por questões de pesquisa e técnicas utilizadas para seu estudo, e um bloco teórico estruturado em torno de discursos tecnológicos que explicam e justificam essas técnicas de estudo e teorias que sustentam esses discursos tecnológicos. No seu uso corrente, e de acordo com a sua etimologia, a palavra metodologia designa mais do que um método ou mesmo um conjunto de métodos; refere-se tanto a este método ou conjunto de métodos e ao discurso que a (as) descreve, explica e justifica. Uma metodologia se situa, portanto, na conexão entre o bloco prático e o bloco teórico das praxeologias de pesquisa e participa de suas relações dialéticas. É um ingrediente essencial na dinâmica das praxeologias de pesquisa, e neste texto, tentarei mostrá-lo e traçar suas consequências.

A pesquisa em didática da matemática não surgiu em um vácuo científico. Como resultado, no seu início, muito naturalmente, ela se apegou a campos científicos estabelecidos dos quais estava mais próxima, notadamente a psicologia, quer fossem os métodos da psicologia clínica piagetiana ou os da psicologia experimental. Isso tem ajudado muito a

garantir o reconhecimento dos trabalhos desenvolvidos neste novo campo como trabalhos científicos. Mas, relativamente cedo, esta pesquisa sentiu a necessidade de desenvolver um ambiente metodológico próprio, adaptado à especificidade de suas questões. Foi o que aconteceu na França, por exemplo, com o desenvolvimento da engenharia didática; mas há, naturalmente, outros exemplos, como por exemplo, a forma de pesquisa baseada em design que se desenvolveu dentro do quadro teórico da educação matemática realística no Freudenthal Instituto na Holanda (Bakker & van Eerde, 2014; van den Heuvel-Panhuizen, 2019). Ao longo do desenvolvimento do campo, a didática libertou-se assim, mais ou menos facilmente de acordo com os contextos, de uma concepção de cientificidade baseada na utilização de métodos experimentais abalizados na comparação estatística entre pré-testes e pós-testes para grupos controle e experimental. Surgiram novas abordagens, em grande parte qualitativas, muitas vezes inspiradas por aquelas usadas mais amplamente no campo da educação. O livro *Approaches to qualitative research in mathematics education* (Bikner-Ashsbahs, Knipping & Presmeg, 2014) apresenta, assim, uma dezena de abordagens utilizadas hoje nesta pesquisa, acompanhadas de seus fundamentos teóricos e exemplos de implementação. Tomadas na dinâmica das praxeologias de pesquisa, essas metodologias evoluíram e continuam a evoluir, ao longo da evolução teórica do campo, das questões que as compõem, dos conhecimentos e da experiência acumulada, mas também a partir dos meios técnicos à disposição dos pesquisadores.

No entanto, no início deste século, a pressão para vincular o caráter científico dos resultados obtidos em didática da matemática, como mais geralmente no campo da educação, a métodos experimentais estritos e ao uso de amostras aleatórias, faz-se cada vez mais forte, necessitando de uma vigilância renovada. A educação baseada em evidências, inspirada na medicina fundamentada em evidências, é vista por várias autoridades científicas e políticas como a única garantia de resultados cientificamente sólidos. A França, por exemplo, não está

mais imune a essa tendência que surgiu nos Estados Unidos, como evidencia um relatório recente do CSE (Conselho Científico para a Educação), denunciado por unanimidade pelas sociedades científicas e associações de pesquisadores em ciências humanas e sociais.

Ao mesmo tempo, os esforços para reduzir a lacuna entre a teoria e a prática, para implementar os resultados das pesquisas didáticas além dos ambientes experimentais limitados onde eles geralmente foram obtidos, para resolver o problema de mudança de escala, colocam problemas metodológicos que exigem, para serem resolvidos, ir além das abordagens qualitativas usuais, e combiná-las com abordagens quantitativas, em metodologias mistas. Este tipo de combinação não é novo, e a investigação didática levou ainda ao surgimento de novas abordagens quantitativas, como é o caso da análise implicativa iniciada por Régis Gras, e cujo desenvolvimento desde então teve a contribuição de vários investigadores (Gras, Regnier & Guillet, 2009). A reflexão metodológica está, portanto, mais do que nunca, na ordem do dia.

Neste texto, desejo compartilhar minha experiência e minhas indagações nesta área para alimentar a reflexão para a qual este número especial deseja contribuir. Em primeiro lugar, recorro às ambições e fundamentos da engenharia didática que, na tradição didática francesa, tem sido emblemática dessa vontade de desenvolver metodologias que atendam às necessidades específicas da pesquisa didática. Mostrarei também que essa metodologia é na verdade um objeto preso em uma dinâmica, a das praxeologias de pesquisa que ela instrumentaliza e que, por sua vez, a influenciam. É comum hoje considerar a engenharia didática como um membro da família das metodologias de *design-based research* (pesquisa baseada em design), cujo uso se desenvolveu na educação matemática desde o início deste século. Discutirei essa família e sua relação com a engenharia didática. Em seguida, discutirei mais brevemente outros desenvolvimentos metodológicos ligados à evolução das problemáticas de pesquisa, teorias e meios técnicos da pesquisa. E terminarei abordando a questão da relação entre pesquisa e ação didática, voltando ao surgimento da engenharia

didática e destacando os desafios metodológicos colocados pelo estabelecimento de relações mais satisfatórias e, de forma mais geral, o ainda emergente campo da *implementation research*.

A engenharia didática como resposta às necessidades metodológicas da didática da matemática

Os fundamentos da engenharia didática

Há cerca de dez anos, em 2009, a engenharia didática era o tema central da Escola de Verão de Didática da Matemática na França e uma oportunidade especial para rever a história desta metodologia, que já tinha cerca de trinta anos. A apresentação introdutória desta escola (Artigue, 2011a), voltando à segunda Escola de Verão, a de 1982, em que este tema foi pela primeira vez trabalhado coletivamente, sublinhava claramente, voltando ao manuscrito do texto escrito na época por Chevallard (1982), que este método de pesquisa realmente surgiu da necessidade sentida pela comunidade didática francesa de não ficar presa às práticas de laboratório, mas de desenvolver métodos de estudo adaptados à sua área, tomar o sistema didático da classe como terreno privilegiado, o que estava em perfeita coerência com a visão sistêmica da teoria das situações didáticas (TSD) e a concepção da didática como epistemologia experimental que a fundamenta (Brousseau, 1998). As praxeologias de pesquisa associadas à engenharia didática têm efetivamente se apoiado fortemente na TSD, então arcabouço teórico dominante da didática da matemática na França, no entanto, combinando-a muito rapidamente com outras construções teóricas como, por exemplo, a de Douady em termos da dialética ferramenta-objeto e jogo de quadros (Douady, 1986). A metodologia da engenharia didática tornou-se, assim, a partir da década de 1980, uma metodologia emblemática da tradição francesa da didática da matemática, e seu uso se espalhou para outras didáticas, como a das atividades físicas e esportivas (Terrisse, 2002).

Na Escola de Verão de 1989, a engenharia didática foi novamente objeto de estudo. Desta vez, objeto de um curso de que fui responsável e o texto resultante (Artigue, 1989), publicado na revista *Recherches en Didactique des Mathematiques*, marcará uma etapa de sua institucionalização como metodologia de pesquisa. A engenharia didática é precisamente descrita ali com suas duas características essenciais:

- é baseada em realizações didáticas em sala de aula, ou seja, na concepção, implementação, observação e análise de sequências de ensino,
- sua validação é interna, com base na comparação entre a análise a priori e a posteriori, e a sua estruturação em quatro fases: a das análises preliminares, a da concepção e análise a priori da engenharia, a da experimentação e coleta de dados e, por último, a da análise a posteriori e a validação.

Esta descrição é ilustrada por vários exemplos, incluindo as emblemáticas engenharias de Brousseau e Douady para a extensão do campo dos números no ensino fundamental. Eles destacam a ancoragem desta metodologia na TSD, mas também a diversidade já existente no trabalho de engenharia didática.

Os trabalhos desenvolvidos nesta escola de verão proporcionaram uma referência partilhada sobre engenharia didática que será utilizada na formação de investigadores, e que apoiará a divulgação desta metodologia de investigação e a sua utilização para além da sua comunidade de origem. É provavelmente por isso que me atribuem regularmente, mas erroneamente, a autoria dessa metodologia, quando simplesmente assegurei a formatação da experiência coletiva de uma comunidade. Percebe-se, a posteriori, a expressão da importância de colocar em palavras e descontextualizar os conhecimentos no processo de transformação de conhecimentos em saberes, certamente válido também para o campo didático.

As apresentações da engenharia didática como metodologia de pesquisa que se seguiram ao longo dos anos não foram substancialmente diferentes (ver por exemplo, Artigue,

2002, 2014; Barquero & Bosch, 2015), e este ainda é o caso para as mais recentes, como a da *Encyclopedia of Mathematics Education* (Enciclopédia de Educação Matemática) (Artigue, 2020), ainda que as formulações tenham evoluído um pouco desde 1990. Neste caso, a engenharia didática é introduzida com suas quatro fases denominadas: *preliminary analysis* (análise preliminar); *design and a priori analysis* (concepção e análise a priori); *realization, observation, and data collection* (realização, observação e coleta de dados); *a posteriori analysis and validation* (análise a posteriori e validação). Estas quatro fases são então descritas com precisão. Indica-se que as análises preliminares geralmente incluem três dimensões: análise epistemológica do conteúdo matemático em jogo, uma análise das condições e restrições institucionais, uma análise do que a pesquisa didática oferece para apoiar o design. A descrição da fase de concepção e a análise a priori sublinham a influência nesta fase da ancoragem fundamental na TSD. Alguns pontos que permaneceram implícitos no texto de 1989 são, no entanto, explicitados, porque foram fonte de questões recorrentes ou de mal-entendidos. Por exemplo, o fato de que a análise a priori diz respeito a um sujeito genérico e epistêmico é explicitado, e especifica-se que:

a realização real envolverá os alunos com suas especificidades e história pessoais, mas o objetivo da análise a priori não é antecipar todos esses comportamentos pessoais; é construir uma referência com a qual as realizações de sala de aula serão contrastadas na análise a posteriori (ibidem, p. 204)².

