EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2

https://doi.org/10.23925/983-3156.2021v23i4p221-245

Construção de tabelas de dupla entrada e sua relação com cálculos de probabilidade por futuros professores de matemática

Construction of double-entry tables and their relation to probability calculation by prospective mathematics teachers

Construcción de tablas de doble entrada y su relación con el cálculo de probabilidades por parte de los futuros profesores de matemáticas

Auriluci de Carvalho Figueiredo[1]
UNIMES/PUCSP
https://orcid.org/0000-0002-2856-0064

Resumo

Este artigo analisa as respostas que estudantes de um curso de licenciatura em matemática no Brasil ofereceram em uma avaliação final. Buscou-se identificar aspectos cognitivos relacionados à construção de tabelas. As atividades envolveram conhecimentos pertinentes à coleta, representação, leitura e interpretação de dados em tabelas de dupla entrada, bem como a elaboração de questões cuja resolução requeresse conhecimentos probabilísticos e permitisse mobilizar a leitura entre os dados da tabela. As pesquisas encontradas sobre o tema raramente analisam a construção de tabelas. Para o presente estudo de caso, utilizou-se abordagem qualitativa. Com base em autores que tratam do nível de leitura de tabelas e da teoria dos registros de representação semiótica, construímos a atividade utilizada e analisamos a produção de 16 alunos. Em comparação com uma avaliação diagnóstica aplicada meses antes, os futuros professores que participaram conseguiram majoritariamente elaborar na atividade final a organização dos dados em tabela e foram capazes de cruzar as categorias em linhas e colunas para referir-se à intersecção de eventos. Em eventos condicionados, porém, mostraram ter dificuldades tanto em formalizar questões quanto em resolvê-las.

[1] aurilucy@uol.com.br

Palavras-chave: *Probabilidade, Construção de tabelas de dupla entrada, Leitura de tabelas de dupla entrada, Formação de professores, Registro de representação semiótica*

Abstract

This paper describes a comparative analysis of the responses given by undergraduate mathematics students in Brazil on a final assessment. The aim was to identify cognitive aspects related to the construction of tables. The activities addressed knowledge required for collecting, representing, reading, and interpreting data in double-entry tables, as well as for formulating questions whose resolution required mobilising probabilistic knowledge and cross-reading of table data. Previous studies on the subject rarely analysed the construction of tables. A qualitative approach was adopted for this case study. Design of the activity and analysis of subjects' output (16 students) drew on the theory of registers of semiotic representation and on the work of investigators who address table-reading proficiency levels. Compared to performance in a diagnostic evaluation conducted months earlier, most of the future teachers who participated in the final activity proved capable of organising data in table format and crossing the categories depicted in rows and columns to successfully interpret the intersections of events. For conditional events, however, difficulties were detected both in the ability to formalise questions and solve them.

Keywords: *probability, construction of double-entry tables, reading of double-entry tables, professional education of teachers, semiotic representation registers*

Resumen

El presente artículo describe un análisis comparativo de las respuestas dadas por estudiantes de un curso de pregrado de matemáticas en Brasil en una evaluación final. El objetivo fue identificar los aspectos cognitivos relacionados con la construcción de tablas. Las actividades involucraron conocimientos pertinentes a la recolección, representación, lectura e interpretación de datos en tablas de doble entrada, así como la elaboración de preguntas cuya resolución exigiese movilizar conocimientos probabilísticos y permitiese movilizar la lectura entre los datos de la tabla. Las investigaciones encontradas sobre el tema raramente analizan la construcción de tablas. Para el presente estudio de caso, se utilizó un enfoque cualitativo. A partir de autores que abordan el nivel de lectura de tablas y la teoría de registros de representación semiótica, se construyó la actividad diagnóstica utilizada y se analizó la producción de 16 estudiantes. En comparación con la evaluación diagnóstica conducida meses antes, los futuros docentes que participaron en la actividad final lograron en su mayoría organizar los datos en una tabla y cruzar las categorías en filas y columnas para referirse a la intersección de eventos. Sin embargo, en eventos condicionados tuvieron dificultad tanto para formalizar las preguntas como para resolverlas.

Palabras clave: *probabilidad, construcción de tablas de doble entrada, lectura de tablas de doble entrada, formación de profesores, registro de representación semiótica*

A utilização de tabelas de dupla entrada como ferramenta para representação de dados e para cálculo de probabilidades é o foco deste artigo.

No Brasil, documentos oficiais que regem a educação básica, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC, 1997, 1998, 2002, 2006) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (MEC, 2018), indicam a importância de trabalhar com tabelas desde os primeiros anos escolares. A BNCC explicita as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos de educação básica no âmbito da matemática. Estabelece na unidade temática ‘Probabilidade e estatística’ que a partir do primeiro ano os alunos devem trabalhar a leitura de tabelas simples; no segundo ano, comparar informações de pesquisas apresentadas por meio de tabelas de dupla entrada; e, a partir do terceiro ano, ler, interpretar e representar dados em tabelas de dupla entrada, o que continua a ser enfatizado nos anos subsequentes.

Na BNCC, a necessidade do estudo de tabelas é destacada também para outras áreas do conhecimento. Conjecturamos que tal destaque nesse documento deve-se também à quantidade de informações que os meios de comunicação hoje veiculam sob essa forma de registro. Gal (2012) aponta a importância de se desenvolverem certas habilidades para que se possam interpretar corretamente as informações probabilísticas comumente encontradas nos diferentes meios, e destaca a necessidade de se abordarem situações que possam proporcionar aos estudantes a instrução necessária para acessarem, utilizarem, avaliarem criticamente e comunicarem as mensagens probabilísticas encontradas em contextos de leitura, bem como reagirem a elas, além de compreenderem textos que contenham gráficos e tabelas de dupla entrada.

