ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i2p076-098

Aplicação da proporcionalidade direta à resolução de uma situação do quotidiano por futuros professores dos primeiros anos

Application of direct proportionality to the resolution of an everyday situation by prospective primary school teachers

Aplicación de la proporcionalidad directa a la resolución de una situación cotidiana por futuros profesores de los primeros años

José António Fernandes[1]
Universidade do Minho (UM)
https://orcid.org/0000-0003-2015-160X

Resumo

Neste artigo estuda-se a compreensão de estudantes, futuros professores dos primeiros anos, sobre a aplicação do conceito de proporcionalidade direta à resolução de uma situação do quotidiano, quando o uso de uma ou de duas expressões de proporcionalidade direta simultaneamente é requerido. Participaram no estudo 72 estudantes do 1.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica de uma universidade do norte de Portugal. Os dados foram obtidos através da aplicação de um questionário, versando os conceitos de razão, proporção e proporcionalidade direta. Aqui, neste trabalho, explora-se uma das várias tarefas do questionário, aquela que se refere à aplicação da proporcionalidade direta à resolução de uma situação-problema do quotidiano. Em termos dos principais resultados obtidos, salienta-se um melhor desempenho na situação cuja resolução requer o uso de apenas uma expressão de proporcionalidade direta, o qual diminui muito quando a situação requer o uso simultâneo de duas expressões de proporcionalidade direta e, mais ainda, quando se acrescenta a inversão de operações aritméticas. Portanto, destaca-se a necessidade de confrontar estes futuros professores com situações cuja resolução requer a aplicação simultânea de mais de uma expressão de proporcionalidade direta.

[1] jfernandes@ie.uminho.pt

Palavras-chave: Proporcionalidade direta, Futuros professores, Primeiros anos escolares.

Abstract

This article studies how prospective primary school teachers understand the application of the concept of direct proportionality to the resolution of an everyday situation, when one or two expressions of direct proportionality simultaneously are required. Seventy-two students from the 1st year of a basic education degree course at a university in the north of Portugal participated in the study. The data were obtained through the application of a questionnaire, covering the concepts of ratio, proportion, and direct proportionality. In this work, only one of the various tasks of the questionnaire is explored, the one that refers to the application of direct proportionality to the resolution of a daily problem-situation. In terms of the main results obtained, we highlight a better performance in the situation whose resolution requires the use of only one expression of direct proportionality, which decreases much when the situation required the simultaneous use of two expressions of direct proportionality and, even more, when the inversion of arithmetic operations was added. Hence, the present study stresses the need to confront the prospective teachers with situations whose resolution requires the simultaneous application of more than one expression of direct proportionality.

Keywords: Direct proportionality, Prospective teachers, Primary school.

Resumen

Este artículo estudia la comprensión de los estudiantes, futuros docentes de los primeros años, sobre la aplicación del concepto de proporcionalidad directa a la resolución de una situación cotidiana, cuando se requiere el uso de una o dos expresiones de proporcionalidad directa simultáneamente. En el estudio participaron 72 alumnos del 1.º curso de una licenciatura en educación básica de una universidad del norte de Portugal. Los datos se obtuvieron mediante la aplicación de un cuestionario, cubriendo los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad directa. Aquí, en este trabajo, se explora una de las diversas tareas del cuestionario, la que se refiere a la aplicación de la proporcionalidad directa a la resolución de una situación-problema cotidiana. En cuanto a los principales resultados obtenidos, se observa un mejor desempeño en la situación cuya resolución requiere el uso de una sola expresión de proporcionalidad directa, lo que disminuye mucho cuando la situación requiere el uso simultáneo de dos expresiones de proporcionalidad directa y, más aún, cuando se suma la inversión de operaciones aritméticas. De ahí que el presente estudio resalte la necesidad de confrontar a estos futuros docentes con situaciones cuya resolución requiere la aplicación simultánea de más de una expresión de proporcionalidad directa.

Palabras clave: Proporcionalidad directa, Futuros profesores, Primeros años escolares.

Résumé

Cet article étudie la compréhension des étudiants, futurs enseignants des premières années, sur l'application du concept de proportionnalité directe à la résolution d'une situation quotidienne, lorsque l'utilisation simultanée d'une ou deux expressions de proportionnalité directe est requise. L'étude a porté sur 72 étudiants de la 1ère année de licence en éducation de base dans une université du nord du Portugal. Les données ont été obtenues grâce à l'application d'un questionnaire, couvrant les concepts de rapport, de proportion et de proportionnalité directe. Ici, dans ce travail, l'une des différentes tâches du questionnaire est explorée, celle qui fait référence à l'application de la proportionnalité directe à la résolution d'une situation-problème quotidienne. Au regard des principaux résultats obtenus, on note une meilleure performance dans la situation dont la résolution nécessite l'utilisation d'une seule expression de proportionnalité directe, ce qui diminue beaucoup lorsque la situation nécessite l'utilisation simultanée de deux expressions de proportionnalité directe et, encore plus, lorsque l'inversion des opérations arithmétiques est ajoutée. Il est donc nécessaire de confronter ces futurs enseignants à des situations dont la résolution nécessite l'application simultanée de plus d'une expression de proportionnalité directe.

Mots-clés : Proportionnalité directe, Futurs enseignants, Premières années scolaires.

Aplicação da proporcionalidade direta à resolução de uma situação do quotidiano por futuros professores dos primeiros anos

A proporcionalidade é um conceito amplamente usado nos mais variados domínios, seja na disciplina de matemática, nas outras disciplinas ou na vida quotidiana, o que mostra a sua importância em termos académicos, pessoais e sociais. Por exemplo, na Matemática este conceito está presente na semelhança de figuras, nas probabilidades e na trigonometria; nas outras disciplinas pode pensar-se nas suas aplicações nas Ciências Naturais e na Geografia e, finalmente, na vida quotidiana podemos pensar no custo de quantidades (discretas ou contínuas) de custo unitário fixo e na determinação de percentagens.

