

Indícios de aprendizagens de alunos de 4º ano sobre os números racionais envolvendo o significado de quociente

Evidence of 4th-grade student's learning about rational numbers involving the quotient meaning

Evidencia del aprendizaje de los estudiantes de cuarto año sobre los numerales racionales que involucran el significado del cociente

Grace Zaggia Utimura¹
Secretaria Municipal de Educação de São Paulo
<http://orcid.org/0000-0002-9157-2359>

Edda Curi²
Universidade Cruzeiro do Sul
<https://orcid.org/0000-0001-6347-0251>

Resumo

O objetivo deste artigo é identificar indícios de aprendizagens de alunos de uma turma de 4º ano do ensino fundamental sobre o significado de quociente dos números racionais, a partir da análise de 46 protocolos diante da realização de duas atividades com esse significado. Essas atividades, que fazem parte do material da rede estadual de São Paulo denominado *Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental* (EMAI), apresentam resoluções com uso de diferentes representações (fracionária, decimal, pictórica e linguagem natural) e relações entre elas. Para este artigo, além da análise documental, nos baseamos em outros instrumentos utilizados na nossa tese de doutorado, como trechos de vídeos das aulas, diário de bordo da pesquisadora e transcrições de diálogos entre a professora da turma e seus alunos para complementar as análises dos protocolos selecionados. Fundamentamo-nos em estudiosos sobre os conceitos dos números racionais, sobre as representações, os processos de raciocínio, os conhecimentos matemáticos e o uso da linguagem. Algumas considerações desta pesquisa

¹ mnutimura@gmail.com

² edda.curi@gmail.com

podem ser destacadas, como: (i) a representação pictórica é base da resolução das atividades com significado de quociente, (ii) a representação pictórica é utilizada para representar o que foi proposto, mas às vezes o aluno utiliza o algoritmo da divisão para encontrar o resultado, (iii) os alunos trabalham com mais de uma representação ao mesmo tempo e as relacionam na solução da atividade, e, ao que parece, mostram compreender melhor a situação proposta e os conceitos matemáticos envolvidos.

Palavras-chave: Números racionais, Quociente, Alunos, Anos iniciais, Ensino Fundamental.

Abstract

The objective of this article is to identify signs of learning by students in a 4th-grade class of elementary school about the meaning of the quotient of rational numbers, based on the analysis of 46 protocols related on two activities with this subject. These activities are part of the material of the state network of São Paulo called *Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental/Mathematical Education in the Early Years of Elementary Education* (EMAI), bringing resolutions with the usage of different representations (fractional, decimal, pictorial, and natural language) and relationships between them. For this article, besides the documentary analysis, we used other instruments from our doctoral dissertation, such as excerpts from videos of the classes, the researcher's logbook, and transcripts of dialogues between the class teacher and her students to complement the students' analyses of the selected protocols. We relied on scholars on the concepts of rational numbers, representations, reasoning processes, mathematical knowledge and the use of language. Some considerations of this research can be highlighted, such as: (i) the pictorial representation is the basis for solving activities with a quotient meaning, (ii) the pictorial representation is used to represent what was proposed, but sometimes the student uses the division algorithm to find the result,

(iii) the students work with more than one representation at the same time and relate them to the solution of the activity, and they seem to show a better understanding of the proposed situation and the mathematical concepts involved.

Keywords: Rational numbers, Quotient, Students, Early years, Elementary school.

Resumen

El objetivo de este artículo es identificar signos de aprendizaje en estudiantes de 4° de primaria sobre el significado del cociente de números racionales, a partir del análisis de 46 protocolos relacionados en dos actividades de esta asignatura. Estas actividades son parte del material de la red estatal de São Paulo denominada Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental / Matemática en los Primeros Años de la Enseñanza Primaria (EMAI), trayendo resoluciones con el uso de diferentes representaciones (fraccional, decimal, pictórico y lenguaje natural) y las relaciones entre ellas. Para este artículo, además del análisis documental, utilizamos otros instrumentos de nuestra tesis doctoral, como extractos de videos de las clases, el cuaderno de bitácora de la investigadora y transcripciones de los diálogos entre la profesora de clase y sus alumnos para complementar los análisis de los estudiantes sobre el protocolos seleccionados. Confiamos en los estudiosos sobre los conceptos de números racionales, representaciones, procesos de razonamiento, conocimiento matemático y el uso del lenguaje. Se pueden destacar algunas consideraciones de esta investigación como: (i) la representación pictórica es la base para la resolución de actividades con significado cociente, (ii) la representación pictórica se utiliza para representar lo propuesto, pero en ocasiones el alumno utiliza la división algoritmo para encontrar el resultado, (iii) los estudiantes trabajan con más de una representación al mismo tiempo y las relacionan con la solución de la actividad, y parecen mostrar una mejor comprensión de la situación propuesta y los conceptos matemáticos involucrados.

Palabras clave: Números racionales, Cociente, Alumnos, Primeros años, Escuela primaria.

Indícios de aprendizagens de alunos de 4º ano sobre os números racionais envolvendo o significado quociente

Neste texto analisamos protocolos de uma turma de alunos de 4º ano do Ensino Fundamental da rede estadual da Cidade de São Paulo, envolvendo duas atividades que abarcam o significado de quociente dos números racionais, desenvolvidas durante uma pesquisa no âmbito de uma tese de doutorado³. Buscamos identificar indícios de aprendizagens desses alunos relativas a esse conjunto numérico no que se refere ao significado de quociente, que surgiram no uso de diferentes representações (fracionária, decimal, pictórica e linguagem natural) durante a realização das atividades propostas.