Segundo Estrella (2014), uma tabela é uma forma de representação retangular que permite mostrar clara e resumidamente os dados correspondentes a uma ou mais variáveis, visualizar o comportamento dos dados e facilitar o entendimento das informações.

Pesquisas como as de Estrada e Batanero (2007), de Contreras et al. (2010), de Figueiredo (2019) e de Gea et al. (2020) apontam que as tabelas de dupla entrada são aliadas do ensino de probabilidade, mas tais estudos também identificam dificuldades e implicações que a inadequada interpretação desse tipo de tabela pode trazer à compreensão de conceitos que envolvam probabilidade. Algumas dessas pesquisas e as atividades propostas por esses pesquisadores são apontadas em outra seção desse artigo, com o propósito de iluminar as relações entre tabelas de dupla entrada e conceitos que envolvem probabilidade.

O presente artigo apresenta uma análise das respostas de estudantes que haviam sido avaliados diagnosticamente no início do semestre letivo e que, ao final dele, responderam novamente à atividade, desta vez enriquecida de novos quesitos, na disciplina 'Probabilidade' em um curo de licenciatura em matemática.

Discutiremos nas análises a atividade final, com o intuito de compararmos a evolução desses alunos em relação à avaliação diagnóstica quanto a aspectos cognitivos relacionados à construção de tabelas, bem como quanto à elaboração de questões cuja resolução exigisse mobilizar conhecimentos probabilísticos e permitisse leituras entre os dados da tabela.

A aplicação das duas fases foi conduzida pelo professor da disciplina (que não é o pesquisador). Trata-se de um estudo de caso, nos termos de Ponte (2006): tipo de investigação que permite conhecer uma entidade bem definida em um sistema educativo.

Algumas pesquisas que relacionam tabelas e probabilidade

Alguns estudos apontam as tabelas de dupla entrada como aliadas do ensino de probabilidade. Tais pesquisas focalizam atividades que permitiram identificar dificuldades na interpretação desse tipo de tabela, bem como possíveis implicações dessa ausência de conhecimento sobre a compreensão de conceitos que envolvem probabilidade. Dentre esses trabalhos, destacamos os de Estrada e Batanero (2007), de Contreras et al. (2010), de Figueiredo (2019) e de Gea et al. (2020).

Estrada e Batanero (2007) reconhecem que em situações que requerem a tomada de decisões acertadas em meio à incerteza das circunstâncias, seja no campo profissional ou na vida cotidiana, as tabelas de dupla entrada mostram-se em grande parte úteis para o cálculo de probabilidades, principalmente condicionais. Analisando os possíveis conflitos semióticos vivenciados por futuros professores de matemática ao interpretarem dados de uma tabela de dupla entrada e a partir dela calcularem probabilidades simples, compostas e condicionais, esses pesquisadores constataram que a leitura dessas tabelas não é tarefa trivial para futuros docentes, pelo menos no contexto do cálculo de probabilidades.

Ao analisarem a interpretação que esses futuros professores deram aos dados, os pesquisadores concluíram que os erros detectados podem estar associados a dificuldades no âmbito do conhecimento probabilístico.

Contreras et al. (2010) apontam dificuldades apresentadas por uma amostra de alunos (futuros professores) da Universidade de Granada, Espanha ao calcularem probabilidades a partir de uma tabela de contingência. Consideram que muitas das atividades docentes, como as de selecionar tarefas para o ensino, detectar dificuldades dos alunos e propor meios de superá-las, exigem conhecimento matemático sólido. Consequentemente, apontam que o ensino adequado de probabilidade na educação básica dependerá do conhecimento probabilístico do professor.

No Brasil, Figueiredo (2019) aplicou a futuros professores de matemática uma sequência didática que mobilizava conceitos de probabilidade condicional em diferentes registros de representação, constatando que, em atividades que envolvessem leitura de dados de tabela, houve sujeitos que não interpretaram os valores das intersecções, ou seja, as frequências conjuntas e as marginais, o que dificultou as possíveis conversões de registro, assim como os tratamentos dentro de cada registro na sequência das atividades.

Em geral, pesquisas anteriores apontaram dificuldades na leitura e interpretação de atividades que mobilizassem conceitos envolvendo probabilidade quando os enunciados se baseavam nesses dados e os apresentavam em tabelas de dupla entrada.

Gea et al. (2020) propuseram a futuros professores da educação primária que estudavam na Universidade de Granada atividades envolvendo a construção de uma tabela de dupla entrada, para que, a partir dessa construção, respondessem questões sobre as variáveis nela contidas. Alguns participantes não souberam organizar as variáveis em formato tabular e, particularmente, categorizá-las em tabela de dupla entrada. Isso nos leva a supor que há futuros professores que não entendem a estrutura dessas tabelas, nem o caráter cognitivo que elas envolvem quanto à probabilidade.

As dificuldades que os estudos acima citados apontam sobre falhas no conhecimento probabilístico de futuros professores são motivo de preocupação, havendo por isso nos estimulado a investigar como os futuros professores de matemática tratam o cálculo de probabilidade e o relacionam com a interpretação de tabelas de contingência.

Discutiremos a seguir os conceitos probabilísticos envolvidos em atividades de leitura de tabelas de dupla entrada.

Algumas considerações sobre probabilidade e tabelas

Apresentaremos atividades que alguns pesquisadores aplicaram a futuros professores e exporemos considerações sobre tabelas de dupla entrada e probabilidade, visando discutir alguns conceitos envolvidos na elaboração dessas tabelas e conceitos probabilísticos envolvidos em sua leitura. Focalizaremos também o modo como as atividades que relacionam tabelas de dupla entrada e probabilidade são apresentadas em alguns livros didáticos no Brasil.