O conceito de proporcionalidade é um conceito complexo que requer a mobilização de vários outros conceitos, designadamente os conceitos de razão, proporção e função. Portanto, a importância e a complexidade do conceito justificam o seu ensino nas escolas, o que acontece, especialmente, durante todo o ensino básico. O conceito, que se vai aprofundando com o avançar da escolaridade, apesar de ser mais enfatizado na disciplina de matemática (Ministério da Educação e Ciência, 2013), ele também é abordado em várias outras disciplinas, como sejam as disciplinas da área de Ciências e das Ciências Humanas e Sociais.

Estudos realizados antes mostram que os alunos, em que se incluem também futuros professores dos primeiros anos escolares, têm dificuldades nos conceitos de razão, proporção e proporcionalidade (e.g., Berenson, Oldham, Price & Leite, 2013; Beswick, 2011; Burgos & Godino, 2020a; Fernandes, Barros & Gonçalves, 2019, 2020; Fernandes & Leite, 2015; Livy & Vale; 2011; Singh, 2000), dificuldades essas relativas à definição, à representação e à aplicação destes conceitos à resolução de situações-problema.

No presente trabalho estuda-se a compreensão dos estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, acerca da aplicação da proporcionalidade direta à resolução de uma situação-problema do quotidiano. Comparativamente com outros estudos prévios, a situação-problema proposta requer a aplicação de uma ou mais expressões de proporcionalidade direta. Portanto, a dimensão inovadora deste estudo reside exatamente na aplicação de mais do que uma expressão de proporcionalidade direta simultaneamente, especificamente duas expressões. Assim, nesta investigação, pretende-se contrastar o desempenho dos estudantes em situações cuja resolução requer apenas o uso de uma expressão de proporcionalidade direta com situações cuja resolução requer o uso de duas expressões de proporcionalidade direta.

Seguidamente, nas próximas secções do artigo, desenvolve-se o enquadramento teórico, refere-se a metodologia adotada no estudo, analisam-se os dados e apresentam-se os resultados obtidos e, por último, sintetizam-se as principais conclusões e implicações do estudo.

Enquadramento teórico

Nesta secção analisam-se os pressupostos teóricos do estudo, destacando-se aspetos teóricos fundamentais do conceito de proporcionalidade e resultados de alguns estudos sobre a sua aprendizagem.

Sobre o conceito de proporcionalidade

Analisando o conceito de proporcionalidade direta conclui-se que se trata de um conceito complexo, que se baseia em variados conceitos, como sejam os conceitos de razão, de proporção e de função. Ora, a natureza multifacetada do conceito acarreta que para resolver um problema de proporcionalidade podemos fazê-lo recorrendo a estratégias variadas, designadamente: recorrer a uma proporção; usar uma regra de três simples; aplicar o conceito de operador escalar entre dois espaços de medida; e socorrer-se de uma função de proporcionalidade direta entre dois espaços de medida.

Sendo a proporção uma igualde entre duas razões, ela implica a noção de razão, donde se conclui que o raciocínio proporcional requer a compreensão das noções de razão e proporção. Com base nas proporções podem-se resolver dois tipos fundamentais de problemas:

os problemas de comparação, em que, dados os quatro valores da proporção, a, b, c e d, se pretende comparar as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ através das relações $<, >$ ou $=$; e os problemas de valor omisso, nos quais são conhecidos três dos quatro valores da proporção e se pretende determinar o valor em falta. Por exemplo, num problema comparação pretende-se verificar, de dois refrescos de café e água, aquele que tem maior concentração de café ou se ambos têm a mesma concentração de café; enquanto no problema de valor omisso se pretende determinar o valor em falta, supondo que os refrescos têm igual concentração de café ou um tem maior concentração de café do que o outro.

Para Lamon (2007), o raciocínio proporcional alicerça-se em "relações estruturais entre quatro quantidades (a, b, c, d) num contexto envolvendo simultaneamente a covariância e a invariância de razões ou produtos" (p. 638), como acontece com a proporção e a regra de três simples. Assim, podemos considerar a regra de três simples, essencialmente, como um método alternativo ao método da proporção para resolver problemas de valor omisso, o qual não promove a transição para abordagens mais gerais, como seja o estudo da proporcionalidade através de relações escalares e de relações funcionais, que veremos a seguir.

A noção de operador escalar entre dois espaços de medida significa que a razão entre dois quaisquer valores de um dos espaços de medida é igual à razão entre os correspondentes valores do outro espaço de medida. No caso da situação: "Se o Filipe pagou 2 euros por 80 rebuçados, quanto deve pagar o João por 120 rebuçados?", tem-se que $\frac{80}{120} = \frac{2}{3}$ é a razão entre os números de rebuçados, a qual se deve manter para os custos dos rebuçados, obtendo-se, assim, a proporção $\frac{2}{3} = \frac{2}{x}$. Portanto, sendo $x = 3$, conclui-se que o Filipe deve pagar 3 euros pelos 120 rebuçados.

Já no caso da relação funcional entre dois espaços de medida, determinamos o valor unitário e multiplicamo-lo pela medida respetiva. No caso da situação: "Se o Filipe pagou 2 euros por 80 rebuçados, quantos rebuçados comprou o João por 4 euros?", tem-se que o valor unitário é dado pela razão $\frac{80}{2} = 40$, que corresponde ao número de rebuçados que se compram com 1 euro. Donde, com 4 euros o Filipe poderá comprar $40 \times 4 = 160$ rebuçados. Mais geralmente, pode-se definir uma relação funcional do tipo $f(x) = 40x$, com $x > 0$, em que $f(x)$ define o número de rebuçados que se compram com x euros.

Relativamente às diferentes estratégias, Burgos, Godino, Giacomone e Beltrán-Pellicer (2018) referem que, no 3.º ciclo do ensino básico, o estudo da proporcionalidade "contempla quase exclusivamente um uso técnico da regra de três ou uma interpretação funcional a partir da fórmula da função linear" (p. 707), portanto apenas algumas das abordagens antes referidas.

Aprendizagem do conceito de proporcionalidade

Conforme foi referido antes, o conceito de proporcionalidade é um conceito elaborado, o que, por sua vez, se repercute na sua aprendizagem por parte dos alunos. Viana e Miranda (2018) acrescentam que o processo de aquisição dos conceitos implicados no raciocínio proporcional é difícil, requerendo a exploração de muitas situações-problema. Dessa complexidade resulta que a sua aprendizagem não está isenta de dificuldades e que o seu ensino decorre ao longo de vários anos escolares do ensino básico (Ministério da Educação e Ciência, 2013).

