

Metodologías de investigación en didáctica de las matemáticas: ¿Dónde estamos?

Research methodologies in didactics of mathematics: Where are we?

Metodologias de investigação no ensino de matemática: Onde estamos?

Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques : Où en sommes-nous ?

Michèle Artigue¹
Universidad de París,
LDAR

<https://orcid.org/0000-0002-8176-8>

Resumen

En este artículo cuestionando las metodologías de investigación en didáctica de las matemáticas, después de una introducción que resitúa este cuestionamiento en la historia de este campo de investigación, y las metodologías dentro de las praxeologías de investigación, me intereso en primer lugar a la ingeniería didáctica, una metodología emblemática de la voluntad de los didactas de desarrollar métodos de investigación que respondan a sus necesidades específicas. Recuerdo sus características y también muestro su evolución en el contacto con diferentes teorías. En segundo lugar, examino la relación entre la ingeniería didáctica y la investigación basada en el diseño, incluyendo el caso de la ingeniería didáctica cooperativa. A continuación, considero diversas evoluciones metodológicas vinculadas a la evolución de las problemáticas y teorías didácticas y a la evolución de los medios tecnológicos de investigación, antes de abordar en una última sección estas cuestiones metodológicas desde la perspectiva de la relación entre la investigación y la acción didáctica.

Palabras claves: Didáctica de las matemáticas, Metodología de investigación, Praxeología de investigación, Ingeniería didáctica, Investigación basada en el diseño, Ingeniería didáctica cooperativa.

¹ michele.artigue@univ-paris-diderot.fr

Résumé

Dans cet article s'interrogeant sur les méthodologies de recherche en didactique, après une introduction resituant ce questionnement dans l'histoire de ce champ de recherche, et les méthodologies au sein des praxéologies de recherche, je m'intéresse dans un premier temps à l'ingénierie didactique, une méthodologie emblématique de la volonté des didacticiens d'élaborer des méthodes de recherche répondant à leurs besoins spécifiques. Je rappelle ses caractéristiques et montre aussi son évolution au contact de différentes théories. Dans un second temps, j'examine les relations entre ingénierie didactique et *design-based research*, en incluant le cas de l'ingénierie didactique coopérative. J'envisage ensuite diverses évolutions méthodologiques liées à l'évolution des problématiques et théories didactiques et à celle des moyens technologiques de la recherche, avant d'aborder dans une dernière section ces questions méthodologiques sous l'angle des rapports entre recherche et action didactique.

Mots clefs : Didactique des mathématiques, Méthodologie de recherche, Praxéologie de recherche, Ingénierie didactique, Design-based research, Ingénierie didactique coopérative.

Resumo

Este artigo questiona as metodologias de pesquisa em educação matemática, após uma introdução que situa esse questionamento na história deste campo de pesquisa, e as metodologias dentro das praxeologias de pesquisa. Considero, em primeiro lugar, a engenharia didática, uma metodologia que é emblemática da disposição dos didáticos em desenvolver métodos de pesquisa que atendam às suas necessidades específicas. Relembro suas características e mostro sua evolução em contato com diferentes teorias. Em segundo lugar, examino a relação entre a engenharia didática e a investigação baseada em design, incluindo o caso da engenharia didática cooperativa. Considero então diversas evoluções metodológicas ligadas à evolução das problemáticas e teorias de investigação e à evolução dos meios

tecnológicos de investigação, antes de abordar, na última secção, estas questões metodológicas do ponto de vista da relação entre investigação e ação didática.

Palavras-chave: Didática da matemática, Educação matemática, Metodologia de pesquisa, Praxeologia da pesquisa, Engenharia didática, Pesquisa baseada em design, Engenharia didática cooperativa.

Abstract

This article questions research methodologies in mathematics education, after an introduction that situates this questioning in the history of this field of research, and the methodologies within research praxeologies. I first consider didactic engineering, a methodology that is emblematic of the willingness of didacticians to develop research methods meeting their specific needs. I recall its characteristics and show its evolution in contact with different theories. Secondly, I examine the relationship between didactic engineering and design-based research, including the case of cooperative didactic engineering. I then consider various methodological evolutions linked to the evolution of research problematics and theories and the evolution of technological means of research, before addressing, in the last section, these methodological questions from the point of view of the relationship between research and didactic action.

Keywords: Didactics of mathematics, Mathematics education, Research methodology, Research praxeology, Didactic engineering, Design-based research, Cooperative didactic engineering.

Metodologías de investigación en didáctica de las matemáticas: ¿Dónde estamos?

¿Debemos hablar de metodología de investigación didáctica o de metodologías de investigación didáctica? Si nos referimos a la definición de metodología como conjunto de métodos de un campo de investigación, lo normal sería utilizar el singular. Sin embargo, a menudo se prefiere el plural para subrayar la diversidad que existe en un campo determinado y para organizar esta diversidad, por ejemplo, en el campo de la educación, con la distinción entre metodologías cualitativas y cuantitativas. Por esta razón, y como ocurre generalmente en didáctica de las matemáticas, utilizaré aquí el plural.

Cada campo de investigación desarrolla sus propias prácticas. En el marco de la teoría antropológica de la didáctica (TAD en lo sucesivo), estas prácticas se modelizan en términos de praxeologías de investigación (Artigue, Bosch y Gascón, 2011; Artigue y Bosch, 2014) constituidas por un bloque práctico estructurado por las preguntas de investigación y las técnicas utilizadas para estudiarlas, y un bloque teórico estructurado en torno a los discursos tecnológicos que explican y justifican estas técnicas de estudio y las teorías que sustentan estos discursos tecnológicos. En su uso común, y de acuerdo con su etimología, la palabra metodología designa algo más que un método o incluso un conjunto de métodos; se refiere tanto a ese método o ese conjunto de métodos como al discurso que los describe, explica y justifica. Por tanto, una metodología se sitúa en la conexión entre los bloques práctico y teórico de las praxeologías de investigación, y participa en su relación dialéctica. Es un ingrediente esencial en la dinámica de las praxeologías de investigación, y en este texto intentaré demostrarlo y extraer las consecuencias.

La investigación en didáctica de las matemáticas no surgió en un vacío científico. Por ello, en sus inicios, se inspiró con toda naturalidad en los campos científicos más próximos, en particular la psicología, tanto en los métodos de la psicología clínica piagetiana como en los de la psicología experimental. Esto ha contribuido a que los trabajos en este nuevo campo sean

reconocidos como trabajos científicos. Pero, relativamente pronto, esta investigación sintió la necesidad de desarrollar su propio entorno metodológico, adaptado a la naturaleza específica de sus problemas. Este fue el caso en Francia, por ejemplo, con el desarrollo de la ingeniería didáctica, pero por supuesto hay otros ejemplos, como la forma de investigación basada en el diseño desarrollada dentro del marco teórico de la Educación matemática realista en el Instituto Freudenthal en Holanda (Bakker & van Eerde, 2014; van den Heuvel-Panhuizen, 2019). A medida que el campo se ha desarrollado, la didáctica se ha liberado así, con mayor o menor facilidad según el contexto, de una concepción de la científicidad fundada en el uso de métodos experimentales basados en comparaciones estadísticas entre pruebas antes y después para grupos controles y experimentales. Han surgido nuevos enfoques, en gran medida cualitativos, a menudo inspirados en los utilizados más ampliamente en el campo de la educación. El libro *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (Bikner-Ashsbahs, Knipping & Presmeg, 2014) presenta una decena de enfoques utilizados hoy en esta investigación, acompañados de sus fundamentos teóricos y de ejemplos de realización. Atrapadas en la dinámica de las praxeologías de investigación, estas metodologías han evolucionado y siguen evolucionando, en consonancia con el desarrollo teórico del campo, el de las problemáticas en su seno, el conocimiento y la experiencia acumulados, y también el de los recursos técnicos a disposición de los investigadores.

Sin embargo, a principios de este siglo, la presión para vincular la científicidad de los resultados obtenidos en didáctica de las matemáticas, como más generalmente en el campo de la educación, a métodos experimentales estrictos y al uso de muestras aleatorias, es cada vez más fuerte, lo que exige una vigilancia renovada. Diversas instancias científicas y políticas consideran que la educación basada en la evidencia, inspirada en la medicina basada en la evidencia, es la única garantía de resultados científicamente sólidos. Francia, por ejemplo, ya no es inmune a esta tendencia, surgida por primera vez en Estados Unidos, como demuestra un

reciente informe del CSE (Conseil Scientifique de l'Education), denunciado unánimemente por las sociedades científicas y las asociaciones de investigadores en humanidades y ciencias sociales.

Al mismo tiempo, los esfuerzos realizados para reducir la distancia entre la teoría y la práctica, para implementar los resultados de la investigación didáctica más allá de los limitados entornos experimentales en los que generalmente se han obtenido, para abordar el problema del cambio de escala, plantean problemas metodológicos que requieren, para ser resueltos, ir más allá de los enfoques cualitativos habituales, y combinarlos con enfoques cuantitativos, en metodologías mixtas. Este tipo de combinación no es nuevo, y la investigación didáctica ha propiciado incluso la aparición de nuevos enfoques cuantitativos, como el análisis implicative, iniciado por Régis Gras y a cuyo desarrollo han contribuido desde entonces numerosos investigadores (Gras, Regnier & Guillet, 2009). Así pues, la reflexión metodológica está, más que nunca, a la orden del día.

En este texto, quisiera compartir mi experiencia y mis interrogantes en esta área para contribuir a la reflexión a la que pretende contribuir este número especial. En primer lugar, recordaré las ambiciones y los fundamentos de la ingeniería didáctica que, dentro de la tradición didáctica francesa, ha sido emblemática de esta voluntad de desarrollar metodologías que respondan a las necesidades específicas de la investigación didáctica. También mostraré que esta metodología es de hecho un objeto atrapado en una dinámica, la de las praxeologías de investigación que instrumenta y que influyen en ella a su vez. En la actualidad, es habitual considerar la ingeniería didáctica como un miembro de la familia de las metodologías de investigación basada en el diseño (*design based research* en inglés) cuyo uso se ha intensificado en educación matemática desde principios de este siglo. A continuación discutiré esta familia y su relación con la ingeniería didáctica. Examinaré más brevemente otros desarrollos metodológicos relacionados a la evolución de las problemáticas, teorías y recursos tecnológicos

de la investigación. Concluiré abordando la cuestión de la relación entre la investigación y la acción educativa, volviendo a la aparición de la ingeniería educativa y destacando los retos metodológicos que plantea el establecimiento de relaciones más satisfactorias, y más en general el campo aún emergente de la investigación de implementación (*implementation research* en inglés).