Lahanier-Reuter (2003) expõe que as tabelas de dupla entrada, também chamadas tabelas de contingência, são:

> [...] formadas pelo cruzamento de duas variáveis informadas. Seu desenvolvimento requer voltar à tabela inicial de dados e contar os sujeitos apresentando simultaneamente dois valores das variáveis consideradas. Essas tabelas são delimitadas por quatro margens. As duas "principais" fazem fronteira com a tabela à esquerda e acima. Elas são anunciadas na caixa superior esquerda. Desta vez, não é mais uma questão de margens aparecerem em listas enumerativas, mas de margens que são variações de duas variáveis. (Lahanier-Reuter, 2003, p. 148)

A atividade proposta por Contreras et al. (2010) parte de uma tabela de dupla entrada e propõe questões de probabilidade que requerem calcular probabilidades simples, conjuntas e condicionais (Figura 1).

Figura 1.

Atividade de probabilidade (Contreras et al., 2010, p. 274).

Problema: Em uma escola os alunos respondem a uma pergunta, obtendo-se os seguintes resultados:

	Meninos	Meninas	Total
Gosta de tênis	400	200	600
Não gosta de tênis	50	50	100
Total	450	250	700

Se escolhermos aleatoriamente um desses alunos:

- Qual é a probabilidade de que goste de tênis?
- Qual é a probabilidade de que seja menina e também goste de tênis?
- Sabendo que a aluna escolhida é uma menina, qual a probabilidade de que goste de tênis?

O problema proposto envolve 700 crianças classificadas de acordo com duas variáveis: gostar ou não gostar de tênis; ser menino ou ser menina. As quatro células centrais representam frequências absolutas da variável bidimensional associada.

A tabela também mostra o total de sujeitos (700) e valores absolutos das marginais de cada variável. Ao escolher um sujeito ao acaso, se está conduzindo um experimento aleatório com os eventos A: gostar de tênis e seu complementar; e B: ser menina e seu complementar. As probabilidades solicitadas nas três seções do problema são a probabilidade simples P(A), a probabilidade conjunta P(A∩B) e a probabilidade condicional P(A|B).

Como os casos são todos equiprováveis, essas probabilidades podem ser calculadas sem fórmulas, pela leitura da tabela com aplicação direta da regra de Laplace como um quociente de casos favoráveis e possíveis: probabilidade clássica, ou seja, P(A) = $\frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{600}{700} \approx 0{,}857$.

- Cálculo da probabilidade conjunta P(A∩B): Como o número de elementos *n*(A∩B) comparece em uma das células centrais da tabela – a de intersecção da linha ‘gosta de tênis’ com a coluna ‘meninas’, P(A∩B) pode ser calculada pela razão $\frac{200}{700} \approx 0{,}286$.
- Cálculo da probabilidade condicional P(A|B): Sabendo-se que foi escolhida uma menina, o espaço amostral se reduz a essa condição. Portanto, dentre as meninas devem-se escolher as que gostam de tênis. Temos então: $\frac{200}{250} = 0{,}8$.

Em livros didáticos brasileiros para o ensino médio, são comuns os exercícios de probabilidade em que uma parte dos dados do enunciado é apresentada em tabela de dupla entrada. A resolução, portanto, requer interpretação e leitura dos dados nela contidos. A Figura 2 exemplifica uma atividade desse tipo.

Figura 2.

Exercício de livro didático (Dante, 2016, p. 218).

26. Um grupo de pessoas está classificado da seguinte maneira:

	Professor	Advogado	Dentista
Homens	60	80	50
Mulheres	90	40	30

Define-se que *H*: homem; *M*: mulher; *P*: professor; *A*: advogado; *D*: dentista. Calcule cada probabilidade abaixo, supondo que cada pessoa tenha uma única profissão.

a) $p(A/H)$
b) $p(P/M)$
c) $p(D/H)$
d) $p(A/M)$
e) $p(\overline{A}/\overline{M})$
f) $p(\overline{D}/H)$
g) $p(P/\overline{H})$

O item *a*, que pede o cálculo de P(A|H), requer interpretação desta notação, que indica que se deve calcular a probabilidade de que uma pessoa desse grupo seja advogado, sabendo-se que é homem. Para isso, o aluno deve mobilizar conhecimentos sobre tabelas de dupla entrada e de probabilidade condicional, entre os quais figuram os seguintes:

- Para obter o número de elementos do evento H (homem), deve-se calcular a soma dos valores das células da primeira linha da tabela, soma esta que figuraria em uma nova célula na margem lateral direita da primeira linha de dados: *n*(H) = 190.
- Para cálculo de P(A|H), deve-se identificar na intersecção de linhas e colunas a célula que apresenta o número de elementos correspondentes a ser homem (H) e advogado (A): *n(*A∩H) = 80. A probabilidade procurada será então: P(A|H) = $\frac{n(A\cap H)}{n(H)} = \frac{80}{190} \approx 0{,}421$.

A resolução de todos os itens desse exercício envolve, portanto, ler na tabela os dados referentes ao número de elementos dos conjuntos – conhecimento fundamental para a resolução desse exercício, que permite ater-se à definição clássica de probabilidade.

Embora tanto as atividades da Figura 1 quanto da Figura 2 partam de tabelas de dupla entrada, são apresentadas em registros diferentes: a primeira atividade utiliza língua materna; a outra envolve registro simbólico.

A atividade proposta por Gea et al. (2020) (Figura 3), diferentemente da anterior, parte da leitura de um texto e pede que se construa uma tabela de dupla entrada que permitirá responder algumas das questões.

Figura 3.

Atividade proposta a futuros professores de matemática (Gea et al., 2020, p. 355).

