

Das proporções à proporcionalidade: o impacto crucial ou hegemonia da regra de três

From proportions to proportionality: the crucial impact or hegemony of the rule of three

De las proporciones a la proporcionalidad: el impacto crucial o la hegemonía de la regla de tres

Ousmane Alpha¹

École Normale Supérieure de Bamako - Mali

<https://orcid.org/0000-0003-4368-4986>

Saddo Ag Almouloud²

Universidade Federal do Pará - Brasil

<https://orcid.org/0000-0002-8391-7054>

Resumo

Este artigo de cunho teórico-documental tem por objetivo apresentar os resultados de uma pesquisa sobre a proporcionalidade, embasada nas abordagens ecológica e praxeológica, realizada em livros didáticos e currículos da república do Mali. Especificamente, por meio das várias mudanças ocorridas no período de 1960 a 2020, evidenciamos como alguns aspectos da proporcionalidade podem ter nascido, outros desaparecido, e como alguns outros puderam resistir à mudança. De forma mais específica ainda, analisamos qual era o papel da regra de três durante o período analisado, baseando-nos na abordagem ecológica, na teoria antropológica do didático e na tese de doutorado do primeiro autor. Por meio da análise de currículos e livros didáticos, constatamos que a regra de três continua sendo o modelo dominante no tratamento da proporcionalidade. De fato, de 1960 a 2020, a regra de três teve papel importante no tratamento de problemas de proporção e proporcionalidade. Aparece como a ferramenta essencial para resolver esses problemas (também nomeados em textos oficiais e manuais de "*problemas de regra de três*"). Apropria-se, assim, do ambiente que permite que as noções de proporção e proporcionalidade vivam e se autoalimentem. Isso reduziu o escopo de

¹ oalphaoumar@yahoo.fr

² saddoag@gmail.com

outras técnicas para testar a proporcionalidade de uma situação, apesar das muitas ferramentas disponíveis como técnicas, sem a necessidade do apelo à regra de três. A conceituação da proporcionalidade está intimamente ligada à compreensão da seguinte tecnologia: “Duas grandezas relacionadas são consideradas proporcionais se a multiplicação de um valor por um número em uma das duas grandezas leva à multiplicação do valor ligado pelo mesmo número na outra”. Uma vez dominada essa definição, por meio de resolução de problemas de proporcionalidade e de não proporcionalidade, podemos nos concentrar em tabelas, coeficientes, aditividade e aspectos lineares. Essas tabelas são artefatos que foram introduzidos com o advento da matemática moderna para permitir que os alunos vejam o aspecto linear da relação de proporcionalidade.

Palavras-chave: Proporcionalidade, Ecologia didática, Praxeologias matemáticas, Praxeologias didáticas, Regra de três.

Abstract

This theoretical-documentary article aims to present the results of a research on proportionality, based on ecological and praxeological approaches, carried out on textbooks and curricula of the Republic of Mali. Specifically, through the various changes that took place from 1960 to 2020, we show how some aspects of proportionality may have been born, others disappeared, and how some others could have resisted changes. More specifically, we analysed the role of the rule of three during that period, based on the ecological approach, the anthropological theory of the didactic and the doctoral dissertation of the first author. Through the analysis of curricula and textbooks, we found that the rule of three remains the dominant model in the treatment of proportionality. In fact, from 1960 to 2020, the rule of three played an important role in addressing problems of proportion and proportionality. It appears as the essential tool to solve these problems (also named in official texts and manuals of "rule of three problems"). Thus, it appropriates the environment that allows the notions of proportion and proportionality

to live and self-feed. This reduced the scope of other techniques to test the proportionality of a situation, despite the many tools available as techniques without the need to appeal to the rule of three. The concept of proportionality is intricately linked to the understanding of the following technology: “Two related quantities are considered proportional if the multiplication of a value by a number in one of the two quantities leads to the multiplication of the value connected to the other by the same number.” Once this definition has been mastered, by solving problems of proportionality and non-proportionality, we can focus on tables, coefficients, additivity and linear aspects. These tables are artifacts that were introduced with the advent of modern mathematics to allow students to see the linear aspect of the proportionality relationship.

Keywords: Proportionality, Didactic ecology, Mathematical praxeologies, Didactic praxeologies, Rule of three.

Resumen

Este artículo teórico-documental tiene como objetivo presentar los resultados de una investigación sobre proporcionalidad, basada en enfoques ecológicos y praxeológicos, realizada en libros didácticos y planes de estudio de la República de Mali. En concreto, a través de los diversos cambios que se produjeron entre 1960 y 2020, mostramos cómo algunos aspectos de la proporcionalidad pudieron haber nacido, otros desaparecieron y cómo algunos otros pudieron haber resistido los cambios. Más concretamente aún, analizamos el papel de la regla de tres durante ese período, a partir del enfoque ecológico, la teoría antropológica de la didáctica y la tesis doctoral del primer autor. A través del análisis de planes de estudio y libros didácticos, encontramos que la regla de tres sigue siendo el modelo dominante en el tratamiento de la proporcionalidad. De hecho, de 1960 a 2020, la regla de tres jugó un papel importante al abordar los problemas de proporción y proporcionalidad. Aparece como la herramienta imprescindible para solucionar estos problemas (también nombrada en los textos oficiales y

manuales de "regla de los tres problemas"). Así, se apropia del entorno que permite que las nociones de proporción y proporcionalidad vivan y se autoalimenten. Esto redujo el alcance de otras técnicas para probar la proporcionalidad de una situación, a pesar de las muchas herramientas disponibles como técnicas sin la necesidad de apelar a la regla de tres. El concepto de proporcionalidad está estrechamente relacionado con la comprensión de la siguiente tecnología: "Dos cantidades relacionadas se consideran proporcionales si la multiplicación de un valor por un número en una de las dos cantidades conduce a la multiplicación del valor conectado por el mismo número en el otro". Una vez dominada esta definición, resolviendo problemas de proporcionalidad y no proporcionalidad, podemos centrarnos en tablas, coeficientes, aditividad y aspectos lineales. Estas tablas son artefactos que se introdujeron con la llegada de las matemáticas modernas para permitir a los estudiantes ver el aspecto lineal de la relación de proporcionalidad.

Palabras clave: Proporcionalidad, Ecología didáctica, Praxeologías matemáticas, Praxeologías didácticas, Regla de tres.

Das proporções à proporcionalidade: o impacto crucial ou hegemonia da regra de três

Apesar do importante lugar ocupado pela noção de proporcionalidade tanto no ensino quanto no cotidiano, os alunos têm muitas vezes demonstrado domínio insuficiente ou até tardio dessa noção. Inúmeros estudos ao redor do mundo (Alpha, 2020, Hersant, 2001, Sokona, 1989, entre outros) em didática da matemática e nas ciências da educação, têm destacado os tipos de tarefas e as tarefas associadas que a alimentam, os tipos de problemas que seu ensino encontra mais frequentemente. Temos também os tipos de tarefas que fazem apelo a métodos de raciocínio que os alunos desenvolvem para resolver problemas de proporcionalidade. Entre tantas dificuldades, citamos: dificuldades em implementar o raciocínio adequado para apreender uma situação de proporcionalidade, preferência por procedimentos do tipo escalar em detrimento de procedimentos do tipo função que alinham a proporcionalidade com o conceito de função linear etc.

Ao focar nossas reflexões na proporcionalidade, escolhemos questionar os vínculos e aglutinantes que possibilitam alcançar uma articulação adequada entre situações de proporcionalidade e o conhecimento de referência, a função linear.

Neste artigo, veremos por intermédio das várias mudanças de currículos na república do Mali, como alguns aspectos da proporcionalidade podem ter nascido, outros podem ter desaparecido e alguns outros foram capazes de se manter resistindo à mudança. Especialmente vendo qual era o papel da *regra de três* durante o período analisado.

Nosso objetivo é apresentar os resultados de uma pesquisa, embasada nas abordagens ecológica e praxeológica, realizada em livros didáticos e currículos da república do Mali, evidenciando por meio das várias mudanças ocorridas no período de 1960 a 2020, como alguns aspectos da proporcionalidade podem ter nascido, outros podem ter desaparecido e alguns outros foram capazes de se manter resistindo à mudança. Especialmente, analisamos o papel da regra de três durante o período analisado.

Esta pesquisa em didática da matemática será essencialmente baseada na abordagem ecológica de Michèle Artaud (1998), na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1999) para conduzi-la e, no trabalho de Alpha (2020).

A análise ecológica de um objeto de conhecimento se organiza em torno de dois conceitos: o *habitat* que designa os lugares da vida e o ambiente conceitual desse objeto de conhecimento e o *nicho* que designa a função desse objeto no sistema de objetos com o qual interage.

A TAD está interessada em organizações matemáticas e organizações didáticas e considera que toda atividade humana consiste em realizar uma *tarefa* t de um determinado *tipo* T , por *meio* de uma *técnica* τ , justificada por uma *tecnologia* θ que ao mesmo tempo permite pensar, ou mesmo produzi-la, e que por sua vez é *justificável* por uma *teoria* Θ . Um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefa forma uma organização “praxeológica” (ou praxeologia) pontual. A palavra praxeologia é formada por dois termos gregos, práxis e logos, que significam, respectivamente, prática e razão. Ela reporta-se ao fato de que uma prática humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso, mais ou menos desenvolvido, de um logos que a justifica, a acompanha e que lhe dá razão. Um saber diz respeito a uma organização praxeológica particular, com uma certa “generalidade” que lhe permite funcionar como uma máquina de produção de conhecimento.

A praxeologia associada a um saber é a junção de dois blocos: saber-fazer (técnico/prático) e saber (tecnológico/teórico) cuja ecologia refere-se às condições de sua construção e vida nas instituições de ensino que a produz, utiliza ou transpõe. Consideram-se aqui as condições de “sobrevivência” de um saber e de um saber-fazer em analogia a um estudo ecológico: qual o habitat? Qual o nicho? Qual o papel deste saber ou saber-fazer na “cadeia

alimentar”)? Tais respostas ajudam na compreensão da organização matemática determinada por uma praxeologia.