Relativamente à fase de implementação, diz-se que esta fase pode levar a modificações do *design in itinere*, em particular quando a engenharia é de uma dimensão substancial e que essas modificações e as suas razões serão naturalmente integradas à análise a posteriori. Em relação à análise a posteriori e sua comparação com a análise a priori, especifica-se que:

² the actual realization will involve students with their personal specificities and history, but the goal of the a priori analysis is not to anticipate all these personal behaviors; it is to build a reference with which classroom realizations will be contrasted in the a posteriori analysis (ibidem, p. 204).

sempre há diferenças entre o referencial fornecido pela análise a priori e a contingência analisada na análise a posteriori. A validação das hipóteses subjacentes ao design não impõe, portanto, correspondência perfeita entre as duas análises (ibidem, p. 204)³.

Compreendemos ainda mais a razão de ter entendido a real função da análise a priori e o fato de ela se referir a um sujeito epistêmico e genérico. No que diz respeito à validação, por fim, especifica-se que esta pode requerer a coleta de dados adicionais aos recolhidos durante a observação, nomeadamente para avaliar os efeitos ao nível da aprendizagem, e basear-se em análises estatísticas, como foi mostrado desde o início dos trabalhos de Brousseau e seus colegas. O essencial é que a validação seja interna, e não pensada em termos de uma comparação externa entre grupos experimentais e de controle.

Portanto, há uma continuidade óbvia com o texto de 1990, mas também ressalto que esta é a descrição da metodologia em sua forma mais clássica, quando associada ao desenho de uma série de sessões de aula para responder a questões de pesquisa sobre aprendizagens matemáticas específicas. É claro, e os anais da Escola de Verão de 2009 mostram-no claramente (Margolinas et al., 2011), que ao longo das décadas, os didáticos têm alargado o seu campo de ação a outras questões e outros contextos: a formação de professores, formas de ensino mais abertas de tipo projeto, questões mais transversais, como as que dizem respeito à modelização, e até atividades matemáticas informais fora das instituições escolares. Em cada um desses novos contextos, é necessário repensar em particular o que se entende por análise a priori e o que é razoável buscar controlar ou não nos cenários desenvolvidos.

Concebidas como fenomenotécnica no sentido de Bachelard, como escreveu Chevallard em 1982, as engenharias didáticas têm sido uma força motriz essencial para o desenvolvimento da pesquisa em didática da matemática na França, uma força motriz essencial para sua dinâmica praxeológica. Este papel é inegável quando se considera o desenvolvimento

³ there are always differences between the reference provided by the a priori analysis and the contingency analyzed in the a posteriori analysis. The validation of the hypotheses underlying the design does not thus impose perfect match between the two analyses (ibidem, p. 204).

da teoria das situações didáticas, ainda que na análise retrospectiva que propõe em Brousseau, Brousseau e Warfield (2014), o primeiro sublinhe a origem compósita dos conceitos da TSD e o papel desempenhado no seu esclarecimento pela implementação do Diploma de Estudos Aprofundados (DEA) em Didática da Matemática em Bordeaux. Portanto, dos cursos de didática da matemática, as engenharias didáticas desenvolvidas no âmbito do COREM (Centro de Observação e Pesquisa em Educação Matemática) e testados na escola Michelet tiveram um papel fundamental. Da mesma forma, a engenharia didática de Douady experimentada na escola de Montrouge é inseparável do desenvolvimento de sua elaboração teórica em termos da dialética ferramenta-objeto e jogos de quadros. Pessoalmente, meu trabalho teórico sobre a noção de concepção foi alimentado pela engenharia didática desenvolvida em conjunto com Robinet para identificar as concepções de círculo passíveis de serem implementadas por alunos do ensino fundamental (Artigue & Robinet, 1982), e são os dados desta mesma engenharia didática que, reaproveitada alguns anos depois, alimentaram meu trabalho sobre a reprodutibilidade das situações didáticas (Artigue, 1986, 2018).

A evolução da engenharia didática: forma e posicionamento

Durante a década de 1980, conforme indicado acima, a engenharia didática estabeleceu-se como a metodologia de pesquisa preferida dentro da tradição didática francesa. No entanto, a partir da década de 1990, o crescente interesse pelos professores e suas práticas, ainda mais motivado pelas distorções observadas na disseminação de engenharias didáticas concebidas para necessidades de pesquisa, levou ao desenvolvimento de outras metodologias, em particular baseadas na observação naturalística destas práticas. Além disso, o surgimento da TAD tem levado à implantação de estudos de praxeologias institucionais com base no estudo de recursos curriculares. Mas, como evidenciam os anais da Escola de Verão de 2009 e a própria escolha deste tema de trabalho para a Escola, a engenharia didática tem permanecido a metodologia preferida para explorar as potencialidades oferecidas por novas formas didáticas,

como as relacionadas com a integração de tecnologias digitais. Isso é ressaltado por pesquisas realizadas em softwares de geometria dinâmica, planilhas e sistemas de cálculo simbólico, depois sobre calculadoras e softwares que combinam essas diferentes tecnologias. Ao mesmo tempo, conforme sublinhado acima, o campo de uso da engenharia didática se ampliou, estendendo-se à formação de professores, às formas escolares recém-introduzidas e mesmo às práticas matemáticas informais. Somam-se a isso os efeitos da disseminação dessa metodologia para além da única tradição didática francesa, devido a colaborações internacionais, como, por exemplo, aquelas estabelecidas anteriormente com Cantoral e Farfán, que viriam a fundar a abordagem teórica hoje conhecida sob o termo socioepistemologia (Cantoral, 2016; Farfan, 1997), e teses coorientadas em número crescente.

Tudo isso explica por que a engenharia didática como metodologia de pesquisa não permaneceu um objeto fixo, mas um objeto vivo, participando da dinâmica de diversas praxeologias de pesquisa. Sem pretender ser uma descrição exaustiva, gostaria de assinalar nesta secção duas formas assumidas pela engenharia didática que resultam da sua integração em quadros teóricos diferentes daquele em que surgiu, mas também as tensões que esta integração pode gerar.

A combinação da TSD com quadros teóricos semióticos

Uma experiência importante para mim deste ponto de vista foi a coorientação com Ferdinando Arzarello, o pai da teoria APC (Ação, Produção, Comunicação) (2008), da tese de Michela Maschietto (2003). A questão levantada nesta tese foi a da possibilidade de apresentar aos alunos do ensino médio, no contexto italiano, o jogo fundamental local-global em análise, valendo-se do uso de calculadoras simbólicas e de uma linguagem infinitesimal. Para Michela, que havia passado um ano em Bordeaux com Brousseau antes de fazer o mestrado (Master) em didática em Paris, como por mim, para responder a essa pergunta, era natural uma metodologia de engenharia didática. É claro que a construção dessa engenharia não seria baseada apenas no

TSD, mas integraria elementos fundamentais da teoria APC, sua sensibilidade à multimodalidade semiótica e em particular aos gestos, bem como às metáforas que expressam a fonte corporal de conceitos matemáticos fundamentais, com referência ao trabalho de Lakoff e Nuñez (2000). E, de fato, foi o que fez Michela, navegando entre duas culturas didáticas que compartilhavam igual sensibilidade às questões epistemológicas, mesmo que elas não se expressassem exatamente nos mesmos termos. Por outro lado, como ela afirmou em sua contribuição para a apresentação da tradição didática francesa no ICME-13 (Artigue et al., 2019), essa navegação não foi isenta de tensões. O principal obstáculo era a própria noção de análise a priori ancorada na TSD, com o desejo de otimizar o potencial adidático das situações, de antecipar possíveis interações com o meio (milieu) e de prever as trajetórias que poderiam resultar. Essas tensões eram de fato previsíveis. Numa engenharia didática coerente com a teoria APC, os gestos dos alunos que expressam construções cognitivas na gestação, a forma como esses gestos serão assumidos e explorados pela professora por meio de jogos semióticos, são ingredientes essenciais da dinâmica cognitiva da aula. Eles escapam do potencial de antecipação e controle das trajetórias de uma análise a priori. Este também é o caso em parte das metáforas e sua gestão didática, que também desempenham um papel importante, como esta pesquisa mostrou. Para resolver essas tensões, foi necessário repensar o que se entendia por análise a priori, concordar também em prever, na concepção das sessões; não limitar o papel do professor a funções de devolução e institucionalização, mas sim integrar fases coletivas substanciais em que os jogos semióticos e as interações discursivas permitiriam a evolução dos conhecimentos em um jogo conjunto entre alunos e professor, cuja dinâmica permanecia amplamente aberta, respeitando nesse aspecto a cultura didática italiana. Com essas adaptações, a metodologia da engenharia didática se mostrou bastante produtiva. A tese, também em cotuleta, de Falcade (2006) fornece mais um exemplo do uso produtivo da

engenharia didática combinando no nível teórico a TSD e uma teoria semiótica, neste caso a teoria da mediação semiótica de Bartolini Bussi e Mariotti (2008).

Engenharia didática e a TAD

Durante a Escola de Verão 2009, uma das questões em estudo foi a das relações existentes e possíveis entre a engenharia didática ancorada na TSD e as construções surgidas no início do século em termos de AEP (atividade de estudo e pesquisa) depois de PEP (percurso de estudo e pesquisa) levadas a cabo pela TAD e a oposição introduzida por Chevallard entre dois paradigmas escolares: o paradigma tradicional de visita de obras, qualificado como monumentalista, e o de questionamento do mundo. Foi neste segundo paradigma que se imaginou um futuro possível para a Escola. O desenho do PEP enquadrando-se neste paradigma, o estudo das condições e restrições que regem a sua ecologia possível era o caminho para permitir a progressão teórica e prática nesta direção. Chevallard tinha, portanto, proposto em seu curso (Chevallard, 2011) restabelecer a engenharia didática em torno dos PEP, distinguindo PEP finalizados visando um conteúdo de ensino específico e PEP abertos. Na minha conferência de encerramento (Artigue, 2011b), apontei as questões e tensões que me pareceram resultar desta perspectiva.