Tarefa: O professor de matemática da quinta série entrevistou seus 100 alunos para descobrir quantas horas de estudo eles gastaram preparando-se para o exame. Ele queria investigar se estudaram menos de 5 horas, entre 5 e 10 horas ou mais de 10 horas. Dos 53 alunos que estudaram mais de 10 horas, 2 foram reprovados; daqueles que estudaram entre 5 e 10 horas, 15 foram aprovados, enquanto dos 25 alunos que estudaram menos de 5 horas apenas 5 foram aprovados.

Construa a tabela de dupla entrada com as informações do problema e responda, de forma a interpretar as seguintes questões, indicando as operações que você executa para responder cada uma delas.

1. Quantos alunos passaram tendo estudado menos de 10 horas?
2. Quantos alunos do sexo masculino e feminino estudaram para o exame por mais de 5 horas?
3. Quantos alunos foram reprovados tendo estudado entre 5 e 10 horas?
4. Qual é a taxa de reprovados?
5. Que porcentagem de alunos estuda mais de 10 horas para se preparar para o exame?
6. Considerando apenas os alunos reprovados no exame, qual o percentual dos que tenham estudado menos de 5 horas para se prepararem para o exame?
7. Qual a porcentagem de alunos que estudaram entre 5 e 10 horas e passaram no exame?
8. Entre os alunos que estudaram mais de 10 horas, qual a porcentagem dos que passaram no exame?

Nos exemplos anteriores, as questões indagavam diretamente sobre probabilidades, ao passo que esta atividade se atém a levantar questões sobre frequências condicionais (questões 1, 3, 6 e 8), marginais (questões 2, 4 e 5) e frequência conjunta (questão 7) em uma tabela de dupla entrada que deve ser construída (Tabela 1).

Tabela 1.

Tabela de dupla entrada construída com dados da atividade. (Adaptado de Gea et al., 2020, p. 356.)

A: Tempo de estudo	B: Resultados dos exames		
	B1: Aprovados	B2: Reprovados	Total
A_1: menos de 5 horas	5		25
A_2: entre 5 e 10 horas	15		
A_3: mais de 10 horas		2	53
Total	71	29	100

Para responder as questões, os alunos devem completar as células cujo conteúdo não foi explicitado no enunciado. As questões não pedem diretamente as probabilidades, pois não se trata de um experimento aleatório, embora questões que solicitam porcentagens de ocorrência de eventos mobilizem conhecimentos que se poderiam relacionar com cálculos probabilísticos.

As atividades aqui propostas nos guiaram a elaborar uma nova pesquisa que partisse também da construção de tabelas de dupla entrada, bem como a cogitar em possíveis questionamentos pertinentes ao tema escolhido. A seguir, apresentaremos o marco teórico adotado para a análise de nossa atividade.

Marco teórico

Duval (2003a), autor da teoria de registros de representação semiótica, descreve que a leitura e interpretação de gráficos e tabelas não ocorrem de forma simples, pois requerem ativação de várias funções cognitivas. Considera que o estudo de gráficos e tabelas deve se pautar no trânsito entre diferentes tipos de registro, cada um dos quais requer um tipo de tratamento.

As atividades que envolvem probabilidade podem mobilizar alguns registros de representação, dentre os quais destacamos o registro em língua natural (conteúdo de enunciados ou abordagem de termos probabilísticos), o registro figural (tabelas de dupla entrada, além de diagramas de árvore) e o registro simbólico em forma algébrica (uso de fórmulas) ou numérica (razão que quantifica a probabilidade). As atividades que propusemos a alunos de licenciatura em matemática envolvem esses três tipos de registro.

Duval (2003b) expõe que os tratamentos são transformações de representação dentro de um mesmo registro e que as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro – por exemplo, passar da língua natural à representação simbólica ou a uma razão numérica. As atividades que envolvem cálculo de probabilidade requererem registros, cuja expressão envolve tratamentos e conversões.

Estrella et al. (2014) identificam quatro níveis (Quadro 1) para a compreensão da leitura de tabelas, inspirando-se na classificação de Curcio (1989).

Quadro 1.

Níveis de interpretação de tabelas.

Nível 1	Ler as células, leitura pontual para associar apenas os dados. Uma leitura pontual que atende aos dados da célula, mas sem interpretação. Ela pode operar, mas não compara nem interpreta, e dispensa totalmente os títulos (a variável e suas categorias).
Nível 2	Ler a estrutura básica da tabela e os relacionamentos contidos nela, comparar e interpretar, operar com dados da célula e dispensar parcialmente alguns dados.
Nível 3	Ler, interpretar e comparar os cálculos contidos na tabela ou aqueles produzidos a partir dela, usando conhecimento do contexto externo ou interno de dados, e também incluir e reformular a tabela.
Nível 4	Ler além da tabela (leitura construtiva total). Este nível inclui também a formulação de outra representação com base em toda a tabela. Inclui a formulação de outra representação (algébrica, gráfica, tabular ou semitabular) com base em toda a tabela.

Fonte: Adaptado de Estrella et al. (2014).

Os textos aqui já citados constituíram referenciais para nossa pesquisa, tanto na elaboração das atividades aplicadas como na análise de seus resultados. Para o trabalho com probabilidade e tabelas, nos pautamos particularmente na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2003a, 2003b) e nas categorias de interpretação de tabelas propostas por Estrela et al. (2014).

Metodologia e procedimentos metodológicos

Empreendemos uma pesquisa qualitativa de tipo estudo de caso, nos termos de Ponte (2006), visando conhecer uma entidade bem definida em um sistema educativo. Para isso, tomamos como ponto de partida a comparação entre uma atividade diagnóstica e outra final propostas a alunos de licenciatura em matemática, bem como a análise de alguns documentos institucionais, algumas ementas de disciplinas que contemplam a probabilidade nesse curso e relatos do professor que aplicou as atividades.