Segundo Chevallard (1999), as praxeologias (ou organizações) associadas a um saber matemático são de duas espécies: matemáticas e didáticas. As organizações matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida numa em uma sala de aula e as organizações didáticas referem-se à maneira que se faz essa construção; sendo assim, existe uma relação entre os dois tipos de organização que Chevallard (2002a) define como fenômeno de codeterminação entre as organizações matemática e didática.

A seguir, tecemos algumas reflexões sobre os conceitos de proporção e proporcionalidade.

Conceitos de proporção e proporcionalidade

O objetivo desta seção é compreender algumas das questões levantadas pelas noções de proporção e proporcionalidade e lançar luz sobre seus aspectos epistemológicos: o saber sábio, o uso desse saber e a aplicação desses conceitos no ensino. Na verdade, é uma questão de dar sentido aos conceitos ensinados e identificar sua utilidade, sabendo para que são usados e como são ensinados. Isso nos levará a fazer uma breve apresentação do campo conceitual das noções, enfatizando os problemas e as classes de problemas em torno dos quais as situações-problema são construídas na escola primária.

A proporcionalidade é uma noção central nos problemas do cotidiano e nos currículos escolares na resolução de problemas ao longo do currículo da escola básica 1 (escola primária).

Em relação ao campo conceitual (Vergnaud, 1990, 1981) de proporções e proporcionalidade, consideramos que esses dois conceitos são centrais nos problemas da vida cotidiana e nos currículos escolares, na resolução de problemas relacionados a percentuais, escalas, velocidades médias ou conversões unitárias. Na verdade, eles permitem comparar grandezas (grandezas proporcionais ou inversamente proporcionais); fazer partilhas

proporcionais ou inversamente proporcionais, cálculos percentuais; planta e escalas, ampliações e reduções de figuras.

O conceito de proporcionalidade é um campo de problemas, com uma grande variedade de procedimentos de resolução e ferramentas semióticas. Do ponto de vista do ensino, caracteriza-se pelo longo período no qual é ensinado. De fato, esse ensino é iniciado no ensino fundamental e continua durante todo o segundo ciclo (alunos de 12 a 15 anos no Mali) e muitas vezes até no ensino médio (alunos de 15 a 18 anos) nas opções de formação em economia e contabilidade.

Nesta parte, primeiro elaboraremos um inventário dos tipos de problemas no campo da proporcionalidade e, em seguida, abordaremos os procedimentos de resolução e ferramentas semióticas utilizadas para uma grande classe de problemas. Apoiando-se em Alpha (2020), apresentamos os diferentes tipos de problemas no campo conceitual da proporcionalidade no que segue.

Problemas de proporcionalidade simples e direta (Vergnaud, 1990, Hersant, 2001, 2005)

(a) Os chamados problemas da "quarta proporcional"

Estes são os problemas em que temos uma proporção de 4 números dos quais 3 são conhecidos como ilustrado na figura 1.

Figura 1.

Esquema da quarta proporcional

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{a} & \rightarrow & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \rightarrow & ? \end{array} \quad \text{Ou} \quad \begin{array}{cc} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{c} & ? \end{array}$$

Tomamos o seguinte exemplo para ilustrar nosso ponto de vista: *4 pacotes de açúcar custam 1000 f CFA*³. *Quanto custam 10 pacotes?* Em situações como esta, temos dois casos de problemas:

³ O **franco CFA** (pronúncia: franco cê-efe-á) é uma moeda corrente usada em doze países africanos, anteriormente possessões francesas (Camarões, Costa do Marfim, Burkina Faso, Gabão, Benim, Congo, Mali,

- Um dos números é igual a 1: os problemas são chamados de multiplicação ou divisão. Os chamados problemas de divisão se enquadram em duas categorias: aquelas em que se trata de calcular "o valor de uma parte" e aquelas em que se trata de calcular "o número de partes".
- Um dos números não é igual a 1: os problemas são chamados de problemas de busca da quarta proporcional.

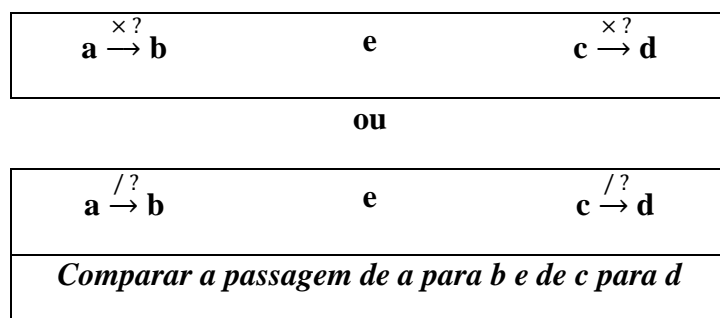
(b) Problemas com perguntas sucessivas

São do mesmo tipo que os problemas anteriores, mas aqui pede-se para determinar várias "quartas proporcionais". Para ilustrar esta situação, tomamos o seguinte exemplo: *4 pacotes de açúcar custam 1000 f CFA. Quanto custam 2 pacotes, 5 pacotes, 30 pacotes, 20 pacotes?*

(c) Problemas de comparação (Vergnaud, 1989): São dois casos de problemas envolvendo duas partes que compreendem um todo: comparação parte-parte e comparação parte-todo, como esquematizamos na figura 2.

Figura 2.

Esquema de problemas de comparação



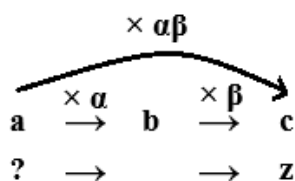
Para ilustrar esta situação, consideramos o seguinte exemplo: *Dois garrafas A e B são dadas, respectivamente. Na garrafa A, coloquei 4 copos de água e 2 cubos de açúcar. Na garrafa B, coloquei 12 copos de água e 10 cubos de açúcar. Qual é a garrafa onde a água é mais doce?*

República Centro-Africana, Togo, Níger, Chade e Senegal), sendo também usado na Guiné-Bissau (uma antiga colônia portuguesa) e na Guiné Equatorial (uma antiga colônia espanhola), perfazendo um total de catorze países. Atualmente, o franco CFA é dividido em duas moedas o *franco CFA central (XAF)*, e o *franco CFA ocidental (XOF)*. (in: https://pt.wikipedia.org/wiki/Franco_CFA)

Os problemas de proporcionalidade simples composta envolvem a composição de duas ou mais relações de proporcionalidade simples (Figura 3).

Figura 3.

Esquema da proporcionalidade simples



Este esquema pode ser aplicado no exemplo a seguir. *Com 100 kg de trigo, fazemos 75 kg de farinha e com 25 kg de farinha, fazemos 30 kg de pão. Qual é a massa de trigo necessária para fazer 450 kg de pão?*

Muitos problemas de proporcionalidade fazem apelo a uma grandeza G que depende de várias grandezas G_1, G_2 etc., e é proporcional a cada uma delas sendo as outras fixas. Ilustramos este caso como segue: *Se 12 bois comem 30 pacotes de feno em 15 dias, quantos bois serão necessários para comer 50 pacotes de feno em 10 dias?*

No que segue, dissertamos sobre os diferentes procedimentos em jogo na resolução de problemas de proporcionalidade.

Procedimentos para resolver problemas de proporcionalidade

Existem vários procedimentos para resolver os problemas de proporcionalidade. Não há um único método de resolução a ser preferido, razão pela qual é essencial que os alunos atendam e trabalhem todos os processos para que eles realmente tenham a oportunidade de escolher um dos processos. Mas, qualquer processo que fosse usado para resolver um problema de proporcionalidade, a praxeologia utilizada consiste em um tipo de tarefa; uma técnica; uma tecnologia para justificar essa técnica. Apresentamos no que segue os dez procedimentos que identificamos.

Procedimento 1: Razão interna ou razão externa

A razão interna ou razão escalar é estabelecida entre dois valores de uma mesma grandeza, enquanto a razão externa ou coeficiente de proporcionalidade permite passar de uma grandeza a outra. Esta técnica é justificada por uma tecnologia relacionada à noção de função linear definida por $y=kx$ onde y e x podem pertencer ou não ao mesmo conjunto e k uma constante positiva.

Procedimento 2: Relações de tipo aditivo: Este procedimento leva em conta as relações entre as medidas de uma mesma grandeza. Favorece as relações do tipo aditivo. Na educação básica, este procedimento permite o reinvestimento das "decomposições aditivas" de números inteiros (número c dado, trata-se de encontrar pares (a, b) de números tais que $c = a + b$) e introduzir o conceito de função f que verifica a seguinte propriedade: para todos os números a e b , $f(a + b) = f(a) + f(b)$ é dita aditiva.

Exemplo: *Iba anda de bicicleta, conta o número de voltas e mede as distâncias percorridas.*

Ele obteve os seguintes valores:

<i>Número de giros de roda</i>	<i>5</i>	<i>10</i>	<i>23</i>	<i>30</i>
<i>Distância percorrida em m</i>	<i>11</i>	<i>22</i>	<i>50.6</i>	<i>66</i>

Qual é a distância percorrida após 43 voltas.

A razão externa e a razão interna são dois números difíceis de manipular. Por outro lado, uma técnica simples e eficaz para resolver esse problema é aquela que usa a abordagem aditiva (propriedades lineares)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a + c + e}{b + d + f}$$

Esta técnica é justificada pela tecnologia relacionada às funções lineares:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Na verdade: $43 = 10 + 10 + 23$, então $f(43) = f(10) + f(10) + f(23) = 22 + 22 + 50.6 = 94.6$

Portanto, é perceptível que o método aditivo é mais criterioso do que o método multiplicador.

Procedimento 3: Relações de tipo multiplicação

Este procedimento leva em conta as relações entre os números relativos a uma mesma grandeza e favorece as relações do tipo multiplicativo. As ferramentas semióticas utilizadas são: expressões orais da forma "... vezes mais..." e "... vezes menos ..." bem como a construção de uma tabela com operadores.

Exemplo: 4 pacotes custam 1000 f. Quanto custam 8 packs? 2 pacotes?