Na última década, as investigações baseadas em PEP multiplicaram-se em diversos contextos e, para refletir sobre as relações que gradualmente foram se estabelecendo entre a engenharia didática e a TAD, é interessante ler o capítulo em coautoria de Barquero e Bosch (2015) no livro resultante do Estudo ICMI 22 sobre design de tarefas em educação matemática⁴. O capítulo intitula-se “A engenharia didática como metodologia de investigação: das situações fundamentais aos percursos de estudo e investigação⁵”. Sem negar as diferenças existentes entre a engenharia didática veiculada respectivamente pela TSD e pela TAD, as autoras

⁴ *task design in mathematics education*

⁵ Didactic engineering as a research methodology: from fundamental situations to study and research paths

destacam seus muitos pontos de convergência. As engenharias didáticas ancoradas na TSD enquadram-se, escrevem, no paradigma do questionamento do mundo e a procura de situações fundamentais que marca estas engenharias: “é, para a investigação didática, uma forma de assumir a sua responsabilidade na busca pelas possíveis razões para ser dos conteúdos matemáticos ao alcance dos alunos e pela lógica de sua docência na escola⁶” (p. 260), o que também é fundamental na TAD. Mas, a noção de situação fundamental e as dialéticas de ação, formulação e validação que organizam a progressão das relações com os objetos matemáticos na TSD foram substituídas na TAD pela noção de praxeologia e do esquema herbartiano.

Se o projeto de ensino e aprendizagem visa um conteúdo matemático preciso, como é o caso da engenharia didática clássica (uma praxeologia P na interpretação da TAD), o processo didático será assim descrito em termos de AEP estruturadas com referência aos seis momentos da atividade didática da TAD, o conjunto constituindo um PEP finalizado na aceção de (Chevallard, 2011). Mas um processo didático não é necessariamente guiado pela identificação prévia de um conteúdo matemático a ser ensinado. Também pode ser motivado pela necessidade de um grupo de alunos X buscar respostas para uma questão Q_0 chamada de questão geratriz, com ajuda de um professor ou grupo de professores Y. A sucessão de atividades de estudo e pesquisa resultante constitui então um PEP (PEP aberto, na aceção de Chevallard (2011)). Durante o processo, surgem questões derivadas Q_k , bem como respostas provisórias A_k . Normalmente existem também respostas externas A^\diamond , pelo menos parciais, pré-estabelecidas aos Q_k ou a questões semelhantes, acessíveis por intermédios dos diferentes meios de comunicação e divulgação, denominados média na teoria, e vários objetos O_i que, com estas respostas, irão constituir o meio experimental evolutivo M em que as respostas A^\diamond

⁶ is a way for didactic research to assume its own responsibility in the search for the possible raisons d'être of mathematical contents within the students' reach, and for the rationale of their teaching at school

serão desconstruídas e reconstruídas para chegar à resposta final A^\heartsuit . Isso se reflete no emblemático esquema herbartiano da teoria, reproduzido a seguir.

$$[S(X; Y; Q_0) \Rightarrow \{A^{\diamond_i}, O_j, Q_k, A_k\}] \Rightarrow A^\heartsuit$$

Para as autoras, esta visão ampliada dos processos didáticos em termos de AEP e PEP fornece um modelo para descrever uma diversidade de processos de ensino e aprendizagem muito maior do que aqueles modelados pela TSD, e as diferenças se refletem nos trabalhos de engenharia didática associados, mesmo que, no geral, os mesmos gestos metodológicos sejam reproduzidos, conforme mostrado na Figura 1.

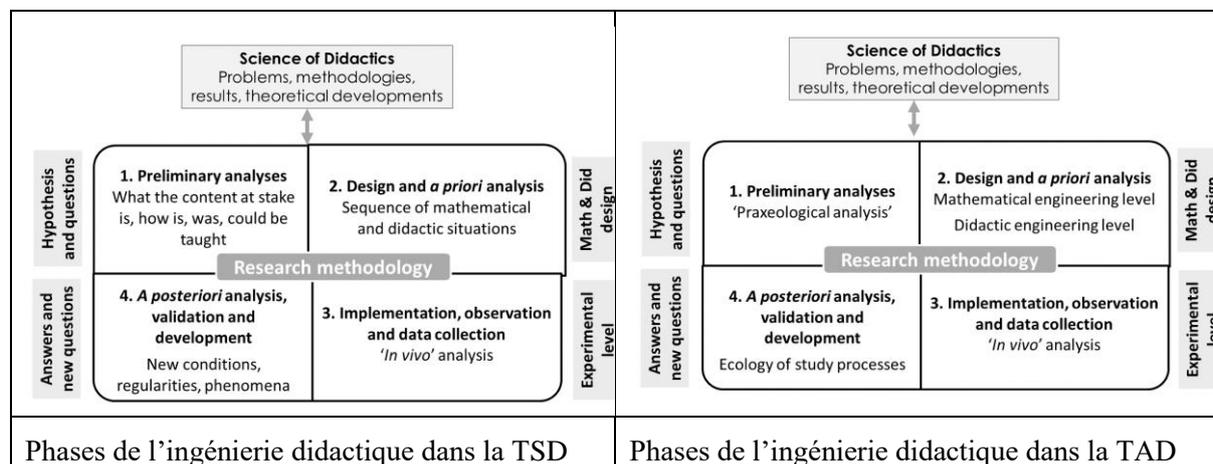


Figura 1

Fases da engenharia didática segundo (Barquero & Bosch, 2015)

É isso ilustram os dois exemplos escolhidos. O primeiro diz respeito à engenharia didática ancorada na TSD e à medição de grandezas na escola primária, em particular a emblemática de Brousseau. A segunda é a tese de Barquero (2009) sobre modelização, que se apoia na reconstrução proposta pela TAD. As diferenças são evidentes no design e na análise a priori. O ponto de partida é uma questão geratriz sobre a previsão da evolução de uma população. É estabelecido um modelo epistemológico de referência (MER), considerando a mobilização de modelos discretos ou contínuos, dos quais emergem quatro PEP, cujo conjunto

cobre, inicialmente, os principais conteúdos de um curso universitário de matemática do primeiro ano para estudantes em ciências da natureza (ver Figura 2)

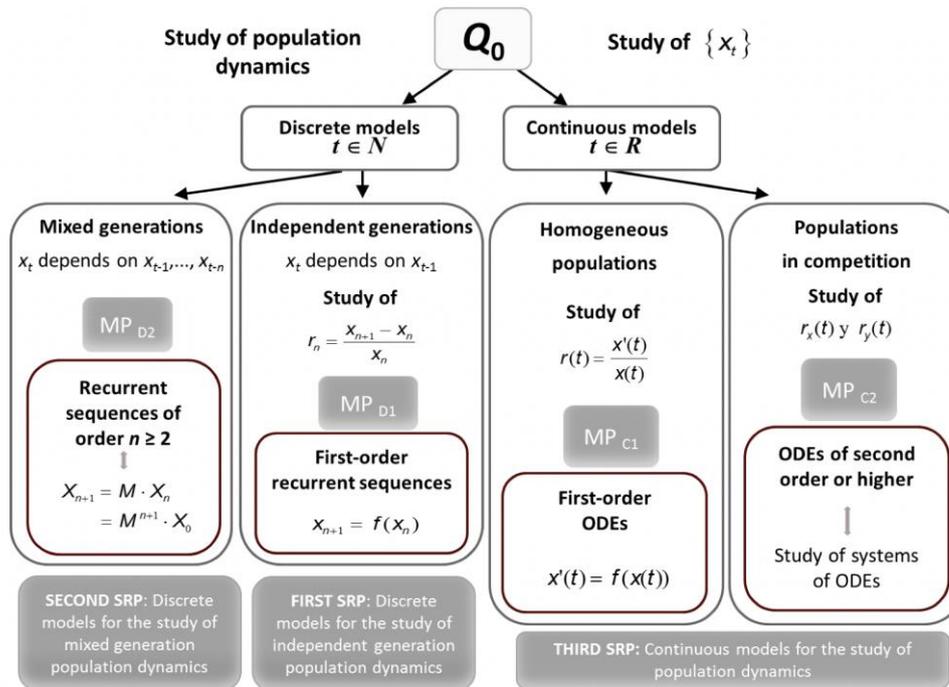


Figura 2

Estrutura geral dos PEP derivados do estudo de Q_0 (Barquero & Bosch, 2015, p. 265)

Esta primeira fase, matemática, é seguida de uma fase didática que inclui questões relativas à mesogênese (evolução dos meios experimentais), cronogênese (evolução das questões e conhecimentos introduzidos por meio das médias) e topogênese (distribuição das responsabilidades entre alunos e professor) e a organização dos vários dispositivos associados, que são novos para muitos deles. Mas as trajetórias permanecem, é claro, muito abertas às questões derivadas que irão emergir e guiar as trajetórias, sendo apenas parcialmente previsíveis, com os alunos tendo o poder de introduzir no ambiente qualquer objeto que acharem apropriado, e devendo criar eles próprios um meio para a validação interna das respostas. Portanto, a análise in vivo do funcionamento do dispositivo desempenha um papel muito importante para além da análise a priori.

A partir desta tese, multiplicaram-se as engenharias didáticas realizadas apoiando-se na TAD, com a mesma problemática ecológica. Para uma descrição atualizada, o leitor poderá consultar os módulos associados à Chevallard no projeto AMOR do ICMI e os documentos associados⁷. Esses trabalhos confirmam a importância crucial desempenhada pelo desenvolvimento do MER que orienta o design e fornece uma referência contra a qual as trajetórias observadas poderão ser situadas, o desenvolvimento de ferramentas específicas como árvores de perguntas/respostas que ajudam a dar sentido a essas trajetórias, e as responsabilidades assumidas respectivamente por professores e alunos. Eles permitiram identificar as muitas restrições que hoje tornam os PEP em objetos da ecologia frágil, difíceis de implantar em grande escala em condições normais de ensino. E, a nível teórico, esses trabalhos contribuíram para a identificação de várias dialéticas que ajudam a compreender as fontes de aprendizagem nos PEP.