Pautaram nosso embasamento teórico pesquisas como as de (Behr et al, 1983), (Bright, Berh, Post & Wachsmuth, 1988), Kieren (1988), (Lamon (2007), (Monteiro & Pinto, 2007), Quaresma (2010), Pires (2012), Perfeito (2015) e Utimura (2019) referentes ao ensino e aprendizagem dos números racionais e de suas diferentes representações. Destacamos algumas dificuldades de alunos apontadas nesses estudos e que foram sintetizadas a seguir:

- A dificuldade nas representações, nos diferentes significados e na realização das operações com os números racionais é apontada na pesquisa de Perfeito (2015) que cita (Lamon, 2007).
- Os alunos apresentam dificuldades quando estão aprendendo os números racionais na representação decimal em relação à “confusão” que estabelecem entre décimos e centésimos mencionado nos estudos de (Monteiro & Pinto, 2007).

³Tese de doutorado defendida pela primeira autora, em 2019, pela Universidade Cruzeiro do Sul, financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e orientada pela segunda autora. A referida tese envolveu o conhecimento profissional de sete professoras de 4º ano no desenvolvimento de atividades que focavam os significados dos números racionais. Foi originada a partir de um curso de extensão no âmbito da metodologia de formação de professores denominada de Estudos de Aula (*Lesson Study*).

- Os alunos apresentam mais dificuldade com as grandezas contínuas do que as discretas na introdução dos números racionais, devido à aproximação maior com as grandezas discretas e as estratégias de contagem que fazem uso, pois no uso de grandezas contínuas os alunos precisam usar estratégias/procedimentos de partição que ainda estão em processo de aprendizagem, mencionado nos estudos de (Quaresma, 2010).
- O obstáculo epistemológico pode acontecer no momento da resolução das atividades porque há alunos que utilizam de conhecimentos já construídos sobre o conjunto dos números naturais. Um exemplo destacado por Pires (2012) é a presença do sucessor no conjunto dos números naturais, o que não ocorre com o conjunto dos números racionais.
- Os alunos apresentam dificuldades quando fazem marcações das representações fracionária e decimal dos números na reta numérica, segundo Perfeito (2015) baseada na literatura de (Bright, Berh, Post & Wachsmuth, 1988).
- Os alunos apresentam dificuldades no reconhecimento de que as representações fracionárias e decimais são escritas numéricas do mesmo número e que os números racionais são números e podem ser representados de várias formas, de acordo com resultados trazidos nos estudos de Perfeito (2015) que aponta os estudos de (Behr et al, 1983).
- Ao trabalhar com as representações pictóricas no significado de parte-todo, os alunos contam as partes em que o inteiro foi dividido e colocam esse número como denominador e contam as partes do inteiro que foram “pintadas” e colocam esse número como numerador, reconhecendo esse novo número formado como um natural, segundo Utimura (2019) com base em Kieren (1988).

Consideramos que estas dificuldades reverberam em reflexões sobre o ensino e as aprendizagens em relação ao conjunto dos números racionais e baseado no que os pesquisadores apresentaram, entendemos que para compreender a complexidade desse

conjunto numérico é preciso um processo de ensino e aprendizagem a longo prazo, de forma que os alunos aprendam gradativamente, pois sua compreensão mobiliza conceitos, relações, obstáculos, diferentes representações e significados.

Cabe destacar que embora existam pesquisas que abordam os significados dos números racionais, a maioria destaca com mais ênfase o significado de parte-todo⁴. Por esse motivo, escolhemos atividades que envolvem o significado de quociente para serem analisadas neste texto. Essas atividades fazem parte dos estudos de Utimura (2019), porém o foco da pesquisadora foi o conhecimento do professor para ensinar os números racionais. As análises realizadas neste artigo envolvem protocolos dos alunos com atividades do respectivo significado de quociente.

Estudos sobre o significado de quociente e sobre as representações dos números racionais

Para elucidar o leitor, apresentamos a seguir estudos sobre o significado de quociente.

Um número racional pode ser usado para representar o *quociente* de dois números naturais quaisquer. O símbolo $\frac{a}{b}$ em que $b \neq 0$, indica, antecipadamente, uma partilha equitativa. O numerador pode ser menor, igual ou maior que o denominador. Com isso, a quantidade resultante da partilha equitativa pode ser menor, igual ou superior à unidade (Kieren, 1975, Pires, 2012 & São Paulo (SP), 2018).