La ingeniería didáctica como respuesta a las necesidades metodológicas de la didáctica de las matemáticas

Los fundamentos de la ingeniería educativa

Hace unos diez años, en 2009, la ingeniería didáctica fue el tema central de la Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas en Francia y una ocasión especial para volver la mirada a la historia de esta metodología, que se remontaba a unos treinta años. En la ponencia introductoria a esta escuela (Artigue, 2011a), remontando a la segunda Escuela de Verano, la de 1982, donde se había trabajado colectivamente este tema por primera vez, había subrayado claramente, remontando al texto manuscrito escrito entonces por Chevallard (1982), que este método de investigación había surgido de hecho de la necesidad sentida por la comunidad didáctica francesa de no limitarse a prácticas de laboratorio, sino de desarrollar métodos de estudio adaptados a su propio campo, de tomar el sistema didáctico de la clase como terreno privilegiado. Esto era perfectamente coherente con la visión sistémica de la teoría de las situaciones didácticas (TSD) y la concepción de la didáctica como epistemología experimental que la sustenta (Brousseau, 1998). En efecto, las praxeologías de investigación asociadas a la ingeniería didáctica se han basado en gran medida en la TSD, que era entonces el marco teórico dominante de la didáctica de las matemáticas en Francia, aunque muy pronto la combinaron con otros constructos teóricos como los de Douady en términos de dialéctica herramienta-objeto y de juegos de marcos (Douady, 1986). A partir de los años 80, la metodología de ingeniería didáctica se convirtió así en una metodología emblemática de la tradición francesa de didáctica

de las matemáticas y su uso se ha extendido posteriormente a otras didácticas, como la de las actividades físicas y deportivas (Terrisse, 2002).

En la Escuela de Verano de 1989, la ingeniería didáctica volvió a ser tema de estudio. Esta vez, es el tema de un curso del que soy encargada, y el texto resultante (Artigue, 1989), publicado en la revista *Recherches en Didactique des Mathématiques*, marcará una etapa en su institucionalización como metodología de investigación. En él se describe con precisión la ingeniería didáctica, con sus dos características esenciales:

- Se basa en realizaciones didácticas en el aula, es decir, en el diseño, la implementación, la observación y el análisis de secuencias didácticas,
- Su validación es interna, basada en una comparación entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*,

y su estructuración en cuatro fases: análisis preliminares, diseño y análisis *a priori* de la ingeniería, experimentación y recogida de datos, y análisis *a posteriori* y validación. Esta descripción se ilustra con varios ejemplos, entre ellos las emblemáticas ingenierías de Brousseau y Douady para ampliar el campo de los números en la escuela primaria. Permiten destacar el anclaje de esta metodología en la TSD, pero también la diversidad que ya existe en los trabajos de ingeniería didáctica.

El trabajo realizado en esta escuela de verano proporcionará una referencia compartida de ingeniería didáctica que se utilizará en la formación de investigadores, y que apoyará la difusión de esta metodología de investigación y su uso más allá de su comunidad de origen. Esta es sin duda la razón por la que se me atribuye con regularidad, pero erróneamente, la paternidad de esta metodología, cuando simplemente fui responsable de dar forma a la experiencia colectiva de una comunidad. En retrospectiva, esto puede verse como la expresión de la importancia de la puesta en palabras y descontextualización de los conocimientos en el

proceso de transformación del conocimiento en saber, lo que por supuesto también se aplica al campo de la didáctica.

Las presentaciones de la ingeniería didáctica como metodología de investigación que se sucedieron a lo largo de los años no fueron sustancialmente diferentes (véanse, por ejemplo, Artigue, 2002, 2014; Barquero y Bosch, 2015), y este sigue siendo el caso de la más reciente, la de la *Encyclopedia of Mathematics Education* (Artigue, 2020), aunque la redacción haya cambiado ligeramente desde 1990. En este texto, se introduce la ingeniería didáctica con sus cuatro fases: *preliminary analyses; design and a priori analysis; realization, observation, and data collection; a posteriori analysis and validation*. A continuación, se describen detalladamente estas cuatro fases. Se indica que los análisis preliminares suelen incluir tres dimensiones: un análisis epistemológico del contenido matemático en juego, un análisis de las condiciones y limitaciones institucionales y un análisis de lo que la investigación didáctica ofrece para apoyar el diseño. La descripción de la fase de diseño y análisis *a priori* pone de relieve la influencia que tiene en esta fase el anclaje fundacional en la TSD. No obstante, se explicitan algunos puntos que estaban implícitos en el texto de 1989, porque han sido fuente de preguntas recurrentes o de malentendidos. Por ejemplo, se hace explícito el hecho de que el análisis *a priori* concierne a un sujeto genérico y epistémico, y se precisa que:

the actual realization will involve students with their personal specificities and history, but the goal of the a priori analysis is not to anticipate all these personal behaviors; it is to build a reference with which classroom realizations will be contrasted in the a posteriori analysis (ibidem, p. 204).

En cuanto a la fase de aplicación, se menciona que esta fase puede dar lugar a modificaciones del diseño *in itinere*, sobre todo cuando la ingeniería es de un tamaño substancial, y que estas modificaciones y sus motivos se incluirán, por supuesto, en el análisis

a posteriori. En cuanto al análisis *a posteriori* y su comparación con el análisis *a priori*, se especifica que:

there are always differences between the reference provided by the *a priori* analysis and the contingency analyzed in the *a posteriori* analysis. The validation of the hypotheses underlying the design does not thus impose perfect match between the two analyses (ibidem, p. 204).

Esto es tanto más comprensible cuando se comprende la verdadera función del análisis *a priori* y el hecho de que se refiere a un sujeto epistémico y genérico. Por último, en lo que se refiere a la validación, se aclara que ésta puede requerir la recogida de datos complementarios a los recogidos durante la observación, en particular para evaluar los efectos en términos de aprendizaje, y basarse en análisis estadísticos, como demuestran desde el principio los trabajos de Brousseau y sus colegas. Lo esencial es que la validación sea interna, y no concebida en términos de comparación externa entre grupos experimental y control.

Hay, por tanto, una evidente continuidad con el texto de 1990, pero subrayo también que se trata de una descripción de la metodología en su forma más clásica, cuando se asocia al diseño de una serie de sesiones de clase para responder a preguntas de investigación relativas a aprendizajes matemáticos específicos. Es evidente, como muestran claramente las actas de la Escuela de Verano de 2009 (Margolinas et al., 2011), que a lo largo de las décadas los didactas han ampliado el alcance de su trabajo para incluir otras cuestiones y otros contextos: la formación del profesorado, formas más abiertas de enseñanza basadas en proyectos, cuestiones más transversales como la modelización, e incluso actividades matemáticas informales fuera de la escuela. En cada uno de estos nuevos contextos, es necesario replantearnos qué entendemos por análisis *a priori* y qué es razonable intentar controlar o no en los escenarios desarrollados.

Concebidas como fenomenotécnica en el sentido de Bachelard, como escribió Chevallard en el texto de 1982 citado anteriormente, las ingenierías didácticas han sido un

motor clave del desarrollo de la investigación en didáctica de las matemáticas en Francia, un motor clave de su dinámica praxeológica. Este papel es innegable cuando consideramos el desarrollo de la teoría de las situaciones. Incluso si, en el análisis retrospectivo que propone en (Brousseau, Brousseau & Warfield, 2014), Brousseau subraya el origen compuesto de los conceptos de la TSD y el papel desempeñado en su explicitación por la creación del DEA de didáctica de las matemáticas en Burdeos y, por tanto, de cursos de didáctica de las matemáticas, las ingenierías didácticas desarrolladas en el marco del COREM (Centre d'observation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques) y experimentadas en la escuela Michelet desempeñaron un papel fundamental. Igualmente, la ingeniería didáctica de Douady experimentada en la escuela de Montrouge es indisociable del desarrollo de su elaboración teórica en términos de dialéctica herramienta-objeto y de juegos de marcos. Personalmente, mi trabajo teórico sobre la noción de concepción fue alimentado por la ingeniería didáctica desarrollada conjuntamente con Robinet para identificar las concepciones del círculo susceptibles de ser implementadas por alumnos de primaria (Artigue & Robinet, 1982), y fueron los datos de esta misma ingeniería didáctica los que, reexplotados algunos años más tarde, alimentaron mi trabajo sobre la reproducibilidad de las situaciones didácticas (Artigue, 1986, 2018).

La evolución de la ingeniería educativa: forma y posicionamiento

En los años 80, como ya se ha mencionado, la ingeniería didáctica se consolidó como metodología de investigación preferida dentro de la tradición didáctica francesa. Sin embargo, a partir de los años 90, el creciente interés por los profesores y sus prácticas, motivado en gran medida por las distorsiones observadas en la difusión de ingenierías didácticas concebidas para las necesidades de la investigación, condujo al desarrollo de otras metodologías, basadas en particular en la observación naturalista de estas prácticas. Además, el auge de la TAD ha propiciado el despliegue de estudios de praxeologías institucionales basados en el estudio de

recursos curriculares. Pero, como lo muestran bien las actas de la Escuela de Verano de 2009, y la propia elección de este tema para los trabajos de la Escuela, la ingeniería didáctica ha seguido siendo la metodología preferida para explorar el potencial que ofrecen las nuevas formas de enseñanza, como las vinculadas a la integración progresiva de las tecnologías digitales. Así lo ilustran las investigaciones realizadas sobre los softwares de geometría dinámica, las hojas de cálculo y los sistemas de cálculo simbólico, y después sobre calculadoras y software que combinan estas diferentes tecnologías. Al mismo tiempo, como ya se ha señalado, el campo de utilización de la ingeniería didáctica se ha ampliado, extendiéndose a la formación del profesorado, a las formas escolares nuevamente introducidas e incluso a prácticas matemáticas informales. A esto se añaden los efectos de la difusión de esta metodología más allá de la tradición didáctica francesa, como resultado de colaboraciones internacionales, como las establecidas tempranamente con Cantoral y Farfán, que fundarían el enfoque teórico conocido hoy como socio-epistemología (Cantoral, 2016; Farfán, 1997), y un número creciente de tesis en co-supervisión.

Todo ello explica que la ingeniería didáctica, como metodología de investigación, no haya permanecido un objeto fijo sino un objeto vivo, participando en la dinámica de diversas praxeologías de investigación. Sin pretender una descripción exhaustiva, me gustaría señalar en esta sección dos formas adoptadas por la ingeniería didáctica que resultan de su integración en marcos teóricos distintos de aquel en el que surgió, pero también las tensiones que esta integración puede generar.

