EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2

https://doi.org/10.23925/983-3156.2021v23i4p246-272

Una propuesta didáctica de probabilidad para el comienzo de la secundaria

A didactic proposal of probability for the beginning of secondary school

Uma proposta didática de probabilidade para o início do ensino fundamental II

Pablo Beltrán-Pellicer [1]
University of Zaragoza and CPI Val de la Atalaya (María de Huerva), Spain.
https://orcid.org/0000-0002-1275-9976
Belén Giacomone [2]
University of San Marino, San Marino
https://orcid.org/0000-0001-6752-2362

Resumen

Considerando que el razonamiento probabilístico debería ser una prioridad educativa, en este artículo se presenta el diseño y fundamentación de una secuencia didáctica para la enseñanza de probabilidad en los primeros años de la educación secundaria (12-13 años). La secuencia se ubica en un enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas, basada en la articulación de tres de los significados de la probabilidad en la educación secundaria: intuitivo, frecuencial y clásico. Con este objetivo didáctico, se describen seis situaciones-problemas, y algunas observaciones adicionales que las complementan. La primera de ellas, para expresar la probabilidad como grado de creencia personal, introducir sucesos no equiprobables y construcción de diagramas de frecuencia absoluta. La segunda se relaciona con la idea de asignar probabilidad a un suceso y asignar un suceso a una probabilidad. La tercera es una situación para discutir fenómenos aleatorios y deterministas. La cuarta situación tiene el objetivo de formalizar conceptos como suceso imposible o suceso seguro, así como procedimientos como tablas y diagramas de árbol para desglosar espacios muestrales y la aplicación de la regla de Laplace cuando se consideran sucesos compuestos. La quinta y la

[1] pbeltran@unizar.es
[2] belen.giacomone@unirsm.sm

sexta abordan situaciones donde la regla de Laplace no se puede aplicar. La secuencia incluye actividades basadas en juegos, uso de origami modular y visualizaciones de fragmentos de series, que establecen conexiones con otros contenidos y repercuten en el dominio afectivo. Además, se presenta de manera flexible para que pueda ser adaptada a distintos contextos educativos.

Palabras clave: probabilidad, educación secundaria, propuesta didáctica, resolución de problemas.

Abstract

Considering that probabilistic reasoning should be an educational priority, this article presents the design and theoretical foundation of a didactic sequence for the teaching of probability in the early years of secondary education (12-13 years). The sequence has a teaching approach through problem solving, specifically based on the articulation of three of the meanings of probability in secondary education: intuitive, frequentist, and classical. With this didactical objective, six problem-situations are described, and some additional observations that complement them. The first one, to express the probability as a degree of personal belief, introduce non-equiprobable events and construction of absolute frequency diagrams. The second creates situations to assign probability to an event and assign an event to a probability. The third is a situation to discuss random and deterministic phenomena. The fourth situation has the objective of formalising concepts such as impossible event or certain event, as well as procedures such as tables and tree diagrams to disaggregate sample spaces and the application of Laplace's rule when considering compound events. The fifth and sixth address situations where Laplace's rule cannot be applied. The sequence is a flexible proposal that articulates playful strategies, use of origami, and visualisations of fragments series, which stablish connections with other curricular contents and influence in the affective domain. Besides, the sequence can be adapted to different educational contexts.

Keywords: Probability, secondary school, didactic proposal, problem solving

Resumo

Considerando que o raciocínio probabilístico deve ser uma prioridade educacional, este artigo apresenta o desenho e a fundamentação de uma sequência didática para o ensino da probabilidade no ensino fundamental II (12-13 anos). A sequência se localiza em uma abordagem de ensino por meio da resolução de problemas, a partir da articulação de três dos significados de probabilidade no ensino médio: intuitivo, frequente e clássico. Com este objetivo didático, seis situações-problema são descritas, e algumas observações adicionais que as complementam. O primeiro, para expressar a probabilidade como um grau de crença pessoal, introduz eventos não equiprováveis e construção de diagramas de frequência absoluta. O segundo está relacionado à ideia de atribuir probabilidade a um evento e atribuir um evento a uma probabilidade. A terceira é uma situação para discutir fenômenos aleatórios e determinísticos. A quarta situação tem como objetivo formalizar conceitos como evento impossível ou determinado evento, bem como procedimentos como tabelas e diagramas de árvore para desagregar espaços amostrais e a aplicação da regra de Laplace na consideração de eventos compostos. O quinto e o sexto tratam de situações em que a regra de Laplace não pode ser aplicada. A sequência inclui atividades baseadas em jogos, uso de origami modular e visualizações de fragmentos de séries, que estabelecem conexões com outros conteúdos e afetam o domínio afetivo. Além disso, é apresentado de forma flexível para que possa ser adaptado a diferentes contextos educacionais.

Palavras-chave: probabilidade, ensino fundamental II, proposta didática, solução de problemas.

Una propuesta didáctica de probabilidad para el comienzo de la secundaria

La enseñanza de la probabilidad a finales de la educación primaria y comienzos de la secundaria queda muchas veces, en segundo plano. Esto es algo que llama la atención, ya que, si hay un aprendizaje matemático aplicable a la vida cotidiana, ese es el razonamiento probabilístico. Tanto, si el objetivo es aprender a gestionar situaciones de riesgo como si se trata de formar ciudadanos críticos, el desarrollo del razonamiento probabilístico debería ser una prioridad educativa.