8 pacotes custam 2 vezes 4 pacotes. Portanto, o preço a pagar é o dobro do preço de 4 pacotes. Da mesma forma, 4 pacotes equivalem a 2 vezes 2 pacotes. Portanto, o preço a pagar por 2 pacotes é a metade do preço de 4 pacotes. A construção de uma tabela com operadores (Tabela 1).

Tabela 1

Relação do tipo multiplicativo

Número de pacotes	4	8	2
Preço em franco CFA dos pacotes	1000	2000	500

Os chamados problemas de "multiplicação" correspondem ao caso especial em que um dos números é igual a 1 que não aparece no enunciado, mas que pode ser calculado imediatamente e fazê-lo aparecer na tabela.

Procedimento 4: Retorno à Unidade

Este procedimento, muitas vezes referido como "a passagem pela unidade", lembra práticas bem conhecidas como a "regra de três".

Procedimento 5: método de coeficiente de proporcionalidade

É referido como o "método de coeficiente de proporcionalidade" e tem uma diferença essencial em relação às anteriores que utilizam apenas relações entre medidas da mesma

grandeza (relações internas). Leva em conta a relação entre as medidas das duas grandezas (relações externas).

Procedimento 6: Técnica de produtos cruzados

A "técnica de produto cruzado" é inseparável da característica semiótica da tabela de quatro caixas conhecida como tabela de "proporcionalidade". Este procedimento é amplamente utilizado no ensino e sua justificativa matemática se traduz na função linear f que para qualquer número x associa o número kx .

Procedimento 7: A Regra de Três

Método antigo usado para resolver os problemas da vida cotidiana (na proporcionalidade), mas não é um método de aprendizagem matemática da proporcionalidade, ou seja, é apenas uma técnica, uma ferramenta para resolver um problema de proporcionalidade, mas não mostra as relações entre grandezas.

Para Pantoja (2017, p. 88)), as praxeologias da Regra de Três seriam ensinadas como saberes práticos, e, como tais, a aprendizagem se dava por repetição da práxis em contextos que permitiria atingir a arte dessas práxis. Nesta perspectiva, inferimos que a técnica da Regra de Três resulta em uma escrita de uma proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e a resolução por um produto em cruz que se justifica pela tecnologia relacionada ao trabalho com as proporções do tipo: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ (na proporção o produto de meios é igual ao produto dos extremos)

Exemplo: *Se 3 trabalhadores fizeram 24 metros de trabalho, quantos 11 trabalhadores farão no mesmo tempo?*

Para cumprir essa tarefa, fazemos uma tabela de valores representada pela tabela 1.

Tabela 2.

Tabela da regra de três

Número de trabalhadores	3	11	1
Número de metros	24	x	E

1º método: uso da teoria das proporções e, em seguida, a aplicação da regra: produto dos meios igual ao produto dos extremos: $\frac{24}{3} = \frac{x}{11}$, então, escrevemos $3 \times x = 24 \times 11$ e $x = \frac{24 \times 11}{3} = 88$. Assim, os 11 trabalhadores farão 88 metros.

Mas geralmente, usa-se o seguinte dispositivo: $\begin{matrix} 3 \rightarrow 24 \\ 11 \rightarrow x \end{matrix}$, então, temos $x = \frac{11 \times 24}{3} = 88$.

É vantajoso multiplicar-se antes da divisão, embora muitas vezes este produto não tenha significado matemático. Deve-se, portanto, encorajar os jovens estudantes a evitar uma aplicação mecânica do procedimento.

2º método: usamos a 2ª e 4ª coluna da tabela e aplicamos a regra de três após passar pela

unidade: $\begin{matrix} 3 \rightarrow 24 \\ 1 \rightarrow y, \text{ e encontramos então, } y = \frac{1 \times 24}{3} = 8? = 11 \times 8 = 88. \\ 11 \rightarrow ? \end{matrix}$

Este exemplo confirma o que Pantoja (2017) afirma que não há praxeologia de Regra de Três sem problemas que tratem de situações sobre contextos concretos específicos.

Procedimento 8: A técnica de proporções

Essa técnica é justificada pela seguinte tecnologia: Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então quaisquer que sejam os números k e k' , temos: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{ka+k'c}{kb+k'd}$.

Vale observar que o raciocínio proporcional pode ser usado para resolver muitos problemas matemáticos, como na tarefa: *Determine os números x e y tais que $x + y = 13$ e $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$.*

Esta tarefa faz apelo a um sistema de duas equações com duas incógnitas. No entanto, todas as ferramentas estão disponíveis para tratá-la usando proporções ou proporcionalidade.

De fato, $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y+2}{2}$ ou $\frac{x}{3} = \frac{z}{2}$, portanto, $z = y + 2$. Obtemos assim: $\frac{x}{3} = \frac{z}{2} = \frac{x+z}{3+2} = \frac{x+y+2}{2} = \frac{15}{2} = 3$. Então $x = 3$; $z = 6$; $y = 4$.

Procedimento 9: O método chamado "desvios constantes"

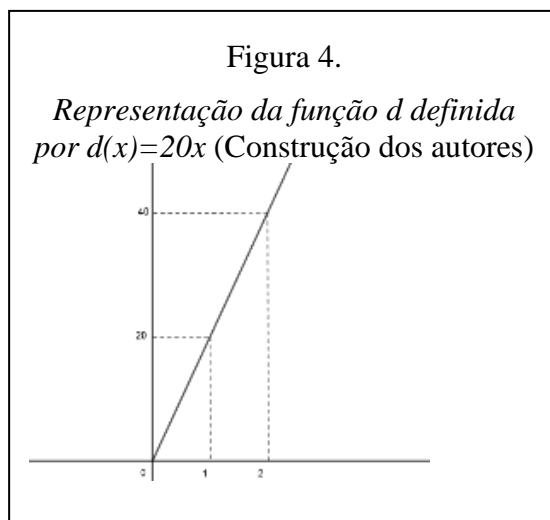
Traduz-se na seguinte propriedade: "se a, b, c são tais que $b - a = c - b$, suas imagens pela função linear f verificam à seguinte relação: $f(b) - f(a) = f(c) - f(b)$ ". Esta propriedade pode ser usada para lidar com alguns problemas de proporcionalidade, mas não pode ser usada para reconhecer uma situação de proporcionalidade, pois é verdadeira para todas as funções afins, definidas por $f(x) = ax + b$.

Procedimento 10: Usando um gráfico

O método gráfico é evocado nos 5º e 6º anos da escola básica para reconhecer se uma situação é proporcional ou não. Este procedimento explora o alinhamento em um plano cartesiano com a origem, dos pontos associados aos pares formados pelos elementos correspondentes de duas sequências numéricas proporcionais. A quarta incógnita é deduzida pela leitura gráfica (como na figura 4) em uma reta que passa pela origem do plano cartesiano. Essa técnica se justifica pela linearidade da função contínua f definida por $f(x) = ax$ que é *representada* no registro gráfico pelo alinhamento dos pontos com a origem do plano cartesiano. Envolve pedir aos alunos que vejam o alinhamento dos pontos com a origem do plano cartesiano no caso de uma situação de proporcionalidade. Mas seu principal interesse reside no reconhecimento de uma situação de não proporcionalidade: pontos não alinhados com a origem do marcador garantem que não estamos em uma situação de proporcionalidade.

Exemplo:

Um motociclista anda a uma velocidade constante de 20 km / h. Vamos estudar a distância d (em km) que ele percorre em função do tempo t (em h). Essas duas grandezas, distância e tempo, são proporcionais. O coeficiente de proporcionalidade das linhas é 20.



t	0.5	1	3
d	10	20	60

d é a função linear definida por: $t \rightarrow kt$, para todos os números a e b , temos:

a	b
$d(a)$	$d(b)$

é uma proporção de coeficiente $k=20$. $d(t)$

Geometria e proporcionalidade

A proporcionalidade é amplamente utilizada para resolver problemas de geometria. A técnica utilizada baseia-se na busca de um coeficiente multiplicador k (operador) justificado pela tecnologia da homotetia de razão k . Os problemas de geometria que utilizam a proporcionalidade incluem problemas de ampliação/redução, escalas, partilhas de um segmento em partes iguais, partilhas de medida de área de um triângulo em medidas iguais de áreas. Na geometria a ampliação não é adicionar, e reduzir, não é subtrair. Em ambos os casos, é necessária a preservação das formas e o respeito às proporções. Então, ampliar ou reduzir é multiplicar por um real positivo não nulo.

Exemplo: Em uma foto tia Sarah mede 4 cm e tio Ablo 5 cm. Após a ampliação da foto, Sarah mede 10 cm. Quanto Ablo mede então na foto ampliada?

Este modelo solicita o cálculo da 4ª proporcional, mas se olharmos para a variável relativa ao tamanho de Sarah em cm e tamanho de Ablo na mesma impressão, temos dois casos: $A = S + 1$ (modelo aditivo) e $A = 1,25 S$ (modelo linear). Assim, para defender a escolha do modelo realizado, pode-se utilizar técnicas de invalidação para refutar o modelo inadequado. Aqui o modelo aditivo não é apropriado porque, quando Ablo tem 1 cm de altura, Sarah teria medido 0 cm. O modelo linear justifica a ampliação por uma homotetia de razão 1,25.

Situações de não proporcionalidade

Em certas situações problemáticas, o professor deve fazer com que os alunos entendam que certas grandezas estão relacionadas, mas não proporcionais, como pode ser observado no

exemplo: “Ablo tem 9 anos e sua irmã mais nova, Nana, tem 3 anos. Ablo disse à irmã: “Serei sempre três vezes mais velho que você.” Ele está certo?”. A situação envolve grandezas relacionadas, mas sem relação de proporcionalidade; em um ano Ablo terá 10 anos e sua irmã terá 4. Agora 10 não é triplo 4. A grandeza “idade de Ablo” não é deduzida da “idade da irmã” pela multiplicação, mas pela adição da constante diferença de idades.

A altura e a idade *de um bebê* são grandezas relacionadas, mas não são proporcionais; A altura do bebê não dobra entre seu primeiro e segundo aniversários. A relação funcional entre as duas grandezas “idade” e “tamanho” não é linear.