Muitos estudantes, futuros professores dos primeiros anos, reconhecem a razão como comparação/relação entre grandezas, contudo, segundo Fernandes e Leite (2015) e Suggate, Davis e Goulding (2006), muitos desses estudantes não especificam o tipo de relação envolvida e, quando indicam as operações implicadas, são poucos os que referem as operações de multiplicação e divisão, que são precisamente aquelas que estão associadas ao conceito de razão e de número racional (Lamon, 2007). No estudo de Fernandes e Leite (2015) ainda se destaca a abrangência que o conceito de razão tem para os estudantes inquiridos, a débil conexão entre os conceitos de razão e de número racional e as dificuldades e limitações concetuais reveladas nas suas respostas, sobretudo em relação às respostas muito curtas e pouco explicativas do significado do conceito de razão.

Num estudo posterior, Leite, Fernandes, Viseu e Gea (2016) propuseram a futuros professores dos primeiros anos escolares a resolução de uma situação-problema envolvendo a comparação de razões. Nessa situação-problema, em que se recorria à representação gráfica da rapidez de duas pessoas, constatou-se que um terço dos estudantes não foi capaz de comparar as razões correspondentes. Face a tais limitações dos estudantes, os autores preconizam o aprofundamento do estudo destes conceitos em variados contextos.

Livy e Vale (2011) também inquiriram futuros professores sobre um item em que se pedia a determinação de uma distância real a partir da distância no mapa. A obtenção de cerca de 10% de respostas corretas significa que os estudantes sentiram muitas dificuldades na resolução do item, sendo que os erros dos estudantes resultaram, fundamentalmente, da utilização de um procedimento de resolução incompleto, da incorreta conversão de unidades de comprimento, do uso da operação de adição ou subtração em vez da multiplicação e incorreta interpretação da escala, designadamente assumindo a razão 1:1 em vez da razão 6(cm):75(km), relativa à razão "distância no mapa: distância real".

Num outro estudo, em que participaram também futuros professores dos primeiros anos escolares, envolvendo também distâncias reais e no mapa, Viseu, Fernandes e Leite (2018) confrontaram os participantes com três itens, em que nos dois primeiros se dava a distância no mapa e real e pedia-se, respetivamente, a distância real e no mapa, enquanto no terceiro se davam duas distâncias reais e se pedia a razão entre as correspondentes distâncias no mapa. Em termos de resultados obtidos, nos dois primeiros itens verificou-se que cerca de metade ou mais dos estudantes respondeu corretamente. Já no terceiro item os estudantes sentiram mais dificuldades, sendo poucos aqueles que determinaram corretamente a razão pedida, seja determinando a razão entre as distâncias reais (9 estudantes em 81), que coincide com a razão entre as distâncias no mapa, seja determinando a razão entre as distâncias no mapa (determinadas através da regra de três simples, 19 estudantes em 81). Em qualquer dos três itens constatou-se que a maioria dos estudantes recorreu nas suas resoluções à regra de três simples, embora mais frequentemente nos dois primeiros itens. No caso do terceiro item, o uso da regra de três simples é ainda mais problemático pois, de entre os estudantes que responderam corretamente, mais do dobro recorreu a essa regra, quando isso não era necessário.

Já no estudo de Fernandes, Barros e Gonçalves (2019) foram questionados futuros professores dos primeiros anos escolares sobre a proporcionalidade e o significado da noção de razão. Nos dois itens envolvendo a proporcionalidade, todos os estudantes recorreram à estratégia da regra de três simples, tendo mais de metade respondido corretamente, enquanto apenas cerca de um em cada três estudantes atribuíram um significado correto à razão dada. Face a estes resultados, os autores advogam que os estudantes devem desenvolver uma maior flexibilidade e diversidade nas estratégias a que recorrem na resolução das situações-problema e interpretar ou atribuir significado aos resultados obtidos.

Num estudo mais recente, ainda Fernandes, Barros e Gonçalves (2020) aplicaram três itens de proporções a futuros professores dos primeiros anos, em que se pedia para determinar um dos quatro termos da proporção, conhecidos os restantes três. Em termos de resultados, verificou-se a percentagem de respostas corretas variou entre 39% e 68%, com uma média global de 50%. Já quanto às estratégias, por ordem decrescente de frequência, os estudantes recorreram às estratégias regra de três simples, aditiva, unidade de mistura e funcional. Face à elevada prevalência da estratégia regra de três simples, Fernandes et al. (2020) afirmam, referindo-se aos estudantes, que “é fundamental que eles desenvolvam capacidades cognitivas mais elaboradas e mais complexas do que aquelas que foram reveladas pela maioria destes estudantes, que realizaram a aplicação mecânica da regra de três simples” (p. 428).

Tal como aconteceu no estudo de Fernandes et al. (2020), também no estudo de Burgos et al. (2018), estudantes, futuros professores do ensino secundário, foram questionados sobre uma tarefa de proporcionalidade, tendo-se verificado que a regra de três simples foi a estratégia mais utilizada pelos estudantes, seguindo-se a estratégia tabelar e, em menor percentagem, recorreram à estratégia funcional. Os autores apelidam de "degenerada" a estratégia regra de três simples, significando com isso que os estudantes omitiram a série de números proporcionais implicados na situação e a igualdade de razões correspondente.

Metodologia

Neste estudo investiga-se a compreensão de estudantes, futuros professores dos primeiros anos, sobre noções relativas à proporcionalidade direta. Mais concretamente, pretende-se estudar se os estudantes aplicam a proporcionalidade direta à resolução de vários itens de uma situação do quotidiano.

Para Godino e Batanero (1994), o conhecimento emerge das práticas matemáticas (operativas e discursivas) que o sujeito realiza para resolver uma situação-problema, as quais têm um caráter dual, podendo ser considerado o seu significado de um ponto de vista institucional (e.g., a escola) ou pessoal (e.g., os estudantes que resolvem tarefas, neste caso de proporcionalidade direta). Face a esta dualidade, estes autores consideram que a compreensão corresponde à parte do significado pessoal que coincide com o significado institucional.