A diferencia de otras ramas de la matemática en las que el mundo de lo sensible nos ofrece experiencias para contrastar nuestras concepciones y poder aprender, la probabilidad requiere del análisis sistemático de dichas experiencias. Consideremos por ejemplo el clásico juguete para bebés que consiste en una casita con ventanas de formas variadas. Si el bebé toma la forma redondeada para introducirla por la ventana rectangular, el propio juguete le dice que no, que pruebe con otra. Esa pieza nunca conseguirá pasar por ese hueco. Sin embargo, puedes estar toda la tarde jugando al parchís y pensar que es menos probable obtener un cinco al lanzar el dado, al pensar que te costaba mucho conseguir sacar ficha.

Un déficit experiencial en este sentido fomenta la aparición de sesgos de razonamiento, los cuales, más adelante, persisten. El comienzo de la educación secundaria ofrece una oportunidad para subsanar este posible déficit, al mismo tiempo que se sientan las bases para la formalización de los conceptos clave.

En este artículo se plantea, en primer lugar, una fundamentación de los elementos principales a considerar en el diseño de una secuencia didáctica de probabilidad para los primeros años de la educación secundaria (12-13 años). Posteriormente, se desarrolla y justifica una propuesta de enseñanza que atiende todos estos elementos, compuesta por seis situaciones-problemas que articulan algunos significados de la probabilidad en la educación secundaria: intuitivo, frecuencial y clásico. A continuación, se describen tales significados y la fundamentación teórica.

Fundamentación

¿Qué es la probabilidad? La respuesta a esta pregunta no es sencilla y está llena de matices. Batanero (2005) sintetiza los significados de la probabilidad en educación secundaria, atendiendo a las definiciones, lenguajes, situaciones-problema, proposiciones, procedimientos y argumentos que caracterizan a cada uno de ellos:

- Significado intuitivo. La probabilidad, como noción matemática, empieza a desarrollarse en el siglo XVII. Ello no quiere decir que estuviera ausente en las civilizaciones antiguas. En todas ellas encontramos juegos de azar e ideas intuitivas, las cuales aparecen espontáneamente en niños y personas sin formación específica. No en vano, nuestro lenguaje natural incorpora multitud de expresiones para indicar nuestro grado de creencia acerca de la ocurrencia de sucesos.
- Significado clásico o laplaciano. Se corresponde con las primeras aproximaciones desde la matemática, a partir de la correspondencia entre Pascal y Fermat y sintetizadas en la regla de Laplace, donde se calcula la probabilidad de un suceso como el cociente entre el número de casos favorables y el número total de casos. Esta visión acarrea la necesidad de reducir los fenómenos a un cierto número de casos equiprobables. No es aplicable, por tanto, a situaciones donde no pueda asumirse que los sucesos elementales son equiprobables (lanzamiento de chinchetas, por ejemplo). Ese significado emerge de situaciones relacionadas con el cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar, e involucra procedimientos de combinatoria y de proporcionalidad.

- Significado frecuencial. Históricamente, tiene su origen en la Primera ley de los Grandes Números de Bernoulli. En su momento, esta ley fue aceptada más bien como una comprobación empírica de la probabilidad de un suceso calculada previamente de forma teórica. Las frecuencias relativas tienden a estabilizarse en torno a valores concretos, pero no sería hasta la formalización del análisis cuando con dichas herramientas se conectó frecuencia relativa con probabilidad.
- Significado subjetivo. El teorema de Bayes formaliza la idea de que la probabilidad a priori de un suceso puede revisarse si se dispone de nueva información. Esto implica la pérdida del carácter objetivo de la probabilidad, debido a que la probabilidad de un suceso siempre va a depender de nuestro conocimiento del fenómeno en cuestión.
- Significado axiomático. Los trabajos sobre medida de Borel hicieron posible que, posteriormente, Kolmogorov desarrollara la formalización de la teoría de la probabilidad. A partir de entonces, la probabilidad pasó a ser un modelo matemático con multitud de aplicaciones.

Una secuencia didáctica adecuada considerará todos estos significados. Obviamente, el aparataje matemático del significado axiomático solo será posible en bachillerato y universidad. El resto de los significados deberían irse desarrollando de forma articulada graduando los planos abstracción y la complejidad de las técnicas asociadas. De esta manera, se puede progresar incluso en el significado intuitivo, poniendo sobre la mesa cómo utilizamos términos y expresiones en nuestro lenguaje cotidiano. La conexión con el significado subjetivo puede realizarse proponiendo situaciones en las que se incorpora nueva información, explicitando cómo cambia nuestro grado de creencia acerca de la ocurrencia del suceso en cuestión.

Al tratar de ordenar términos y expresiones del lenguaje cotidiano surge la necesidad, o posibilidad, de asignar un número a nuestro grado de creencia personal. Es ahí donde se conecta con la escala de probabilidad, tanto con el significado clásico como con el frecuencial. La articulación de estos dos últimos significados requiere una cuidadosa planificación. No se ha de mostrar el significado frecuencial como una simple comprobación empírica del clásico. Es que, por un lado, vamos a tener situaciones que involucren sucesos cuya probabilidad no pueda calcularse teóricamente de forma precisa. Por otro lado, incluso para poder calcular de forma teórica la probabilidad en situaciones que involucran el lanzamiento de dados, extracción de bolas, etc. estamos asumiendo implícitamente un modelo que solo funciona de forma perfecta bajo ciertas condiciones. Por tanto, antes de usar la regla de Laplace, es necesario explicitar esa suposición de que los sucesos son equiprobables. Para mostrar esta necesidad, será necesario incluir en nuestra secuencia situaciones en donde esta suposición no tenga sentido o conduzca a un error manifiesto.