A medida da *área de uma praça e o comprimento de lado*, são grandezas relacionadas, mas sem proporcionalidade; a medida da área quadruplica quando o comprimento do lado dobra. A relação funcional entre os dois tamanhos existe, mas não é linear, é de segundo grau.

Na próxima seção, tecemos reflexões sobre nosso Modelo Epistemológico de Referência.

Modelo epistemológico de referência (MER)

A partir de estudos históricos e epistemológicos do conceito de proporcionalidade, observamos que este objeto é estudado segundo dois modelos: a teoria das proporções e a teoria da aplicação linear. Nesta perspectiva, Hersant (2001), em sua tese intitulada “Proporcionalidade na educação obrigatória na França, de ontem até hoje” (tradução nossa), distingue cinco períodos no ensino da proporcionalidade na França. A autora conclui que a transposição didática do ensino da proporcionalidade evoluiu gradualmente de uma concepção analógica para uma concepção analítica, com o objetivo de aproximar o conceito de proporcionalidade do conceito de referência, a função linear.

Sokona (1989) propõe focar sua pesquisa em situações que permitam aos alunos dar sentido ao coeficiente de proporcionalidade e não apenas à sua determinação e uso; e ensinar os alunos a fazer a reconciliação “**valor unitário**” e “**coeficiente** de proporcionalidade”.

Essas duas perspectivas sobre a proporcionalidade, foram particularmente apontadas por Oliveira (2008) e Hersant (2001) em suas pesquisas. De fato, Hersant (2001, p. 28, tradução nossa) destaca que

A proporcionalidade é, em primeiro lugar, uma relação especial entre grandezas que pode ser traduzida por uma relação entre os valores dessas grandezas e, em seguida, por uma relação entre duas sequências numéricas por intermédios de suas medidas. A proporcionalidade entre duas grandezas pode ser entendida utilizando o modelo de proporção ou o modelo de aplicação linear.

A autora define o primeiro modelo da seguinte forma:

Uma proporção é a igualdade de dois relatórios (números). Os quatro números a , b , c , d , diferentes de zero, são em proporção quando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. a , b , c , d são os quatro *termos* da proporção. a e d correspondem a extremos, b e c , aos *meios*. A *quarta proporcional* refere-se ao quarto termo desconhecido de uma proporção da qual são dados três termos. Esta terminologia é justificada por uma antiga notação semiótica de proporções: $a:b::c:d$ que lê “ a está para b assim como c está para d ”. (Hersant, 2001, p. 21, tradução nossa)

Para o modelo da linearidade e as propriedades da aplicação linear, a autora ressalta que

Duas sequências numéricas são proporcionais se e somente se os termos de uma sequência forem as imagens dos termos da outra sequência por uma aplicação linear de coeficiente diferente de zero. Quando duas sequências numéricas U e V são proporcionais, há duas aplicações lineares (uma de coeficiente a e a outra de coeficiente $\frac{1}{a}$), associadas a essas sequências e dois coeficientes de proporcionalidade (Hersant, 2001, p. 27, tradução nossa)

Hersant (2001, p. 28, tradução nossa) fez uma análise comparativa desses dois modelos e mostra que

O coeficiente de proporcionalidade é comum a ambos os modelos e serve como uma ponte entre as duas teorias. Da mesma forma, a propriedade da linearidade, embora expressa com objetivos diferentes (razão, proporção/combinção linear), parece ser uma característica comum de ambas as teorias. No entanto, os objetos básicos desses modelos são diferentes (razão, proporção, extremos e meios para teoria de proporção e aplicação linear, função linear, imagem e antecedente para o modelo de aplicação linear).

Para a autora, a transposição didática da proporcionalidade supõe a escolha de um modelo entre os dois possíveis. No entanto, para resolver um problema de proporcionalidade, um dos dois modelos costuma ser mais eficiente do que o outro. Por exemplo, para problemas

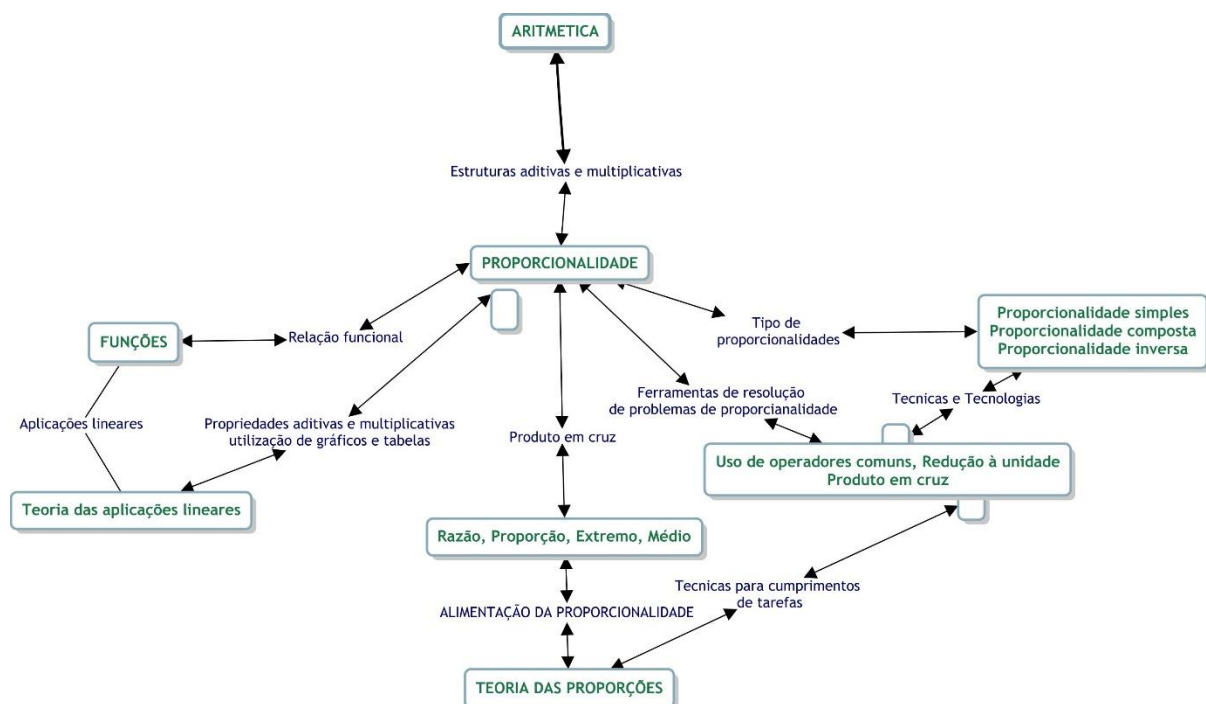
de aumento / diminuição de porcentagem, o uso da função linear permite calcular um preço final após uma sucessão de aumentos ou diminuições sem ter que calcular os preços resultantes de cada variação. Por outro lado, para resolver problemas de partilhas proporcionais, o modelo de proporções é mais adequado.

Em nosso MER (Figura 5), a teoria das proporções tem um papel fundamental para a análise dos currículos e de livros didáticos do ensino fundamental da república do Mali. A teoria das proporções baseia-se na técnica de produto cruzado justificada pela tecnologia intitulada "em uma proporção o produto de meios é igual ao produto dos extremos".

A técnica de “**Produtos Cruzados**” é um princípio simples e fundamental para a resolução de problemas que fazem parte de uma situação de proporcionalidade, como ilustramos no exemplo.

Figura 5.

Modelo Epistemológico de Referência (Autores, 2021)



Exemplo: Ablo, para ir ao seu local de trabalho distante de 10 km, levou 20 minutos para percorrer uma distância de 1,6 km. Ele gostaria de saber quanto tempo levaria para percorrer

os 10 km? (Se continuar mantendo bem seu ritmo, sabemos que a distância percorrida é proporcional ao tempo).

Vamos chamar de "X" o tempo que Ablo levará para viajar 10 km. Sabemos que para fazer 1,6 km, Ablo leva 20 minutos; para fazer 10 km, Ablo levaria X minutos. A distância é proporcional ao tempo, estamos, então, em uma situação de proporcionalidade que representamos na tabela 3.

O objetivo da tarefa é, portanto, completar a tabela de proporcionalidade encontrando X. Usaremos a propriedade das proporções: temos a igualdade das razões $\frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$ para cada coluna da tabela, ou seja: $\frac{1,6}{20} = \frac{10}{X}$, daí temos $1,6 \times X = 20 \times 10$, portanto $X = \frac{20 \times 10}{1,6} = 125$ minutos. Ablo levará 125 minutos para viajar 10 km.

Tabela 3.