Outras conceituações de engenharia didática surgiram no século XXI, como a de engenharia didática cooperativa, que surgiu no âmbito da TACD (teoria da ação conjunta em didática), ou o conceito de engenharia didática de segunda geração, associada à distinção entre a engenharia de pesquisa didática (EPD) e a engenharia didática de desenvolvimento (EDD). Antes de considerá-las, parece-me necessário abordar a questão mais global da relação entre engenharia didática e pesquisa baseada em design (*design-based research*) (DBR a seguir).

Engenharia didática e *design-based research* (DBR)

Design-based research

Na obra sobre as metodologias qualitativas em educação matemática já mencionado (Bikner-Ahsbals, Knipping, & Presmeg, 2014), Bakker e van Eerde são os coautores do

⁷ <https://icmiamor.org/awardee-units/yves-chevallard-unit>

capítulo dedicado à DBR, uma forma de investigação cada vez mais presente internacionalmente, desde a fundação em 1999 do Design-Based Research Collective (ver DBRC, 2003). Eles definem esta metodologia da seguinte forma:

A pesquisa baseada em *design-based research* (DBR) pode ser caracterizada como uma pesquisa em que o design de materiais educacionais (por exemplo, ferramentas de computador, atividades de aprendizagem ou um programa de desenvolvimento profissional) é uma parte crucial da pesquisa. Ou seja, o design de ambientes de aprendizagem está entrelaçado com o teste e o desenvolvimento de uma teoria. (Bakker e van Eerde, 2014, p. 430)⁸

Se designarmos pela expressão *pesquisa de engenharia didática* as pesquisas que se baseiam na metodologia da engenharia didática, não há dúvida de que há uma proximidade evidente com a DBR, sublinhada pelos próprios autores que escrevem (p. 432): “DBR é, portanto, às vezes caracterizada como uma forma de engenharia didática”. Mas o papel do design aí é mais equilibrado entre o objetivo de produzir recursos para desenvolver o ensino e o de produzir conhecimento, entre a pesquisa fundamental e o desenvolvimento. Voltarei a isso mais tarde. As descrições de DBR são diversas, conforme apontado por Swan em seu artigo para a *Encyclopedia of Mathematics Education* (Swan, 2020). Bakker e van Eerde, por sua vez, referem-se às características propostas em Cobb et al. (2003) que enfatizam que:

- o objetivo da DBR é produzir teorias sobre a aprendizagem e os meios para apoiá-las;
- são teorias locais, concernentes a um determinado campo, mas que devem ser gerais o suficiente para serem aplicáveis a diferentes contextos;
- a DBR é por natureza intervencionista e cíclica e obedece a um processo iterativo de intervenções e revisões, em que se combinam componentes prospectivos e reflexivos;

⁸ Educational design-based research (DBR) can be characterized as research in which the design of educational materials (e.g. computer tools, learning activities, or a professional development program) is a crucial part of the research. That is, the design of learning environments is interwoven with the testing and developing of a theory. (Bakker; van Eerde, 2014, p. 430)

•a DBR busca entender o porquê e o como da aprendizagem e, portanto, não se situa em um paradigma experimental baseado na comparação de grupos de controle e experimental.

Os diferentes ciclos de uma DBR são compostos por três fases: preparação e design, experiência de ensino, análise retrospectiva (a distinguir das denominadas análises *on the fly* realizadas ao longo do experimento). Para Bakker e van Eerde, um importante instrumento metodológico é o da hipotética trajetória de aprendizagem (HLT), introduzido por Simon (1995):

A trajetória hipotética de aprendizagem é composta por três componentes: a meta de aprendizagem que define a direção, as atividades de aprendizagem e o processo de aprendizagem hipotético - uma previsão de como o pensamento e a compreensão dos alunos irão evoluir no contexto das atividades de aprendizagem (Simon, 1995, p. 136)⁹

Desenvolvido na fase de design a partir dos estudos preparatórios, a HLT serve como um guia para professores e pesquisadores durante a experimentação, que pode levar ao seu ajuste, bem como à análise retrospectiva, ajudando a focar a atenção nos pontos cruciais para a teoria emergente.

Não se pode deixar de ver, apesar das diferenças, as semelhanças com a engenharia didática. Como a pesquisa de engenharia didática, DBR é intervencionista e não naturalista (as condições são deliberadamente manipuladas para que o projeto seja consistente com a teoria emergente). A descrição das fases de cada ciclo é semelhante à das fases de uma engenharia. O papel desempenhado pela HLT deve ser comparado com o desempenhado pela análise a priori e pelo modelo epistemológico de referência. Por outro lado, o processo é a priori mais aberto: as escolhas, em particular, são ajustadas ao longo do processo de experimentação, de acordo com as observações com o objetivo de otimizar o design, e, acima de tudo, estas pesquisas têm um componente cíclico essencial, coerente com a ambição de produzir materiais

⁹ The hypothetical learning trajectory is made up of three components: the learning goal that defines the direction, the learning activities, and the hypothetical learning process — a prediction of how the students' thinking, and understanding will evolve in the context of the learning activities (Simon, 1995, p. 136).

didáticos que expressem a teoria local desenvolvida. Muitas vezes, as pesquisas de engenharia didática incluem várias realizações que levam a ajustes/enriquecimentos de análises a priori ou de MER, modificações de questões/situações, mas isso não é de forma alguma uma necessidade para esta metodologia, seja ela ancorada na TSD ou na TAD. Isto é coerente com a ambição fenomenotécnica desta metodologia de investigação destacada na Seção 2. Por outro lado, esta dimensão cíclica e iterativa está muito presente no conceito de engenharia didática cooperativa desenvolvida no quadro da teoria da ação conjunta (TACD) (Sensevy, 2011) que vamos agora considerar e que também afirma ser uma forma de DBR.

Engenharia didática cooperativa (EC)

Ao mesmo tempo em que afirma sua ligação com a engenharia didática, a EC está claramente dentro do escopo da DBR. A definição dada na *Encyclopedia of Mathematics Education* (Sensevy & Bloor, 2020) começa com as seguintes frases (p. 141):

A teoria da ação conjunta em didática visa teorizar um processo específico de processos de *design-based research* (Cobb et al., 2003) e *design-based implementation research* (Fishman et al., 2013), denominada engenharia cooperativa (Sensevy et al., 2013; Joffredo-Lebrun et al., 2018), a fim de contribuir para a elaboração de novas formas de escolarização. A engenharia cooperativa (EC) se refere a um processo metodológico no qual um coletivo de professores e pesquisadores se envolve em uma ação conjunta para codificar, implementar e reimplementar uma sequência de ensino sobre um tópico específico¹⁰.

Além da interessante combinação conceitual que ela oferece entre a engenharia didática e a DBR, a EC me parece uma excelente expressão de como o conhecimento adquirido sobre as práticas dos professores nas últimas duas décadas, a crescente influência de perspectivas como a das comunidades de prática e as comunidades de pesquisa mudaram nossa concepção

¹⁰ The Joint Action Theory in Didactics aims at theorizing a specific process of design-based research (Cobb et al., 2003) and design-based implementation research (Fishman et al., 2013), called cooperative engineering (Sensevy et al., 2013; Joffredo-Lebrun et al., 2018), in order to contribute to the elaboration of new forms of schooling. Cooperative engineering (CE) refers to a methodological process in which a collective of teachers and researchers engage in a joint action to codesign, implement and re-implement a teaching sequence on a particular topic

da relação entre professores e pesquisadores em engenharia didática. Elas geralmente estão presentes nas práticas atuais de engenharia didática, mas sem serem formalizadas, como é o caso na EC. Os princípios da engenharia cooperativa (doravante EC) são, na verdade, seis: princípio de simetria, necessidade de reconhecer as diferenças, necessidade de desenvolver uma visão comum dos objetivos e meios, postura de engenheiro, cooperação para produzir uma obra, e cooperação para produzir conhecimento.

O princípio de simetria expressa que professores e pesquisadores são vistos como profissionais, profissionais em diferentes funções, mas iguais em sua capacidade de contribuir para o design. Este princípio de simetria anda de mãos dadas com o seguinte: o reconhecimento e respeito pelas diferenças que resultam das diferenças de posição e experiência e não podem ser concebidas em termos de oposição entre alguns que sabem e outros que não sabem. O terceiro princípio, o da necessidade de desenvolver uma visão comum de objetivos e meios, expressa uma necessidade para que possa desenvolver-se e viver uma atividade conjunta em nível coletivo, e para que todos possam participar como indivíduos, igualmente, e superando as armadilhas de uma divisão epistêmica do trabalho. O próximo princípio é o da postura de engenheiro, postura que deve ser adotada por professores e pesquisadores e envolve uma abordagem teórica e prática dos problemas da prática docente. Mais uma vez, não se trata de negar as diferenças entre professores e pesquisadores, mas de incluí-las temporariamente e localmente nessa postura de engenheiro. O próximo princípio, a cooperação para produzir uma obra, expressa que, na EC, é o objeto concreto, a sequência de ensino, que é a pedra angular do processo de pesquisa. Por fim, o último princípio, a cooperação para a produção de conhecimento, diz respeito tanto ao conhecimento que resulta do estudo comum que permite a construção da sequência de ensino, quanto ao conhecimento produzido por essa construção e as descrições e análises associadas às suas implementações.