La secuencia didáctica tendría que considerar posibles sesgos de razonamiento (Serrano, Batanero, & Cañizares, 1998). Uno de ellos es el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992; Lecoutre & Durand, 1988), que consiste en la creencia en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio (aplicando directamente la regla de Laplace, por ejemplo), sin plantearse si es posible aplicar el principio de indiferencia o si existe algún tipo de simetría. Como hemos mencionado anteriormente, se trata de articular convenientemente el significado clásico con el frecuencial, proporcionando una amplia variedad de situaciones.

Otros sesgos de razonamiento son aquellos que surgen al no tener en cuenta el tamaño de la muestra, ni la variabilidad del muestreo o de las repeticiones de un experimento aleatorio. Todo esto entra dentro de lo que se conoce como heurística de la representatividad (Tversky & Kahneman, 1974). Un ejemplo es el conocido como la falacia del jugador, donde ante una racha de resultados, se espera que aumente la probabilidad del suceso contrario en la siguiente repetición del experimento. Por último, el enfoque en el resultado aislado (Konold, 1989, 1991) tiene lugar cuando se piensa que cada una de las repeticiones de un experimento aleatorio no guarda relación con las anteriores o posteriores. Está relacionado con dificultades para comprender el significado frecuencial.

La secuencia que se describirá se ubica en un enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas, donde los alumnos adquieren el conocimiento enfrentándose a la resolución de situaciones y problemas con la intención de hacer emerger los contenidos matemáticos deseados (Cai, 2003; Cai & Lester, 2010). De esta manera, cada una de las actividades de la secuencia siguen una dinámica similar. En primer lugar, los alumnos abordan las tareas sin haber recibido instrucción previa específica sobre los contenidos que quieren enseñarse. Estas tareas, problemas, deben promover la reflexión y la indagación hacia la búsqueda de estrategias que permitan resolverlos. No importa si estas son intuitivas o informales. Durante esa fase, es conveniente que los alumnos estén organizados en parejas o pequeños grupos, de forma que puedan discutir sus estrategias. El papel del profesor consiste en observar y agilizar el trabajo de los alumnos. Quizás, formulando preguntas que permitan continuar la indagación y la exploración, pero tratando de no adelantar lo que será el objetivo de aprendizaje. Al final, en una puesta en común, el profesor utiliza las respuestas de los alumnos para introducir los nuevos conceptos.

Este enfoque no excluye la enseñanza de heurísticos de resolución de problemas y la aplicación de contenidos, sino que los contiene. Además, ha ganado relevancia en la investigación en educación matemática en las últimas décadas (English & Gainsburg, 2015) y su uso es efectivo para el desarrollo cognitivo de los estudiantes (Bingolbali & Bingolbali, 2019) y un elemento clave para el desarrollo del razonamiento y del pensamiento matemático (NCTM, 2003). Precisamente, para potenciar este desarrollo, recientes estudios señalan la necesidad de impulsar acciones formativas orientadas a los docentes que pongan de manifiesto la relevancia de articular propuestas en torno a los procesos, entre los que se encuentra la resolución de problemas (Alsina, et al., 2020).

Metodología

En este artículo se presenta una propuesta de secuencia didáctica fundamentada que fue puesta en práctica por el primer autor durante los cursos 2018/19 (con un grupo de 23 alumnos) y 2019/20 (con dos grupos de 20 alumnos cada uno) en centros públicos de educación secundaria en España. En la descripción de la secuencia se alude a las interacciones y producciones de los alumnos participantes, de 12-13 años, en el primer curso de educación secundaria.

Metodológicamente, considerando el papel del primer autor como profesor e investigador el trabajo se ubica en la Investigación-Acción, que asume como objetivos generales el reflexionar y actuar sobre la práctica educativa intentando mejorarla (McNiff, 2013).

Secuencia de actividades

La secuencia va orientada a cubrir los contenidos del bloque de probabilidad de primer curso de educación secundaria (12-13 años), articulando, por tanto, los significados intuitivo, frecuencial y clásico. Estos contenidos, en España (MECD, 2015) se concretan en:

> Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación.
> Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. Espacio muestral en experimentos sencillos.
> Tablas y diagramas de árbol sencillos.
> Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.

Como se mostrará más adelante, el significado subjetivo también está presente en la secuencia, pero de una manera muy informal, preparando para los contenidos de cursos posteriores.

Construcción de un dado de papel

La secuencia arranca con la construcción de un dado de papel. Este dado lo construimos con técnicas de origami (papiroflexia) modular, por varios motivos, como expondremos a lo largo de esta sección. El modelo elegido es el cubo sonobe que resulta muy sencillo de realizar y es posible encontrar en internet multitud de diagramas y vídeos. No obstante, la papiroflexia cumple aquí un papel, valga la redundancia, auxiliar. Podríamos haber planteado la construcción de un cubo de papel o cartulina a partir del típico desarrollo plano y pegamento de barra. En cualquiera de los dos casos se movilizan conocimientos de geometría, lo que nos puede servir como evaluación informal sobre estos conceptos o también, como una estrategia para potenciar la participación de los alumnos (Hull, 2020). De hecho, resulta curioso comprobar las dificultades que tiene parte del alumnado para hacer un cuadrado a partir de una hoja DIN A-4. Curioso, porque es algo que se puede hacer, en principio, con conocimientos geométricos elementales. Pero la realidad es que algunos se ponen a medir con regla, cuando basta con un simple doble para trasladar el lado corto sobre el largo y marcar el punto donde hay que cortar. Procedimiento análogo al que emplearíamos para dibujar con regla y compás un cuadrado dado su lado.