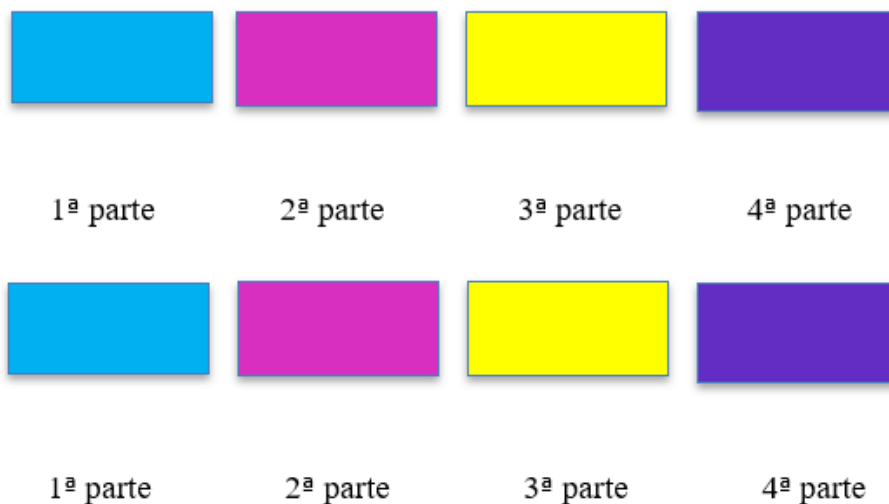
No caso do significado de quociente, a representação pictórica explicita o raciocínio usado pelo aluno quando se refere à divisão como partilha, usando grandezas contínuas ou discretas. Os exemplos a seguir foram criados por nós a partir de experiências com formação de professores e autoria de materiais institucionais curriculares.

⁴A relação parte-todo se apresenta, quando um “todo” é dividido em partes, equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos. A representação fracionária indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes (Kieren, 1975 & Pires, 2012).

Exemplo 1: Quatro crianças vão dividir entre elas duas folhas de papéis. A representação pictórica desse significado passa a ideia de partilha. Uma das possibilidades de resolução é:

Figura 1.

Divisão como partilha – grandezas contínuas.



A representação fracionária que indica a quantidade de papel que cada criança vai receber é $\frac{2}{4}$.

Exemplo 2: Dividir igualmente cinco bolachas entre duas crianças também passa a ideia de partilha. Uma das possíveis resoluções é:

Figura 2.

Divisão como partilha (Utamura, 2019, p. 62)



E obtemos as representações fracionárias $2\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{2}$ para cada criança.

Continuaremos o texto discutindo sobre as representações deste conjunto numérico.

Goldin (2003) entende uma representação como um conjunto de sinais, caracteres, ícones ou objetos que podem indicar alguma coisa. Segundo o autor, a representação de um número significa atribuir-lhe uma designação e um número pode ter várias designações.

O Projeto Rational Number Project, desenvolvido por (Post, Cramer, Behr, Lesh & Harel, 1993), indica que a compreensão dos números racionais se relaciona a três aspectos: (i) a flexibilidade no uso de diferentes representações; (ii) a flexibilidade que acontece nos registros em cada representação; e (iii) a independência progressiva de representações pictóricas.

O projeto evidencia a importância de o ensino promover o uso e a percepção que diferentes representações correspondem a um mesmo número racional, bem como evidencia a importância do trabalho com transformações no âmbito de cada representação, destacando que o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda por parte dos alunos necessita que eles vivenciem experiências com diferentes representações e relações entre elas. Segundo os autores, é durante a exploração de ideias, conceitos e diferentes representações que os alunos constroem novos conhecimentos, ampliam e aprofundam os conhecimentos anteriores, possibilitando uma compreensão mais ampla e profunda das ideias matemáticas envolvidas.

Em materiais curriculares como o EMAI⁵ (2014) e os Cadernos de Saberes e Aprendizagens (2019) e, em documentos curriculares como as Orientações Didáticas para o Currículo da Cidade de São Paulo (2018), a ênfase está nas representações decimais, contextualizadas no sistema monetário brasileiro, nos sistemas de medidas de massa, comprimento e capacidade e em divisões de dois números naturais, principalmente usando calculadora.

⁵ Esse material curricular está em vigor na Rede Estadual de ensino de São Paulo e é organizado em sequências de ensino.

Baseado nos estudos de Pires (2012) apesar da representação decimal ser mais familiar na vivência das crianças, a representação fracionária também é importante e, às vezes, de melhor compreensão como, por exemplo, quando se diz a palavra metade, a criança associa mais com a representação fracionária $\frac{1}{2}$, do que com a representação decimal 0,5.

Retomando o que tange às dificuldades dos alunos, Monteiro e Pinto (2007) afirmam que tanto a representação fracionária como a decimal, acarretam problemas na comparação de duas “frações” unitárias, pois, no geral, os alunos comparam apenas os denominadores, ignorando o 1 do numerador, o que pode indicar a falta de compreensão de uma representação fracionária significar um número. Também apontam que alguns alunos consideram que a vírgula, usada na representação decimal, e o traço, que indica a representação fracionária, têm o mesmo significado e consideram a igualdade $\frac{1}{2}=1,2$, por exemplo. Estas relações, feitas pelos alunos, revelam que muitas vezes eles baseiam-se nos seus conhecimentos construídos sobre os números naturais e os usam da mesma maneira para os números racionais.

Monteiro e Pinto (2007) apontam ainda algumas dificuldades dos alunos no trabalho com as representações decimais ao comparar 1,05 e 1,5, usando a quantidade de algarismos pós a vírgula, ou mesmo na identificação de um sucessor no conjunto dos números racionais, considerando que 0,2 vem logo após 0,1. Esta é uma situação que também ocorre baseada nos conhecimentos que os alunos têm sobre o conjunto dos números naturais.