Tabela de proporcionalidade

Tempo (mn)	20	X
Distância (km)	1,6	10

Este procedimento de cálculo é denominado de técnica de cálculo de Produtos Cruzados, que pode ser equiparado à regra de três, uma redução na unidade ou à busca do coeficiente de proporcionalidade que também introduzirá a noção de função linear. Na verdade, podemos proceder da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} 1,6\text{km} \rightarrow 20\text{mn} \\ 10\text{km} \rightarrow X\text{mn} \end{array}$$

$$1,6\text{km} \rightarrow 20\text{mn}$$

$$\text{Então } X = \frac{20 \times 10}{1,6} = 125\text{mn (regra de três)} \quad \text{ou}$$

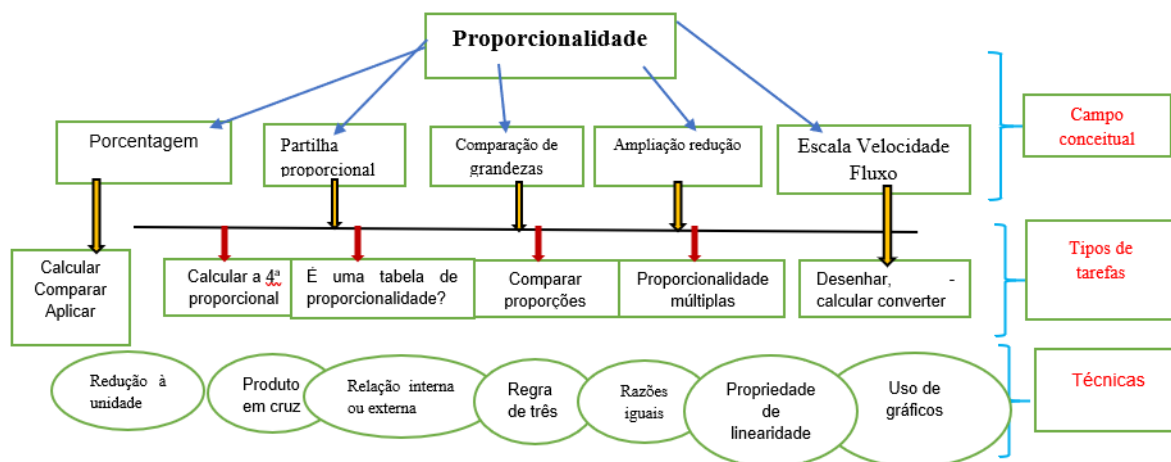
$$1\text{km} \rightarrow \frac{20}{1,6} = 12,5\text{mn}$$

$$10\text{km} \rightarrow 10 \times 12,5\text{mn} = 125\text{mn}$$

Esta técnica pode ser traduzida em uma redução da unidade ou a busca pelo coeficiente de proporcionalidade $k = 12,5$, daí a introdução da função linear de lei de formação $f(x) = 12,5x$.

Figura 6.

Tipo de problemas associados à proporcionalidade (adaptada de Alpha, 2020)



À luz de nosso MER, apresentaremos na figura 6, os tipos de problemas associados à proporcionalidade que discutimos anteriormente, assim como os tipos de tarefas e técnicas que permitem cumprir essas tarefas.

Tendo discursado sobre nosso MER, no que segue, apresentamos nosso estudo da dimensão institucional (econômica e ecológica) dos conceitos de proporção e proporcionalidade.

Estudo da dimensão institucional dos conceitos de proporção e proporcionalidade

Nesta parte, destacaremos a abordagem que a instituição escolar maliana defende para adquirir a noção de proporcionalidade pelos alunos do ensino fundamental e, em seguida, tentar prestar contas para os propósitos atribuídos ao seu ensino. A análise dos conteúdos e objetivos específicos do ensino da proporcionalidade deve nos revelar as escolhas da instituição, do ponto de vista matemático e metodológico, em relação ao ensino da proporcionalidade. Essas análises nos permitiram explicar o ensino atual da proporcionalidade no sistema escolar malinês e identificar alguns de seus efeitos. Focaremos os currículos e manuais didáticos de 1960 (ano da independência do Mali) a 2020.

Lembramos que o ensino fundamental do Mali é composto atualmente de um primeiro ciclo de 6 anos (do 1º ao 6º ano) e um segundo ciclo de três anos (7º, 8º e 9º anos)

a) Estudo da proporcionalidade nos currículos prescritos e manuais didáticos de 1960 a 2020 sobre proporcionalidade

O sistema educacional do Mali, como muitos países, sofreu mudanças no currículo após as diferentes reformas de saberes a ensinar. Assim, o currículo de matemática do Mali no primeiro ciclo da educação básica sofreu mudanças em três períodos principais: o período da "matemática clássica" de 1960 a 1970, o da "matemática moderna" de 1970 a 1989 e o da "matemática ativa" de 1990 a 2020.

Cada período tem seus currículos prescritos e manuais escolares que analisaremos para descobrir qual é a evolução do ensino da proporcionalidade no primeiro ciclo da educação básica de 1960 a 2020.

A teoria das proporções, alavanca de nosso Modelo Epistemológico de Referência (MER), será utilizada para analisar a diferença entre diferentes períodos, comparando-a ao modelo de cada período, para evidenciar a ecologia da proporcionalidade realizada de 1960 a 2020, após análise das organizações matemáticas e didáticas de cada período. Estudos (Hersant, 2001, Alpha, 2020, por exemplo) mostram que há muitas vezes uma discrepância entre o objeto matemático presente no currículo e o observado nas aulas. É então legítimo perguntar por que essa discrepância e interpretações de textos oficiais? Como é a transição do programa para a sala de aula através dos livros didáticos, para um determinado objeto matemático? Quais são as diversas adaptações necessárias para essa passagem? É em resposta a essas questões que é importante analisar currículos novos e antigos e livros didáticos sobre o conceito de proporcionalidade.

Estudo dos currículos

Nesta seção, trata-se de olhar e analisar a evolução da noção de proporcionalidade nos diferentes campos da matemática (numérico, funcional e geométrico) e nos diferentes registros de representação semiótica (Duval, 1995) (linguagem, grandeza, números, figuras geométricas, gráficos e tabelas) em relação aos programas de 1960 a 2020 e aos guias dos professores.

Adotamos as abordagens ecológica e praxeológica desenvolvida por Chevallard (1992) e Artaud (1998) para análise dos currículos. A abordagem ecológica enfoca no exame de habitats e nichos do conceito de proporcionalidade na instituição em estudo. Nessa perspectiva, procuramos respostas as seguintes questões: Quais aspectos da proporcionalidade aparecem nas diferentes instituições? De que forma ou para que interesse? Quais objetos matemáticos a proporcionalidade alimenta, e de quais recebe alimentos para sobreviver no ecossistema educativo do Mali?

A abordagem praxeológica deve nos permitir responder às seguintes perguntas: Quais tipos de tarefas estão relacionadas à proporcionalidade? Quais são as técnicas associadas a cada tipo de tarefa? Quais são, se possível, as tecnologias e teorias correspondentes? Quais são os ostensivos e não ostensivos⁴ que são mobilizados para os tratamentos da proporcionalidade?

(1) Análise dos currículos - Período de 1960 a 1970 e de 1970 a 1989: período da regra de três

Do 1º ao 4º ano e em todos os programas do período 1960 -1989 nem a regra de três nem a proporcionalidade são explicitamente mencionadas.

Nos 5º e 6º anos, os conceitos de proporcionalidade são estudados em duas áreas:

⁴ Bosch e Chevallard (1999, apud Almouloud, 2007, p. 119), os *objetos ostensivos* são aqueles que têm uma natureza sensível, uma certa materialidade, uma realidade perceptível para o sujeito e podem ser manipuláveis na realização da atividade matemática. Os objetos *não-ostensivos* são todos os “objetos” que, como as ideias, as instituições ou os conceitos, existem institucionalmente sem que, no entanto, eles sejam vistos, ditos, escutados, percebidos ou mostrados por conta própria, só podem ser evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos que lhes são associados, tais como uma palavra, uma frase, um gráfico, uma escrita, um gesto, ou todo um discurso

- **Na Aritmética** onde os temas estudados são: frações, regra de três simples, percentual, partições iguais e desiguais, tanto por cento e cálculo de juros.

- **No Sistema métrico** em que os temas estudados são: escalas, planos de mapas, problemas práticos da vida cotidiana. Mas no 6º ano, enfrentamos um terceiro setor intitulado Problemas da vida cotidiana em que os temas *estudados* são: Movimento uniforme - velocidade- Aumento percentual ou diminuição de uma quantidade - Percentual- juros simples- Escala e mapa-planos.

(2) Período de 1990 a 1996: período de situações de proporcionalidade

Durante esse período e a partir das aulas introdutórias: 1º e 2º anos, o aluno começa a fazer atividades de modelagem como:

a) **Atividades pré-numérica** em que já há o desejo de fazer com que o aluno entenda o conceito de topologia, fazer demonstrações e raciocínio lógico. Essas atividades são baseadas em tarefas relacionadas aos seguintes temas: *Vocabulário para orientação no espaço (frente, costas, esquerda, direita, em, acima, abaixo); os exercícios de classificação, arranjos, comparação de grupos de objetos; o significado das palavras: "mostrar", "e".*

b) **Contagem:** Neste setor exige-se a construção do conhecimento sobre as quatro operações aritméticas: *a realização de operações de multiplicação e divisão; Multiplicação e divisão por 2, 3, 4 e 5 (2º ano). No 3º ano*, aprofunda-se as técnicas de multiplicação e divisão e estuda-se as medidas de tempo. **No 4º ano**, estuda-se quatro setores que podem equipar a proporcionalidade: Aritmética (Sentido e técnica de multiplicação por 2,3, 0 intercalados), Sentido e técnica de divisão (por 10, por 100, por 2 dígitos); Medidas (o metro, o litro, o grama (seus múltiplos e sub múltiplos), Medidas de tempo (ano-mês-semana-dia-hora-segundo); Geometria (Ampliação de uma figura em um quadriculado); Proporcionalidade (Descoberta de situação de proporcionalidade na vida cotidiana, Trocas (2 por 1, 6 por 2,), correspondência

peso, preço, Uso de tabelas de valores, Descoberta de propriedades de linearidades a partir de exemplo.

No 5º Ano a proporcionalidade é estudada a partir de Situações de proporcionalidade e contraexemplos; Tabelas de valores; Regra de três; Sua relevância e o limite de seu significado - Tanto percentual- Percentual; Cálculo de juros; Aplicação da proporcionalidade à medição: perímetro (retângulo quadrado, círculo) - Contraexemplo de áreas e volumes - compartilhamento igual, desigual e proporcional - Intervalos - Escalas-planos-cartões-problemas práticos. Sugere-se também estudá-la a partir de problemas que envolvem situações cotidianas que utilizam a proporcionalidade como ferramenta, entre outras coisas.

No 6º ano, além das conquistas do 5º ano, estuda-se a proporcionalidade em **geometria** (Ampliação, reduções de figuras geométricas planas); no estudo de coeficiente de proporcionalidade; utilização de propriedades de linearidade em uma tabela de proporcionalidade; na representação gráfica ponto a ponto de uma situação de proporcionalidade.