Combinación de la TSD con marcos teóricos semióticos

Una experiencia importante para mí desde este punto de vista fue la co-supervisión con Ferdinando Arzarello, el padre de la teoría APC (Acción, Producción, Comunicación) (Arzarello, 2008), de la tesis de Michela Maschietto (Maschietto, 2003). La cuestión planteada en esta tesis era si se podía introducir a los estudiantes de secundaria en el juego local-global

fundamental en análisis utilizando calculadoras simbólicas y un lenguaje infinitesimal, en el contexto italiano. Para Michela, que había pasado un año en Burdeos con Brousseau antes de venir a París a hacer su máster en didáctica, como para mí, una metodología de ingeniería didáctica era natural para responder a esta pregunta. Por supuesto, la construcción de esta ingeniería no iba a basarse únicamente en la TSD, sino que incorporaría elementos fundamentales de la teoría APC, su sensibilidad a la multimodalidad semiótica y, en particular, a los gestos, así como a las metáforas que expresan la fuente corporal de los conceptos matemáticos fundamentales, en referencia a los trabajos de Lakoff y Nuñez (2000). Y, efectivamente, esto es lo que hizo Michela, navegando entre las dos culturas didácticas que compartían una sensibilidad igual hacia las cuestiones epistemológicas, aunque no se expresara exactamente en los mismos términos. Por otra parte, como expresó en su contribución a la presentación de la tradición didáctica francesa en ICME-13 (Artigue et al., 2019), esta navegación no estuvo exenta de tensiones. El principal obstáculo fue la noción misma de análisis *a priori* tal como basada en la TSD, con el deseo de optimizar el potencial a-didáctico de las situaciones, de anticipar las posibles interacciones con el medio (*milieu* en francés) y de predecir las trayectorias que podrían resultar. De hecho, estas tensiones eran previsibles. En una ingeniería didáctica coherente con la teoría APC, los gestos de los alumnos que expresan construcciones cognitivas en gestación, y la manera en que estos gestos son retomados y explotados por el profesor a través de juegos semióticos, son ingredientes esenciales de la dinámica cognitiva de la clase. Escapan al potencial del análisis *a priori* para anticipar y controlar las trayectorias. Lo mismo ocurre en parte con las metáforas y su gestión didáctica, que también desempeñan un papel importante, como ha demostrado claramente esta investigación. Para resolver estas tensiones, fue necesario repensar lo que se entendía por análisis *a priori*, y también aceptar, en el diseño de las sesiones, de no limitar el papel del profesor a funciones de devolución y institucionalización, sino de incluir fases colectivas

sustanciales en las que juegos semióticos y interacciones discursivas permitieran que la evolución del conocimiento dentro de un juego conjunto entre alumnos y profesor cuya dinámica seguía siendo en gran medida abierta, en consonancia con la cultura didáctica italiana. Con estas adaptaciones, la metodología de ingeniería didáctica resultó muy productiva. La tesis de Falcade (2006), también en co-supervisión, proporciona otro ejemplo del uso productivo de la ingeniería didáctica combinando, a nivel teórico, la TSD y una teoría semiótica, en este caso la teoría de la mediación semiótica de Bartolini Bussi y Mariotti (2008).

Ingeniería didáctica y TAD

Durante la Escuela de Verano de 2009, una de las cuestiones sometidas a examen fue la de las relaciones existentes y posibles entre la ingeniería didáctica enraizada en la TSD y las construcciones surgidas a principios de este siglo en términos de AEI (actividades de estudio y de investigación) y luego de REI (recorridos de estudio y de investigación) llevadas por la TAD y la oposición introducida por Chevallard entre dos paradigmas escolares: el paradigma tradicional de visita de obras, calificado de monumentalista, y el de cuestionamiento del mundo. Era dentro de este segundo paradigma donde se pensaba un posible futuro para la Escuela, y el diseño de REI dentro de este paradigma, el estudio de las condiciones y restricciones que regían su posible ecología, era la vía que permitía avanzar teórica y prácticamente en esta dirección. En su conferencia, Chevallard (2011) proponía así reconstruir la ingeniería didáctica en torno a los REI, distinguiendo entre REI finalizados orientados a contenidos didácticos específicos y REI abiertos. En mi conferencia de clausura (Artigue, 2011b), señalé las preguntas y tensiones que parecían derivarse de ello.

En la última década, las investigaciones basadas en REI se han multiplicado en diversos contextos y, para reflexionar sobre las relaciones que se han ido estableciendo entre ingeniería didáctica y TAD, es interesante leer el capítulo del que son coautores Barquero y Bosch (2015) en el libro resultante del Estudio ICMI 22 sobre el diseño de tareas en educación matemática.

El capítulo se titula “*Didactic engineering as a research methodology: from fundamental situations to study and research paths*”. Sin negar las diferencias existentes entre las ingenierías didácticas basadas en la TSD y la TAD, los autores destacan numerosos puntos de convergencia entre ellas. Escriben (p. 260) que las ingenierías didácticas enraizadas en la TSD se inscriben en el paradigma del cuestionamiento del mundo y que la búsqueda de situaciones fundamentales que caracteriza a dichas ingenierías: “is a way for didactic research to assume its own responsibility in the search for the possible *raisons d’être* of mathematical contents within the students’ reach, and for the rationale of their teaching at school”, lo que también es fundamental en la TAD. Pero la noción de situación fundamental, y las dialécticas de acción, formulación y validación que organizan la progresión de las relaciones con los objetos matemáticos en la TSD, se sustituyen en la TAD por la noción de praxeología y el esquema herbartiano.

Si el proyecto de enseñanza y aprendizaje está orientado a un contenido matemático específico, como es el caso en las ingenierías didácticas clásicas (una praxeología P en la interpretación de la TAD), el proceso didáctico se describirá así en términos de AEI estructuradas con referencia a los seis momentos de la actividad didáctica de la TAD, su conjunto constituyendo un REI finalizado en el sentido de Chevallard (2011). Pero un proceso didáctico no está necesariamente guiado por la identificación previa de un contenido matemático a enseñar. También puede estar motivado por la necesidad, para un grupo de alumnos X , de buscar respuestas a una pregunta Q_0 llamada *pregunta generativa*, con la ayuda de un profesor o grupo de profesores Y . La sucesión resultante de actividades de estudio e investigación constituye entonces un REI (REI abierto, según la definición de Chevallard (2011). En el curso del proceso, surgen preguntas derivadas Q_k y respuestas provisionales A_k . También suele haber respuestas externas A^\diamond , al menos parciales, preestablecidas a las preguntas Q_k o relacionadas, accesibles a través de los diversos medios de comunicación y difusión, denominados *media* en la teoría, y diversos objetos O_i que, junto con estas respuestas,

constituirán el medio experimental M en el que las respuestas A^\diamond se deconstruirán y reconstruirán para llegar a la respuesta final A^\heartsuit . Esto se refleja en el diagrama herbartiano, emblemático de la teoría, que se reproduce a continuación:

$$[S(X; Y; Q_0) \rightarrow \{A^\diamond_i, O_j, Q_k, A_k\}] \rightarrow A^\heartsuit$$

Para los autores, esta visión más amplia de los procesos didácticos en términos de AEI y REI proporciona un modelo para describir una diversidad mucho mayor de procesos de enseñanza y aprendizaje que los que puede modelar la TSD, y las diferencias se reflejan en los trabajos de ingeniería didáctica asociados, aunque en general se reproduzcan los mismos gestos metodológicos, como se muestra en la Figura 1.

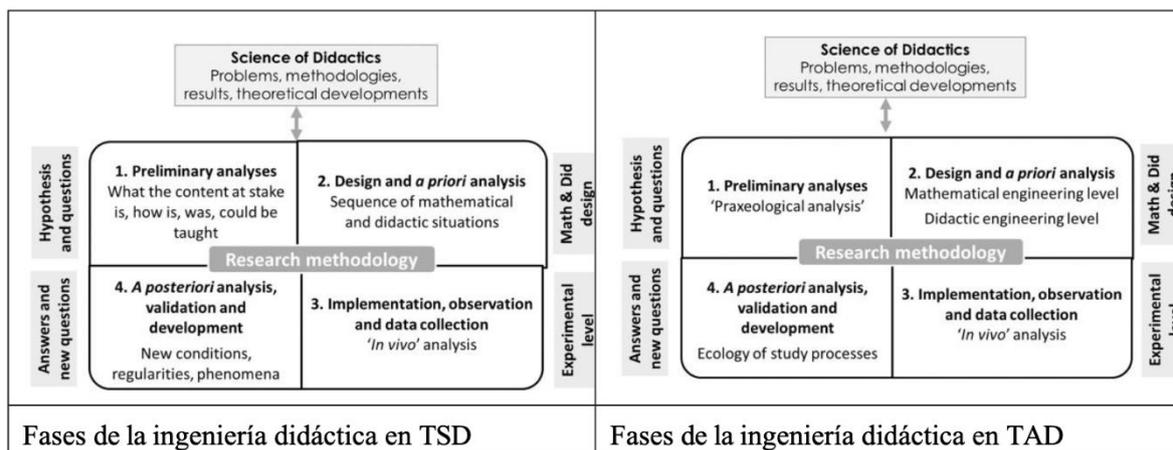


Figura 1

Las fases de la ingeniería didáctica siguiendo (Barquero & Bosch, 2015)

Así lo ilustran los dos ejemplos elegidos. El primero se refiere a ingenierías didácticas enraizadas en la TSD y relativas a la medida de las magnitudes en la escuela primaria, en particular la obra emblemática de Brousseau. El segundo es la tesis de Barquero (2009) sobre la modelización, la primera que se basó en la reconstrucción propuesta por la TAD. Las diferencias son evidentes a nivel del diseño y del análisis *a priori*. Se parte de una pregunta generativa relativa a la predicción de la evolución de una población. Se establece un modelo epistemológico de referencia (MER), considerando la movilización de modelos discretos o

continuos de los que surgen cuatro REI, cuyo conjunto cubre *a priori* el contenido principal de un curso universitario de matemáticas de primer año para estudiantes de ciencias naturales (véase la figura 2)