Uma representação importante que as crianças usam, muitas vezes de forma intuitiva, é a pictórica. Alguns autores, como Cox (1999), Quaresma (2010) e Perfeito (2015), discutem o uso desse tipo de representação. Para Cox (1999) as representações pictóricas contribuem para o desenvolvimento do raciocínio, pois podem retratar a informação de um problema e facilitar a mudança de estratégias de resolução. Seu estudo mostra que alguns alunos constroem representações pictóricas parciais, aquelas que são compreensíveis para eles e que parecem

servir de apoio de memória, enquanto outros apresentam representações compreensíveis também para outros observadores.

As representações pictóricas, mesmo não explicitando corretamente a situação, podem indicar imagens mentais dos alunos diante de uma situação e dão indicativos, para os professores, de intervenções que podem ser realizadas para que avancem.

Além disso, cabe destacar a importância da linguagem natural (verbal e escrita) para comunicar o pensamento do aluno. Neste sentido, Streefland (1991) destaca a importância da leitura correta dos números racionais. Consideramos que uma leitura equivocada pode ser um obstáculo para aprendizagem dos alunos, por exemplo, quando o professor fala “zero vírgula cinco”, ao invés de cinco décimos (0,5), ou diz “um sobre dois” ao invés de um meio ($\frac{1}{2}$), pois não enfatiza a linguagem matemática.

A partir dos estudos apresentados, ressaltamos que é importante que o aluno faça uso de diferentes representações, não se atendo somente a uma, visto que é o uso e a relação entre elas que mostram a compreensão dos estudantes a cerca desse conjunto numérico.

Metodologia da pesquisa

A pesquisa de doutorado foi realizada com turmas de 4º ano de escolas públicas da rede estadual de São Paulo, alocadas na Diretoria Regional de Ensino Leste 1. Essas escolas faziam parte de um projeto de formação de professores coordenado pela professora Dra. Edda Curi, desenvolvido no ano de 2015, com uso do material do EMAI. Foram utilizados como instrumentos de pesquisa o questionário preenchido pelas professoras, o diário de bordo da pesquisadora, vídeo filmagem de trechos de aulas, gravação em áudio dos encontros com as professoras e de trechos de aulas, relato individual e reflexivo de cada professora e uma entrevista em grupo.

Para este artigo, foi realizada uma pesquisa documental. Segundo Gil (2008), a pesquisa documental envolve materiais que ainda não receberam nenhuma análise, ou que ainda podem

ser analisados de acordo com os objetivos da pesquisa a ser realizada. Os documentos, no geral em grande número, primeiramente são explorados para depois receber tratamento analítico.

Os documentos analisados foram os protocolos dos alunos com as resoluções de duas atividades relativas ao significado de quociente dos números racionais propostas no EMAI. Essas atividades são apresentadas no material em sequências de ensino diferentes (sequências 18 e 28) e estão descritas mais adiante. As atividades foram reproduzidas de acordo com o interesse da pesquisa, sendo uma em cada folha de papel e distribuídas aos alunos de modo que as resoluções pudessem ser recolhidas pelas pesquisadoras. Foram resolvidas pelos alunos em sala de aula, sem intervenção da professora. Após a resolução dos alunos, a professora fazia a socialização, intervenções e reflexões sobre elas.

Foram recolhidos 318 protocolos de alunos de todas as salas envolvidas na pesquisa com a resolução das atividades indicadas no parágrafo anterior, mas para este estudo nos ativemos aos protocolos de alunos de uma única turma, totalizando 46. Os protocolos foram analisados com profundidade para identificar possíveis indícios de aprendizagem dos alunos com relação ao tema em questão. A escolha dessa turma, foi pelo fato de ser acompanhada pela primeira autora deste artigo na realização das atividades.

Os protocolos, após a exploração inicial, foram separados por “tipos de resolução” de acordo com critérios: fracionária, decimal, pictórica e linguagem natural, ou mesmo usando pelo menos dois desses tipos de representações combinados. Devido a limitação das páginas para este artigo, quando encontramos registros semelhantes das crianças escolhemos apenas um protocolo de cada tipo, sem indicação do nome do aluno. Procuramos selecionar os protocolos pelas resoluções que julgamos interessantes de serem discutidas, pois apresentavam

indícios⁶ de aprendizagens das crianças ao usarem diferentes representações dos números racionais.

Além da análise documental em que utilizamos fontes primárias, ou seja, os protocolos com as produções dos alunos, nos baseamos em outros instrumentos de nossa tese como trechos de vídeos das aulas, diário de bordo da pesquisadora e transcrições de diálogos entre a professora da turma escolhida para este artigo e seus alunos, complementando as análises dos protocolos selecionados. Neste sentido, a pesquisa assume um caráter descritivo e interpretativo usando os referenciais teóricos para subsidiá-la.

Indícios de aprendizagens dos(as) alunos(as)

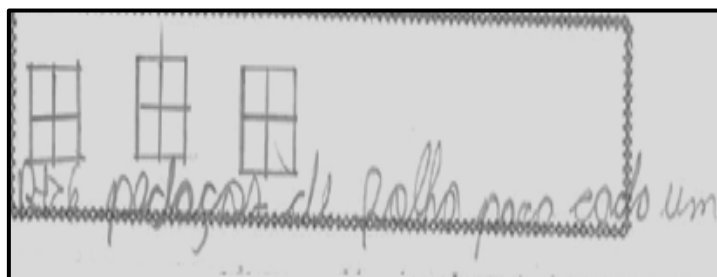
A primeira atividade selecionada estava dividida em duas partes. Uma solicitava que os alunos explorassem uma imagem com uma representação pictórica da repartição de 3 folhas entre 2 crianças. Na representação apresentada, uma folha inteira era dada para cada criança e a segunda folha era dividida em duas partes (uma para cada criança). Em seguida, havia um diálogo entre duas crianças em que uma explicitava que iria ficar com uma folha e mais metade e outra criança dizia que ia ficar com $1 + \frac{1}{2}$. O diálogo fomentava uma discussão sobre as representações numérica e verbal da quantidade de papel que cada uma receberia em função da representação pictórica. Após a discussão, a atividade solicitava que os alunos representassem por meio de um desenho a divisão em partes iguais de 3 folhas entre duas partes iguais, de uma maneira diferente daquela já apresentada.