(3) Período após 1996: período de problemas concretos-proporcionalidade

Durante esse período, os objetivos de ensino/aprendizagem são conhecidos e citados e, além disso, tem-se um espaço inteiramente reservado à proporcionalidade. Em relação aos problemas *de proporcionalidade em classes* de iniciação (**1º e 2º ano**), são estudados temas que servem de ferramentas para a introdução do conceito de proporcionalidade. É o caso, por exemplo, do vocabulário que permite a orientação no espaço (frente, atrás, esquerda, direita, acima); os exercícios de classificação, arranjos, comparação de grupos de objetos; O significado das palavras "mostrar" e "e"; A implementação de operações de multiplicação e divisão; Multiplicação e divisão por 2, 3, 4 e 5.

No 3º ano, aprofunda-se as conquistas das aulas de iniciação que permitem equipar a proporcionalidade nas seções Aritmética e Medição do Tempo. No 4º ano a proporcionalidade

é tratada pela primeira vez e é aí que começa o interesse por situações-problema e modelagem matemática, especificando os objetivos e conteúdo de ensino/aprendizagem. Os objetivos são: realizar transformações geométricas em figuras (ampliação e reduções); analisar uma situação-problema e usar um modelo esquemático para resolvê-la. O conteúdo prescrito é essencialmente uma introdução à proporcionalidade na resolução de problemas, como, por exemplo, as ampliações reduções de figuras representadas em folhas quadriculadas.

Nos 5º e 6º anos, o objetivo é consolidar as conquistas das classes anteriores e estudar as propriedades da proporcionalidade e técnicas para a resolução de problemas de proporcionalidade. Em particular, trata-se de consolidar as aprendizagens sobre as transformações de figuras, ou seja, fazer ampliações e reduções de figuras, reconhecer uma situação de proporcionalidade, reforçar as técnicas de análise e resolução de situações-problema, dominar as técnicas de análise e resolução de uma situação de proporcionalidade, interpretar e resolver uma situação de proporcionalidade.

Em relação ao conteúdo prescrito, recomenda-se que os alunos trabalhem problemas envolvendo o uso da proporcionalidade, em especial, situações-problema relacionadas ao cotidiano, à contagem, geometria e medição. No que diz respeito à proporcionalidade, recomenda-se propor situações que envolvem uso de tabelas de valores, coeficientes de proporcionalidade, a propriedade da linearidade, a regra de três, partilhas iguais, representações gráficas, planos de escala, percentuais (taxa de juros-capital), velocidade média, débito. O programa também recomenda deixar os alunos trabalharem em tarefas que envolvam ampliação e redução de algumas figuras planas (quadrado, retângulo em um determinado relatório).

Análise do programa atual – 1996 - 2020

A renovação da educação matemática na república do Mali faz parte do quadro geral de adaptação da educação às realidades nacionais, mas também para uma harmonização sub-

regional dos ensinamentos. Deve-se lembrar que, do ponto de vista da política educacional, a opção de fortalecimento da formação científica tem sido claramente expressa e que, do ponto de vista pedagógico, o antigo currículo nas escolas primárias não responde mais às realidades atuais. Por isso, o novo currículo leva em conta o ambiente físico, cultural e socioeconômico da criança e foca na própria atividade do aluno.

Nesta perspectiva, o objetivo do ensino de matemática no ensino fundamental é possibilitar aos alunos desenvolver uma metodologia e estratégias para resolver problemas, para estabelecer conexões entre o problema e as situações já encontradas, utilizando um repertório de conhecimentos, técnicas e procedimentos adequados. O aluno também deve usar seu pensamento intuitivo, apresentando estratégias de resolução, usando um raciocínio adequado; validando a solução para o problema, realizando uma auditoria comparando sua solução com os dados do problema.

O currículo oficial consiste em vários capítulos, alguns são dedicados à proporcionalidade. A interpretação do texto do programa cabe aos autores do livro didático e aos professores. Aqui vamos analisar os conteúdos programáticos de 4º, 5º e 6º anos sobre proporcionalidade.

O Conceito de Proporcionalidade é visto pela primeira vez no 4º ano sob o título "A Abordagem da Proporcionalidade", e tem por objetivo levar, entre outras coisas, o aluno a realizar ampliações e reduções de figuras, mas também a imaginar uma situação-problema e a usar um modelo esquemático para resolvê-la.

No 5º ano, a proporcionalidade é essencialmente estudada, no 2º parágrafo do Capítulo IV: " Problemas - Proporção". Os elementos estudados são: Tabelas de proporcionalidade (organização de dados), coeficiente de proporcionalidade, regra de três, partições em partes iguais, representações gráficas, plano, escala, percentuais. O objetivo principal é levar, entre outras coisas, o aluno a consolidar as conquistas sobre as transformações de figuras (ampliação

e redução de figuras). O aluno deve reconhecer uma situação de proporcionalidade e fortalecer as técnicas de análise e resolução de problemas.

Os alunos do 6º ano devem consolidar, no que diz respeito à proporcionalidade, os mesmos conteúdos do 5º ano.

Algumas conclusões sobre o estudo dos currículos

Uma análise dos objetivos e conteúdos dos programas, nos permite concluir que a abordagem defendida pelo programa oficial se baseia essencialmente em três atividades fundamentais: descobrir, projetar, aplicar e direcionar o aluno para uma abordagem experimental na medida em que essas atividades abrangem os termos observação, conjecturas, verificação. A primeira atividade nesse processo é a descoberta resultante da observação dos alunos. Este ponto parece-nos ser uma das características inovadoras do currículo atual. Explorar, experimentar e descobrir é uma escolha institucional explicitamente declarada, ou seja, os alunos devem usar, entre outras coisas, instrumentos de desenho, material padrão ou estruturado para testes em casos específicos. Outro objetivo importante é desenvolver no aluno sua capacidade de elaborar uma estratégia para justificar ou refutar um resultado, resolver um problema ou produzir um contraexemplo.

Analisando os currículos de 1960 a 2020, podemos classificar o ensino da proporcionalidade no primeiro ciclo da educação básica em três períodos principais: o período da regra de três de 1960 a 1989, o período da proporcionalidade entre 1989 e 1996 e o período de problemas concretos de 1996 a 2020. Mas, independentemente do período, a proporcionalidade ou a regra de três são usadas apenas a partir do 4º ano. Antes desse nível estudam-se certos conceitos que podemos chamar de noções de pré-proporcionalidade, ou seja, aquelas que permitem a introdução da proporcionalidade, como as noções de duplo, metade, classificação, as estruturas das quatro operações e seu significado, frações, medidas etc.

Por meio da análise de todos esses currículos prescritos, constatamos que a noção de proporcionalidade tem sido muito recente no conteúdo dos programas de 1989; a regra de três é estudada e sempre foi estudada e aplicada em todos os programas de 1960 a 2020; e **a noção de proporção não é realmente abordada**: nada se fala sobre a noção de grandeza, de razão e proporção.

Os livros didáticos para o ensino de matemática foram mencionados nos currículos até 1989, mas livros didáticos e guias instrucionais foram disponibilizados aos professores pelo CONFEMEN (Conferência dos ministros da educação nacional de países com ações divididas em francês) para toda a sub-região a partir da década de 1990.

A proporcionalidade foi ensinada nos seguintes campos e períodos: aritmética, sistema métrico, geometria, proporcionalidade, problemas. Assim, de 1960 a 1989, os conceitos de proporcionalidade são estudados no campo aritmético, mas os conceitos de escala-plano-mapa são estudados como parte de um sistema métrico. De 1989 a 1996, a proporcionalidade assumiu a autonomia do domínio. Na aritmética estuda-se frações. Após 1996, a proporcionalidade é introduzida no campo de problemas-proporcionalidade.

Em 2012, a república do Mali reformulou o currículo sem qualquer mudança real no conteúdo matemático. Neste currículo, os três níveis de escolaridade mudaram de nome e foram denominados de nível 1 (1º e 2º), nível 2 (3º e 4º), nível 3 (5º e 6º). Além disso, o fim do ciclo não é mais sancionado por um exame. Ao final deste programa, são especificados a atuação do professor, os conhecimentos necessários e as habilidades a serem adquiridas pelos alunos. O espírito deste currículo é ter uma iniciação em na matemática por intermédio de atividades concretas usando-se o método de modelagem, fazer uma síntese das situações-problemas propostas e finalmente institucionalizar o conceito. À luz da leitura dos objetivos e conteúdos do currículo prescrito de 2012, concluímos que a abordagem defendida pelo programa oficial

se baseia essencialmente em três atividades fundamentais: descobrir, projetar, aplicar e, a técnica de resolução mais utilizada permanece a "regra de três".

Estudo ecológico de livros didáticos de 1960 a 2020

Nesta seção, destacaremos os aspectos essenciais da relação institucional (antiga e presente) dos livros didáticos malianos relativos à proporcionalidade. A questão é quais escolhas os autores dos livros didáticos fazem em relação aos programas e seu impacto sobre o conhecimento a ser ensinado. Para responder a essa pergunta, faremos uma análise praxeológica e ecológica dos livros didáticos dos dois primeiros ciclos da escola básica (1º ciclo e 2º ciclo) do Mali entre 1960 e 2020.

Como já destacamos, esta análise tem por fundamentos teóricos, a abordagem ecológica (Artaud, 1998) e a TAD (Chevallard, 1992, 1999). O estudo se focaliza em dois eixos: analisamos, por um lado, os textos dos manuais relativos às variações dos currículos prescritos e, por outro lado, a predominância de uma técnica que faz parte de um modelo epistemológico de referência dominante.

A análise ecológica permite identificar os diferentes contextos de vida do objeto e a análise praxeológica permite revelar como os objetos devem ou podem ser manipulados por alunos e professores. O livro didático deve ser não apenas uma interpretação concreta e eficaz do currículo oficial, mas também uma ilustração de uma abordagem dos objetivos específicos estabelecidos pela instituição para ensinar o conceito de proporcionalidade. A análise do livro didático deve, portanto, permitir-nos examinar como os textos oficiais são colocados em funcionamento nas obras escolhidas. Gostaríamos de explorar, em particular, a abordagem utilizada para introduzir o conceito de proporcionalidade, seus aspectos e a abordagem didática utilizada para alcançar os objetivos pretendidos. Para isso, primeiro tecemos reflexões a parte do Curso realizando uma análise de alguns de seus componentes: atividades, definições,

propriedades, demonstrações, exemplos e exercícios resolvidos. Em seguida, focalizamos a parte exercícios.