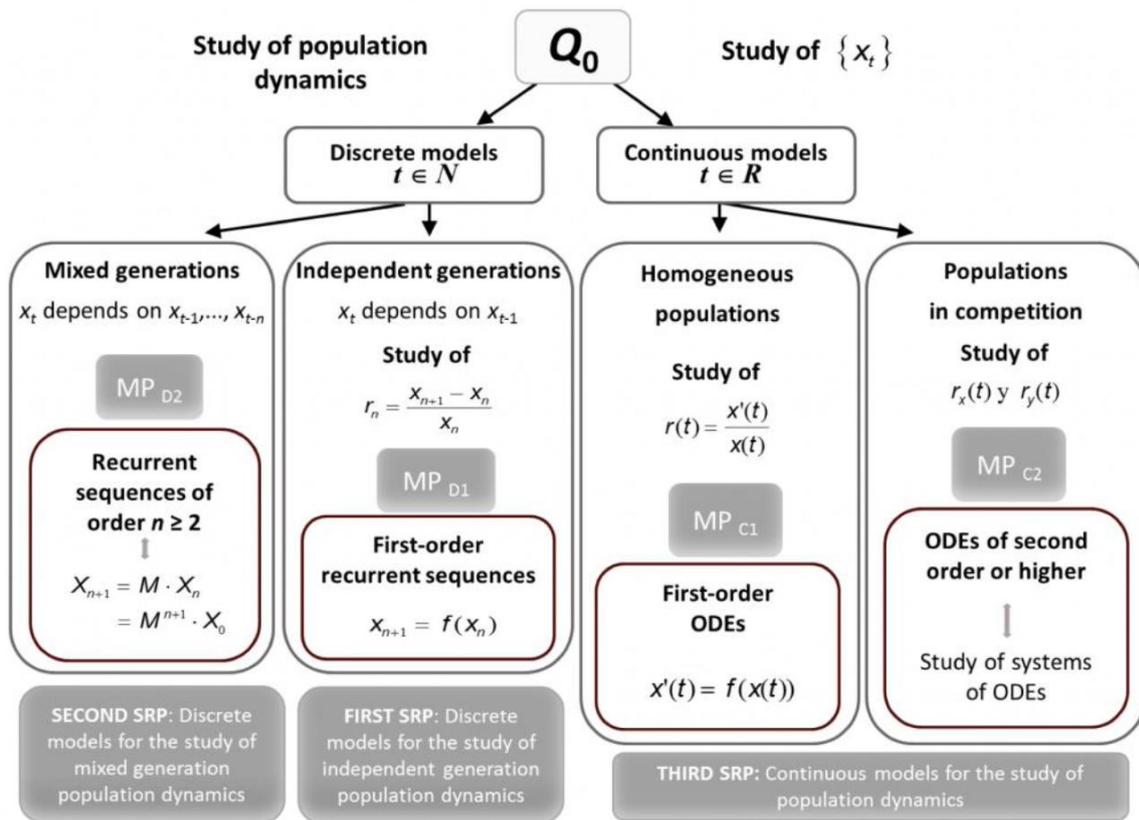


Figura 2

Estructura general de los REI derivados del estudio de Q₀ (Barquero & Bosch, 2015, p. 265)

A esta primera fase, matemática, le sigue una fase didáctica que incluye ahora, cuestiones relativas a la mesogénesis (evolución de los medios experimentales), la cronogénesis (evolución de las preguntas y los conocimientos introducidos a través de los *medias*) y la topogénesis (reparto de responsabilidades entre estudiantes y profesor), así como la organización de los distintos dispositivos asociados, muchos de los cuales son nuevos. Pero las trayectorias siguen siendo, por supuesto, muy abiertas, las preguntas derivadas que surgirán y guiarán las trayectorias son sólo parcialmente previsibles, los estudiantes tienen el poder de introducir en el medio cualquier objeto que consideren apropiado, y tienen ellos mismos que

crear un medio para la validación interna de las respuestas. En consecuencia, el análisis *in vivo* del funcionamiento del sistema desempeña un papel muy importante, más allá del sólo análisis *a priori*.

Desde esta tesis, han proliferado los trabajos de ingeniería didáctica basados en la TAD, todos guiados por la misma problemática ecológica y, para una descripción actualizada, se remite al lector a los módulos asociados a Chevallard en el proyecto AMOR de la ICMI y a los documentos asociados². Estos trabajos han confirmado la importancia crucial del desarrollo del MER, que orienta el diseño y proporciona una referencia para situar las trayectorias observadas, y del desarrollo de herramientas específicas, como los árboles de preguntas/respuestas, que ayudan a dar sentido a estas trayectorias y a las responsabilidades asumidas respectivamente por profesores y alumnos. Han permitido identificar las numerosas limitaciones que hacen hoy de los REI objetos de una ecología frágil, difíciles de desplegar a gran escala en las condiciones ordinarias de enseñanza. Y, en el plano teórico, estos trabajos han contribuido a identificar diversas dialécticas que ayudan a comprender las fuerzas motrices del aprendizaje en los REI.

Otras conceptualizaciones de la ingeniería didáctica han surgido en este siglo XXI, como la de ingeniería cooperativa que surgió en el contexto de la TACD (teoría de la acción conjunta en didáctica) o el concepto de ingeniería didáctica de segunda generación asociado a la distinción entre ingeniería didáctica de investigación (IDI) e ingeniería didáctica de desarrollo (IDD). Antes de considerarlos, considero necesario abordar la cuestión más general de la relación entre la ingeniería didáctica y la investigación basada en el diseño o *design-based research* (DBR en lo sucesivo).

² <https://icmiamor.org/awardee-units/yves-chevallard-unit>

Ingeniería didáctica y design-based research (DBR)

Design-based research

En el libro sobre metodologías cualitativas en educación matemática ya mencionado (Bikner-Ahsbals, Knipping & Presmeg, 2014), Bakker y van Eerde son coautores del capítulo dedicado a la DBR, una forma de investigación cada vez más presente desde la fundación del *Design-Based Research Collective* en 1999 (véase (DBRC, 2003)). Definen esta metodología del siguiente modo:

Educational design-based research (DBR) can be characterized as research in which the design of educational materials (e.g., computer tools, learning activities, or a professional development program) is a crucial part of the research. That is, the design of learning environments is interwoven with the testing and developing of a theory. (Bakker et van Eerde, 2014, p. 430)

Si utilizamos la expresión investigación de ingeniería didáctica para designar las investigaciones basadas en la metodología de la ingeniería didáctica, no cabe duda de que existe una evidente similitud con la DBR, subrayada por los propios autores, que escriben (p. 432): "DBR is therefore sometimes characterized as a form of didactical engineering". Pero el papel del diseño está más equilibrado entre el objetivo de producir recursos para desarrollar la enseñanza y el de producir conocimientos, entre la investigación fundamental y el desarrollo. Volveré sobre este tema más adelante. Las descripciones de la DBR son diversas, como señala Swan en su artículo para la *Encyclopedia of Mathematics Education* (Swan, 2020). Bakker y van Eerde, por su parte, hacen referencia a las características propuestas por Cobb et al. (2003), quienes destacan que:

- El objetivo de la DBR es elaborar tanto teorías sobre el aprendizaje como recursos para apoyarlo;
- Se trata de teorías locales, relativas a un dominio particular, pero que deben ser lo suficientemente generales para poder aplicarse a diferentes contextos;

- La DBR es, por naturaleza, intervencionista y cíclica, y sigue un proceso iterativo de intervenciones y revisiones, en el que se combinan componentes prospectivos y reflexivos;
- La DBR busca comprender el porqué y el cómo de los aprendizajes y, por tanto, no se sitúa en un paradigma experimental basado en la comparación de grupos experimental y de control.

Los distintos ciclos de una DBR constan de tres fases: preparación y diseño, experiencia de enseñanza, análisis retrospectivo (que debe distinguirse de los llamados análisis "on the fly" realizados a lo largo de la experimentación). Para Bakker y van Eerde, una herramienta metodológica importante es la de *hypothetical learning trajectory* (HLT) introducida por Simon (1995):

The hypothetical learning trajectory is made up of three components: the learning goal that defines the direction, the learning activities, and the hypothetical learning process — a prediction of how the students' thinking and understanding will evolve in the context of the learning activities (Simon, 1995, p. 136)

Elaborada durante la fase de diseño, sobre la base de los estudios preparatorios, la HLT sirve de guía a profesores e investigadores durante la experimentación, que puede conducir a su ajuste, así como en el análisis retrospectivo, ayudando a centrar la atención en los puntos cruciales para la teoría emergente.

A pesar de las diferencias, no podemos dejar de ver las similitudes con la ingeniería didáctica. Al igual que la investigación en ingeniería didáctica, la DBR es intervencionista y no naturalista (las condiciones se manipulan deliberadamente para que el diseño sea coherente con la teoría emergente). La descripción de las fases de cada ciclo es similar a la de las fases de la ingeniería. El papel desempeñado por la HLT puede compararse con el desempeñado por el análisis *a priori* y el modelo epistemológico de referencia. Por otra parte, el proceso es *a priori* más abierto: las elecciones, en particular, se ajustan a lo largo del proceso de experimentación

en función de las observaciones, con el fin de optimizar el diseño, y sobre todo esta investigación tiene un componente cíclico esencial, coherente con la ambición de producir recursos pedagógicos que expresen la teoría local desarrollada. Las investigaciones de ingeniería didáctica incluyen a menudo varias realizaciones que conducen a ajustes/enriquecimientos de los análisis *a priori* o de los MER, modificaciones de las preguntas/situaciones, pero esto no es en absoluto una necesidad para esta metodología, ya esté anclada en la TDS o en la TAD. Esto es coherente con la ambición fenomenotécnica de esta metodología de investigación. Por otro lado, esta dimensión cíclica e iterativa está muy presente en el concepto de ingeniería cooperativa desarrollado en el marco de la teoría de la acción conjunta en didáctica (TACD) (Sensevy, 2011), que ahora consideraremos y que también pretende ser una forma de DBR.

Ingeniería cooperativa (IC)

Al mismo tiempo que afirma sus vínculos con la ingeniería didáctica, la IC se sitúa claramente en el campo de la DBR. La definición dada en la *Encyclopedia of Mathematics Education* (Sensevy & Bloor, 2020) comienza con las siguientes frases (p. 141):

The Joint Action Theory in Didactics aims at theorizing a specific process of design-based research (Cobb et al., 2003) and design-based implementation research (Fishman et al., 2013), called cooperative engineering (Sensevy et al., 2013; Joffredo-Lebrun et al., 2018), in order to contribute to the elaboration of new forms of schooling. Cooperative engineering (CE) refers to a methodological process in which a collective of teachers and researchers engage in a joint action to codesign, implement and re-implement a teaching sequence on a particular topic.