Entre as resoluções pictóricas selecionamos uma em que a aluna dividiu cada folha em 4 partes iguais e disse que cada criança recebeu 6 partes, ou seja, metade das 12 partes obtidas com sua divisão, conforme figura a seguir:

⁶Por ser uma análise documental, usamos a palavra indícios, para focalizar uma possível indicação das aprendizagens dos(as) alunos(as).

Figura 3.

Registro apresentado por uma aluna (Dados da pesquisa, 2019)



No entanto, essa criança só se utilizou da representação pictórica como uma forma de mostrar sua compreensão do que estava fazendo em relação à proposta da atividade, mas não relacionou cada uma das 4 partes em que o inteiro foi dividido com uma representação fracionária, ou nem mesmo utilizou da linguagem natural. Também quando apresentou o resultado não indicou a parte unitária relativa aos 6 pedaços, ou seja, 6 pedaços de $\frac{1}{4}$, embora a atividade solicitasse apenas a representação pictórica da divisão de 3 folhas em 2 partes iguais.

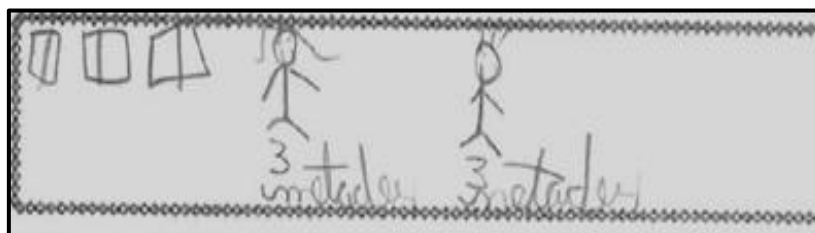
Essa resolução corrobora com os estudos de Cox (1999) que discorre sobre representações pictóricas parciais, compreensíveis mais para os alunos e que parecem servir de apoio à situação proposta.

Ao que parece, essa criança apresenta um raciocínio informal, apoiou-se em suas vivências anteriores e precisa de intervenção da professora para avançar, mesmo sendo considerado matematicamente correto. Embora a atividade não solicitasse um conhecimento mais formal, Gravemeijer (2005) comenta que é muito difícil para o professor promover a articulação entre os processos de raciocínios informais e formais, sem deixar de valorizar o processo informal dos alunos, mas os ajudando a avançar do seu conhecimento pessoal, informal para um conhecimento mais formal com compreensão.

Outra resolução pictórica selecionada é a da aluna que divide cada uma das 3 folhas ao meio, o que pode indicar que fez uma repartição em duas partes iguais, afirmando que cada criança receberá 3 metades.

Figura 4.

Registro apresentado por uma aluna (Dados da pesquisa, 2019)



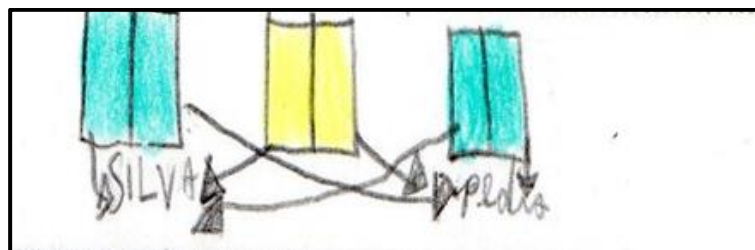
Essa criança apresenta uma resolução mais avançada do que a anterior, pois ela associou a representação pictórica com a escrita na linguagem natural, ou mesmo explicando de forma na linguagem matemática, verbalizando sua resposta, mostrando que faz uma relação entre os registros, o que pode mostrar a compreensão do significado quociente. Nesse caso, conforme Cox (1999), a representação pictórica desta criança contribuiu para o desenvolvimento do seu raciocínio. Consideramos um avanço nas aprendizagens dessa criança quando ela faz relações entre diferentes registros.

Essa relação entre as representações pictórica e linguagem natural, possibilita que os alunos construam novos conhecimentos, ampliem e aprofundem os conhecimentos anteriores, permitindo uma compreensão mais ampla e profunda das ideias matemáticas envolvidas, conforme indicam (Cramer, Behr, Lesh & Harel, 1993).

Em uma terceira resolução pictórica selecionada, a aluna também divide cada folha ao meio, mas usa uma representação pictórica diferente para mostrar sua resolução, com esquemas indicativos com setas e nomes dos amigos apresentados na atividade.

Figura 5.

Registro apresentado por uma aluna (Dados da pesquisa, 2019)



Essa aluna distribuiu meia folha para cada criança descrita na atividade, mas não indicou que cada uma receberia três metades da folha.