Participaram no estudo 72 estudantes do 1.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, de uma universidade do norte de Portugal, a qual dá acesso aos mestrados que conferem habilitação para educador de infância, professor do 1.º ciclo (porfessor generalista) e professor do 2.º ciclo (professor de uma área disciplinar, como, por exemplo, Matemática e Ciências)[2]. Estes estudantes, futuros professores dos primeiros anos, encontravam-se no início do seu

[2]Em Portugal, o ensino básico desenvolve-se entre o 1.º e o 9.º ano de escolaridade, e organiza-se nos três seguintes ciclos: 1.º ciclo, do 1.º ao 4.º ano; 2.º ciclo, 5.º e 6.º anos; e 3.º ciclo, do 7.º ao 9.º ano.

percurso universitário e tinham uma formação matemática muito variada à entrada na universidade, que podia ter sido adquirida em cursos do ensino secundário, como sejam cursos profissionais, cursos humanísticos e cursos científico-tecnológicos. Em qualquer caso, os estudantes para ingressarem no ensino superior terão de obter aprovação num Exame Nacional de Matemática, podendo esse exame incidir sobre a matemática dos cursos humanísticos ou dos cursos científico-tecnológicos.

Os dados usados no presente estudo foram obtidos através das respostas escritas dadas pelos estudantes a um questionário de avaliação formal, que foi aplicado no âmbito da unidade curricular de Elementos de Matemática que os estudantes se encontravam a frequentar. O questionário era constituído por seis questões envolvendo razões, proporções e proporcionalidade direta, das quais estudamos aqui apenas uma, cujo enunciado é apresentado na Figura 1. Depois de distribuído o questionário pelos estudantes, verificou-se que eles gastaram, no máximo, 1 hora e 15 minutos para lhe responderem.

O Paulo foi a uma loja tirar fotocópias e verificou que existia uma campanha de desconto para grandes quantidades de fotocópias. Concretamente, se tirasse:

— Até 100 fotocópias, pagaria 5 cêntimos por cada fotocópia;

— Mais do que 100 fotocópias, pagaria 4 cêntimos por cada fotocópia a partir de 100.

a) O Paulo tirou 80 fotocópias. Quanto pagou pelas fotocópias?

b) O Paulo tirou 200 fotocópias. Quanto pagou pelas fotocópias?

c) O Paulo pagou 13 euros pelas fotocópias que tirou. Quantas fotocópias tirou?

Figura 1.

Tarefa proposta aos estudantes

Observa-se, assim, que a tarefa consta de três itens, sendo que em a) questiona-se sobre o custo das 80 fotocópias que o Paulo tirou, em b) interroga-se sobre o custo das 200 fotocópias que o Paulo tirou e em c) questiona-se sobre o número de fotocópias que o Paulo tirou por 13 euros.

Por último, o tratamento e análise de dados desenvolveu-se ao nível do tipo de respostas e ao nível das estratégias usadas na obtenção dessas respostas. Para tal, estudaram-se as respostas apresentadas pelos estudantes relativamente à sua correção e incorreção. Já quanto às estratégias subjacentes às respostas, recorreu-se à análise de conteúdo para definir as respetivas categorias, que serão definidas aquando da análise de dados. Seguidamente, determinaram-se frequências dos tipos de respostas (corretas e incorretas) e das estratégias subjacentes a tais respostas, tendo-se usado tabelas para resumir essa informação. Complementarmente, tendo em vista proporcionar uma melhor compreensão das respostas dos estudantes e da análise realizada, são ainda apresentados alguns exemplos de respostas dos estudantes, identificados pela letra E (abreviatura de estudante) seguida do número que lhe foi atribuído (de 1 a 72).

Apresentação de resultados

Na tarefa proposta aos estudantes, nos dois primeiros itens, a) e b), pretende-se determinar o custo de um certo número de fotocópias que se pretende tirar, enquanto no terceiro item, c), dá-se o custo das fotocópias tiradas e quer-se determinar o seu número. Seguidamente apresenta-se uma possível resolução de cada item.

Tendo em conta o fato de o custo das fotocópias ser de 5 cêntimos até 100 fotocópias e 4 cêntimos a partir de 100 fotocópias, no item a) basta multiplicar as 80 fotocópias pelo custo de cada uma, 5 cêntimos, ou seja, $80 \times 5 = 400$ cêntimos, que corresponde a 4 euros.

No item b), das 200 fotocópias que se pretende tirar, cada uma das 100 primeiras custa 5 cêntimos e cada uma das restantes 100 custa 4 cêntimos. Portanto, ao todo, as 200 fotocópias custam $100 \times 5 + 100 \times 4 = 900$ cêntimos, que corresponde a 9 euros.

Por fim, no item c), o total de 13 euros permite tirar mais do que 100 fotocópias, sendo o custo das primeiras 100 fotocópias $100 \times 5 = 500$ cêntimos, ou seja, 5 euros. Portanto, a restante quantia, $13 - 5 = 8$ euros, será aplicada a tirar fotocópias a 4 cêntimos cada uma, o que dará $\frac{8}{0,04} = 200$ fotocópias. Logo, ao todo, tiram-se $100 + 200 = 300$ fotocópias.

Seguidamente, para compreender as respostas dadas pelos estudantes a cada item, vamos estudar o tipo de resposta e as estratégias desenvolvidos pelos estudantes nos processos de resolução desses itens.

Tipo de respostas

Na Tabela 1, a seguir apresentada, estão registadas as frequências dos tipos de respostas (corretas e incorretas) dadas pelos estudantes bem como as não respostas.

Tabela 1.

Frequência (em %) de estudantes nos tipos de resposta e nas não respostas

Item	**Respostas**		
	Corretas	**Incorretas**	**Não respostas**
a) Custo de tirar 80 fotocópias	62 (86)	10 (14)	—
b) Custo de tirar 200 fotocópias	35 (49)	36 (50)	1 (1)
c) N.º de fotocópias tiradas por € 13	26 (36)	44 (61)	2 (3)

Por observação da Tabela 1, constata-se que, no item a), cerca de quatro estudantes em cada cinco responderam corretamente; no item b), cerca de um em cada dois estudantes respondeu corretamente; e no item c), cerca de um em cada três estudantes respondeu corretamente. Verifica-se, assim, que a percentagem de respostas corretas foi maior no item a) e diminuiu, sucessivamente, no item b) e, mais ainda, no item c).