Más allá de la interesante combinación conceptual que propone entre ingeniería didáctica y DBR, la IC me parece una excelente expresión del modo en que el conocimiento adquirido sobre las prácticas de los profesores en las dos últimas décadas, y la creciente influencia de perspectivas como la de las comunidades de práctica y comunidades de investigación, han cambiado nuestra concepción de la relación entre profesores e investigadores

en la ingeniería didáctica. En general, están presentes en las prácticas actuales de ingeniería didáctica, pero sin estar formalizadas como en el caso de la IC. Los principios de la ingeniería cooperativa son seis: el principio de simetría, la necesidad de reconocer las diferencias, la necesidad de desarrollar una visión compartida de los objetivos y recursos, la postura de ingeniero, la cooperación para producir una obra, la cooperación para producir conocimientos. El principio de simetría expresa que tanto los profesores como los investigadores son considerados profesionales, profesionales de diferentes tipos, pero iguales en su capacidad de contribuir al diseño. Este principio de simetría va de la mano de lo siguiente: el reconocimiento y el respeto de las diferencias que resultan de las diferencias de posición y experiencia y no pueden concebirse en términos de oposición entre los que saben y los que no saben. El tercer principio, el de la necesidad de desarrollar una visión compartida de los objetivos y los recursos, expresa una necesidad para que la actividad conjunta se desarrolle y cobre vida a nivel colectivo, y para que todos puedan participar en ella también como individuos, superando los escollos de la división epistémica del trabajo. El siguiente principio es el de la postura de ingeniero, una postura que deben adoptar tanto los profesores como los investigadores y que implica una aproximación tanto teórica como práctica a los problemas de la práctica docente. Una vez más, no se trata de negar las diferencias entre profesores e investigadores, sino de subsumirlas temporal y localmente en esta postura de ingeniero. El siguiente principio, la cooperación para producir una obra, expresa el hecho de que, en la IC, es el objeto concreto, la secuencia didáctica, la piedra angular del proceso de investigación. Finalmente, el último principio, la cooperación para producir conocimiento, se refiere tanto al conocimiento resultante del estudio conjunto que permite la construcción de la secuencia didáctica, como al conocimiento producido por esta misma construcción y las descripciones y análisis asociados a su implementación.

En la práctica, la IC se estructura de forma cíclica, y en cada ciclo encontramos las fases habituales de estudios preparatorios, diseño, implementación y análisis *a posteriori*. Aquí, sin embargo, en la primera fase, se hace hincapié en los conocimientos que se van a enseñar, sin consideraciones didácticas; el objetivo es crear, dentro del grupo, una forma común de entender estos conocimientos. En la segunda fase, la fase de diseño, la investigación se transforma de un proceso académico a un proceso práctico, con la producción colectiva de una secuencia que puede considerarse como un sistema de hipótesis de trabajo, compartido y asumido por los profesores e investigadores del grupo. De acuerdo con el TACD, la acción conjunta del profesor y los alumnos – y más concretamente los gestos pedagógicos que el profesor deberá producir – debería permitir a los alumnos familiarizarse con la cultura “cristalizada” en el saber estudiado y adquirir progresivamente las facultades de acción que estos conocimientos pueden conferir. En la tercera fase, la fase de implementación, se implementa la secuencia diseñada, a menudo por varios profesores en paralelo, poniendo a prueba las hipótesis de trabajo. La cuarta fase suele consistir en un estudio crítico *a posteriori* de la o las implementaciones, que generalmente conducirá a una remodelación del dispositivo para mejorarlo y a una profundización o revisión de las hipótesis de trabajo.

Una característica interesante de la IC es también el método utilizado para documentar la práctica, otorgando un papel específico a ejemplos emblemáticos, lo que puede compararse con la idea de ejemplar de Kuhn (1990). A estos se asocian sistemas hipermedia híbridos que combinan vídeos de prácticas, grabaciones de audio y textos que comentan y analizan estas prácticas, conocidos como SHTIS en francés por *systèmes hybrides texte-image-son* (Blocher, 2018) y PTAHS en inglés por *picture-text-audio hybrid systems*. Como se explica en (Sensevy & Bloor, 2020), en la visión epistemológica que sustenta la IC y da prioridad a la concreción de la práctica sobre las ideas abstractas que pueden describirla (p. 143):

the epistemology of paradigmatic analogy is also « an epistemology of methodology », in which the progress of knowledge relies on the building, studying and refining of emblematic examples of practice that serves as frames of reference in the scientific inquiry.

El proyecto de investigación ACE (Arithmétique et compréhension à l'école élémentaire), cuyo objetivo era elaborar un plan de estudios para la enseñanza de la aritmética elemental en los dos primeros cursos de primaria (CP y CE1 en Francia), es un buen ejemplo de ello qué es la IC y qué puede producir, y cómo el desarrollo colectivo de SHTIS puede tanto apoyar el trabajo de investigación como la difusión de sus resultados (véase, por ejemplo, Sensevy et al., 2018; Vilette et al., 2017).

Avances metodológicos: cuestiones de investigación, logros y recursos

Las secciones anteriores ya han puesto de relieve algunos desarrollos innegables de la ingeniería didáctica. Estos desarrollos se inscriben en una evolución más global de las prácticas de investigación en didáctica de las matemáticas. En primer lugar está el desarrollo de las problemáticas que conciernen cada vez más a los profesores, sus representaciones, conocimientos y prácticas, tanto en el aula como fuera de ella, su formación inicial y su desarrollo profesional, así como el crecimiento del cuestionamiento sobre la dimensión semiótica de la actividad matemática. Pero también están las numerosas cuestiones que plantean las evaluaciones internacionales y, más en general, los estudios comparativos, el desarrollo del campo de la etnomatemática y de los enfoques críticos de la educación matemática; así como, las cuestiones planteadas por las evoluciones curriculares promoviendo las aproximaciones por competencias, la modelización y la interdisciplinariedad, la educación basada en la indagación, y por la voluntad declarada de hacer que la enseñanza de las matemáticas contribuya a la ciudadanía, por no hablar de todas las cuestiones planteadas por la evolución tecnológica, o las convulsiones como la que estamos viviendo actualmente con la pandemia del Covid 19 y el paso repentino a una enseñanza híbrida, o incluso a menudo totalmente a distancia, para los alumnos de todos los niveles escolares. Todas estas evoluciones repercuten en las metodologías

de investigación. Por ejemplo, las investigaciones sobre las evaluaciones internacionales y los proyectos a gran escala conducen generalmente al desarrollo de metodologías mixtas que combinan enfoques cualitativos y cuantitativos, y triangulan sus contribuciones respectivas. El estudio TEDS-Telekom realizado para evaluar el efecto de una reestructuración innovadora de la formación de los profesores de Gymnasium en Alemania integrando formación matemática y didáctica, descrita en (Kelle & Buchholtz, 2014), es un excelente ejemplo.

La evolución de las metodologías también está vinculada a los resultados de la investigación, tanto teórica como empírica. En los apartados anteriores, por ejemplo, señalé la influencia de los resultados de la investigación sobre los profesores y de enfoques como el de las comunidades de práctica en la ingeniería didáctica, pero también la influencia de los enfoques semióticos que obligan a tener más en cuenta la multimodalidad de la actividad semiótica en matemáticas, y de los trabajos en el campo de la cognición encarnada. También mostré cómo la TAD ha transformado la metodología de la ingeniería didáctica, en el marco del paradigma de cuestionamiento del mundo. Con respecto a los profesores, otro ejemplo lo proporciona el enfoque documental de la didáctica iniciado por Gueudet y Trouche, hace poco más de una década, y al que ahora contribuyen una multiplicidad de investigadores (Trouche, Gueudet y Pepin, 2019).

La extensión del estudio de las prácticas de profesores a su trabajo documental, que se desarrolla principalmente fuera del aula, ha creado nuevas necesidades metodológicas, y así es como se desarrolló una metodología específica conocida como *investigación reflexiva*, basada en los siguientes cuatro principios ((Gueudet & Trouche, 2010, p. 61):

- Principe de *durée longue* du suivi. Il s'agit d'étudier l'activité et le développement professionnel des professeurs, et donc de saisir des éléments de stabilité, et des évolutions, du travail documentaire dans la durée ;
- Principe de suivi *en tout lieu*. [...] Il nous semble indispensable de considérer, autant que faire se peut, *directement* le travail du professeur, hors classe et en classe ;
- Principe de *recueil étendu* des ressources matérielles utilisées et produites dans le travail documentaire ;

- Principe de *suivi réflexif* du travail documentaire. Il s'agit, d'une part, d'associer étroitement l'enseignant au recueil de données, dans la visée pragmatique de recueil étendu et de suivi en tout lieu [...] Il s'agit aussi, d'autre part, de mettre en place des dispositifs méthodologiques suscitant la réflexivité.

Estos cambios metodológicos, vinculados a la evolución de los temas y enfoques, los recursos técnicos disponibles para la investigación, se combinan con la de los medios tecnológicos de la investigación. Por ejemplo, es posible captar los gestos con todo detalle, los movimientos de los ojos e incluso, en determinados entornos, los latidos del corazón para estudiar las emociones, como ocurre en el ICCR (International Centre for Classroom Research) de la Universidad de Melbourne³. La utilización de estos recursos técnicos cada vez más sofisticados, y más en general la generalización del vídeo, conducen a la recogida de una multitud de datos microscópicos, y la cuestión metodológica de su codificación y tratamiento, así como la delicada cuestión de cómo volver a niveles más macroscópicos de interpretación y expresión de los resultados, se plantean así en términos parcialmente renovados. Y cabe preguntarse hoy cómo influirá el desarrollo del campo de los *Big Data* en las técnicas de análisis de datos y, más allá, en las elecciones hechas en materia de recogida de datos y, más en general, en las metodologías de la investigación didáctica.

No se trata en este texto de abordar en profundidad estas evoluciones metodológicas. Me limitaré a completar lo anterior con algunos ejemplos de mis investigaciones recientes.