Si hemos decidido empezar por probabilidad el curso (¿por qué no?), esta podría ser una de las primeras actividades a las que se enfrentaría nuestro alumnado. Es una ocasión excelente para iniciar el trabajo en pequeño grupo, discusiones de aula, etc. En otras palabras, para empezar a poner en práctica los elementos de un enfoque a través de la resolución de problemas.

En la Figura 1 se observan algunos de los dados construidos por el alumnado. ¿Qué hacemos ahora con ellos? Efectivamente, probarlos. Podríamos lanzarlos unas cuantas veces y registrar los resultados, pero es más interesante plantear un juego de carreras. Se trata de seis coches, numerados del uno al seis, de manera que cada coche avanza cuando al tirar el dado sale su número. Y se van realizando tiradas hasta que uno de los coches llega a la meta, que puede estar a 40 o 50 casillas de distancia.

Figura 1.

Dados construidos por el alumnado. Fuente: propia.

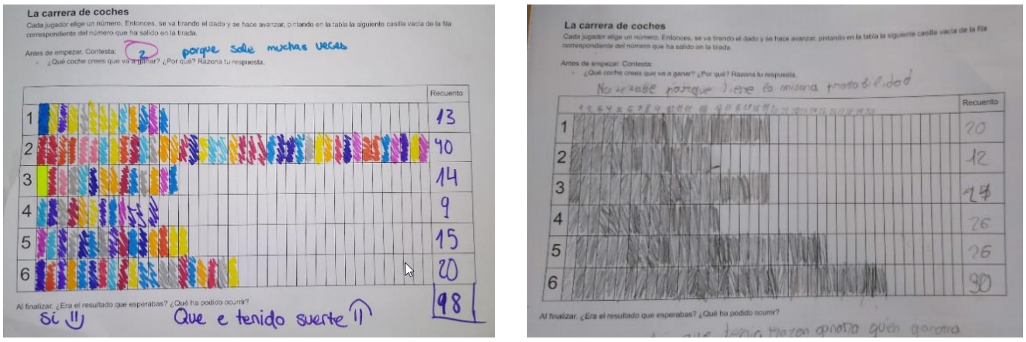
El juego tiene la finalidad de que el alumnado exprese por anticipado su creencia acerca de qué coche llegará primero a meta. Antes de jugar, por tanto, se les pregunta por esto, debiendo anotar además el argumento que les conduce a ello.

- No sé, el 3 o el 4, que son números ni muy altos ni muy bajos.
- El 5, porque es mi número favorito.
- No sé, da igual, ¿no? Cualquiera.

Y una vez han jugado, vemos que las respuestas no hacían sino expresar la probabilidad como grado de creencia personal. A la luz de los resultados (como los que mostramos en la Figura 2), se vuelve a preguntar al alumnado qué coche elegirían con esta nueva información. Es el momento de compartir, en una puesta en común, las diferentes producciones, que no dejan de ser diagramas de frecuencias absolutas de nuestro experimento (más adelante se les pondrá nombre). Aunque idealmente se podría repetir la experiencia, normalmente no se dispone del tiempo necesario y ya hemos cumplido con el propósito: que los dados de papel están tan mal construidos, sobre todo algunos, que no da igual qué número elegir. Así, el diagrama de la derecha de la Figura 2 nos sugiere que hay un sesgo importante hacia el dos. ¿Realmente daba igual qué número elegir?

Figura 2.

Diagramas construidos por el alumnado. Fuente: propia.



Sin saber cómo se comportaba el dado, a priori, no podía saberse qué número elegir, así que un modelo razonable era asumir que cada cara tenía la misma probabilidad. Sin embargo, con la nueva información, vemos que no. Para incidir todavía más en la necesidad de considerar si los sucesos son equiprobables o no, se propone a continuación terminar la actividad del dado de papel modificándolo para que salga “casi siempre” el cinco, y probarlo experimentalmente. No tardan en aparecer diferentes técnicas, como pegar un clip (o varios, incluso he llegado a ver gomas de borrar) en la cara opuesta al cinco.

Más adelante, pueden retomarse estos gráficos para calcular la probabilidad de esos dados a partir de la frecuencia relativa. Cabe observar, además, que este orden de actividades es una propuesta que admite variaciones. Por ejemplo, Beltrán-Pellicer (2017) propone una experiencia en la que los alumnos tienen que diseñar dados, los imprimen en 3D y posteriormente analizan si son sesgados. En este caso, la experiencia se enmarca dentro del significado frecuentista de la probabilidad, facilitando su puesta en relación con el significado clásico o a priori.