Na prática, a EC estrutura-se de forma cíclica, e em cada ciclo encontramos as fases habituais de estudos preparatórios, desenho, implementação e análise a posteriori. Aqui, porém, na primeira fase, a ênfase está nos conhecimentos a que se dirige o ensino, sem considerações didáticas; trata-se de criar, dentro do coletivo, uma forma comum de compreender esse conhecimento. A segunda fase é a da conceção, de académica, a investigação passa a ser prática, com a produção coletiva de uma sequência didática, que pode ser vista como um sistema de hipóteses de trabalho, partilhadas e assumidas pelos professores e investigadores do grupo. Em consonância com o TACD, a ação conjunta do professor e dos alunos –e mais especificamente os gestos pedagógicos que o professor deverá produzir– deve permitir familiarizar os alunos com a cultura "cristalizada" nos saberes estudados, e permitir que eles adquiram gradualmente os poderes de ação que esse conhecimento pode conferir. Na terceira etapa, a de implementação, a sequência desenvolvida é implementada, muitas vezes por vários professores em paralelo, testando as hipóteses de trabalho. A quarta fase é, classicamente, a do estudo crítico a posteriori da(s) implementação(ões) que geralmente levará à reformulação do sistema para melhorá-lo e ao aprofundamento ou revisão das hipóteses de trabalho.

Uma particularidade interessante da EC é, aliás, o método utilizado para documentar a prática, dando um papel específico a exemplos emblemáticos, que podem ser comparados à ideia de exemplo padrão de Kuhn (1990). A estes estão associados sistemas hipermédia híbridos combinando vídeos de prática, gravações de áudio e textos comentando e analisando essas práticas, denominados SHTIS em francês, para sistemas híbridos de texto-imagem-som (Blocher, 2018) e PTAHS em inglês para *picture-text-audio hybrid systems*. Conforme explicado em Sensevy e Bloor (2020), na visão epistemológica que fundamenta a EC e prioriza o concreto da prática sobre as ideias abstratas que podem descrevê-la (p. 143):

a epistemologia da analogia paradigmática é também «uma epistemologia da metodologia», em que o progresso do conhecimento assenta na construção, estudo e

aperfeiçoamento de exemplos emblemáticos da prática que servem de quadro de referência na investigação científica¹¹.

A pesquisa ACE (Aritmética e Compreensão no Ensino Fundamental) cujo objetivo era produzir um currículo para o ensino do domínio numérico nos primeiros dois anos do ensino fundamental (CP e CE1) ilustra particularmente bem o que é EC e o que ela pode produzir, e como o desenvolvimento coletivo de SHTIS pode apoiar tanto o trabalho de pesquisa quanto a disseminação de seus resultados (ver, por exemplo, Sensevy et al., 2018; Vilette et al., 2017).

Evolução metodológicas: problemáticas, resultados e meios de pesquisa

No que diz respeito à engenharia didática, as seções anteriores já destacaram avanços inegáveis. Essas evoluções são parte de uma mais global das praxeologias de pesquisa em didática da matemática. Em primeiro lugar, e isso ficou patente nas seções anteriores, há a evolução das problemáticas que dizem cada vez mais respeito aos professores, às suas representações, conhecimentos e práticas, tanto na sala de aula como fora dela, à sua formação inicial e ao seu desenvolvimento profissional, bem como o crescimento de questionamentos sobre a dimensão semiótica da atividade matemática. Mas há também as muitas questões levantadas pelas avaliações internacionais e, mais geralmente, pelos estudos comparativos, o desenvolvimento do campo da etnomatemática e as abordagens críticas à educação matemática; as questões levantadas pelos desenvolvimentos curriculares promovendo abordagens por competências, a modelização e a interdisciplinaridade, as abordagens de investigação (*inquiry-based education*), pelo desejo declarado de fazer o ensino da matemática contribuir para a cidadania, sem esquecer todas as questões levantadas pela evolução tecnológica, ou convulsões como a que estamos enfrentando atualmente com a pandemia devido à covid-19 e a mudança repentina para o ensino híbrido ou até mesmo o ensino completamente remoto, para alunos de

¹¹ the epistemology of paradigmatic analogy is also « an epistemology of methodology », in which the progress of knowledge relies on the building, studying and refining of emblematic examples of practice that serves as frames of reference in the scientific inquiry.

todos os níveis escolares. Todas essas evoluções têm impacto nas metodologias de pesquisa e, por exemplo, as pesquisas relativas às avaliações internacionais e os projetos de grande escala geralmente levam ao desenvolvimento de metodologias mistas combinando abordagens qualitativas e quantitativas e triangulando suas respectivas contribuições. O exemplo do estudo TEDS-Telekom, que visou avaliar o efeito de uma reestruturação inovadora da formação de professores de ginásio na Alemanha integrando formação matemática e didática, descrito em Kelle e Buchholtz (2014), é um excelente exemplo.

A evolução das metodologias também está ligada aos resultados da investigação tanto teórica como empírica. Nas seções anteriores, por exemplo, apontei a influência de resultados de pesquisas sobre professores e abordagens como a de comunidades de prática em engenharia didática, mas também a influência de abordagens semióticas, forçando melhor a levar em conta a multimodalidade da atividade semiótica em matemática, e a influência dos trabalhos no campo da cognição incorporada (*embodied cognition*). E mostrei também como a TAD transformou a metodologia da engenharia didática, no marco do paradigma de questionamento do mundo. No que diz respeito aos professores, outro exemplo é dado pela abordagem documental do didático iniciada por Gueudet e Trouche há pouco mais de uma década, e para a qual contribuem hoje vários pesquisadores (Trouche, Gueudet & Pepin, 2019). A extensão do estudo das práticas dos professores ao seu trabalho documental, que ocorre principalmente fora da sala de aula, criou novas necessidades metodológicas e foi assim que se desenvolveu uma metodologia específica denominada *investigação reflexiva* baseada nos quatro princípios seguintes (Gueudet & Trouche, 2010, p. 61):

- princípio da *longa duração* do acompanhamento. Isso envolve estudar a atividade e o desenvolvimento profissional dos professores e, portanto, compreender os elementos de estabilidade e mudanças do trabalho documental ao longo do tempo;
- princípio de *acompanhamento em qualquer lugar*. [...] Parece-nos fundamental considerar, tanto quanto possível, o trabalho do professor *diretamente*, fora e em sala de aula;
- princípio da *ampla coleta* de recursos materiais utilizados e produzidos no trabalho documental;

- princípio de *acompanhamento reflexivo* do trabalho documental. Trata-se, por um lado, de envolver estreitamente o professor na recolha de dados, no intuito pragmático da extensa recolha e acompanhamento em todos os locais [...]. Trata-se também, por outro lado, de instituir dispositivos metodológicos que incentivem reflexividade.

Estas evoluções metodológicas ligadas às evoluções dos problemas e das abordagens teóricas combinam-se com as dos meios técnicos da investigação, com a possibilidade, por exemplo, de captar os gestos em todas as suas sutilezas, os movimentos oculares, e mesmo, em determinados ambientes, as pulsações para estudar as emoções, como é o caso, por exemplo, no ICCR ((International Center for Classroom Research) da Universidade de Melbourne¹². A utilização destes meios técnicos cada vez mais sofisticados, e de forma mais geral a de vídeos, que se generalizou, conduzem à coleta de uma infinidade de dados microscópicos e à questão metodológica da sua codificação, processamento, bem como a delicada tarefa de subir aos níveis mais macroscópicos de interpretação e da expressão de resultados, e se colocam assim em termos parcialmente renovados. E pode-se perguntar hoje como o desenvolvimento da área da *big data* influenciará as técnicas de análise de dados e, além disso, as escolhas feitas em termos de coleta de dados e, de forma mais geral, as metodologias de coleta de dados.

Este texto não pretende abordar esses desenvolvimentos metodológicos em profundidade. Vou me limitar a completar o que precede com alguns exemplos de minhas pesquisas recentes.

Networking e capitalização

O primeiro exemplo diz respeito ao trabalho de articulação de teorias do qual participei a partir de 2005 e que deu origem ao livro *Networking of theories as a research practice* (Bikner-Ahsbals & Prediger, 2014). O objetivo da pesquisa foi ajudar a limitar a fragmentação teórica do campo, identificando possíveis estratégias de conexão entre referenciais teóricos e explorando suas potencialidades. Essa pesquisa poderia, portanto, ser qualificada como meta-

¹² <https://internationalcentreforclassroomresearch.wordpress.com/>

didática. Exigiu uma verdadeira criatividade metodológica, que está bem descrita no livro citado. Em retrospecto, como analisamos com Marianna Bosch (Artigue & Bosch, 2014) utilizando o conceito de praxeologia de pesquisa, a escolha que os cinco grupos de pesquisadores comprometidos, cada um representando uma teoria, fizeram a partir de um objeto comum: um vídeo proposto por um deles, de pedir a cada grupo que o analisasse com os seus próprios instrumentos teóricos, apontando o que o vídeo e os documentos que o acompanhavam permitiam e não permitiam, foi particularmente relevante. Estratégias a priori mais diretas, como identificar conceitos-chave em cada teoria e tentar fazer conexões entre os mapas conceituais resultantes, têm sido decepcionantes. Esses achados metodológicos mostram claramente até que ponto as teorias não podem ser isoladas das praxeologias que nutrem e que por sua vez as nutrem.

Não posso entrar em detalhes das técnicas que desenvolvemos ao longo de mais de cinco anos para estabelecer conexões entre as cinco teorias, explorando em sua maior parte o vídeo inicial e um episódio complementar, mas um artefato metodológico essencial tem sido a escala de estratégias de *networking* que foi desenvolvida (veja a Figura 3). Ele orientou e ajudou a estruturar a pesquisa e seus resultados, e as pesquisas por sua vez ajudaram a entendê-la.