Quando socializou as resoluções de seus alunos, a professora fez intervenções que permitiram que as crianças avançassem, no caso do protocolo acima, a professora solicitou que a criança explicitasse, verbalmente, o raciocínio.

Aluna: Eu dividi as três folhas na metade e cada um vai ganhar metade de cada folha.

(P): Quanto cada um vai receber?

Aluna: Uma folha e meia.

A resposta oral da criança mostra sua compreensão sobre o significado de quociente e as aprendizagens decorrentes da intervenção da professora.

A professora pediu a representação numérica das partes que cada um recebeu, um combinado feito na etapa do planejamento da aula. Um aluno escreveu corretamente $1\frac{1}{2}$ e explicou:

Aluno: Porque dá uma folha e mais metade da outra folha para cada um. Esse 1 é da folha inteira e esse é da metade.

Novamente a intervenção da professora permitiu à criança mostrar sua compreensão com a representação fracionária decorrente de uma situação envolvendo o significado de quociente.

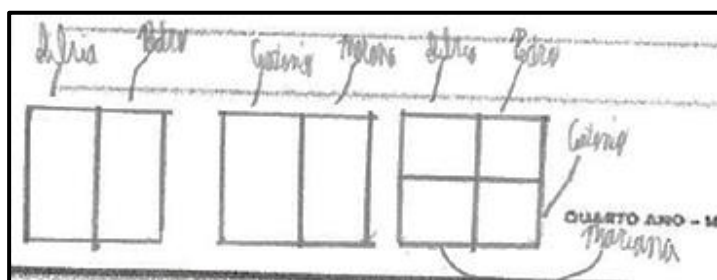
Nas resoluções apresentadas é possível perceber que os alunos compreenderam o significado de quociente, a ideia de partição, indicando a partilha por meio das representações pictóricas. Alguns relacionam suas representações pictóricas com explicitações verbais, ou representações escritas dos números racionais na forma fracionária. Além disso, percebe-se a preocupação da professora com as percepções de seus alunos das diferentes representações de um número racional e o estabelecimento de relações entre essas representações.

A outra parte da atividade solicitava que os alunos dividissem igualmente 3 folhas entre 4 amigos. Entre os protocolos selecionamos algumas resoluções que chamaram nossa atenção como a da Figura 6.

O aluno coloca os nomes das crianças a cada parte da folha de papel. As duas primeiras folhas ele divide em duas partes iguais e dá uma parte para cada amigo. A outra folha ele divide em 4 partes iguais e sinaliza dar uma parte para cada um. Esse aluno não indica com representação numérica ou linguagem natural a parte de papel que cada criança recebeu com a divisão, mas seu esquema é bastante intrigante, pois usa duas formas de dividir as folhas de papel (em 2 e em 4 partes iguais), mostrando sua compreensão que as folhas devem ser divididas em 4 pessoas.

Figura 6.

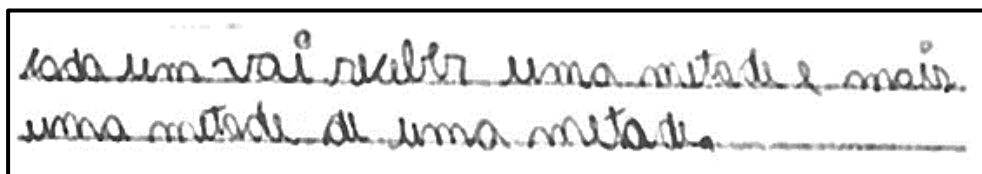
Registro apresentado por um aluno (Dados da pesquisa, 2019)



Outro protocolo interessante representa o conjunto de resoluções em linguagem natural. O aluno em questão não envolveu nem pela representação numérica, nem mesmo pela pictórica, mas expressou-se na linguagem natural e apresentou sua resolução corretamente, justificando sua resposta. Ele percebeu que cada criança receberia a metade da folha ($\frac{1}{2}$) e mais a metade da metade de outra folha ($\frac{1}{2}$ da $\frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{1}{4}$), apenas não apresentou a resposta numericamente, como foi solicitada em uma das perguntas.

Figura 7.

Registro apresentado por um aluno (Dados da pesquisa (2019))

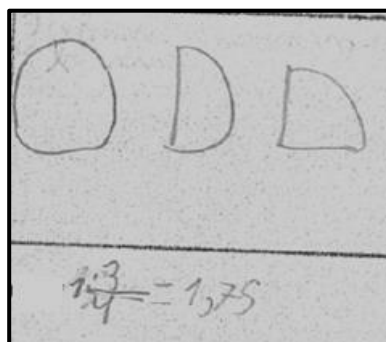


A seguir uma resolução envolvendo a relação entre a representação pictórica acompanhada de escrita numérica tratada na atividade da divisão de 7 bolachas entre 4 amigos.

Essa criança fez uma figura representando a bolacha inteira, uma metade e um quarto de uma bolacha, indicando o que cada criança vai receber tanto da forma fracionária como na decimal.

Figura 8.

Registro apresentado por um aluno (Dados da pesquisa, 2019)



Ela relaciona as representações pictórica, fracionária e decimal, o que pode indicar um trabalho da professora com as representações decimais e suas relações com a representação fracionária ou, ainda, que a representação decimal é mais próxima da vivência do aluno, corroborando com uma afirmação de Quaresma (2010) que a representação em fração origina muitas dificuldades para os alunos.