Lenguaje y probabilidad, probabilidad y lenguaje

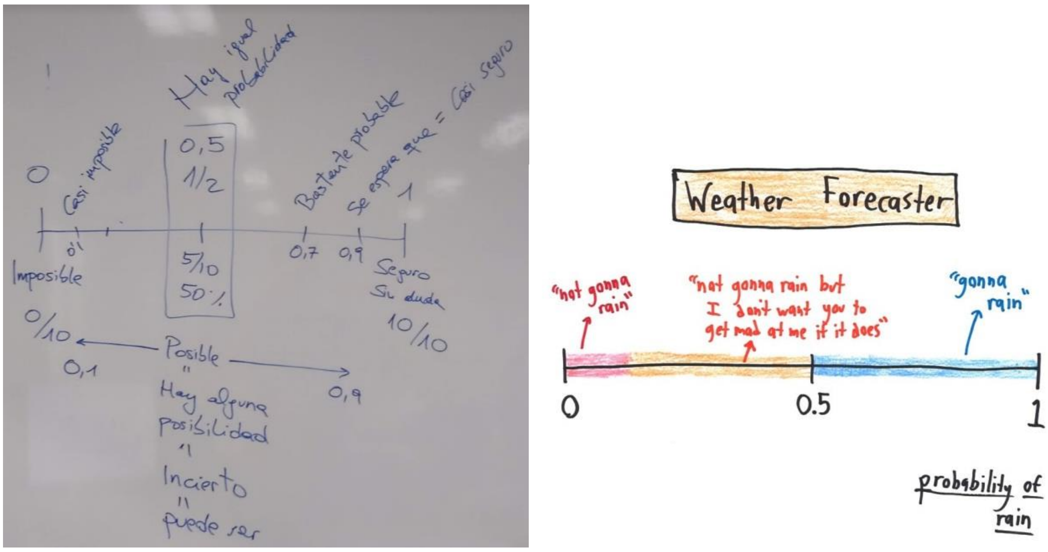
El lenguaje cotidiano está lleno de palabras y expresiones que indican probabilidad. Es algo tan profundamente arraigado en las estructuras lingüísticas que pasa desapercibido. Nos encontramos continuamente expresando nuestro grado de creencia personal en que ciertos fenómenos ocurran. En un contexto meteorológico, por ejemplo, surgen expresiones como "mañana lloverá", "es posible que nieve", "es muy probable que se formen tormentas", etc. Godino, Batanero y Cañizares (1991) proponen actividades donde el alumnado tenga que construir frases que incluyan este tipo de términos. Para ello, se puede comenzar proporcionando al alumnado un texto donde identifiquen este tipo de expresiones y luego plantear la elaboración de frases en dos sentidos: por un lado, dado un suceso ("nevará el día de Navidad") asignarle una probabilidad expresada como grado de creencia personal ("es posible que…"); por otro lado, dada una expresión que indica probabilidad ("es muy probable que…"), asignarle un suceso.

El contexto meteorológico permite conectar con la posibilidad de utilizar números para cuantificar la probabilidad. ¿Quién no ha visto un pronóstico del tiempo, donde se emplean porcentajes para indicar la probabilidad de lluvia? De esta manera, damos paso a una tarea que consiste en asociar cada una de las palabras y expresiones anteriores a un número, situándolas en una escala del 0 al 1, correspondiendo el "0" al suceso imposible y el "1" al seguro La Figura 3 (izquierda) muestra la pizarra en plena discusión. Lo de menos es llegar a una corrección exhaustiva. Por ejemplo, está claro que palabras como "imposible" o "no hay posibilidad" se corresponden con probabilidad 0; mientras que "sin duda" o "seguro", con probabilidad 1. "Hay igual probabilidad" estaría también en un lugar muy concreto, probabilidad 0,5. Pero,

¿qué ocurre con “casi imposible”? Es un 0,1, un 0,2 o qué. No obstante, la cuestión más problemática viene de términos como “posible” o “incierto”. Si nuestras consideraciones son rigurosas desde una perspectiva matemática, “posible” se contrapone a “imposible”, como todo lo que no es imposible. En términos de números reales estaríamos hablando del intervalo (0,1] para “posible”. Estas sutilezas se pueden discutir al nivel de los alumnos, aunque no es el objeto de la actividad ni conviene atascarse mucho en este punto. Además, si consideramos que un suceso tiene probabilidad 1, no decimos que es posible (aunque, efectivamente, lo sea), sino que es seguro.

Figura 3.

Escala de probabilidad, en clave de humor, para el hombre o la mujer del tiempo. Fuente: Orlin (2015).



Para cerrar la actividad, se proyectan las escalas de probabilidad que comparte Orlin (2015) en su blog (Figura 3, derecha). La discusión que generan al comentarlas, en clave de humor, permite profundizar tanto en la idea de cuantificar la probabilidad como en el significado subjetivo de la probabilidad. ¿Personas distintas asignan la misma probabilidad al mismo suceso? ¿Nosotros asignamos la misma probabilidad a llover que el presentador del tiempo?

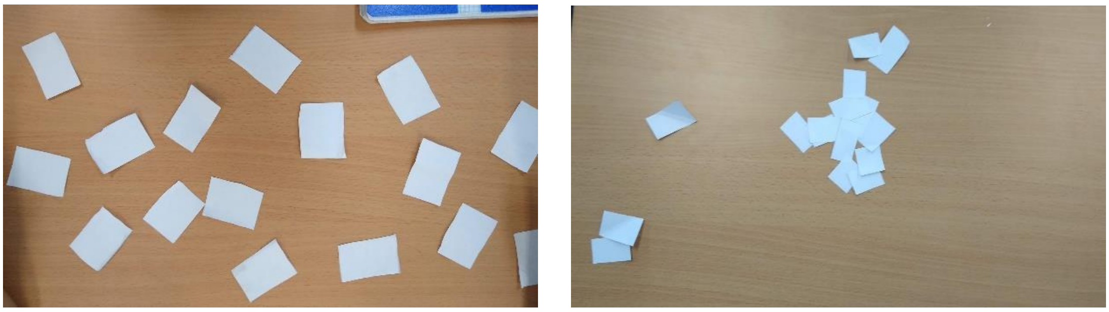
Aleatoriedad: colocando objetos al azar

La idea de aleatoriedad en sí misma ofrece multitud de experiencias. Consideremos como actividad aquella que consiste en colocar unos cuantos objetos al azar sobre la mesa (puede ser 15-20 trocitos de papel sucio). Es una situación que se enmarca en la distinción de fenómenos aleatorios y deterministas. No obstante, sobre todo es un paso hacia la aceptación de aleatoriedad como modelo matemático, ya que permite distinguir entre el proceso de generación (el experimento, colocar los objetos) y el patrón obtenido. Entronca con las actividades propuestas por algunos autores sobre generación de secuencias aleatorias (Batanero, Green, & Serrano, 1998; Green, 1983)