Networking y capitalización

El primer ejemplo se refiere al trabajo sobre el *networking* de teorías en el que participé a partir de 2005 y que dio lugar al libro *Networking of theories as a research practice* (Bikner-Ahsbals & Prediger, 2014). El objetivo de la investigación era contribuir a limitar la fragmentación teórica del campo identificando estrategias para posibles conexiones entre marcos teóricos y explorando su potencial. Así pues, esta investigación podría describirse como

³ <https://internationalcentreforclassroomresearch.wordpress.com/>

meta-didáctica. Exigió una verdadera creatividad metodológica, bien descrita en el libro citado. En retrospectiva, como analizamos con Marianna Bosch (Artigue & Bosch, 2014) utilizando el concepto de praxeología de investigación, especialmente relevante resultó la elección realizada por los cinco grupos de investigadores participantes, cada uno de los cuales representaba una teoría, a partir de un objeto común: un vídeo propuesto por uno de ellos, y pedir a cada grupo que lo analizara con sus propias herramientas teóricas, señalando lo que el vídeo y los documentos que lo acompañaban permitían y no permitían. Estrategias *a priori* más directas, como identificar los conceptos clave de cada teoría e intentar establecer vínculos entre los mapas conceptuales resultantes, fueron decepcionantes. Estas observaciones metodológicas muestran claramente hasta qué punto las teorías no pueden aislarse de las praxeologías que alimentan y que las alimentan a su vez.

No puedo entrar en detalles sobre las técnicas que desarrollamos a lo largo de más de cinco años para establecer conexiones entre las cinco teorías, aprovechando en su mayor parte el vídeo inicial y un episodio complementario, pero un artefacto metodológico esencial fue la escala de estrategias de *networking* que se elaboró (véase la figura 3). Esta escala guió y estructuró la investigación y sus resultados, y la investigación, a su vez, ayudó a darle sentido.

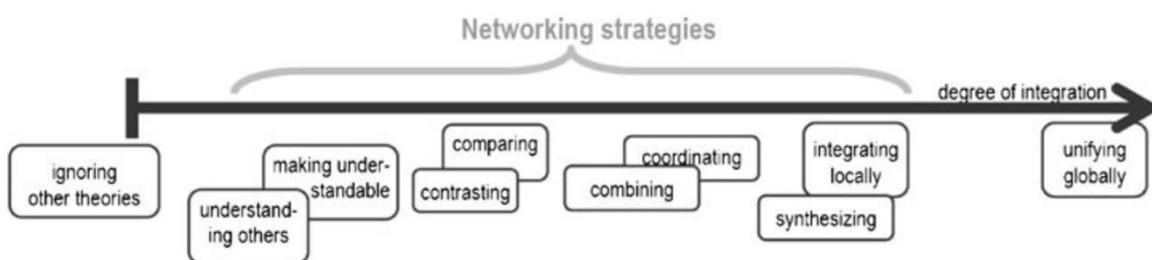


Figura 3

Escala de estrategias de networking (Bikner-Ahsbals & Prediger, 2014, p. 119)

Desde un punto de vista metodológico, esta investigación a largo plazo puede compararse con la realizada en el marco del proyecto europeo ReMath (2005-2009), cuyo objetivo era capitalizar los conocimientos didácticos desarrollados sobre el potencial semiótico de los artefactos dinámicos digitales (DDA para *dynamic digital artefact*) y expresarlos en una

forma ampliamente comprensible, lo más libre posible del discurso técnico de cualquier enfoque teórico particular. También en este caso, la capitalización requirió la creación y combinación de múltiples artefactos metodológicos descritos en detalle en los numerosos informes y en el número especial de *Educational Studies in Mathematics* dedicado a este proyecto (Kynigos & Lagrange, 2014). También en este caso, el diseño de estos artefactos metodológicos es inseparable de las praxeologías de investigación específicas que se desarrollaron y que permitieron construir, como objetos de estudio, el diseño de los seis DDA cuya producción se planificó en el proyecto, así como su experimentación en contextos realistas, en particular con una técnica de experimentación cruzada, experimentándose el mismo DDA tanto por el equipo de diseño como por otro equipo, de otro país y, por tanto, de otro contexto educativo y de investigación, y con otras referencias teóricas.

El proyecto internacional Lexicon

El proyecto internacional Lexicon, en el que me comprometí hace varios años, fue puesto en marcha por David Clarke, de la Universidad de Melbourne, muy conocido por su papel en el desarrollo de estudios comparativos culturalmente sensibles, como el *Learners' Perspective Study* (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006). Este estudio, en el que participan diez países (Alemania, Australia, Chile, China, Corea, Estados Unidos de América, Finlandia, Francia, Japón y República Checa) y un equipo mixto de profesores e investigadores experimentados en cada país, tiene como objetivo identificar el léxico pedagógico-didáctico “razonablemente compartido” por los profesores de matemáticas de enseñanza básica superior (*collège* en Francia) de cada país, compararlos y estudiar la posibilidad de avanzar hacia un léxico internacional que respete la diversidad que expresan. El origen de este proyecto se encuentra en las limitaciones creadas por una investigación que utiliza el inglés como *lingua franca* para la comunicación internacional, lengua en la que no puede expresarse plenamente la riqueza terminológica que existe en las diferentes lenguas y estructuras, con el problema

añadido de traducciones que puede ser fuente de malentendidos. Este proyecto ha planteado, y sigue planteando ahora que se ha completado la primera fase (Mesiti, Artigue, Hollingsworth, Cao y Clarke, 2022), formidables retos metodológicos. En primer lugar, tuvimos que llegar a un entendimiento común de lo que entendíamos por léxico pedagógico-didáctico. Originalmente, se trataba de un léxico pedagógico para los colegas australianos, que querían dejar claro que no era un léxico de términos matemáticos y que no utilizaban la palabra didáctico, que tiene una connotación peyorativa en su cultura. Fueron los equipos de Europa continental, en particular el equipo francés, los que pidieron la inclusión de la palabra didáctico. También fue necesario ponerse de acuerdo sobre la formalización de este objeto y el proceso para obtenerlo. Los colegas australianos, basándose en la experiencia del *Learners' Perspective Study*, propusieron que, en cada país, se grabara un vídeo en una clase de 8º curso (*quatrième* en Francia). con tres cámaras, una mostrando a toda la clase, la segunda siguiendo al profesor y la tercera a un grupo de dos alumnos, estando el profesor y estos dos alumnos equipados también con micrófonos. Las cintas de audio correspondientes se transcribieron, cronometraron y tradujeron al inglés, y a continuación el equipo australiano editó y subtituló los vídeos en inglés utilizando las traducciones (véase la figura 4).

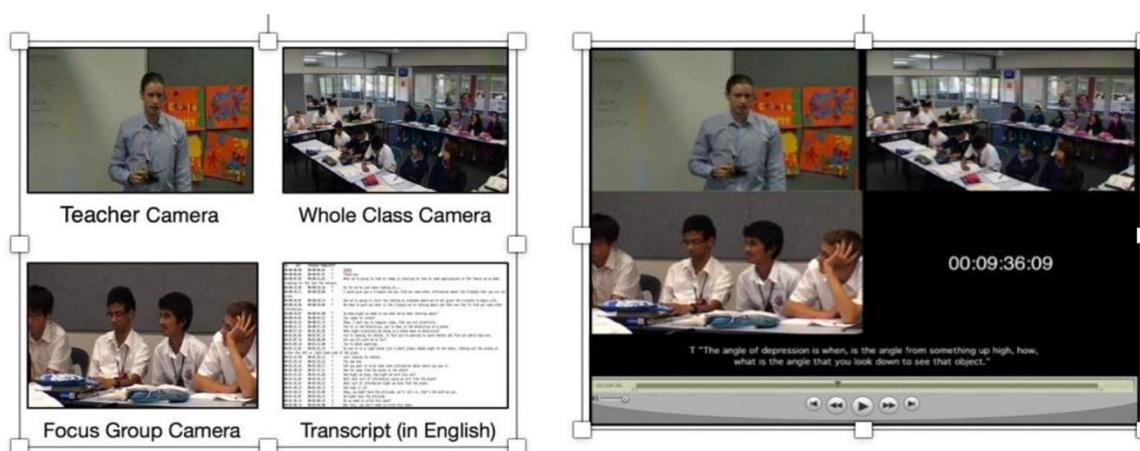


Figura 4
Vídeo y edición

Se acordó que cada equipo recibiría las transcripciones traducidas, los vídeos editados y los documentos adjuntos (plan de asientos, preparación del profesor), y que estos vídeos servirían de base para el trabajo de los equipos. El objetivo era describir lo observado, identificar los episodios interesantes y el léxico utilizado. El léxico al que se apuntaba no era el de los investigadores didácticos, sino el de los profesores, y en todos los casos, aunque los equipos fueran mixtos, eran ellos los que debían tener la última palabra. De hecho, en la mayoría de los equipos, el proceso de elaboración de un léxico inicial fue mixto, combinando el visionado de los vídeos y su codificación en una tabla Excel (véase la figura 5), y una reflexión *a priori* sobre el vocabulario del que disponían los profesores experimentados para describir una sesión de clase.

Team name: France	Lesson name: France	In Local Language (where applicable)		Additional Comments
Time Stamp IN	Time Stamp OUT	Activity or Action	Description of Activity or Action	
00:02:40	00:12:17	Mise en train - enrollement (A)	Activité qui, en début de séance, sert à mettre tous les élèves au travail. Elle n'est pas nécessairement en relation avec le thème de la séance.	L'activité de mise en train est ici une activité de calcul (programme de calcul) qui s'inscrit dans une série de 15 activités similaires constituant une progression. Elle doit permettre la participation de tous les élèves.
00:02:40	00:02:52	Lancement d'activité	Lancement d'une activité par l'enseignant	Action de l'enseignant pour lancer une activité peut prendre des formes diverses. Ici l'activité s'inscrit dans une suite familière aux élèves, le lancement est bref, par projection de la tâche à réaliser au tableau mais en deux temps, d'abord le numéro qui relie à la série (14) puis le texte de la tâche.
00:02:52	00:08:42	Travail individuel accompagné des élèves	Travail individuel des élèves accompagné par l'enseignant qui circule dans la classe, répondant aux questions, faisant des suggestions, validant des réponses.	Les médiations de l'enseignant dans une telle phase de travail individuel accompagné peuvent être très diverses et des termes spécifiques utilisés pour les différencier, comme le montrent les sous-codages de cette phase.
00:03:03	00:03:14	Incident	Incident mathématique ou non, qui peut être perçu ou non par l'enseignant	Un surveillant entre pour donner quelque chose aux élèves qui ont fait le voyage en Angleterre.
00:03:14	00:03:45	Aide méthodologique	Aide méthodologique de l'enseignant	Ici l'enseignant conseille aux élèves de noter les étapes des calculs pour pouvoir s'y retrouver et repérer les erreurs éventuelles
00:04:00	00:04:16	Gestion d'outils technologiques	Gestion d'outils technologiques par l'enseignant	Ici l'enseignant prête des calculatrices aux élèves qui n'en ont pas car ils sont supposés pouvoir s'aider de calculatrices pour cette mise en train.