1. Análise de livros didáticos antigos (chamaremos livros didáticos antigos publicados antes de 1980)

De 1960 a 1989, os livros de matemática usados para o primeiro ciclo do ensino fundamental são exclusivamente livros didáticos franceses publicados todos antes da independência do Mali em 1960. Esses manuais foram mencionados nos programas até a década de 1980 (Tabela 3).

Todos esses manuais não abordam explicitamente a proporcionalidade. Por outro lado, são levadas em conta noções de proporcionalidade, como a comparação de grandezas, as noções de razão, frações, quociente, ampliação, redução, percentual, preço, escalas, mapas, planos, muito por cento.

Tabela 4

Livros escolares daquela época

Para as 3^a e 4^a séries	Para as 5^a e 6^a
<ul style="list-style-type: none"> • Vamos estudar juntos de 100 a 100.000 - CE-IPAM (ISTRA) • Calculando dia após dia- CE1 e CE2 (Hatier) • Cálculo C.E por J. Auriol e M. Séguier (Hachette) • Passos de 100 a 10.000 por H. Morgenthaler (ISTRA) • Arithmetic por Edition Macaire. 	<ul style="list-style-type: none"> • Vamos estudar juntos sistema métrico aritmético, geometria, cm1 e CM2-IPAM (ISTRA) • Cálculo dia após dia- CM1, por M. Benhaïm e A. madaud (Hatier) • Cálculo quociente cm. Coleção Bodard Lagoutte (Nathan) • Cálculo CM1 e CM2 por PH. Pautrault (F. Nathan) • Os passos do cm1 por H. Morgenthaler (ISTRA)

Em todos esses manuais (livro do aluno e guia do professor) antigos analisados constatamos que os conceitos de proporção e proporcionalidade não são estudados, muito menos a técnica do produto cruzado. No entanto, são estudadas as técnicas da regra de três direta, a regra de três inversa e o conceito de grandezas proporcionais, bem como partilhas e escalas.

Estudo dos livros didáticos atuais (1990-2020)

Para harmonização de currículos e métodos de ensino, o CONFEMEN (Conferência de ministros da educação de países com o francês compartilhado) desenvolveu um guia para o professor e um livro didático chamado "livro do aluno". As atividades do livro do aluno são gradualmente projetadas para o mesmo conceito.

O manual é composto por seis volumes: um para cada classe do fundamental. Cada capítulo tem dois títulos: Uma seção *de Curso* com uma parte o estudo de conceito, intitulada “*Descobrir*” e uma parte de institucionalização da noção, intitulada “Vamos *Aprender*”. A seção do Curso inclui: atividades para permitir que os alunos desenvolvam sua capacidade de pesquisar, experimentar, modelar, especular e demonstrar. O segundo é o reservado para Exercícios e Problemas onde há exercícios *típicos* do curso, exercícios de pesquisa e problemas. Os **exercícios e problemas** devem permitir que os alunos mobilizem suas habilidades de forma independente.

A análises prévias **dos livros didáticos atuais** nos leva à ideia de que o projeto de proporcionalidade do ensino proposto é insatisfatório. Apresentamos algumas das razões das principais fraquezas que identificamos. A primeira diz respeito à falta de problematização. A análise da seção curso não revela qualquer forma de problematização da noção de proporcionalidade. Em todas as atividades do manual, os objetivos não são explicados e os resultados não são comentados e/ou interpretados. A segunda fraqueza é a relação do manual com os objetivos do currículo. Observamos que a abordagem implementada no livro didático não é de natureza experimental e, portanto, não está alinhada com os objetivos do currículo. A terceira fraqueza está na ausência de trabalho sobre raciocínio matemático. Ao contrário do que é exigido pelo currículo oficial, o livro não parece dar espaço específico aos modos de raciocínio matemático, ou seja, há falta de atividades de exploração e pesquisa baseadas em observação, conjecturas e verificação.

O estudo dos "Exercícios - Problemas" permite classificar os exercícios em termos de tarefas de acordo com a seguinte tipologia apresentada na tabela 4.

Tabela 5.

Os tipos de tarefas identificadas a partir da análise de livros didáticos

Tipo de tarefas	Pelo 4º ano	Pelo 5º ano	Pelo 6º ano
T ₀ - Multiplicação de uma magnitude por um número positivo não-zero	Abordagem à proporcionalidade: 3 exercícios e 7 problemas tipo T ₀		Proporcionalidade: 2 exercícios e 3 problemas com escolha de procedimentos tipo T ₁ , T ₂ , T ₃ e T ₁ '
T ₁ - Usando o relatório externo	<ul style="list-style-type: none"> • Uso de tabelas de proporcionalidade: 5 exercícios e 5 T₁ problemas • Propriedades da proporcionalidade: 3 exercícios do tipo T₁ 		
T ₁ ' - Uso de coeficiente de proporcionalidade ou reverso (que também uma razão externa)		<ul style="list-style-type: none"> • Proporcionalidade: 6 exercícios tipo T₁' • Proporcionalidade-Escala: 5 exercícios do tipo T₁' • Aumento e Redução de Figura: 6 Exercícios Do tipo T₁' 	Aumento e Redução de Figura: 2 Exercícios e 3 T ₁ ' Problemas
T ₂ - Uso de produto interno	Propriedades de proporcionalidade, 7 problemas do tipo T ₂		
T ₂ ' - Uso de produto interno com multiplicação por k ou 1/k com k>0			
T ₃ - Uso da linearidade		Proporcionalidade: 3 exercícios T ₃	
T ₄ - Alinhamento de pontos à direita que passa pela origem do marcador.		Proporcionalidade-representação gráfica: 3 exercícios T ₄	Proporcionalidade - Representação gráfica: 2 exercícios e 4 T ₄ problemas
T ₅ - Desconto entre produtos ou unidades		Proporcionalidade - Regra de três: 3 T ₅ exercícios Proporcionalidade-percentageal: 3 T ₅ exercícios, mas com a possibilidade de uso de outros procedimentos	<ul style="list-style-type: none"> • Proporcionalidade - Regra de três: 2 exercícios e 4 problemas de tipo T₅ • Compartilhamento proporcional: 3 exercícios de tipologia de sua escolha

Resumimos os resultados de diferentes tipos de exercícios e problemas na tabela 5.

Tabela 6

Diferentes tipos de proporcionalidade

	T₀	T₁	T_{1'}	T₂	T₃	T₄	T₅	Escolha gratuita	Total
Exercícios	3	13	21	2	5	3	8	8	63
Problemas	7	5	3	7	0	0	4	4	30

Nesta tabela, constatamos que as tipologias T_1 - Uso da razão externa (13) e T_1' - Uso do coeficiente de proporcionalidade ou coeficiente reverso (21) é o mais frequente e isso é explicado pelo fato de que nos livros didáticos e nas práticas de classe as situações dadas são aplicações de proporcionalidade como percentual, ampliação de escala e redução de valor, todos os quais utilizam o coeficiente de proporcionalidade e seu inverso. Em seguida, a tipologia T_5 - Produto cruzado ou redução por unidade (8) vem na terceira posição porque é muito utilizada em tabelas de proporcionalidade. Por outro lado, as tipologias T_2 - Uso do produto interno (2) e T_2' - O uso do produto interno com multiplicação por k ou $1/k$ (com k não nulo) não são aplicados.

Nessa parte de Exercícios-Problemas, listamos o modelo de exercícios típicos bastante presentes no "livro do aluno" (e geralmente bastante trabalhado em sala de aula) e as razões para sua frequência. Ao contrário dos textos oficiais, o manual não parece favorecer a abordagem crítica, em especial a produção de contraexemplos e a prática da argumentação. Ele simplesmente indica um procedimento e aplica-o aos exercícios; raramente o aluno usa seu conhecimento anterior ou intuitivo.

As questões matemáticas frequentemente abordadas neste manual são: Reconhecer uma situação de proporcionalidade; construir uma tabela de proporcionalidade; calcular a 4ª proporcional. A pergunta é frequentemente feita sobre o que o aluno pode aprender com certos exercícios. Em nosso ponto de vista, um exercício deve proporcionar ao aluno a oportunidade de mobilizar e consolidar conhecimentos antigos e/ou de aprendizagem e, eventualmente, construir novos conhecimentos. Também é sabido que para ajudar o aluno a aprender a fazer

matemática, é importante colocá-lo em situações em que ele será levado a pensar e/ou produzir em vez de recitar e/ou reproduzir.

Nos exercícios e problemas desses livros didáticos, os objetivos não são explicados e as perguntas são organizadas para que o aluno só esteja fazendo rotina. O modelo de exercício mais comum é aquele que usa T_1 , ou seja, o coeficiente de proporcionalidade e seu inverso. Acreditamos que isso se justifica, de acordo com os autores do manual, pelo propósito da proporcionalidade que é sua aplicação no cotidiano e não proporciona sentido ao coeficiente de proporcionalidade para já estabelecer a noção de função linear.

Quanto à resolução de problemas, nossa análise mostra que há uma tendência nos exercícios e problemas propostos pelo manual para o uso de métodos que podem ser comparados ao efeito Topázio e ao uso indevido da analogia (Brousseau, 2003). Na maioria das vezes, os enunciados são formulados de tal forma que a resposta esperada nada mais é do que o conteúdo designado pela pergunta. O mesmo estilo de enunciado é então reutilizado para fazer um modelo padrão.

Apesar de, em alguns livros, haver proposta de situações-problema de proporcionalidade e de não proporcionalidade para os alunos reconhecê-las com provas baseadas nas propriedades da proporcionalidade, notamos que o modelo analógico é evacuado em favor do modelo analítico, também a busca pela unidade é evacuada em favor do produto cruzado. O coeficiente de proporcionalidade acaba se tornando o modelo mais frequente.