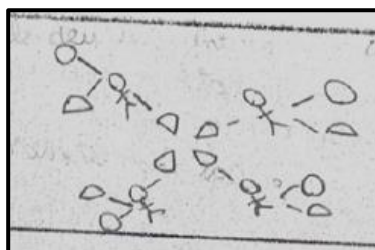
Cabe destacar que as representações desempenham um papel fundamental no trabalho com números racionais. Segundo Quaresma (2010), o desenvolvimento de uma compreensão profunda exige experiência em diferentes representações e relações entre elas. A autora

comenta que é por meio de reinterpretação de ideias e conceitos que as relações entre representações exigem que os alunos adquiram novos conhecimentos e ampliam seus conhecimentos anteriores em relação aos números racionais.

Outra aluna fez uma representação pictórica, a nosso ver, bastante interessante, mostrando que cada criança receberia 1 bolacha inteira, uma metade e a outra bolacha que sobrou ela indicou a divisão nas 4 partes.

Figura 9.

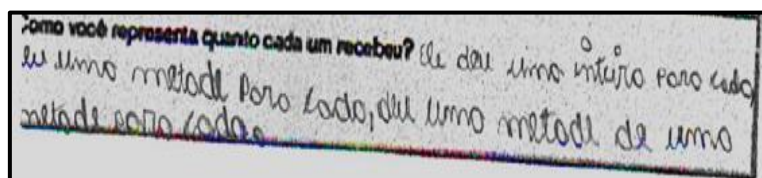
Registro apresentado por uma aluna (Dados da pesquisa, 2019)



Depois, na justificativa, ela explicitou seu raciocínio corretamente, mostrando quanto cada um recebeu como vemos na Figura 10:

Figura 10.

Registro apresentada pela aluna (Dados da pesquisa, 2019)

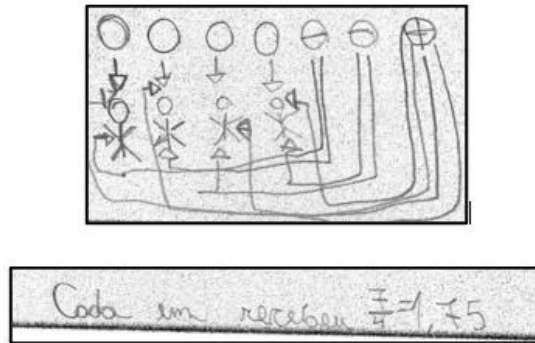


Percebe-se, neste registro, o uso da expressão “metade de uma metade”, para indicar $\frac{1}{4}$ da bolacha. Nesse caso a aluna se utiliza tanto da linguagem natural como da pictórica (desenhos ou esquemas), o que permitiu uma compreensão entre a interpretação da informação do enunciado e a respectiva solução, corroborando com os estudos de Streefland (1991) sobre a importância da linguagem natural, neste caso está apresentada na resposta escrita por ela.

Uma outra criança apresenta uma resolução pictórica bem explicitada, mas, ao que parece, para dar a resposta faz o algoritmo da divisão de 7 por 4.

Figura 11.

Registros apresentados pela aluna (Dados da pesquisa, 2019)

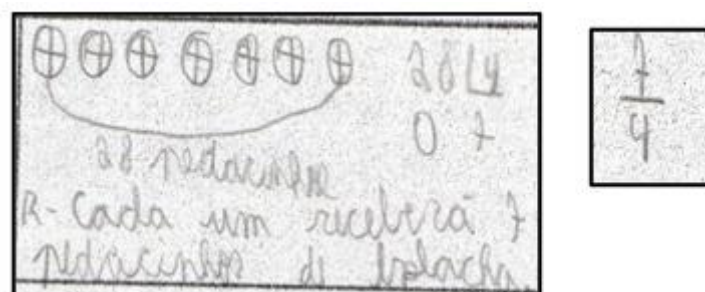


Como é possível observar, a criança distribuiu uma bolacha para cada amigo, depois dividiu duas bolachas pela metade, distribuiu metade para cada amigo, por último dividiu uma bolacha em 4 partes e distribuiu uma parte para cada um. Com essa representação pictórica seria mais lógico a aluna apresentar a resposta com a representação fracionária das partes que cada criança recebeu. No entanto, ela colocou $\frac{7}{4} = 1,75$ passando a sensação de que fez o algoritmo da divisão de 7 por 4. Cabe destacar que a professora, desde o início do trabalho com os números racionais, tinha a preocupação de que seus alunos usassem o algoritmo da divisão para transformar uma representação fracionária em decimal, conforme depoimento.

Outra criança divide cada uma das 7 bolachas em 4 partes iguais identificando 28 “pedaços” e explicita que cada uma recebeu 7 pedaços.

Figura 12.

Registros apresentados pela aluna (Dados da pesquisa, 2019)



É possível perceber a presença do algoritmo da divisão de 28 por 4, obtendo os 7 pedaços. A criança fez a indicação da divisão também na resposta, destacada ao lado direito,

colocando $\frac{7}{4}$. Essa criança pode ter usado a representação pictórica para identificar o “total de pedaços” (28) que deveria ser dividido por 4 crianças, mas essa resolução dá pistas que a criança usou a representação pictórica apenas para apresentar a divisão das 7 bolachas em 4 partes, uma para cada criança, não analisando depois como faria a distribuição dessas 28 partes para as 4 crianças na representação pictórica, necessitando do algoritmo para obter a resposta. Ela também não identificou que cada parte representa $\frac{1}{4}$, respondendo 7 pedacinhos. A nosso ver, parece que essa criança também não resolveu a situação de modo mecânico, por simples execução do algoritmo, o que corrobora com os estudos de Quaresma (2010) mencionados anteriormente.