Para melhor entendimento das análises da avaliação final, descreveremos primeiramente os procedimentos adotados por Figueiredo e Coutinho (2021) em atividade diagnóstica que aplicaram a 22 voluntários que eram alunos da mesma turma de terceiro semestre de formação de professores de matemática para a educação básica que reavaliamos na presente pesquisa.

A atividade diagnóstica havia sido aplicada em sessão única no início do semestre letivo a duplas de alunos da disciplina ‘Probabilidade’ e tinha o seguinte enunciado:

> Considere todos os seus colegas presentes na aula de hoje e faça o levantamento da idade e do sexo de cada um deles.
> a) Com os resultados encontrados construa uma tabela de dupla entrada. Considere dois intervalos de idades: o primeiro com idades menores de 22 anos e o segundo com idades maiores ou iguais a 22 anos.
> b) Após construída a tabela, formule questões sobre probabilidade considerando os dados nela mostrados. (Figueiredo & Coutinho, 2021, p. 124)

Dentre os resultados obtidos, constatou-se que, na maior parte, os participantes tiveram dificuldades em organizar os dados em uma tabela de dupla entrada e em cruzar as categorias em linhas e colunas para referir-se à intersecção de eventos. A maioria formulou questões envolvendo eventos simples para cálculo de probabilidade. Somente alguns elaboram questões que requeriam calcular probabilidades conjuntas. Apenas dois criaram questões sobre probabilidade condicional.

Como essa atividade diagnóstica não solicitava que os participantes resolvessem as questões que elaborassem, os pesquisadores tiveram dificuldade em analisar como eles converteriam os dados da tabela em registro simbólico. Isso nos levou a alterar parte do enunciado da atividade, a fim de que os alunos identificassem as questões de probabilidade simples, conjunta e condicionada e apresentassem suas resoluções (Quadro 2).

Quadro 2.

Atividade final.

Considere todos os seus colegas desta sala que enviaram dados sobre sua idade e sexo. a) Com os dados encontrados, construa uma tabela de dupla entrada. Considere dois intervalos de idades: o primeiro com idades menores de 23 anos e o segundo com idades maiores ou iguais a 23 anos. b) Construída a tabela, formule três questões sobre probabilidade considerando os dados nela mostrados: uma questão sobre probabilidade simples, uma sobre probabilidade conjunta e uma sobre probabilidade condicional.

Fonte: Elaborado para esta pesquisa.

O professor da turma mostrou-se cooperativo, tanto ao aplicar a atividade como nos encontros subsequentes para analisar os resultados obtidos, realizar leituras sobre o tema e discutir possíveis caminhos para conduzir o processo de ensino e aprendizagem durante o semestre com esses alunos.

Por exigências de distanciamento social que vigoraram logo após a aplicação da atividade diagnóstica, houve interrupção de seis meses nas aulas nessa instituição, período após o qual foram retomadas como aulas remotas[2]. De acordo com o relato do professor da disciplina e aplicador das atividades, a sequência prevista para os conteúdos da disciplina foi seguida, por meio de aulas expositivas e atividades em ambiente virtual de aprendizagem.

No projeto pedagógico do curso, a ementa dessa disciplina de probabilidade indica que os conteúdos a serem trabalhados no terceiro semestre abrangem experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos, definições clássica, frequentista e subjetiva de probabilidade, propriedades da probabilidade, probabilidade condicional, independência de eventos, modelos probabilísticos discretos e modelos probabilísticos contínuos.

Somente 16 alunos participaram da avaliação final. Suas produções foram elaboradas individualmente e enviadas ao professor por meio de ambiente virtual.

[2] Aula remota, para essa instituição, passou a ser todo contato com os alunos por meio da plataforma virtual Microsoft Teams, com aulas síncronas.

Diferentemente de algumas das pesquisas mencionadas acima, esta atividade envolveu não só elaboração de tabelas (neste caso, com dados obtidos de uma pesquisa promovida em ambiente virtual com os integrantes da sala), mas também formulação de questões que mobilizassem conhecimento probabilístico, de modo que as informações expressas nas tabelas construídas comparecessem nos enunciados das questões.

Um modo como os participantes poderiam representar os dados é apresentada na Tabela 1, que relaciona as variáveis 'idade' e 'sexo', podendo-se incluir ainda outras informações, como as somas das linhas e colunas geradas, que podem ser relacionadas com cálculos de probabilidade ao se inserir um contexto de sorteio aleatório de um elemento da turma. Ao realizar essas operações, estamos colocando em jogo alguns tratamentos, de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica (Duval, 2003a).

Tabela 1.

Probabilidades conjuntas, marginais e totais.

Sexo	Idade		
	Menor que 23 anos	Maior ou igual a 23 anos	Total
F	5	4	9
M	4	3	7
Total	9	7	16

Para calcular probabilidades simples, conjuntas ou condicionais na tabela de dupla entrada, é suficiente observar as células pertinentes, considerando as perguntas elaboradas pelos alunos.

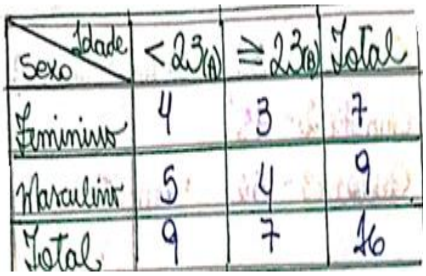
Análise e discussão

A análise das produções se baseou nos protocolos entregues. Quanto à elaboração das tabelas e questões, procuramos agrupá-las por similaridade. Algumas serão comentadas. Dos 16 participantes, apenas 13 entregaram suas produções ao professor e, portanto, a pesquisa gerou este número de protocolos. Identificamos aleatoriamente por letras os protocolos para estabelecer uma sequência e poder diferenciá-los.