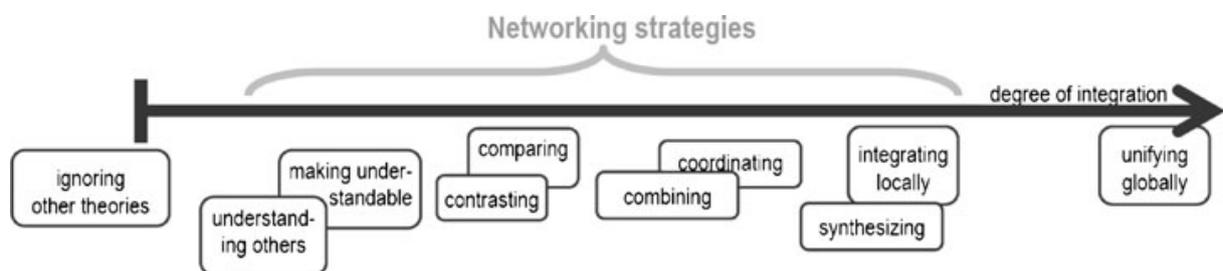


Figura 3

Escala de estratégias de networking (Bikner-Ahsbals & Prediger, 2014, p. 119)

Do ponto de vista metodológico, esta investigação de longo prazo deve ser comparada com a realizada no âmbito do projeto europeu ReMath (2005 a 2009), que pretendeu capitalizar

os conhecimentos didáticos desenvolvidos sobre o potencial semiótico dos artefatos dinâmicos digitais (DDA, para *digital dynamic artefact*) e expressá-los de uma forma amplamente compreensível, livre tanto quanto possível do discurso técnico de uma abordagem teórica particular. Aqui, novamente, a capitalização exigiu a criação e combinação de vários artefatos metodológicos descritos em detalhes nos vários relatórios e na edição especial de *Educational Studies in Mathematics* dedicado a este projeto (Kynigos & Lagrange, 2014). Aqui, novamente, o desenho desses artefatos metodológicos é indissociável das praxeologias específicas de pesquisa que foram desenvolvidas e possibilitaram construir como objeto de estudo o desenho dos seis DDA, cuja realização estava prevista no projeto, bem como sua experimentação em contextos realistas, nomeadamente com uma técnica de experimentação cruzada, sendo o mesmo DDA experimentado tanto pela equipe de design como por outra equipe de outro país e, portanto, de outro contexto educacional e de investigação, contando com outros referenciais teóricos.

O projeto internacional Lexicon

O projeto internacional Lexicon, no qual estou envolvido há vários anos, é um projeto iniciado por David Clarke, da Universidade de Melbourne, conhecido por seu papel no desenvolvimento de estudos comparativos que respeitem a diversidade cultural, como o Learners' Perspective Study (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006). Este estudo, para o qual dez países (Alemanha, Austrália, Chile, China, Coreia, Finlândia, França, Japão, República Tcheca, EUA) contribuem e, em cada um deles, uma equipe mista de professores e pesquisadores experientes, tem por objetivo “identificar o léxico pedagógico-didático “razoavelmente compartilhado” pelos professores de matemática de sexto ao nono ano do ensino fundamental de cada país, compará-los e estudar a possibilidade de caminhar para um léxico internacional, respeitando a diversidade que expressam. Na sua origem, estão as limitações criadas por uma pesquisa que usa, como meio de comunicação internacional, a

língua inglesa, uma língua na qual a riqueza da terminologia existente em diferentes línguas e estruturas não pode ser plenamente expressa, além disso, com traduções que podem ser fonte de mal-entendidos. Este projeto apresentou e continua a apresentar, com a recente conclusão da primeira fase (Mesiti, Artigue, Hollingsworth, Cao & Clarke, 2022), desafios metodológicos formidáveis. Em primeiro lugar, tivemos que chegar a um entendimento comum do que percebemos por léxico didático-pedagógico. Originalmente, trata-se, entretanto, de um léxico pedagógico para os colegas australianos que queriam marcar que não se tratava de um léxico de termos matemáticos e não usavam a palavra *didática*, com conotação pejorativa em sua cultura. Foram as equipes da Europa continental, em particular a equipe da França, que solicitaram a inclusão da palavra didática. Também foi necessário chegar a acordo sobre a formalização deste objeto e seu processo de obtenção. Os colegas australianos, com base na experiência do Learners' Perspective Study, propuseram que em cada país, um vídeo fosse feito em uma classe de 8ª série (4ª na França), com três câmeras, uma mostrando toda a classe, a segunda seguindo o professor, a terceira um grupo de dois alunos, o professor e esses dois alunos recebendo microfones. As fitas de áudio correspondentes foram transcritas, cronometradas e traduzidas para o inglês; em seguida, a equipe australiana editou e legendou os vídeos com as traduções em inglês (ver Figura 4).

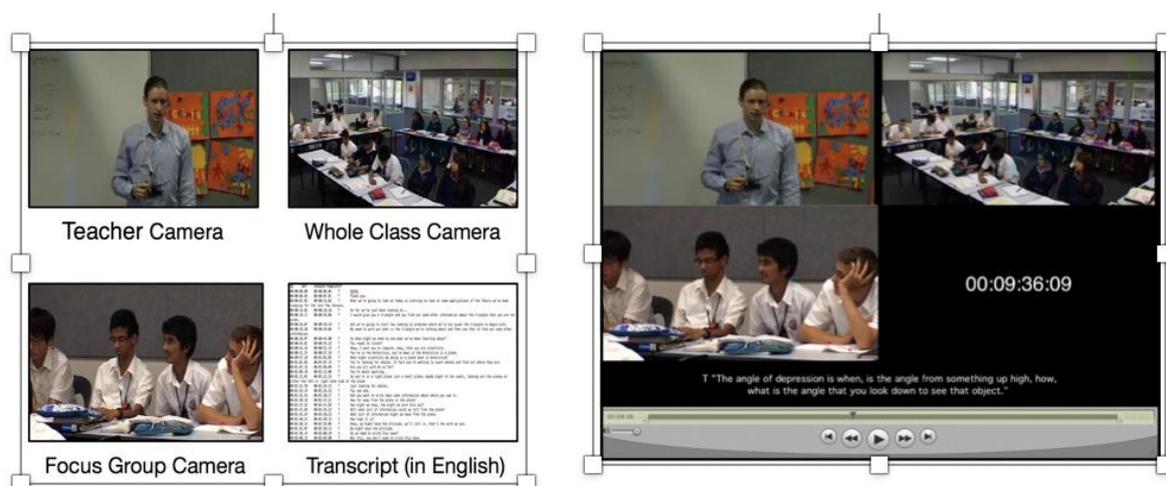


Figura 4

Dispositivo vídeo e edição

Ficou acordado que cada equipe receberia as transcrições traduzidas, edições dos vídeos e os documentos de acompanhamento associados (plano da sala, preparação do professor), e que esses vídeos serviriam de base para o trabalho das equipes. Tratava-se de descrever o que estávamos observando, identificando episódios interessantes e o léxico usado. O léxico visado não era o dos investigadores didáticos, mas o dos professores e, em todos os casos, mesmo que as equipes fossem mistas, eram eles que deveriam ter a última palavra. Na verdade, na maioria das equipes, o processo de desenvolvimento de um primeiro léxico foi misto, combinando a visualização dos vídeos e sua codificação em uma planilha Excel (ver Figura 5), e uma reflexão a priori sobre o vocabulário disponível para descrever uma sessão de aula.

Team name: France	Lesson name: France	<i>In Local Language (where applicable)</i>		Additional Comments
Time Stamp IN	Time Stamp OUT	<i>Activity or Action</i>	<i>Description of Activity or Action</i>	
00:02:40	00:12:17	Mise en train - enroulement (A)	Activité qui, en début de séance, sert à mettre tous les élèves au travail. Elle n'est pas nécessairement en relation avec le thème de la séance.	L'activité de mise en train est ici une activité de calcul (programme de calcul) qui s'inscrit dans une série de 15 activités similaires constituant une progression. Elle doit permettre la participation de tous les élèves.
00:02:40	00:02:52	Lancement d'activité	Lancement d'une activité par l'enseignant	Action de l'enseignant pour lancer une activité peut prendre des formes diverses. Ici l'activité s'inscrivant dans une suite familière aux élèves, le lancement est bref, par projection de la tâche à réaliser au tableau mais en deux temps, d'abord le numéro qui relie à la série (14) puis le texte de la tâche.
00:02:52	00:08:42	Travail individuel accompagné des élèves	Travail individuel des élèves accompagné par l'enseignant qui circule dans la classe, répondant aux questions, faisant des suggestions, validant des réponses.	Les médiations de l'enseignant dans une telle phase de travail individuel accompagné peuvent être très diverses et des termes spécifiques utilisés pour les différencier, comme le montrent les sous-codages de cette phase.
00:03:03	00:03:14	Incident	Incident mathématique ou non, qui peut être perçu ou non par l'enseignant	Un surveillant entre pour donner quelque chose aux élèves qui ont fait le voyage en Angleterre.
00:03:14	00:03:45	Aide méthodologique	Aide méthodologique de l'enseignant	Ici l'enseignant conseille aux élèves de noter les étapes des calculs pour pouvoir s'y retrouver et repérer les erreurs éventuelles
00:04:00	00:04:16	Gestion d'outils technologiques	Gestion d'outils technologiques par l'enseignant	Ici l'enseignant prête des calculatrices aux élèves qui n'en ont pas car ils sont supposés pouvoir s'aider de calculatrices pour cette mise en train.

Figura 5

Exemplo da primeira codificação para a aula francesa

Regularmente, ao longo das reuniões e debates anuais, foram discutidos problemas metodológicos, harmonizadas as perspectivas e tomadas decisões, envolvendo todas as equipes. Por exemplo, após a fase de validações locais, foi acordado que cada equipe organizaria uma avaliação nacional on-line de seu léxico. O questionário (possivelmente declinado em várias variantes para que o trabalho solicitado permaneça razoável) tinha que

propor os termos acompanhados de sua definição/descrição, exemplos e não exemplos associados e pedir para localizar os graus de familiaridade, uso com colegas e frequência de uso para práticas em escalas Likert de cinco níveis. Itens também tinham que propor termos e solicitar definições a serem produzidas ou, inversamente, propor definições e perguntar que termos eles evocaram. Os participantes também foram convidados a sugerir novos termos, se quisessem, bem como alterações nas definições e exemplos. Cada equipe tinha de tentar divulgar o(s) seu(s) questionário(s) o mais amplamente possível por meio de diferentes canais e foi acordado que, com algumas exceções, qualquer termo que não fosse familiar para 2/3 dos professores que respondiam ao questionário seria eliminado do léxico. Para cada país, a obra publicada fornece o léxico na língua original, com uma tradução aproximada ou palavra por palavra para o inglês para cada termo, uma definição/descrição, um ou alguns exemplos e não exemplos fornecendo instanciações, ajudando assim a evitar confusão. Em outro capítulo, também, fornece-se uma apresentação detalhada da metodologia precisa adotada e das análises locais realizadas. A leitura desses capítulos, bem como do capítulo introdutório, mostra claramente a complexidade metodológica desse empreendimento e as variantes observadas, apesar dos regulamentos comuns, variantes que refletem claramente a diversidade de culturas e as condições e restrições da pesquisa. Terminada a primeira fase, a comparação dos léxicos e, especialmente, o movimento de internacionalização apresentam novos desafios metodológicos complexos. Para enfrentá-los, a experiência adquirida em uma década de pesquisa de *networking* parece particularmente útil.