En la Figura 4 se muestran dos ejemplos de configuraciones. La mayoría de los alumnos optan por algo como lo que se muestra en la parte de la izquierda. Son estudiantes que arrojan los papeles y, después, los tocan, espaciándolos de manera más o menos uniforme. No obstante, también encontramos alumnos que los dejan tal cual, cosa que se observa en la imagen de la derecha. Esta última configuración muestra agrupaciones, las cuales aparecen de forma natural al arrojarlos directamente sobre la mesa. A modo de anécdota, y sin haber realizado un estudio sistemático, resulta curioso observar que los alumnos que menos atención muestran por las actividades parecen ser los que los dejan tal cual.

Figura 4.

Izquierda, una configuración de objetos a intervalos regulares. Derecha, una configuración de objetos sin modificar después de arrojarlos. Fuente: propia.



La discusión que sigue a la colocación de los papeles se puede facilitar a partir de la visualización de un fragmento del primer capítulo de la serie de televisión Numb3rs (Heuton & Falacci, 2005). Para contextualizarla, basta mencionar que los protagonistas son dos hermanos, uno de los cuales es investigador del FBI y otro, matemático de prestigio, de manera que el segundo colabora con el primero para resolver crímenes y perseguir delincuentes. En el primer episodio, intentan dar con el domicilio de un asesino en serie a partir de las localizaciones de los asesinatos. Pudiera parecer que estas localizaciones están elegidas al azar, pero esto es algo muy difícil. Para ilustrar esto, el matemático protagonista invita a varios agentes del FBI a colocarse al azar dentro de una habitación. Así les hace ver que no se han puesto de cualquier manera, sino que lo han hecho a intervalos regulares (Figura 5).

Figura 5.

Intento de distribución aleatoria en una habitación. Fuente: Numb3rs, primer episodio (Heuton & Falacci, 2005).

Es una experiencia que aquí se aborda de manera muy intuitiva. En cursos superiores pondría en juego razonamientos más elaborados a partir de la idea de distribuciones de probabilidad continuas. Desde este punto de vista, cada configuración en particular tendría probabilidad nula, ya que la posición en cada uno de los ejes viene dada en intervalos reales.

Además, la incorporación de fragmentos cortos, seleccionados de manera idónea por el profesorado, puede ser un recurso didáctico potente para complementar la discusión, rico en representaciones y significados simbólicos (Beltrán-Pellicer, Medina, & Quero, 2018).

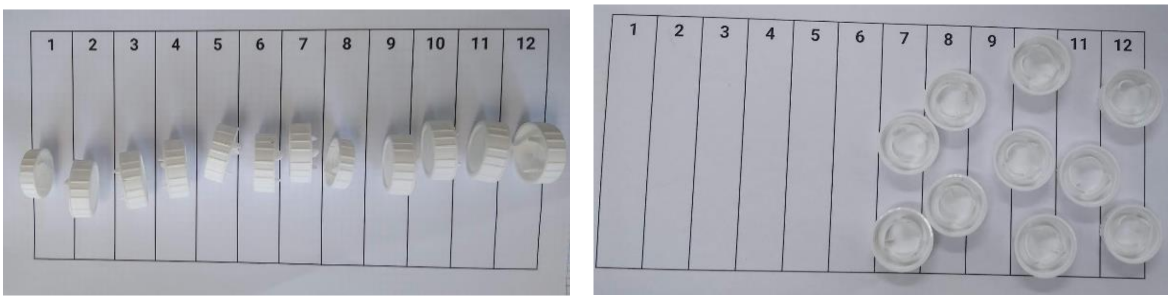
El juego de los tapones

La siguiente actividad es el análisis de un juego desde el significado clásico, que también conecta al final con el significado frecuencial. Se trata de un juego del que circulan diversas variantes, por ejemplo, como fichas que deben pasar un puente (Gallardo, Cañadas, Martínez-Santaolalla, & Molina, 2007), como judías que se van retirando de un tablero (Vickery, 2012), etc. Se juega con dos dados y un tablero numerado, como el que mostramos en la Figura 6. Los jugadores colocan las fichas, doce, por ejemplo, en las celdas del tablero, numeradas del 1 al 12. Se pueden colocar como se quiera; es decir, es posible poner varias en una misma celda o distribuirlas. En cada turno se tiran dos dados y se observa la suma de los valores. Entonces, todos los jugadores que tienen alguna ficha en la celda numerada con ese valor retiran una ficha, y solo una, de dicha celda. Gana el jugador que consigue retirar primero todas sus fichas.

Se comienza jugando dos o tres partidas, de manera que la primera sirve como toma de contacto con el juego, comprobar si se han comprendido las reglas, y empezar a observar cómo son las distribuciones ganadoras. Además, permite que surja la idea de suceso imposible, ya que algunos alumnos colocan ficha en la celda del “1” (Figura 6, izquierda), suceso que nunca va a producirse al considerar la suma de los valores de los dos dados. Es habitual que en la primera partida muchos alumnos distribuyan uniformemente las fichas. En la segunda y tercera partida van cambiando de estrategia en base a sus observaciones. Sin embargo, como no se ha realizado ni un registro experimental ni un análisis sistemático, elaboran argumentos como “las coloco en los números más altos, porque he visto que salen más” (Figura 6, derecha).