Na atividade final, 10 dos 13 alunos construíram a tabela de dupla entrada com os dados coletados. Quatro destes não apresentaram as marginais laterais direita e inferior e um deles (aluno L; Figuras 4 e 5) colocou somente as somas da marginal inferior.

Figura 4.

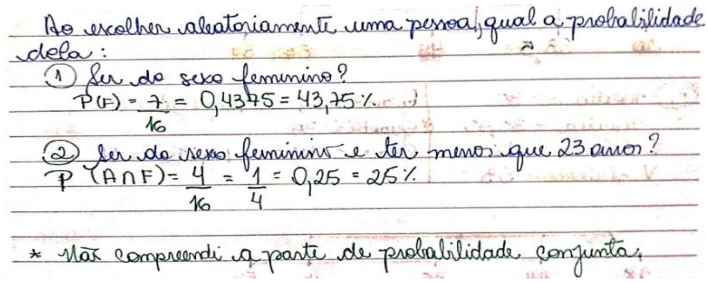
Tabela do aluno L.



Sexo \ Idade	< 23 (A)	≥ 23 (B)	Total
Feminino	4	3	7
Masculino	5	4	9
Total	9	7	16

Figura 5.

Questões e respostas do aluno L.



Ao escolher aleatoriamente uma pessoa, qual a probabilidade dela:

① Ser do sexo feminino?

$P(F) = \frac{7}{16} = 0{,}4375 = 43{,}75\%$

② Ser do sexo feminino e ter menos que 23 anos?

$P(A \cap F) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

* Não compreendi a parte de probabilidade conjunta.

Esse aluno elabora a tabela de dupla entrada com seus respectivos valores, embora não coloque título e nem inclua a fonte dos dados, fato este observado em todos os protocolos recebidos. Nota-se que o aluno optou por criar uma notação que lhe facilitasse responder as próprias questões: ao lado de “< 23” e “≥ 23”, escreveu entre parênteses A e B, respectivamente, para indicar os eventos. Criou assim uma nova representação para trabalhar com os eventos na probabilidade, adaptando os dados da tabela, tanto para eventos simples como para intersecções (Figura 5), o que é considerado por Duval (2003a) uma conversão de registro tabular em registro simbólico.

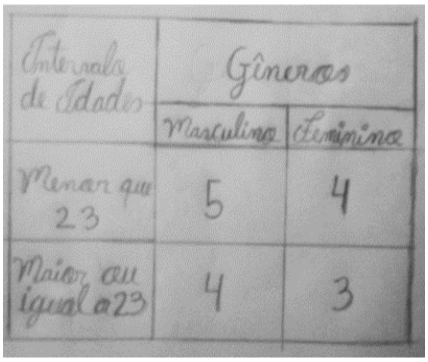
Reconhecemos que o aluno L vai além da leitura da tabela: faz uma nova representação, associada a um registro simbólico, o que para Estrela et al. (2014) enquadra-se ao nível 4 de interpretação, em que o aluno lê além da tabela. Tal nível inclui também a formulação de outra representação.

Embora o aluno L registre que “não compreende a probabilidade conjunta”, sua segunda questão trata desse tipo de probabilidade: “Ser do sexo feminino e ter menos que 23 anos”, ao passo que a questão não elaborada deveria envolver probabilidade condicional. Há, portanto, para esse aluno, confusão entre probabilidade condicional e conjunta, fato este identificado por outros pesquisadores, como Contreras et al. (2010), Batanero et al. (2012) e Figueiredo (2019). Para Figueiredo (2019), essa dificuldade é mais frequente quando as perguntas nos enunciados são apresentadas em registro simbólico do que quando formuladas em língua natural.

Quanto aos alunos que construíram a tabela de dupla entrada sem marginais, é possível supor que essa ocorrência tenha estreita relação com os valores das marginais, fato este observado no modo como o aluno H (Figuras 6 e 7) indica a soma dos valores (5 + 4) da coluna ‘gênero masculino’ para encontrar o número de elementos do evento simples ‘pessoa sorteada ser do sexo masculino’. A maneira como percebe a intersecção de eventos, ao escrever P(A∩B), sugere que o aluno visualizou *n*(A∩B).

Figura 6.

Tabela do aluno H.



Intervalo de Idades	Gêneros	
	Masculino	Feminino
Menor que 23	5	4
Maior ou igual a23	4	3

Figura 7.

Questões e respostas do aluno H.

Simples: Com base nos dados apresentados na tabela de dupla entrada. Se você sortear uma pessoa aleatoriamente, qual a probabilidade dessa pessoa ser do gênero masculino?
P = n(A)/n(s) = (5+4) /16 = 9/16
Conjunta: Com base nos dados apresentados na tabela de dupla entrada. Qual a probabilidade de sortear uma pessoa aleatoriamente e ela ser do gênero feminino e ter idade maior ou igual a 23? P = P(A)/n(S) = 3/16.
Condicional: Sabendo que uma pessoa foi escolhida aleatoriamente e ela tem idade maior ou igual a 23, qual a probabilidade dessa pessoa ser do gênero feminino?
P = P(A∩B) / P(B) = (3÷16) / (7÷16) = 3/7

Podemos inferir que construir tabelas de dupla entrada sem marginais não indica que os alunos não saibam fazê-lo, mas sim que talvez não reconheçam que indicar tais somas pode facilitar o cálculo de probabilidades.

O aluno H utiliza algumas notações para a representação simbólica de seus cálculos, conversão esta que comparece sem que se possa rastrear sua gênese. No exercício de probabilidade conjunta, ele escreve: “P = P(A)/*n*(S) = 3/16”. Embora indique por *n*(S) o número de elementos do espaço amostral, não é claro o motivo de haver representado a intersecção dos eventos por P(A), embora todas as respostas a questões sobre as probabilidades calculadas estejam corretas.