Os exemplos pessoais anteriores dizem respeito a pesquisas envolvendo uma diversidade de atores que vivem em diferentes contextos. As metodologias desenvolvidas utilizam uma variedade de abordagens e técnicas, algumas já familiares aos pesquisadores engajados, outras criadas ad hoc para as necessidades da pesquisa. Seu uso envolve o desenvolvimento de vários artefatos metodológicos que instrumentam o trabalho em diferentes

níveis: organização da coleta de dados, seleção, codificação, análise, e mostram que a pesquisa requer verdadeira criatividade metodológica. Isso não é exclusivo deste tipo de pesquisa. A maior parte das pesquisas, e isso é claramente visível, por exemplo, quando analisamos teses didáticas, mobilizam uma variedade de métodos, mesmo quando reivindicam uma metodologia particular. Este também é o caso da pesquisa em engenharia didática. Basta pensar no trabalho metodológico que apenas os estudos preliminares empreendem, em suas diferentes dimensões. O que esses exemplos também mostram é que a pesquisa didática não é uma aventura pessoal. Responder aos desafios colocados pelo desenvolvimento do nosso conhecimento didático e torná-lo útil ao maior número de pessoas requer a colaboração de pesquisadores de várias formações, pesquisadores e professores, e até mesmo muitos outros atores, e isso tem, é claro, consequências metodológicas. Voltarei a isso na última seção, que considera as questões metodológicas no âmbito da relação entre pesquisa e ação.

Da pesquisa à ação: algumas reflexões

Ao considerar esses relatos, parece-me importante voltar à origem dessa metodologia e ao próprio nome de engenharia. Foi Brousseau quem primeiro introduziu o termo, após um convite para a Universidade de Quebec, em Montreal, onde conheceu acadêmicos que se apresentavam como engenheiros didáticos. Como escreveu muito depois (Brousseau, 2013, p. 4), sua contribuição foi: desenhar, projetar e começar a criar uma ciência limpa, que seria a fiadora dos conceitos teóricos originais necessários à engenharia e submetê-los aos requisitos de uma ciência madura, enriquecida por suas relações científicas em pé de igualdade com outras abordagens de ensino.

A priori, o conceito de engenharia didática poderia se desenvolver em duas direções, a da pesquisa baseada na intervenção didática ou a da intervenção baseada na pesquisa didática. Foi na primeira direção que ela se desenvolveu, talvez porque, como acreditava Brousseau, o estado da ciência didática tornasse a segunda opção ainda impossível. No entanto, isso não

impediu que subsistisse uma tensão entre essas duas direções, pois, fundamentalmente, a pesquisa didática visa contribuir, por meio dos diversos conhecimentos e recursos que produz, para a melhoria do ensino e da aprendizagem. Aprendizagem matemática que permanece profundamente insatisfatória para muitos alunos e professores. Já em meu curso de na Escola de Verão de 1989, eu havia apontado o problema representado pela disseminação insuficientemente controlada de engenharias didáticas concebidas por pesquisadores e as distorções decorrentes. E vinte anos depois, na minha apresentação introdutória à de 2009, indiquei que a situação praticamente não havia melhorado, embora em outras comunidades, por exemplo a da DBR, os pesquisadores estivessem trabalhando nessas questões. Parece-me que é para resolver essas tensões que um conceito como o da engenharia didática colaborativa apresentado acima contribui. É também para trabalhar esta tensão que na mesma Escola de Verão de 2009, Perrin-Glorian introduziu a distinção entre EDI (engenharia didática de investigação) e EDD (engenharia didática de desenvolvimento) e introduziu a ideia de engenharia didática de segunda geração com vista ao desenvolvimento de recursos para ensino e formação de professores (Perrin-Glorian, 2011). Comparando os níveis de controle teórico que a EDI e a EDD exercem, ela destaca que, mesmo que, em ambos os casos, a análise da matemática envolvida, o conhecimento dos alunos, e a definição das situações e meios associados estejam sob controle teórico, muito mais flexibilidade é necessária em EDD para se preparar para a adaptação a uma variedade de contextos. A diminuição do controle é ainda mais forte quando se trata do papel dos professores, e a isso se soma o fato de que o jogo com as restrições institucionais é muito mais difícil do que nas EDI, o que nos leva a aceitar certas concessões. Daí a hipótese de que antes de se considerar a implementação de recursos da EDI nas classes ordinárias, é necessário organizar níveis intermediários, cada um com suas próprias questões e objetivos, e pelo menos os dois níveis seguintes. No primeiro nível, a autora explica (p. 68), que o objetivo é testar a validade teórica das situações (sua capacidade de produzir os

conhecimentos esperados) e identificar as escolhas fundamentais da engenharia, separando o que é essencial, inevitável em referência ao saber visado do que se relaciona com o contexto escolhido e poderia ser modificado, adaptado. A realização associada ocorre em um ambiente protegido, sob o controle de pesquisadores, como em uma EDI. No segundo nível, trata-se de estudar a adaptabilidade das situações validadas ao ensino regular, negociando a engenharia com professores que não estiveram envolvidos em sua concepção. Essas negociações, as transformações a que conduzem, seu impacto na engenharia e seus resultados, passam a ser objeto de estudo para determinar o que deve ser preservado e por que, e quais formas de controle devem ser mantidas. Como sublinha Perrin-Glorian, a própria existência deste segundo nível impacta todo o trabalho da engenharia didática e a transforma em uma visão dialética, a visão geralmente descendente dos processos de disseminação: O problema não é mais o controle e a disseminação dos produtos de engenharia resultantes das investigações, mas *a determinação das variáveis fundamentais no que diz respeito aos saberes em jogo que regem a engenharia que queremos tornar um recurso* para o ensino normal e o estudo das *condições* da sua disseminação (e não a disseminação do pormenor da engenharia) (ibidem, p 69).

É o conjunto do processo que ela denomina engenharia didática de segunda geração. Para mim, essas considerações ressoam com o que aprendemos com as pesquisas sobre o uso de recursos curriculares por professores. Elas nos mostram claramente que, como diz Rabardel, o design se estende ao uso e que devemos, portanto, antecipar na própria concepção o trabalho de design que será do professor.

No texto citado, Perrin-Glorian ilustra sua abordagem por meio de pesquisas em andamento sobre simetria ortogonal no IUFM Nord-Pas de Calais na transição entre a escola primária e o ensino fundamental II, que atualmente constitui o ciclo 3 na França. Com vários colegas, pesquisadores e professores, ela continuou seu trabalho sobre no ensino da geometria.

Isso resultou recentemente em um livro (Mathé, Barrier ,& Perrin-Glorian, 2020) que cobre o ensino da geometria elementar a longo prazo no ensino primário e fundamental II.

Em Artigue (2014), concluindo a apresentação da engenharia didática de segunda geração, aponte que a reflexão desenvolvida por Perrin-Glorian mostrava claramente que a transição entre pesquisa e desenvolvimento exigia novas formas de pesquisa. Claro, pesquisadores já estavam trabalhando nisso, fornecendo um importante trabalho metodológico e teórico. Por exemplo, Cobb e Jackson, nos EUA, como parte do estudo MIST e uma abordagem DBR, desenvolveram uma teoria de ação para a melhoria instrucional de todo o sistema (*theory of action for system-wide instructional improvement*)(Cobb & Jackson, 2011; Henrick, Cobb, & Jackson, 2014); no entanto, tais trabalhos foram bastante excepcionais na pesquisa didática. Este fato ainda continua até hoje, mas me parece que cresceu a consciência de sua necessidade e de sua gestão, junto com o desejo comum de reduzir o hiato existente entre pesquisa e ação. Tal é evidenciado, por exemplo, pela investigação realizada no âmbito de vários projetos europeus que visam apoiar o desenvolvimento de práticas de ensino e aprendizagem baseadas em abordagens investigativas (ver por exemplo o número de ZDM baseado nos trabalhos realizados no âmbito do projeto PRIMAS (Maass, Artigue, Doorman, Krainer, & Ruthven, 2013), a criação no Congresso Europeu CERME 10 em 2017 de um novo grupo temático, TWG 23 intitulado Implementação de Resultados de Investigação em Educação Matemática (Implementation of research findings in mathematics education) cujos trabalhos foram ampliados no CERME 11, ou a criação em andamento de um novo periódico intitulado *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education* (Estudos de implementação e replicação em educação matemática). Nos trabalhos apresentados no TWG 23 (Dooley & Gueudet, 2017; Jankvist, van den Heuvel-Panhuizen, & Veldhuis, 2019), constate-se, e isso era de se esperar, um forte predomínio de abordagens em termos de DBR. Elas se combinam teoricamente com contribuições de áreas científicas como as de saúde em

que a pesquisa de implementação tem uma história mais longa. Não há dúvida de que caso estas pesquisas de implementação, que necessariamente envolvem uma multiplicidade de atores e instituições, se desenvolvam, como eu pessoalmente desejo, representarão verdadeiros desafios metodológicos e exigirão uma real criatividade neste campo. Eu pessoalmente pude medir isso na última década por meio de vários projetos europeus em que participei.