Considerações sobre a pesquisa

Como já foi dito, o objetivo deste artigo era identificar indícios de aprendizagens de alunos de uma turma de 4º ano sobre o significado de quociente dos números racionais. Os protocolos analisados revelam que:

- a maioria dos alunos toma por base a representação pictórica, mas mostra compreensão do significado de quociente, com indicações numéricas ou mesmo na linguagem natural, o que pode representar um indício de aprendizagem desse significado.
- Outro indício de compreensão desse significado é que os alunos apresentam uma representação pictórica e, em seguida se utilizam do algoritmo da divisão para encontrar o resultado, confrontando-o com sua representação pictórica. Ao que parece as representações pictóricas oferecem pistas para as escritas fracionárias, o que pode ter levado as crianças a usarem o algoritmo da divisão para calcular o resultado.

- A maior evidência de compreensão do significado de quociente é que os alunos trabalham com mais de uma representação ao mesmo tempo e as relacionam na solução da atividade, e ao que parece mostram compreender melhor a situação proposta e os conceitos matemáticos envolvidos. As crianças procuraram fazer relações entre as diferentes representações dos números racionais, partindo da representação pictórica, mas explicitando as respostas em representações fracionária, decimal ou linguagem natural.

A observação da presença das representações decimais, pode indicar um trabalho realizado pela professora no uso do material do EMAI, pois este enfatiza, primeiramente este tipo de representação, visto que ela é mais usada na vivência das crianças.

Por fim, entendemos que a análise dos protocolos com atividades envolvendo outros significados dos números racionais, podem nos dar pistas de considerações mais aprofundadas sobre o uso e as relações de diferentes representações para a compreensão dos significados dos números racionais, o que a limitação de páginas para este artigo não permitiu.

Referências

- Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. A. (1983) Rational-number concepts. In: Lesh, R & Landau, M. (Ed). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-126). New York: Academic Press.
- Bright, G., Behr, M., Post, T. & Wachsmuth, I. (1988) *Identify fractions on numbers lines*. *Journal for Research In Mathematics Education*, 19(3), (pp. 215-232).
- Cox, R. (1999) Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction* (pp. 343-363).
- Gil, A. C. (2008). *Métodos e Técnicas de Pesquisa*. São Paulo: Atlas.
- Goldin, G. A. (2003) Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In: Kilpatrick, J. & Martin, W. G. & Schifter, D. (Ed.). *A research companion to principles and standards for school mathematics*. Reston (pp. 275-285). VA: NCTM.
- Gravemeijer, K. (2005) What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In: Santos, L., Canavarro, A.P. & Brocado, J. (Ed.). *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

- Kieren, T. E. (1975) On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: Lesh, R. (Org). *Numbers and measurement: paper from a research workshop*. Columbus, Ohio: ERIC/MEAC (pp. 101-144).
- Kieren, T. E. (1988) Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: Hiebert, J. & Behr, M (Orgs). *Numbers concepts and operations in the middle grades*. Reston: NCTM (pp. 162-181).
- Lamon, S. J. (2007) Rational numbers and proportional reasoning. In: F. Lester (Ed), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Monteiro, C. & Pinto, H. (2007) Desenvolvendo o sentido do número racional. Lisboa: APM, NCTM. *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.
- Perfeito, M. J. L. (2015) *Conhecimento do professor do 1º ciclo sobre números racionais*. [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Escola Superior de Educação de Lisboa].
- Pires, C. M. C. (2012) *Educação Matemática: conversas com professores dos anos iniciais*. São Paulo: Zé Zapt.
- Post, T., Cramer, K., Behr, M, Lesh, R. & Harel, G. (1993) Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. In: Carpenter, T., Fennema, L. & Romberg, T. (Ed.). *Learning, Teaching and assessing rational number concepts: multiple research perspectives* (pp. 327-362). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Quaresma, M. (2010) *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino*. [Dissertação de Mestrado em Educação, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa].
- São Paulo (Estado). (2014) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Gestão da Educação Básica. Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão da Educação Básica. Centro de Ensino Fundamental dos Anos Iniciais. *EMAI: educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental; organização dos trabalhos em sala de aula - quarto ano*. SEE. São Paulo: SE, v.2.
- São Paulo (SP). (2018) Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica. *Orientações didáticas do currículo da cidade: Matemática, v.1*. SME/COPED.
- São Paulo (SP). (2019) Secretaria Municipal de Educação. Coordenadoria Pedagógica. *Cadernos de Saberes e Aprendizagem*. SME/COPED.
- Streefland, L. (1991) Fractions, na intergrated perspective. In: Streefland, L. (Ed.). *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 93-118). Utrecht: Freudenthal Institute.
- Utimura, G. Z. (2019) *Conhecimento profissional de professoras de 4º ano centrado no ensino dos números racionais positivos no âmbito do Estudo de Aula*. [Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul].

Recebido em: 19/03/2021

Aprovado em: 06/03/2021