As resoluções dos itens, antes apresentadas, podem ser vistas como uma possível explicação para as dificuldades sentidas pelos estudantes na resolução dos itens. Representando por n o número de fotocópias a tirar e por c o seu custo em cêntimos, a função do custo das fotocópias é dada por:

$$c = \begin{cases} 5n\text{ , com } 1 \leq n \leq 100 \\ 5 \times 100 + 4(n - 100)\text{ , com } n > 100 \end{cases}$$

No caso do item a), em que os estudantes tiveram menos dificuldade, deve notar-se que a resolução deste item envolve a aplicação de uma só relação de proporcionalidade direta, da forma $c = 5n$, com $1 \leq n \leq 100$ (até 100 fotocópias). Já no caso do item b), em que a percentagem de respostas corretas diminuiu quase para metade, deve reparar-se que a resolução deste item envolve a aplicação de duas relações de proporcionalidade direta, uma da forma $c = 5n$, com $n = 100$, e outra da forma $c = 4m$, com $m = n - 100$ (a partir de 100 fotocópias).

Por último, no item c), em que a percentagem de respostas corretas ainda foi menor, destaca-se que na resolução deste item intervêm também duas relações de proporcionalidade direta, tal como na resolução do item b), assim como a inversão de operações aritméticas.

Ora, de seguida, vamos averiguar se esta explicação racional das dificuldades sentidas pelos estudantes, baseada na análise estrutural da matemática implicada nas resoluções, se reflete nas estratégias implementadas pelos estudantes nas suas resoluções.

Estratégias

Começamos por agrupar as estratégias implementadas pelos estudantes, para obter as suas respostas em cada um dos itens, em duas grandes categorias, que se encontram registadas na Tabela 2, para de seguida detalhar mais essas estratégias.

Tabela 2.

Frequência (em %) de estudantes nas estratégias subjacentes às respostas

Estratégias	**Itens**		
	a)	**b)**	**c)**
Considerar o mesmo custo para todas as fotocópias	72 (100)	28 (39)	39 (54)
Considerar dois custos diferentes para as fotocópias	—	43 (60)	28 (39)
Total	72 (100)	71 (99)	67 (93)

Nota: na tabela, as percentagens foram calculadas considerando o número total de estudantes que participaram no estudo, isto é, 72.

Observando a Tabela 2, verifica-se que a estratégia "considerar o mesmo custo para todas as fotocópias" foi a mais usada na globalidade dos três itens. No caso do item a), ela foi usada por todos os estudantes e conduziu, quase sempre à resposta correta, conforme se exemplifica na Figura 2.

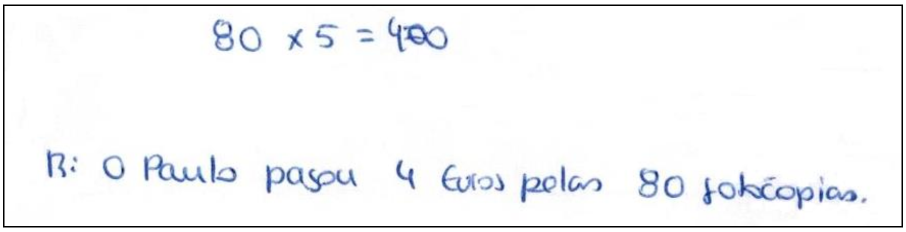


Figura 2.

Resolução do item a) pelo estudante E4

Na resolução, o estudante E4 multiplica o custo de cada fotocópia (5 cêntimos) pelo número de fotocópias que pretende tirar (80) e obtém, assim, o custo total das fotocópias (400 cêntimos), ou seja, 4 euros, que é o valor correto.

Na utilização desta estratégia, que levou 86% dos estudantes a responderem corretamente a este item, houve 13% dos estudantes que recorreram a uma regra de três simples. Os restantes estudantes, 14%, responderam incorretamente porque cometeram pelo menos um dos seguintes erros: erro de conversão de dinheiro (cêntimos ⟷ euros), erro de cálculo e erro na regra de três simples.

Já esta estratégia quando aplicada aos itens b) e c) conduziu sempre à obtenção de respostas incorretas, tal como seria de esperar, pois, nestes dois itens, o custo total das fotocópias é diferente consoante o número de fotocópias é inferior ou igual a 100 ou superior a 100. No caso do item b), apresenta-se na Figura 3 um exemplo de uma resposta desse tipo.

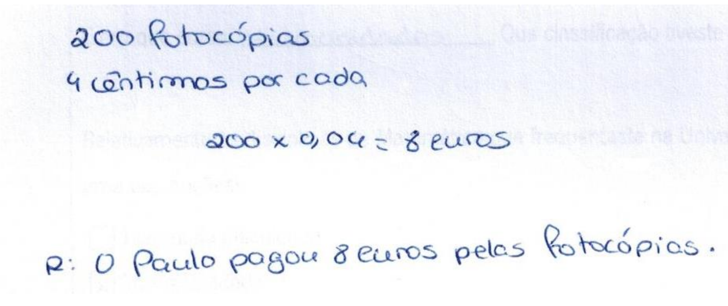


Figura 3.

Resolução do item b) pelo estudante E41

O estudante E41 considerou como sendo 4 cêntimos o custo de cada fotocópia, multiplicou esse valor em euros por 200, número total de fotocópias que se pretendia tirar, e obteve o custo total de 8 euros, quando deveria obter 9 euros.

A adoção desta estratégia levou 39% dos estudantes a responderem incorretamente, sendo que quase todos consideraram o custo de 4 cêntimos por fotocópia. Estes estudantes, diferentemente do que se afirma no enunciado da tarefa, parecem ter interpretado que ao tirar mais do que 100 fotocópias o custo de cada uma seria de 4 cêntimos. Ora uma tal interpretação, que, por vezes, corresponde a situações da vida real, parece ter-se sobreposto à interpretação diversa que decorre do enunciado da tarefa.

No caso item c), a adoção desta estratégia levou 54% dos estudantes a responderem incorretamente, portanto mais estudantes do que no caso do item b), salientando-se que 36% consideraram o custo de 4 cêntimos por fotocópia e 8% consideraram o custo de 9 euros das 200 fotocópias, que tinha sido determinado no item b), tal como se exemplifica na Figura 4.