Figura 6.

Ejemplos de distribuciones de fichas en el juego de los tapones. Fuente: propia.



Después de estas partidas iniciales, donde los alumnos se dan cuenta de que no da igual cómo colocar las fichas, se realiza un análisis exhaustivo, a priori. Para ello se propone utilizar una tabla (ver Tabla 1) como procedimiento sistemático de enumeración de casos posibles. Se proporciona la tabla con algunas celdas ya completas, dejando al alumnado que termine esta.

Tabla 1.

Tabla para analizar el espacio muestral al lanzar dos dados y considerar, en este caso, la suma.

	1	2	3	4	5	6
1		3				
2						
3				7		
4						
5						
6						

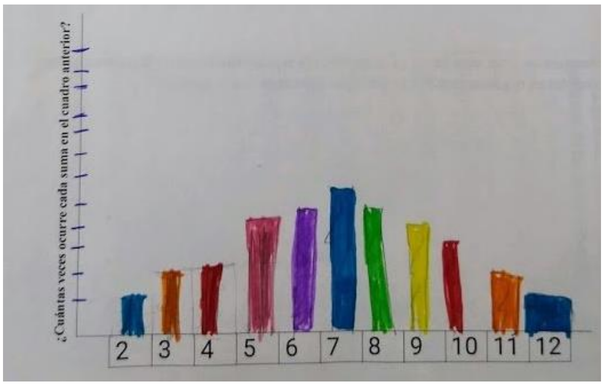
Esto mismo podría hacerse también mediante un diagrama de árbol. En cualquier caso, se trata de seguir un procedimiento sistemático que permita enumerar los 36 sucesos elementales, y ver cuántos de ellos componen cada uno de los sucesos que aparecen al considerar la suma de los resultados de los dos dados. En este momento las preguntas que se plantean son:

- ¿Cuántos casos diferentes pueden darse?
- ¿Qué suceso es más probable? ¿Cuál es su probabilidad?
- ¿Qué suceso es menos probable?

Antes de ponernos a jugar de nuevo, es necesario reflexionar sobre lo que está pasando. Para ello, se propone construir y visualizar los resultados del análisis en un diagrama de barras, como, por ejemplo, el que se muestra en la Figura 7. Después de esto, se pide al alumnado que indique cómo distribuirá las fichas en una nueva partida, y por qué.

Figura 7.

Visualización del número de casos posibles para cada suceso. Fuente: propia.



En esta segunda tanda de partidas se siguen viendo distribuciones interesantes, ya que algunos alumnos optan por poner todas en el "7", ya que es el suceso más probable. Sin embargo, experimentalmente observan que no es lo óptimo, ya que "el 7 no sale siempre". En este rango de edades nos quedamos con la idea intuitiva de que el diagrama indica que la suma "7" es la más probable, pero las sumas "6" y "8" también son muy probables, y aparecerán con bastante frecuencia en una serie larga de tiradas.

En la puesta en común de esta actividad se formalizan conceptos como suceso imposible (el “1” que no podía suceder nunca) o suceso seguro, así como procedimientos como tablas y diagramas de árbol para desglosar espacios muestrales y la aplicación de la regla de Laplace cuando se consideran sucesos compuestos.

Chinchetas

En la secuencia hay que incluir otras situaciones donde la regla de Laplace no se pueda aplicar. Por eso ahora viene una actividad con chinchetas. Son dos resultados posibles, o con la punta hacia arriba o tumbadas. La aplicación, sin razonamiento, de Laplace nos diría que la probabilidad de que caiga con la punta hacia arriba (o tumbada) es 1/2. Esto es algo que se conoce como sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992; Lecoutre & Durand, 1988) y se produce cuando se considera que todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio son equiprobables, sin plantearse si es posible aplicar el principio de indiferencia o si existe algún tipo de simetría.

Igual que en todas las actividades anteriores, antes de empezar a lanzar las chinchetas, los alumnos tenían que expresar su creencia (significado subjetivo, intuitivo) acerca de la probabilidad de caer de una manera o de otra. De nuevo, los alumnos se posicionaban de diversas maneras; desde los que decían que siempre tumbados, hasta los que razonaban que como el culo pesa más, caerían más veces hacia arriba. Otros, con el mismo motivo, decían que no, que tumbadas. Para facilitar la experimentación, los alumnos estaban en grupos de cuatro, como en toda la secuencia. A cada grupo se le proporcionó un vaso de plástico y 10 chinchetas, y se les pidió que hiciesen 10 tiradas, anotando cuántas veces habían caído de una forma y cuántas de otra. De esta forma, en poco tiempo, cada grupo disponía de 100 lanzamientos. Al terminar, en la puesta en común cada grupo indica sus resultados, y el profesor los muestra para todos, que los anotan en sus cuadernos (Figura 8).

Figura 8.

Registro de los lanzamientos de chinchetas. Fuente: propia.

Al visualizar las tandas de cada uno de los equipos y comentarlas se pone de manifiesto la variabilidad intrínseca a las repeticiones del experimento. Un acercamiento intuitivo a la idea de variabilidad es clave en el desarrollo, más adelante, de la comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral (Begué, Batanero, & Gea, 2018).