Concluimos dizendo que no processo do manual, o aluno aprende conhecimento por repetição de modelo, mas não aprende o saber; o conceito de proporção.

A caminho das conclusões

Em comparação com **os livros didáticos antigos**, a proporcionalidade não é explicitamente estudada, por outro lado, estuda-se a regra de três, ampliação e redução,

percentuais etc. Há também referência à fração de uma grandeza, a grandezas proporcionais. Os tipos de tarefas e técnicas estão essencialmente em torno da regra de três.

Nos **Manuais atuais (CONFEMEN)**, principalmente, no manual do 5º ano, os conceitos de proporção, proporcionalidade, regra de três e percentual são definidos pela primeira vez. Implicitamente, a proporcionalidade inversa e a linearidade também são usadas.

Ao ler os programas e livros didáticos antigos e novos, o modelo dominante para resolver as situações de proporcionalidade é a regra de três. Ou seja, em todos os currículos prescritos em todos os níveis escolares e livros didáticos há um parágrafo que faz alusão à regra de três e que permite resolver problemas de partilhas e de proporcionalidade.

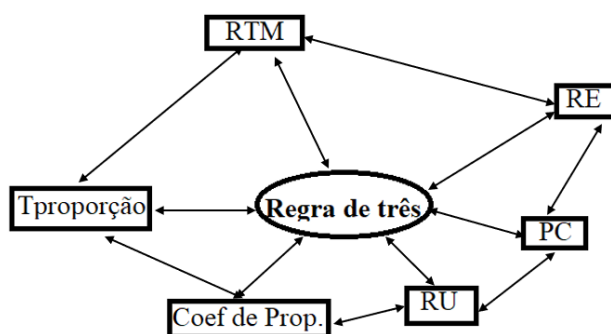
Portanto, entre os saberes a ensinar (contidos nos currículos prescritos) e os saberes preparados (no guia e no livro do aluno), cabe ao professor saber mobilizar suas próprias habilidades para fazer uma escolha de uma organização didática (como ensinar a proporcionalidade) que se alinha como o modelo de ensino de referência adequada. Mas acreditamos que a ênfase deve ser na vinculação de proporções e proporcionalidade e suas aplicações e, em seguida, na participação ativa e efetiva do aluno na resolução das tarefas propostas a ele em exercícios e problemas. Para alcançar esse resultado, o aluno não deve apenas entender o que está procurando, mas ter condições para implantar sua reflexão e ação.

De nossas análises, construímos um mapa conceitual para representar o modelo epistemológico dominante (MED): a regra de *três* (Figura 7).

Observamos os modelos com os quais a regra de três interage por sua sigla: Relação do Tipo Multiplicador (RTM), Relação Externo (REX), Produto Cruzado (PC), Redução à Unidade (RU), Coeficiente de Proporcionalidade (Coef. De Prop.), Técnica de Proporções (Tproporção).

Figura 7.

Modelo epistemológico dominante da regra de três



Em geral, podemos falar de um modelo de referência dominante quando podemos trazer à tona uma corrente de prática recorrente. Esse modelo, articulado com nosso MER, ajuda a problematizar uma situação e desenvolver a direção do trabalho a ser realizado. Há, no entanto, uma complementaridade de modelos, estruturas conceituais e esquemas de referência. Após o estudo das quatro operações aritméticas, a proporcionalidade é o conceito matemático mais utilizado por meio da chamada **regra de três**, procedimento na resolução de problemas da 4ª proporcional.

Principais resultados

Na maioria das pesquisas sobre proporcionalidade, o trabalho tem se limitado ao estudo da natureza dos problemas (se uma situação é de proporcionalidade ou não), a estrutura dos problemas de proporcionalidade, as técnicas de resolução e o método de raciocínio dos alunos etc. De fato, mostramos que a evolução das organizações matemáticas e das organizações didáticas atribuídas à proporcionalidade de 1960 a 2020, é influenciada pela percepção dos professores e pela noosfera por intermédio do estudo dos currículos prescritos e instruções oficiais) sobre essa noção.

Ressaltamos, assim, que, de 1960 até os dias atuais, a regra de três teve um papel importante no enfrentamento de problemas de proporção e proporcionalidade. Embora os conceitos de proporção e proporcionalidade sejam utilizados para provar que uma situação é

proporcional, a regra de três parece ser uma ferramenta essencial para a resolução desses problemas (também nomeada em textos oficiais e manuais de " *problemas de regra de três* "). Assim, apropria-se do ambiente que permite que esses dois conceitos vivam.

Isso resultou em uma redução no escopo de intervenção de proporções e, em seguida, da proporcionalidade. Essas noções são reduzidas a testar a proporcionalidade de uma situação, enquanto todas as ferramentas estão disponíveis para fazer isso sem a regra de três. Essa restrição parece ser um isolamento mais ou menos importante das duas noções que não conseguem tomar seu lugar de direito na organização matemática em jogo.

Uma reflexão pessoal sobre este resultado nos leva a dizer que, em tal condição, seria difícil pensar em uma extensão das noções até que seu espaço vital seja suficientemente mantido.

Existem vários procedimentos para resolver um problema de proporcionalidade. Parece-nos importante deixar que os alunos expressem os diferentes procedimentos utilizados e que concluam sobre a escolha do mais adequado (a "regra de três" não permite a aprendizagem da proporcionalidade, mas é a mais utilizada). Junto com as técnicas de aprendizagem, o papel do professor é propor situações que propiciam aos alunos o significado do conceito de proporcionalidade; isto é, o que é uma proporção e qual é o seu uso. Para isso, deve confrontar seus alunos com situações de proporcionalidade e situações de não proporcionalidade. E ele deve saber administrar debates entre alunos para justificar se tal ou tal situação se enquadra ou não no modelo proporcional.

A resolução de determinadas situações de proporcionalidade não é óbvia para os alunos devido a certas dificuldades operacionais. Por exemplo, para a velocidade e escala, os problemas de conversão de unidades são um grande problema. Porém, é no enfrentamento das mais diversas situações que o aluno vai construindo gradativamente seu raciocínio.

Em nossas análises, identificamos três períodos para o ensino da proporcionalidade, mas além da caracterização dos três períodos, procuramos mostrar como a transposição didática da proporcionalidade evoluiu gradativamente. Notamos um desenvolvimento positivo no ensino da proporcionalidade, pois hoje não existe realmente uma técnica institucional imposta, mas privilegia-se o raciocínio pessoal dos alunos; isso nos parece a priori favorável ao aprendizado de um conceito e sua aplicação. No entanto, descobrimos que o uso de uma tabela de proporcionalidade se torna a ferramenta institucional para resolver problemas de proporcionalidade.

Em resumo, pensamos que a noção de proporção ou de uma situação de proporcionalidade só pode ser entendida e dominada pelo estudo da situação, ou seja, sua modelagem física por exemplo, deve levar ao entendimento de que essa situação é realmente proporcional, mas não o dado de números muitas vezes em uma tabela, que apenas dão uma pista sobre a direção em que estamos procurando como entender o que está acontecendo. Muitos pensam que uma situação é proporcional, pois os números estão em uma tabela; os números não decidem a proporcionalidade, mas a situação em jogo sim. Por exemplo, uma rápida reflexão sobre a queda livre de um objeto levaria a imaginar que a altura da queda é proporcional à duração, mas um experimento que permitisse verificar isso mostra facilmente que não, não é também o caso do alongamento de uma mola para um dado peso. A proporcionalidade é uma ferramenta matemática que não deve ser separada de seu contexto de uso.

A conceituação da proporcionalidade está intimamente ligada à compreensão da seguinte tecnologia: "Dizemos que duas grandezas relacionadas são consideradas proporcionais se a multiplicação de um valor por um número em uma das duas grandezas leva à multiplicação do valor ligado pelo mesmo número na outra". Uma vez dominada essa definição, por meio de resolução problemas de proporcionalidade e de não proporcionalidade,

podemos nos concentrar em tabelas, coeficientes, aditividade e aspectos lineares. Essas tabelas são artefatos que foram introduzidos com o advento da matemática moderna para permitir que os alunos vejam o aspecto linear da relação de proporcionalidade.

Referências

- Alpha, Ousmane (2020). *Écologie de la proportionnalité au premier cycle de l'enseignement fondamental : évolution des organisations mathématiques et des organisations didactiques de 1960 à 2019*. Thèse en Didactique des Mathématiques l'Université des Sciences des techniques et des Technologies de Bamako, Mali.
- Artaud, Michèle. (1998) : Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. Dans Bailleul M. et al (eds.) ; *Actes de la IX^e école d'été de didactique des mathématiques, ARDM et Crédit Agricole de Bruz*, p. 101-139.
- Brousseau, Guy (2003). Situations, processus et curriculums en mathématiques, in : <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/04/03-6-Situations-processus-et-curriculums-en-math%C3%A9matiques.pdf>
- Chevallard, Yves (2002). Organiser l'étude. 1. Structures & Fonctions. *Actes de la 11^e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. France: La Pensée Sauvage. Versão eletrônica
- Chevallard, Yves (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 12.1, p. 73-112
- Chevallard, Yves., (1999) : L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), p. 221-266.
- Duval, Raymond. (1995): *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Ed. Peter Lang.
- Hersant, Magali. (2001) : *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7 - Denis Diderot.
- Hersant, Magali. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères - IREM*. n° 59. IUFM des Pays de Loire et CREN (Université de Nantes).
- Silva, Denivaldo Pantoja da (2017). A invariável prática da regra de três na escola. Tese de doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará. In: https://www.researchgate.net/publication/324824383_A_INVARIÁVEL_PRÁTICA_DA_REGRA_DE_TRES_NA_ESCOLA
- Sokona, Sidi Békaye. (1989) : Aspects analytiques et aspects analogiques de la proportionnalité dans une situation de formulation. *Petit x*, n° 19. p. 5-27 ; IREM de Grenoble-France.
- Vergnaud, Gérard (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Ed. Peter Lang
- Vergnaud G., (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10 (2-3), pp. 133-170, Ed. La Pensée Sauvage.

Recebido em: 27/02/2021

Aprovado em: 28/03/2021