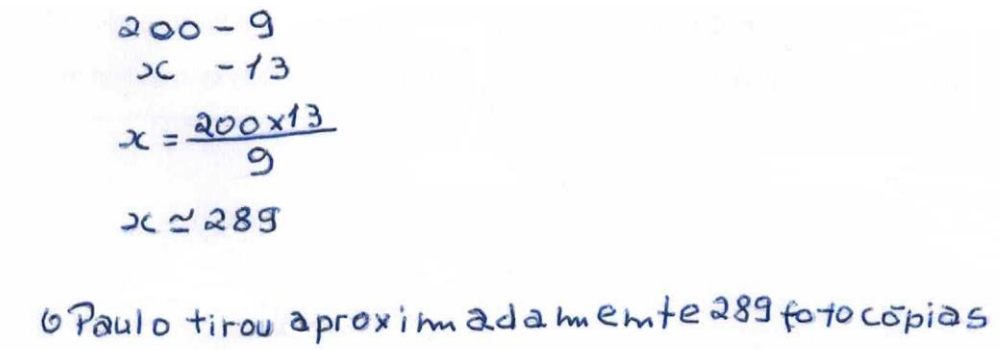


Figura 4.

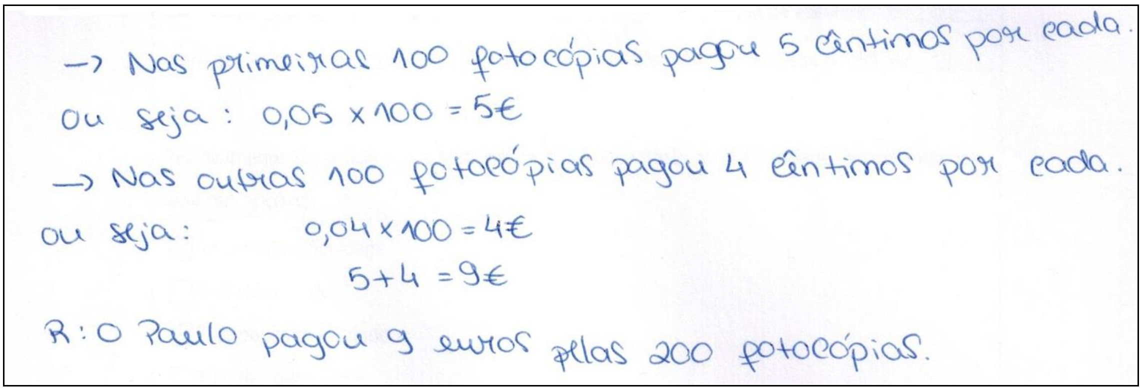
Resolução do item c) pelo estudante E64

Na resolução, o estudante E64 estabelece uma regra de três simples em que faz corresponder às 200 fotocópias o custo de 9 euros, que tinha sido determinada no item b), e seguidamente conclui que os 13 euros permitem tirar, aproximadamente, 289 fotocópias.

Repare-se que a resposta do estudante resulta de considerar o custo de cada fotocópia como sendo $\frac{9}{200}$ euros.

A segunda estratégia, "considerar dois custos diferentes para as fotocópias", apenas foi usada pelos estudantes nos itens b) e c). Ora, a sua restrição a estes dois itens constitui uma decisão adequada na medida em que no item a) está em jogo um número de fotocópias inferior a 100, portanto, em que todas têm o mesmo custo de 5 cêntimos.

No caso do item b), trata-se de determinar o custo das primeiras 100 fotocópias, cada uma com um custo de 5 cêntimos, determinar o custo das restantes 100 fotocópias, com um custo de 4 cêntimos, e finalmente adicionar os dois valores obtidos. Na Figura 5 apresenta-se, a título de exemplo, a resolução de um dos estudantes.



→ Nas primeiras 100 fotocópias pagou 5 cêntimos por cada.
ou seja: 0,05 × 100 = 5€
→ Nas outras 100 fotocópias pagou 4 cêntimos por cada.
ou seja: 0,04 × 100 = 4€
5 + 4 = 9€
R: O Paulo pagou 9 euros pelas 200 fotocópias.

Figura 5.

Resolução do item b) pelo estudante E26

Nesta resolução, o estudante E26 calcula o custo das primeiras 100 fotocópias ($0{,}05 \times 100 = 5$€), o custo das restantes 100 fotocópias ($0{,}04 \times 100 = 4$€) e, por fim, determina a soma dos produtos obtidos ($5 + 4 = 9$€), obtendo o custo total de 9 euros.

No item b), a estratégia "considerar dois custos diferentes para as fotocópias" foi usada por 60% dos estudantes e conduziu à resposta correta para 49% dos estudantes. Já em termos de respostas incorretas no item b), para além daquelas que resultaram da adoção da estratégia "considerar o mesmo custo para todas as fotocópias", antes referidas (ver Tabela 2), 13% dos estudantes responderam incorretamente porque cometeram pelo menos um dos erros: erro na conversão do dinheiro (cêntimos ⟷ euros), erro no cálculo e erro na contagem do número de fotocópias para cada um dos dois diferentes custos.

Tal como no item a), alguns estudantes recorreram à regra de três simples para determinar o custo total das fotocópias, que neste caso coincidiu com 10% dos estudantes.

No caso do item c), pretende-se determinar o número de fotocópias que se podem tirar com 13 euros. Ora, com 5 euros podem-se tirar 100 fotocópias, como se determinou no item b), tem-se então de determinar quantas fotocópias se podem tirar com 8 euros ($13 - 5 = 8$), cada uma ao custo de 4 cêntimos, o que dá 200 fotocópias. Por fim, $100 + 200 = 300$ fotocópias, que é o número total de fotocópias que se podem tirar com 13 euros. Na Figura 6 exemplifica-se a utilização desta estratégia por um dos estudantes.