Dificuldades em utilizar notação simbólica própria da probabilidade foram percebidas na maioria dos sujeitos, com uso somente da letra P diante da resposta apresentada, como no caso dos alunos L e H, ou mesmo somente números como resposta, como no protocolo do aluno C (Figuras 8 e 9).

Figura 8.

Tabela do aluno C.

	Masculino	Feminino
< 23	5	4
> = 23	4	3
Total	9	7

Figura 9.

Questões e respostas do aluno C.

Qual a probabilidade de ser escolhido um aluno do sexo masculino? R: A= 9/16
Qual a probabilidade de ser escolhido um aluno do sexo feminino e com idade maior ou igual a 23? R: B= 3/16
Qual a probabilidade de um aluno ser escolhido do sexo feminino, sabendo que ele tem idade maior ou igual a 23? R: C = 3/7

Diante das questões elaboradas por este aluno, sua tabela e sua maneira de apresentar as respostas nos levam a conjecturar que ele somente apresentou a marginal inferior, pois foi a única de que precisou para os cálculos solicitados, já que o total de participantes era conhecido do levantamento de dados. Nesse protocolo (Figura 9) há ausência de registro simbólico adequado para representar as probabilidades procuradas e os elementos correspondentes a esse cálculo.

Carvalho (2013) e Figueiredo (2019) apontam que os alunos têm dificuldades na representação simbólica da probabilidade, bem como na leitura de problemas que a utilizem em seus enunciados. Gal (2005, p. 54) defende que, para o desenvolvimento do letramento probabilístico, os “alunos devem estar familiarizados com as maneiras de encontrar a probabilidade de eventos, a fim de compreender as declarações probabilísticas feitas por outros, ou para gerar estimativas sobre a probabilidade de eventos e comunicar-se com outras pessoas sobre elas”.

Na avaliação final, os alunos F, G e D construíram tabelas semelhantes às da avaliação diagnóstica. O uso de tabelas de dupla entrada para representar dados predominou na avaliação final, o que indica ter havido melhora na elaboração das tabelas. Disto é exemplo o protocolo do aluno D (Figuras 10 e 11).

Figura 10.

Tabela do aluno D.

Nome:	< 23	>= 23	Masculino	Feminino
		×	×	
		×	×	
	×			×
		×	×	
	×		×	
		×		×
	×		×	
	×		×	
	×			×
	×		×	
	×			×
		×	×	
	×			×
	×		×	
		×		×
		×		×

Figura 11.

Questões e respostas do aluno D.

Qual a probabilidade de que uma pessoa escolhida ao acaso tenha idade maior ou igual a 23 anos? R: 7/16

Em uma sala há os grupos: A e B. Sabe-se que o grupo A tem 9 participantes e com idade menor do que 23 anos, enquanto, que no grupo B tem 7 participantes e contém as pessoas com idade igual ou superior a 23 anos.
Qual a probabilidade de que uma pessoa escolhida ao acaso pertença ao grupo A? R: 9/16

Qual a probabilidade de que a pessoa tenha menos de 23 anos e que seja do sexo feminino? R: 1/4

Supomos que esses participantes utilizaram esta representação para organizar os dados coletados, pois listaram os nomes dos colegas de sala, que foram depois apagados: revelaram os nomes dos participantes, todas as variáveis e suas categorias na linha de cima e marcaram com X o aluno correspondente à característica de interesse.

Esses sujeitos não converteram essa forma de representar em outra, que estabelecesse relação de intersecção entre as variáveis, ou seja, não buscaram elementos que correspondessem simultaneamente às duas características: sexo e idade. Inferimos na análise da avaliação final que isso pode ter ocorrido por não reconhecerem a importância das características dessa forma de representação de dados.

Os protocolos dos alunos F, G e D, que construíram tabelas de dupla entrada, evidenciam que os elementos da tabela foram computados para se obter o número de elementos para cálculo das probabilidades. Na sequência de questões apresentadas na Figura 11, o aluno D não distinguiu quais seriam as de probabilidade simples, conjunta e condicional. Formulou três questões que não obedecem a essa sequência e não chegou a elaborar uma questão de probabilidade condicional. O mesmo aconteceu com alunos que representaram os dados dessa forma.

Somente quatro participantes (A, C, H e M) elaboraram os três tipos de questão e identificaram cada uma delas. Predominou a ausência de questões que mobilizassem probabilidade condicional. Em alguns casos, houve indicação de que a questão envolvia probabilidade condicional, quando na verdade se tratava de probabilidade conjunta.

Alguns sujeitos também indicaram que a questão envolvia probabilidade simples, quando era na verdade conjunta. Supomos que embora esses alunos tenham elaborado questões de probabilidade com os dados conhecidos, sentem dificuldade em distinguir os tipos de questão de probabilidade que envolvem eventos simples, intersecção de eventos e eventos condicionados.

Os participantes da avaliação final terminaram o terceiro semestre cumprindo a matriz curricular do curso, mas ainda cursariam outras disciplinas que contemplam probabilidade. Esperamos que os achados desta pesquisa proporcionem subsídios para que o professor responsável possa retomar conceitos que envolvem probabilidade, em prol da continuidade da formação desses futuros professores de matemática da educação básica.