Para concluir

Neste texto, procurei compartilhar minha experiência e minhas reflexões sobre as metodologias da pesquisa didática. O lugar que dei à engenharia didática em suas diversas formas e à *design-based research* de forma mais geral, sem dúvida reflete o papel que essa metodologia tem desempenhado em minha vida pessoal como pesquisadora, a importância que atribuo aos esforços feitos coletivamente pela minha comunidade didática para construir ferramentas metodológicas que atendam às suas próprias necessidades e à sua visão desse campo de pesquisa, e também aos esforços feitos para pensar de forma mais efetiva a relação entre teoria e prática. Outros, sem dúvida, teriam feito escolhas diferentes. Apesar desta escolha e das limitações que ela induz, mostrando apenas uma pequena parte das metodologias hoje utilizadas na didática, espero que estas poucas reflexões sejam úteis ao leitor, e em particular aos mais jovens de nós, que não conhecem esta história metodológica e as lógicas e eventos que a conduziram. Espero ter conseguido mostrar que essas questões metodológicas são mais bem compreendidas quando recolocadas nas praxeologias de pesquisa das quais fazem parte, e ter trazido à luz a criatividade metodológica que o trabalho de pesquisa em didática exige. Na didática, tendemos a atribuir muito valor às construções teóricas. Sem dúvida, seria saudável saber reconhecer também o valor do trabalho metodológico e de sua criatividade.

Références

Artigue, M. (1986). Etude de la dynamique d'une situation de classe : une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(1), 5-62.

- Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? *Revue Internationale des Sciences de l'Éducation*, 8, 59-72.
- ARTIGUE M. (2011A). L'INGÉNIERIE DIDACTIQUE COMME THÈME D'ÉTUDE. IN C. MARGOLINAS ET AL. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XV^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 15-26). Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
- Artigue M. (2011b). L'ingénierie didactique : un essai de synthèse. In, C. Margolinas et al. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XV^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 225-237). Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
- Artigue, M. (2014). Perspectives on Design Research : The Case of Didactical Engineering. In, A. Bikner-Ahsbabs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 467-496). New York: Springer.
- Artigue, M. (2018). Didáctica de las matemáticas y reproducibilidad, *Educación Matemática*, 30(2), 9-32.
- Artigue, M. (2020). Didactical engineering. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education. Second Edition* (pp. 202-206). New-York : Springer.
- Artigue, M. & Bosch, M. (2014). Reflection on Networking through the praxeological lens. In, A. Bikner-Ahsbabs & S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 249-266). New York : Springer.
- Artigue, M., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). La TAD face au problème de l'interaction entre cadres théoriques en didactique des mathématiques. In M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD. Actes du troisième congrès de la TAD* (pp. 33-56). Barcelona: Centre de Recerca Matemática.
- Artigue, M. et al. (2019). The French didactic tradition. In Werner, B., Artigue, M., Mariotti, M. A., Sträßer, R., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Eds.), *European Traditions in Didactics of Mathematics* (pp. 11-56). New-York : Springer Open.
- Artigue, M., & Perrin, M.J. (1991). Didactic engineering, research and development tool : some theoretical problems linked to this duality. *For the Learning*, 11(1), 13-18.
- Artigue, M., & Robinet, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(1), 5-64.
- Arzarello, F. (2008). Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories. En E. Emborg, y M. Niss (Eds.), *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education* (pp. 158-181). Copenhague : Roskilde University.
- Bakker, A., & van Eerde, D. (2014). An introduction to design-based research with an example from statistics education. In A. Bikner-Ahsbabs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 429-466). New York : Springer.
- Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. Thèse de Doctorat. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Barquero, B., & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: from fundamental situations to study band research paths. In A. Watson & M. Ohtani M (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 249-272). New York : Springer.

- Bartolini-Bussi, M., & Mariotti, M. A. (2008). Artifacts and signs after a Vygostkian perspective. In L. English, M. Bartolini-Bussi, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education, second revised edition* (pp. 746-805). Mahwah : Lawrence Erlbaum.
- Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (Eds) (2014). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*. New York : Springer.
- Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. New York : Springer.
- Blocher, J-N. (2018). *Comprendre et montrer la transmission du savoir : les systèmes hybrides texte-image-son comme lieux de production et d'écriture de phénomènes. Illustrations en Théorie de l'Action Conjointe en Didactique*. Thèse de doctorat. Université de Bretagne Occidentale.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. (2013). *Introduction à l'Ingénierie Didactique*. <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-%C3%A0-ling%C3%A9nierie-didactique3.pdf>
- Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014). *Teaching fractions through situations : A fundamental experiment*. New York : Springer.
- Cantoral, R. (2016). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona : Gedisa Editorial.
- Chevallard, Y. (1982). *Sur l'ingénierie didactique. Préparation de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques*. Preprint. IREM d'Aix Marseille. Accessible à <http://yves.chevallard.free.fr>
- Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In, C. Margolinas et al. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XV^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 81-108). Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
- Clarke, D., Emanuelson, J., Jablonka, E., & Mok, I.A.C. (Eds.) (2006). *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world*. Rotterdam : Sense Publishers.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- Cobb, P., & Jackson, K. (2011). Towards an empirically grounded theory of action for improving the quality of mathematics teaching at scale. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13, 6-33.
- Design-Based Research Collaborative (2003) Design-based research: An emerging paradigm for educational enquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5-8.
- Dooley, T., & Gueudet, G. (Eds.) (2017). *Proceedings of CERME 10*. Dublin : DCU Institute of Education et ERME.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-32.
- Falcade, R. (2006) *Théorie des situations, médiation sémiotique et discussions collectives dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et de graphe de fonction*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble et Università degli studi, Turin.

- Farfán Marquez, R. M. (1997). *Ingeniería didáctica : Un estudio de la variación y del cambio*. México : Grupo Editorial Iberoamérica.
- Gras, R., Regnier, J.-C., & Guillet, F. (2009). *Analyse statistique implicative : Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*. Toulouse : Cépaduès Editions.
- Gueudet, G., & Trouche, L. (Eds.) (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques*. Bruxelles : De Boeck Editions.
- HENRICK, E., COBB, P., & JACKSON, K. (2014). EDUCATIONAL DESIGN RESEARCH TO SUPPORT SYSTEM-WIDE INSTRUCTIONAL IMPROVEMENT. In, A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 497-530). New York : Springer.
- Jankvist, U.T., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (Eds.) (2019). *Proceedings of CERME 11*. Utrecht : Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University et ERME.
- KELLE, H., & BUCHHOLTZ, N. (2014). THE COMBINATION OF QUANTITATIVE AND QUALITATIVE RESEARCH METHODS IN MATHEMATICS EDUCATION: A “MIXED METHODS” STUDY ON THE DEVELOPMENT OF THE PROFESSIONAL KNOWLEDGE OF TEACHERS. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 321-361). New York : Springer.
- Kuhn, T. (1990). *La tension essentielle : Tradition et changement dans les sciences*. Paris : Gallimard.
- Kynigos, C., & Lagrange, J.-B. (Eds.) (2014). Special Issue: Representing mathematics with digital media: Working across theoretical and contextual boundaries. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3).
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. New York : Basic Books.
- MAASS, K., ARTIGUE, M., DOORMAN, L.M., KRAINER, K., & RUTHVEN, K. (EDS.) (2013). IMPLEMENTATION OF INQUIRY-BASED LEARNING IN DAY-TO-DAY TEACHING. *ZDM*, 45(6).
- Maschietto M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu local-global dans l'environnement des calculatrices*. Thèse de doctorat en co-tutelle. Université Paris Diderot - Paris 7 et Università degli studi, Turin.
- MARGOLINAS, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., Vandebrouck, F., & Wozniak, F. (Eds.) (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XV^e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
- Mathé, C., Barrier, T., & Perrin-Glorian, M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités*. Paris : L'Harmattan.
- Mesiti, C., Artigue, M., Hollingsworth, H., Cao, Y. & Clarke, D. J. (Eds.). (sous presse). *Teachers talking about their classrooms: Learning from the professional lexicons of mathematics teachers around the world*. London and New York : Routledge.
- Perrin-Glorian, M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In, C. Margolinas et al. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XV^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
- Sensevy, G. (2011a). *Le sens du savoir*. Rennes: Presses Universitaires de Rennes.

- Sensevy, G., & Bloor, T. (2020). Cooperative didactic engineering. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education. Second Edition* (pp. 141-145). New-York : Springer.
- Sensevy, G., Quilio, S., Joffredo-Le Brun, S., Morellato, M., & Lerbour, O. (2018). How teachers and researchers can cooperate to redesign a curriculum? In Y. Shimizu & R. Vithal (Eds.), *School Mathematics Curriculum Reforms? Challenges, Changes and Opportunities* (pp. 563-570). Tsukuba : University of Tsukuba.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Swam, M. (2020). Design research in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education. Second Edition* (pp. 192-195). New-York : Springer.
- Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (Eds.) (2019). *The 'Resource Approach to Mathematics Education*. New York : Springer.
- Terrisse, A. (Ed.) (2002). Didactique des disciplines scientifiques et technologiques : concepts et méthodes. *Revue Internationale des Sciences de l'Education*, 8.
- Van den Heuvel-Panhuizen (2019). Didactics of mathematics in the Netherlands. In B. Werner, M. Artigue, M. A Mariotti, R. Sträßer & M. Van den Heuvel-Panhuizen, (Eds.), *European Traditions in Didactics of Mathematics* (pp. 57-94). New-York : Springer Open.
- Vilette, B., Fischer, J., Sander, E., Sensevy, G., Quilio, S., & Richard, J. (2017). Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP ? Le dispositif ACE. *Revue Française de Pédagogie*, 201(4), 105-120.
- Watson, A., & Ohtani, M. (2015). (Eds.), *Task Design in Mathematics Education. An ICMI Study 22* (pp. 311-320). New York : Springer.
- Blum, W., Artigue, M., Mariotti, M.-A., Strässer, R., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Eds.) (2019). *European Traditions in Didactics of Mathematics*. New York: Springer Open.