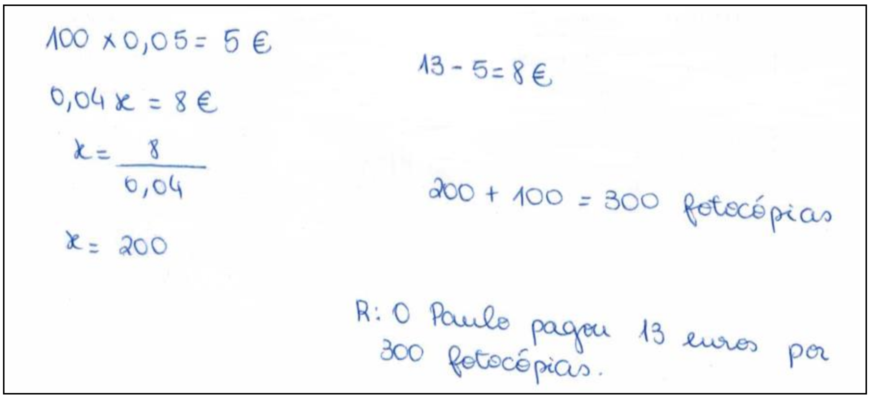


Figura 6.

Resolução do item c) pelo estudante E31

O estudante E31 começa por determinar o custo das primeiras 100 fotocópias, obtendo o valor de 5 euros, seguidamente determina o número de fotocópias que pode tirar com os restantes 8 euros ao custo de 0,04 euros cada uma, e obtém 200 fotocópias. Por fim, adiciona 100 com 200 e obtém o número total de fotocópias que pode tirar, isto é, 300.

Em alternativa, alguns estudantes, concretamente 6%, recorreram a uma equação para resolverem o item. Na Figura 7 apresenta-se a resolução de um estudante que recorreu a essa estratégia.

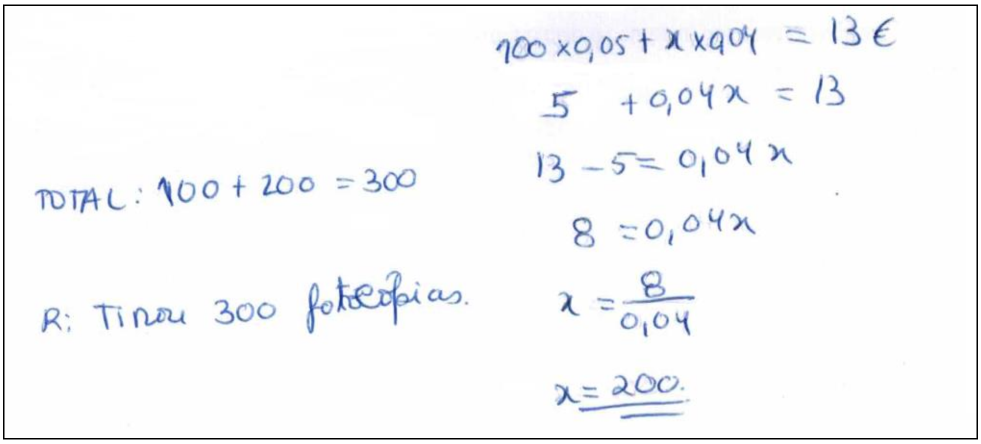


Figura 7.

Resolução do item c) pelo estudante E12

O estudante E12 definiu a equação considerando que a soma do custo das fotocópias a $0{,}05$ euros, que são 100, com o das fotocópias a $0{,}04$ euros, cujo número representou por x, deve ser igual a 13 euros. Resolvendo a equação obteve a solução $x = 200$, que é o número de fotocópias de custo $0{,}04$ euros. Por fim, adicionou 100 com 200 e obteve, assim, as 300 fotocópias que se podem tirar com 13 euros.

No item c), a estratégia "considerar dois custos diferentes para as fotocópias" foi usada por 39% dos estudantes, portanto por menos estudantes do que no item b), e conduziu à resposta correta para 36% dos estudantes. Em termos de respostas incorretas no item b), para além daquelas que resultaram da adoção da estratégia "considerar o mesmo custo para todas as fotocópias", antes referidas (ver Tabela 2), 3% dos estudantes responderam incorretamente porque cometeram o erro na conversão do dinheiro (cêntimos ⟷ euros).

Por fim, ainda no item c), 43% dos estudantes recorreram à regra simples para determinar o custo total das fotocópias, bastantes mais do que aqueles que também recorreram à regra de três simples nos itens a) e b).

Conclusões e implicações

Em termos dos tipos de respostas, foi no item a) que se obteve a maior percentagem de respostas corretas, em que se requer a aplicação de apenas uma expressão de proporcionalidade direta. Contudo, essa percentagem diminui muito no item b), em que se requer a aplicação de duas expressões diferentes de proporcionalidade direta, e diminui ainda mais no item c), em que se requer a aplicação de duas expressões diferentes de proporcionalidade direta e a inversão de operações aritméticas. Na globalidade dos três itens da tarefa, a percentagem de respostas corretas variou entre o mínimo de 36% (no item c) e o máximo de 86% (no item a), e, em média, obteve-se 57% de respostas corretas por item.

Já quanto às estratégias adotadas pelos estudantes na resolução da tarefa, destacaram-se duas grandes categorias: "considerar o mesmo custo para todas as fotocópias" e "considerar dois custos diferentes para as fotocópias". A estratégia "considerar o mesmo custo para todas as fotocópias" foi usada por todos os estudantes no item a) e conduziu, quase sempre à resposta correta, enquanto nos itens b) e c) ela, em média, foi usada por quase metade dos estudantes e conduziu sempre a uma resposta incorreta. Já a estratégia "considerar dois custos diferentes para as fotocópias", ela foi usada apenas nos itens b) e c), em média, por cerca de metade dos estudantes e conduziu, quase sempre à resposta correta.

Tendo em conta os tipos de respostas e as estratégias subjacentes às respostas, conclui-se que as dificuldades sentidas pelos estudantes nos itens b) e c) resultaram de considerar apenas uma expressão de proporcionalidade direta, o que significa considerar todas as fotocópias com o mesmo custo. Ora, embora no item a) todas as fotocópias tenham o mesmo custo, o mesmo não acontece com os itens b) e c), em que o custo das fotocópias até ao número de 100 difere do custo das fotocópias a partir de 100.