Considerações finais

Apresentamos uma análise das respostas de estudantes de licenciatura em matemática que, tendo já participado de uma avaliação diagnóstica empreendida por Figueiredo e Coutinho (2021) e havendo subsequentemente recebido formalização de conceitos pelo professor da disciplina pertinente, participaram, ao término do semestre, da mesma atividade, desta vez enriquecida de algumas adaptações, a qual serviu como avaliação final. Ambas as avaliações envolveram conhecimentos necessários para coletar, representar, ler e interpretar dados em tabelas de dupla entrada, assim como elaborar questões cuja resolução necessitasse mobilização de conhecimentos probabilísticos.

Na avaliação final, solicitou-se que formulassem três questões envolvendo probabilidade simples, conjunta e condicional e apresentassem suas resoluções, ao passo que a avaliação diagnóstica requerera somente duas questões, sem necessidade de resolução ou de identificação do tipo de probabilidade envolvida. Essa diferença nos proporcionou mais subsídios para as análises e para estabelecer relações entre as questões elaboradas e os valores identificados nas tabelas de dupla entrada, assim como para identificar se esses alunos distinguiam esses tipos de questão, uma vez que a avaliação inicial não incluía tais aspectos.

Além dos resultados da avaliação diagnóstica de Figueiredo e Coutinho (2021), o presente estudo teve como pontos de partida pesquisas como as de Figueiredo (2019) e de Gea et al. (2020), que apontam a necessidade de investigações da formação docente que aliem o conhecimento de probabilidade ao de tabelas de dupla entrada. Tais pesquisas nos subsidiaram também na elaboração da atividade que propusemos visando estudar o envolvimento dos alunos na construção de tabelas de dupla entrada.

Diferentemente do constatado por Figueiredo e Coutinho (2021) na avaliação diagnóstica, observamos que os futuros professores participantes conseguiram majoritariamente, na atividade final, organizar os dados em tabela e cruzar as categorias em linhas e colunas para referir-se à intersecção de eventos. No entanto, em eventos condicionados apresentaram dificuldades, tanto para formalizar questões quanto para resolvê-las, fato que pode haver decorrido de confusão entre probabilidade conjunta e condicional, como apontam as pesquisas de Contreras et al. (2010), de Batanero et al. (2012) e de Figueiredo (2019).

Os 10 alunos, de 13, que conseguiram confeccionar essas tabelas enquadraram-se no nível 4 das categorias de Estrella et al. (2014): uma evolução em relação ao nível 2 obtido na avaliação diagnóstica. Observamos nos protocolos que os sujeitos buscaram uma representação própria da probabilidade para apresentar suas respostas e converter os dados da tabela de dupla entrada em registro simbólico, mas isso não parece ter sido tão fácil para alguns participantes, embora tenham recorrido a representação numérica, na forma de razão entre os números da tabela, para os cálculos.

Os achados desta pesquisa nos convidam a refletir e a levantar a hipótese de que os alunos que, ao formular suas questões, as relacionaram corretamente com cada tipo de probabilidade (simples, conjunta ou condicional) são os que dispõem de mais conhecimentos sobre o caráter cognitivo de tabelas de dupla entrada. Não podemos confirmar tal hipótese no presente estudo, mas oferecemos a questão para que se empreendam futuras pesquisas sobre o tema.

Referências

Batanero, C., Contreras, J.M., & Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, 12(2).

Carvalho, M.J.O.R. (2013). *Ensino e aprendizagem de probabilidade condicionada e independência*. (Dissertação de mestrado, Universidade de Aveiro.)

Contreras, J.M., Estrada, A., Díaz, C., & Batanero, C. (2010). Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. In M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 271-280). SEIE.

Curcio, F.R. (1989). *Developing graph comprehension*. NCTM.

Dante, L.R. (2016). *Matemática: contexto e aplicações*. Ática, vol. 2.

Duval, R. (2003a). Comment analyser le fonctionnement représentationnel des tableaux et leur diversité? *Spirale: Revue de Recherches en Éducation*, 32, 7-31.

Duval, R. (2003b). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In S.D.A. Machado (org.), *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica* (pp. 7-10). Papirus.

Estrada, A, R., & Batanero, C.D. (2007). Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 44, 48-58.

Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 14(2), 1-23.

Estrella, S., Mena, A., & Olfos, R. (2014). Desarrollo de una taxonomía de comprensión tabular. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 1041-1047.

Figueiredo, A. (2019). Probabilidade condicional em contexto de ensino aprendizagem. Probabilidade condicional em contexto de ensino aprendizagem. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(5), 544-554.

Figueiredo, A., & Coutinho, C.Q.S. (2021) Tablas de doble entrada: un estudio con estudiantes de la l en matemáticas. *Números: Revista de las Didáticas da Matemática*, 106, 119-128.

Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In G.A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Springer.

Gal, I. (2012). Developing probability literacy: needs and pressures stemming from framewoks of adult competencies and mathematics curricula, *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*.

Gea, M.M., Gossa, A., Batanero, C., & Pallauta, J. (2020). Construcción y lectura de la tabla de doble entrada por profesores de educación primaria en formación. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(1), 348-370.

Lahanier-Reuter, D. (2003). Différents types de tableaux dans l’enseignement des statistiques. *Spirale: Revue de Recherches en Éducation*, 32, 143-154.

Ministério da Educação e do Desporto (MEC). (1997). *Parâmetros curriculares nacionais*. MEC.

Ministério da Educação e do Desporto (MEC). (1998). *Parâmetros curriculares nacionais*. MEC.

Ministério da Educação e do Desporto (MEC). (2002). *Parâmetros curriculares nacionais, ensino médio +: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. MEC.

Ministério da Educação e do Desporto (MEC). (2006). *Orientações curriculares para o ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. MEC.

Ministério da Educação (MEC). Brasil. (2018). *Base macional comum curricular*. MEC.

Ponte, J.P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132. Versão revista e atualizada de um artigo anterior: Ponte, J.P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, *3*(1), 3-18.

Recebido: 14/03/2021

Aceito:02/05/2021