Figura 5

Ejemplo de la primera codificación de la lección de francés

A intervalos regulares, durante las reuniones anuales y los intercambios, se debatieron los problemas metodológicos, se armonizaron perspectivas y se tomaron decisiones comprometiendo todos los equipos. Por ejemplo, tras la fase de validación local, se acordó que cada equipo organizaría una evaluación nacional en línea de su léxico. El cuestionario (posiblemente en varias variantes para garantizar que el trabajo requerido siga siendo razonable) debía proponer términos acompañados de su definición/descripción, ejemplos asociados y no

ejemplos, y preguntar por los grados de familiaridad, uso con colegas y frecuencia de uso con respecto a las prácticas en escalas Likert de cinco niveles. También se debía proponer términos y pedir elaborar definiciones o, a la inversa, proponer definiciones y preguntar qué término o términos evocaban; y se invitó a los participantes a sugerir nuevos términos si lo consideraban oportuno, así como modificaciones de las definiciones y los ejemplos. Se pidió a cada equipo que intentara dar la mayor difusión posible a su(s) cuestionario(s) utilizando distintos canales, y se acordó que, salvo excepciones, se eliminaría del léxico cualquier término que no fuera familiar a 2/3 de los profesores que respondieran al cuestionario. El libro publicado, para cada país, proporciona el léxico en su lengua original, con una traducción aproximada o literal al inglés de cada término, una definición/descripción, uno o varios ejemplos y no ejemplos que ofrecen instanciaciones y ayudan a evitar confusiones. Otro capítulo ofrece una presentación detallada de la metodología precisa seguida y de los análisis locales realizados. La lectura de estos capítulos, así como la del capítulo introductorio, muestra claramente la complejidad metodológica de esta empresa y las variaciones observadas a pesar de las normas comunes, variaciones que reflejan claramente la diversidad de las culturas y de las condiciones y restricciones de la investigación. Una vez concluida la primera fase, la comparación de léxicos y, sobre todo, el paso a la internacionalización plantea nuevos y formidables retos metodológicos. La experiencia adquirida en una década de investigación de *networking* me parece especialmente útil para afrontar estos retos.

Los ejemplos personales citados más arriba se refieren a investigaciones en las que participan una multiplicidad de actores que viven en contextos diferentes. Las metodologías desarrolladas utilizan diversos enfoques y técnicas, algunos ya familiares a los investigadores implicados, otros creados *ad hoc* para las necesidades de la investigación. Su utilización implica el desarrollo de una variedad de artefactos metodológicos que instrumentan el trabajo a distintos niveles: organización de la recogida de datos, selección, codificación, análisis, y demuestran

que la investigación requiere una verdadera creatividad metodológica. Esto no es exclusivo de este tipo de investigación. La mayoría de las investigaciones, y es claramente visible, por ejemplo, cuando se analizan las tesis didácticas, utilizan una variedad de métodos, incluso cuando pretenden basarse en tal o tal metodología. Éste es también el caso de la investigación en ingeniería didáctica. Basta pensar en el trabajo metodológico que suponen sólo los estudios preliminares, en todas sus diferentes dimensiones. Lo que estos ejemplos demuestran también es que la investigación didáctica no es una aventura personal. Responder a los retos que plantea el desarrollo de nuestros conocimientos didácticos y convertirlos en conocimientos útiles para el mayor número posible de personas presupone la colaboración de investigadores de distintas procedencias, investigadores y profesores, e incluso de muchos otros actores, y esto, por supuesto, tiene consecuencias metodológicas. Volveré sobre ello en la última sección, que examina las cuestiones metodológicas desde el ángulo de la relación entre investigación y acción.

De la investigación a la acción: algunas reflexiones

Al examinar estas relaciones, creo que es importante remontarse a los orígenes de esta metodología y del propio término "ingeniería". Fue Brousseau quien introdujo por primera vez el término, tras una invitación a la *Université du Québec à Montréal*, donde había conocido a universitarios que se presentaban como ingenieros pedagógicos. Como escribió mucho más tarde (Brousseau, 2013, p. 4), su contribución fue: diseñar, proyectar y empezar a crear una ciencia propia, que fuera garante de los conceptos teóricos originales necesarios para la ingeniería y los sometiera a las exigencias de una ciencia madura enriquecida por sus relaciones científicas en pie de igualdad con otras aproximaciones a la enseñanza.

A priori, el concepto de ingeniería didáctica podía desarrollarse en dos direcciones, la de una investigación basada en la intervención didáctica o la de una intervención basada en la investigación didáctica. Se desarrolló en la primera dirección, tal vez porque, como pensaba

Brousseau, el estado de la ciencia didáctica hacía imposible la segunda opción. Pero esto no impidió que siga existiendo una tensión entre estas dos direcciones porque, fundamentalmente, el objetivo de la investigación didáctica es contribuir, a través de los diversos conocimientos y recursos que produce, a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que sigue siendo profundamente insatisfactorio para demasiados alumnos y profesores. Ya en mi conferencia en la Escuela de Verano de 1989, había señalado el problema que planteaba la difusión insuficientemente controlada de las ingenierías didácticas concebidas por los investigadores y las consiguientes distorsiones. Veinte años más tarde, en mi ponencia introductoria a la de 2009, señalé que la situación apenas había mejorado, a pesar que, en otras comunidades, como la de la DBR, investigadores trabajaban en estas cuestiones. Me parece que es a resolver estas tensiones a lo que contribuye un concepto como el de ingeniería colaborativa presentado anteriormente. También fue para abordar esta tensión por lo que Perrin-Glorian introdujo la distinción entre IDR (*ingénierie didactique de recherche*) e IDD (*ingénierie didactique de développement*) en la Escuela de Verano de 2009, e introdujo la idea de ingeniería didáctica de segunda generación con vistas a desarrollar recursos para la enseñanza y la formación del profesorado (Perrin-Glorian, 2011). Comparando los niveles de control teórico que suponen la IDR y la IDD, señala que, aunque, en ambos casos, el análisis de las matemáticas implicadas, de los conocimientos de los alumnos y la definición de situaciones y medios asociados están bajo control teórico, en la IDD se necesita mucha más flexibilidad para preparar la adaptación a una diversidad de contextos. La reducción del control es aún mayor cuando se trata del papel de los profesores, a lo que se añade el hecho de que hacer frente a las restricciones institucionales es mucho más difícil que en las IDR, lo que obliga a aceptar ciertas concesiones. De ahí la hipótesis de que antes de considerar la implementación de recursos, resultado de IDR en clases ordinarias, es necesario organizar niveles intermedios, cada uno con sus propias preguntas y objetivos, y al menos los dos niveles siguientes. En el primer nivel, explica (p. 68)

que, el objetivo es probar la validez teórica de las situaciones (su capacidad para producir los conocimientos esperados) e identificar las opciones fundamentales de la ingeniería, separando lo que es esencial e ineludible en referencia a los conocimientos buscados de lo que depende del contexto elegido y podría modificarse o adaptarse. La implementación asociada tiene lugar en un entorno protegido bajo el control de los investigadores, como en una IDR. El segundo nivel consiste en estudiar la adaptabilidad de las situaciones validadas a la enseñanza ordinaria, negociando la ingeniería con profesores que no han participado en su diseño. Estas negociaciones, las transformaciones a las que conducen, su impacto en la ingeniería y sus resultados, se convierten en objeto de estudio para determinar qué debe conservarse y por qué, y qué formas de control podrían mantenerse. Como señala Perrin-Glorian, la existencia misma de este segundo nivel repercute en todo el trabajo de ingeniería didáctica y transforma la visión generalmente descendente de los procesos de difusión en una visión dialéctica. El problema ya no es el control y la difusión de los productos de ingeniería resultantes de la investigación, sino *determinar las variables fundamentales con respecto a los conocimientos en juego que controlan la ingeniería que queremos convertir* en un recurso para la enseñanza ordinaria, y estudiar las condiciones de su difusión (y no la difusión del detalle de la ingeniería) (ibídem, p. 69).

Es a todo este proceso al que se refiere como ingeniería didáctica de segunda generación. Para mí, estas consideraciones resuenan con lo que hemos aprendido de la investigación sobre el uso de los recursos curriculares por parte de los profesores. Nos muestran claramente que, como dice Rabardel, el diseño se prolonga en el uso y que, por lo tanto, debemos anticipar el trabajo de diseño que realizará el profesor.

En el texto citado, Perrin-Glorian ilustra su enfoque con una investigación en curso sobre la simetría ortogonal en el IUFM Nord-Pas de Calais en la transición entre la escuela primaria y el *collège*, lo que en Francia constituye actualmente el ciclo 3 de enseñanza. Desde

entonces, con diversos colegas, investigadores y profesores, ha proseguido sus trabajos sobre la enseñanza de la geometría. La publicación más reciente surgida de este trabajo (Mathé, Barrier & Perrin- Glorian, 2020) abarca la enseñanza de la geometría elemental a lo largo de la escuela primaria y el primer ciclo de secundaria.

En Artigue (2014), concluyendo la presentación de la ingeniería didáctica de segunda generación, subrayé que el pensamiento desarrollado por Perrin-Glorian mostraba claramente que la transición entre investigación y desarrollo requería nuevas formas de investigación. Por supuesto, investigadores ya estaban trabajando en ello, aportando importantes trabajos metodológicos y teóricos, por ejemplo, Cobb y Jackson en los EUA. que, dentro del estudio MIST y de un enfoque DBR, habían desarrollado una *theory of action for system-wide instructional improvement* (Cobb & Jackson, 2011; Henrick, Cobb & Jackson, 2014), pero tales trabajos eran bastante excepcionales en la investigación didáctica, globalmente. Este sigue siendo el caso hoy en día, pero me parece que se nota una creciente conciencia de la necesidad de tal trabajo, al mismo tiempo que un deseo común de reducir la brecha entre la investigación y la acción. Así lo atestiguan, por ejemplo, las investigaciones realizadas en el marco de diversos proyectos europeos destinados a apoyar el desarrollo de prácticas de enseñanza y aprendizaje basadas en la indagación (véase, por ejemplo, el número de ZDM basado en trabajos realizados en el marco del proyecto PRIMAS (Maass, Artigue, Doorman, Krainer & Ruthven, 2013), la creación en el congreso europeo CERME 10 de 2017 de un nuevo grupo temático, el TWG 23 titulado *Implementation of research findings in mathematics education*, cuyo trabajo continuó en CERME 11, o la creación de una nueva revista titulada *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*.