Assim, em termos racionais, a necessidade de recorrer a duas expressões de proporcionalidade direta, nos itens b) e c), pode explicar as maiores dificuldades experimentadas pelos estudantes e constitui, também, o principal resultado do presente estudo. Comparativamente com o estudo de Fernandes et al. (2019), em que se requeria a aplicação de proporções e em que o significado de proporção se revelou o aspeto mais difícil para os estudantes, e de Fernandes et al. (2020), em que se requeria igualmente a aplicação de proporções e em que foram mais difíceis para os estudantes as situações em que não eram dados explicitamente os três termos da proporção, no presente estudo destacam-se as dificuldades dos estudantes nas situações em que era necessário recorrer a duas expressões de proporcionalidade.

Por outro lado, como vimos anteriormente, a situação que requer a aplicação de duas relações de proporcionalidade direta pode também ser traduzida através de uma função definida por ramos. Donde, relativamente à função definida por uma só expressão, que corresponde à situação que requer apenas uma relação de proporcionalidade direta, esse tipo de função também pode explicar as maiores dificuldades sentidas pelos estudantes (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990; Markovits, Eylon. & Bruckeimer, 1998) nos itens b) e c).

Para além dos objetos e processos matemáticos intervenientes na resolução das situações-problema, que foram antes referidos, as dificuldades sentidas pelos estudantes também podem ter origem na menor atenção de leitura e interpretação dos enunciados, sobretudo no caso do item c). Contudo, esta hipótese parece pouco plausível uma vez que a diminuição das respostas corretas foi maior do item a) para o item b) do que do item b) para o item c).

Por último, o uso da regra de três simples foi mais frequente no item c), o que pode ter constituído, para os estudantes, um método alternativo à inversão das operações aritméticas. Em média, em cada item, 22% dos estudantes usaram a regra de três simples, menos do que se verificou nos estudos de Fernandes et al. (2019), Fernandes et al. (2020) e Burgos et al. (2018).

Do principal resultado do estudo decorrem imediatamente implicações para o ensino e aprendizagem dos estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, designadamente, distinguir situações de proporcionalidade direta de situações de não proporcionalidade direta e reconhecer e resolver situações-problema através da aplicação de apenas uma expressão de proporcionalidade direta (que constitui uma situação de proporcionalidade direta) e através da aplicação de mais do que uma expressão de proporcionalidade direta (que na globalidade não constitui uma situação de proporcionalidade direta).

Numa perspetiva mais abrangente, Burgos e Godino (2020b), partindo de investigações prévias em que se analisam situações-problema, objetos e processos matemáticos, identificam significados parciais do conceito de proporcionalidade, designadamente, os significados intuitivo, aritmético, protoalgébrico e algébrico. Para estes autores, todos estes significados devem ser tidos em conta na planificação e gestão dos processos de ensino e aprendizagem ao longo da escolaridade básica e secundária.

Referências

Berenson, S., Oldham, E., Price, E., & Leite, L. (2013). Investigating representations of ratio among prospective mathematics and science teachers: an international study. In *Proceedings of the 37th Annual ATEE Conference* (pp. 78-92). Brussels, Belgium: ATEE.

Beswick, K. (2011). Make your own paint chart: a realistic context to develop proportional reasoning with ratios. *Australian Mathematics Teacher*, *67*(1), 6-11.

Burgos, B., Godino, J. D., Giacomone, B., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). Competencia de análisis epistémico de tareas de proporcionalidad de futuros profesores. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *31*(1), 706-713.

Burgos, M., & Godino, J. D. (2020a). Semiotic conflicts in the learning of proportionality: Analysis of a teaching experience in primary education. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(3), em0588.

Burgos, M., & Godino, J. D. (2020b). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad: Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática* (AIEM), *18*, 1–20.

Fernandes, J. A., & Leite, L. (2015). Compreensão do conceito de razão por futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade. *Bolema*, *29*(51), 241-262.

Fernandes, J. A., Barros, P. M., & Gonçalves, G. (2019). Resolver problemas envolvendo razões e proporções por futuros professores dos primeiros anos. In M. V. Pires, C. Mesquita, R. P. Lopes, E. M. Silva, G. Santos, R. Patrício, & L. Castanheira (Eds.), *IV Encontro Internacional de Formação na Docência* (*INCTE*): *Livro de atas* (pp. 394-405). Bragança: Instituto Politécnico de Bragança.

Fernandes, J. A., Barros, P. M., & Gonçalves, G. (2020). Resolução de uma tarefa de proporcionalidade por futuros professores dos primeiros anos escolares. In R. P. Lopes,

C. Mesquita, E. M. Silva, & M. V. Pires (Eds.), *V Encontro Internacional de Formação na Docência* (*INCTE*): *livro de atas* (pp. 418-429). Bragança: Instituto Politécnico de Bragança.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Leite, L., Fernandes, J. A., Viseu, F., & Gea, M. M. (2016). Prospective primary school teachers' knowledge of the ratio concept. In Q. Kools, B. Koster, A. Bakx, P. Hennissen, & Leids Congres Bureau (Eds.), *Proceedings of the 41st Annual ATEE Conference* (pp. 87-96). Brussels, Belgium: ATEE.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, *60*(1), 1-64.

Livy, S., & Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development*, *13*(2), 22-43.

Markovits, Z., Eylon, B. & Bruckeimer, M. (1998) Difficulties students have with the function concept. In A. T. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra: K-12* (pp. 43-60). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa de matemática para o ensino básico*. Lisboa: Autor.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio among grade nine students in Malaysia. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(4), 579-599.

Suggate, J., Davis, A., & Goulding, M. (2006). *Primary mathematical knowledge for primary teachers*. Londres: David Fulton Publishers.

Viana, O. A., & Miranda, J. A. (2018). Problemas de comparação de razões: uma avaliação do raciocínio proporcional de alunos do sexto ano. *Revemat*, *13*(1), 163-182.

Viseu, F., Fernandes, J. A., & Leite, L. (2018) Prospective primary school teachers' use of the ratio and proportion concepts when solving a map-based task. In M. Sablić, A. Škugor & I. Đ. Babić (Eds.), *42nd ATEE Annual Conference 2017: Changing perspectives and approaches in contemporary teaching* (pp. 265-279). Dubrovnik, Croatia: ATEE.