Los trabajos presentados en el TWG 23 (Dooley & Gueudet, 2017; Jankvist, van den Heuvel- Panhuizen, & Veldhuis, 2019) muestran, como era de esperar, un fuerte predominio de enfoques en términos de DBR. Teóricamente, se combinan con contribuciones de campos

científicos como los de la salud, donde la investigación sobre implementación tiene una historia más larga. No cabe duda de que esta investigación sobre la implementación, que implica necesariamente a una multiplicidad de actores e instituciones, si se desarrolla realmente, como personalmente espero, planteará verdaderos retos metodológicos y exigirá una verdadera creatividad en este campo. Pude apreciarlo personalmente a lo largo de la última década a través de los diversos proyectos europeos en los que participé.

En conclusión

En este texto he intentado compartir mi experiencia y mis reflexiones sobre las metodologías de investigación didáctica. El énfasis que he puesto en la ingeniería didáctica en sus múltiples formas y en la investigación basada en el diseño de forma más general refleja sin duda el papel que esta metodología ha desempeñado en mi vida personal como investigadora, la importancia que atribuyo a los esfuerzos realizados colectivamente por mi comunidad didáctica para construir herramientas metodológicas que respondan a sus propias necesidades y a su visión de este campo de investigación, y también a los esfuerzos realizados para pensar de forma más eficaz en la relación entre teoría y práctica. Sin duda, otros habrían hecho elecciones diferentes. A pesar de esta elección y de las limitaciones que conlleva, en la medida en que sólo muestra una pequeña parte de las metodologías utilizadas en didáctica hoy en día, espero que estas pocas reflexiones sean útiles al lector, y en particular a los más jóvenes, que no están familiarizados con esta historia metodológica ni con los fundamentos y acontecimientos que la han configurado. Espero haber conseguido mostrar que estas cuestiones metodológicas se comprenden mejor cuando se resitúan en las praxeologías de investigación en las que se inscriben, y haber puesto también de relieve la creatividad metodológica que requiere el trabajo de investigación didáctica. En didáctica, tendemos a dar mucho valor a las construcciones teóricas. Sin duda, sería saludable reconocer también el valor del trabajo metodológico y su creatividad.

Agradecimientos: Agradezco a Rosa Eulalia Cardoso Paredes por su apoyo en la traducción. al español del texto inicial en francés.

Referencias

- Artigue, M. (1986). Etude de la dynamique d'une situation de classe : une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(1), 5-62.
- Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? *Revue Internationale des Sciences de l'Education*, 8, 59-72.
- Artigue, M. (2011a). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In C. Margolinas et al. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XV^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 15-26). Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
- Artigue, M. (2011b). L'ingénierie didactique : un essai de synthèse. In, C. Margolinas et al. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XV^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 225-237). Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
- Artigue, M. (2014). Perspectives on Design Research : The Case of Didactical Engineering. In, A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 467-496). New York: Springer.
- Artigue, M. (2018). Didáctica de las matemáticas y reproducibilidad, *Educación Matemática*, 30(2), 9-32.
- Artigue, M. (2020). Didactical engineering. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education. Second Edition* (pp. 202-206). New-York : Springer.
- Artigue, M., & Bosch, M. (2014). Reflection on Networking through the praxeological lens. In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 249-266). New York : Springer.
- Artigue, M., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). La TAD face au problème de l'interaction entre cadres théoriques en didactique des mathématiques. In M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD. Actes du troisième congrès de la TAD* (pp. 33-56). Barcelona: Centre de Recerca Matemática.
- Artigue, M. et al. (2019). The French didactic tradition. In W. Blum, M. Artigue, M. A. Mariotti, R. Sträßer & M. Van den Heuvel-Panhuizen (Eds.), *European Traditions in Didactics of Mathematics* (pp. 11-56). New-York : Springer Open.
- Artigue, M., & Perrin, M.J. (1991). Didactic engineering, research and development tool : some theoretical problems linked to this duality. *For the Learning*, 11(1), 13-18.
- Artigue, M., & Robinet, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(1), 5-64.
- Arzarello, F. (2008). Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories. En E. Emborg, y M. Niss (Eds.), *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education* (pp. 158-181). Copenhagen : Roskilde University.

- Bakker, A., & van Eerde, D. (2014). An introduction to design-based research with an example from statistics education. In A. Bikner-Ahsbabs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 429-466). New York : Springer.
- Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. Thèse de Doctorat. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Barquero, B., & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: from fundamental situations to study band research paths. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 249–272). New York : Springer.
- Bartolini-Bussi, M., & Mariotti, M. A. (2008). Artifacts and signs after a Vygostkian perspective. In L. English, M. Bartolini-Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education, second revised edition* (pp. 746-805). Mahwah : Lawrence Erlbaum.
- Bikner-Ahsbabs, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (Eds) (2014). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*. New York : Springer.
- Bikner-Ahsbabs, A., & Prediger, S. (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. New York : Springer.
- Blocher, J-N. (2018). *Comprendre et montrer la transmission du savoir : les systèmes hybrides texte-image-son comme lieux de production et d'écriture de phénomènes. Illustrations en Théorie de l'Action Conjointe en Didactique*. Thèse de doctorat. Université de Bretagne Occidentale.
- Blum, W., Artigue, M., Mariotti, M.-A., Strässer, R., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Eds.) (2019). *European Traditions in Didactics of Mathematics*. New York: Springer Open.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. (2013). *Introduction à l'Ingénierie Didactique*. <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-%C3%A0-ling%C3%A9nierie-didactique3.pdf>
- Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014). *Teaching fractions through situations : A fundamental experiment*. New York : Springer.
- Cantoral, R. (2016). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona : Gedisa Editorial.
- Chevallard, Y. (1982). *Sur l'ingénierie didactique. Préparation de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques*. Preprint. IREM d'Aix Marseille. Accessible à <http://yves.chevallard.free.fr>
- Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In, C. Margolinas et al. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XV^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 81-108). Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
- Clarke, D., Emanuelson, J., Jablonka, E., & Mok, I.A.C. (Eds.) (2006). *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world*. Rotterdam : Sense Publishers.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.

- Cobb, P., & Jackson, K. (2011). Towards an empirically grounded theory of action for improving the quality of mathematics teaching at scale. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13, 6-33.
- Design-Based Research Collaborative (2003) Design-based research: An emerging paradigm for educational enquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5-8.
- Dooley, T., & Gueudet, G. (Eds.) (2017). *Proceedings of CERME 10*. Dublin : DCU Institute of Education and ERME.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-32.
- Falcade, R. (2006) *Théorie des situations, médiation sémiotique et discussions collectives dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et de graphe de fonction*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble et Università degli studi, Turin.
- Farfán Marquez, R. M. (1997). *Ingeniería didáctica : Un estudio de la variación y del cambio*. México : Grupo Editorial Iberoamérica.
- Gras, R., Regnier, J.-C., & Guillet, F. (2009). *Analyse statistique implicative : Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*. Toulouse : Cépaduès Editions.
- Gueudet, G., & Trouche, L. (Eds.) (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques*. Bruxelles : De Boeck Editions.
- Henrick, E., Cobb, P., & Jackson, K. (2014). Educational design research to support system-wide instructional improvement. In, A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 497-530). New York : Springer.
- Jankvist, U.T., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (Eds.) (2019). *Proceedings of CERME 11*. Utrecht : Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University et ERME.
- Kelle, H., & Buchholtz, N. (2014). The combination of quantitative and qualitative research methods in mathematics education: A “mixed methods” study on the development of the professional knowledge of teachers. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 321-361). New York : Springer.
- Kuhn, T. (1990). *La tension essentielle : Tradition et changement dans les sciences*. Paris : Gallimard.
- Kynigos, C., & Lagrange, J.-B. (Eds.) (2014). Special Issue: Representing mathematics with digital media: Working across theoretical and contextual boundaries. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3).
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. New York : Basic Books.
- Maaß, K., Artigue, M., Doorman, L.M., Krainer, K., & Ruthven, K. (Eds.) (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM*, 45(6).
- Maschietto M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu local-global dans l'environnement des calculatrices*. Thèse de doctorat en co-tutelle. Université Paris Diderot - Paris 7 et Università degli studi, Turin.

- Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., Vandebrouck, F., & Wozniak, F. (Eds.) (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XV^e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
- Mathé, C., Barrier, T., & Perrin-Glorian, M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités*. Paris : L'Harmattan.
- Mesiti, C., Artigue, M., Hollingsworth, H., Cao, Y. & Clarke, D. J. (Eds.). (2021). *Teachers talking about their classrooms: Learning from the professional lexicons of mathematics teachers around the world*. London and New York : Routledge.
- Perrin-Glorian, M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In, C. Margolinas et al. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XV^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
- Sensevy, G. (2011a). *Le sens du savoir*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- Sensevy, G., & Bloor, T. (2020). Cooperative didactic engineering. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education. Second Edition* (pp. 141-145). New-York : Springer.
- Sensevy, G., Quilio, S., Joffredo-Le Brun, S., Morellato, M., & Lerbour, O. (2018). How teachers and researchers can cooperate to redesign a curriculum? In Y. Shimizu & R. Vithal (Eds.), *School Mathematics Curriculum Reforms? Challenges, Changes and Opportunities* (pp. 563-570). Tsukuba : University of Tsukuba.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Swam, M. (2020). Design research in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education. Second Edition* (pp. 192-195). New-York : Springer.
- Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (Eds.) (2019). *The 'Resource Approach to Mathematics Education*. New York : Springer.
- Terrisse, A. (Ed.) (2002). Didactique des disciplines scientifiques et technologiques : concepts et méthodes. *Revue Internationale des Sciences de l'Éducation*, 8.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2019). Didactics of mathematics in the Netherlands. In W. Blum, M. Artigue, M. A Mariotti, R. Sträßer & M. Van den Heuvel-Panhuizen, (Eds.), *European Traditions in Didactics of Mathematics* (pp. 57-94). New-York : Springer Open.
- Vilette, B., Fischer, J., Sander, E., Sensevy, G., Quilio, S., & Richard, J. (2017). Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP ? Le dispositif ACE. *Revue Française de Pédagogie*, 201(4), 105-120.
- Watson, A., & Ohtani, M. (2015). (Eds.), *Task Design in Mathematics Education. An ICMI Study 22* (pp. 311-320). New York : Springer