Ruletas

Las ruletas son un dispositivo aleatorio que permite abordar situaciones en las que el espacio muestral es continuo, por lo que no puede aplicarse la regla de Laplace. Evidentemente, esta podrá aplicarse si la ruleta aparece dividida en sectores circulares de igual área. No obstante, introducir ruletas así aporta poco a la paleta de experiencias. Son las ruletas divididas en sectores de diferente área, y cuya discretización en subsectores no es obvia, las que ponen en juego dos aspectos fundamentales: sucesos elementales no equiprobables y espacio muestral continuo.

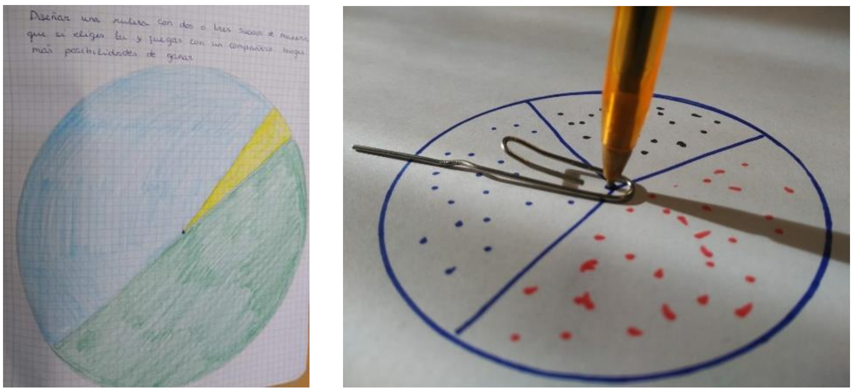
Como los sucesos elementales no son equiprobables, no es posible emplear la regla de Laplace. Y como el espacio muestral es continuo, debemos pensar en una relación de medidas entre el suceso en cuestión y el espacio muestral. En este caso, será la relación entre áreas la que exprese la probabilidad a priori, teórica, de cada suceso.

Además, podemos aprovechar las actividades con ruletas para introducir, de forma intuitiva, la idea de juego justo. Un juego es justo o equitativo cuando, en ausencia de premios y recompensas (o si todas son iguales), todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar. Si hay premios, será justo cuando la ganancia esperada para cada uno de los jugadores sea la misma. No es el momento de desarrollar formalmente el concepto de esperanza matemática. Sin embargo, de forma intuitiva sí que podemos plantear que, cuando en una ruleta los sucesos no son equiprobables (y no hay premios que compensen el riesgo) el primero en elegir tendrá mayor probabilidad de ganar.

Se trata de diseñar una ruleta de dos o tres sucesos (se juega con un clip y un boli, como en la Figura 9, derecha) de manera que, si juegas y eliges primero, tengas mayor probabilidad de ganar que el otro.

Figura 9.

Actividad con ruletas. Fuente: propia.



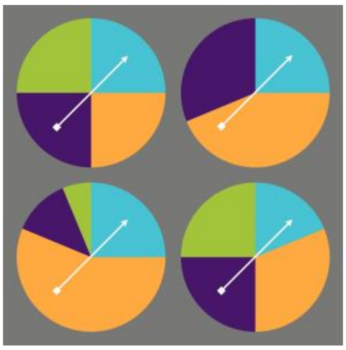
De nuevo, antes de probar experimentalmente las ruletas, los alumnos deben elaborar sus predicciones, argumentándolas. En la puesta en común se puede poner sobre la mesa la cuestión de si es posible aplicar la regla de Laplace o no, y cómo podríamos intentar encontrar la probabilidad de forma teórica (sin experimentar). Para esto último, conviene comenzar planteando ejemplos sencillos, en los que cada suceso se corresponde con una fracción fácilmente identificable del círculo (3/4, 2/3, etc.), y se ponga de manifiesto que estamos atendiendo a una relación entre áreas. Posteriormente, a juicio del profesor, se puede discutir qué ocurre con un sector cuyo ángulo es arbitrario.

Observaciones adicionales

La secuencia se complementa con otras actividades más breves de ejercitación o pequeñas variantes de las ya expuestas, que permiten profundizar. Por ejemplo, el juego de los tapones se presta a considerar la diferencia en lugar de la suma, el valor máximo, o cualquier otra función matemática. Igualmente, también se puede jugar a dicho juego con otros dispositivos aleatorios (ruletas, dados con otro número de caras, etc.).

También se consideran otros tipos de actividades. Así, los Which One Doesn't Belong (WODB) (Danielson, 2016) ofrecen excelentes oportunidades para la argumentación (Ricart, Beltrán-Pellicer, & Estrada, 2019). En los WODB, se cualquiera de los cuatro elementos propuestos podría ser el que no encaja. La cuestión es aportar la razón, o las razones, que lo hacen único. A modo de ejemplo, el propuesto por Hunter (2018) sobre ruletas (Figura 10) permite poner en juego expresiones como "suceso", "suceso equiprobable", "probabilidad mayor que...", etc.

Figura 10.
WODB de probabilidad. Fuente: Hunter (2018).



Conclusiones

Se trata de una propuesta flexible, donde se ponen en juego diversas estrategias didácticas, que, como se ha mencionado anteriormente, admite variaciones. El éxito de esta depende de la articulación de los diferentes significados de la probabilidad: intuitivo y subjetivo, clásico y frecuencial. Es importante destacar que la experimentación no es que ofrezca una comprobación empírica de lo que se calcula con la regla de Laplace, sino que, cuando el número de repeticiones es suficientemente grande, la frecuencia relativa de cada suceso tiende a estabilizarse en torno a un valor concreto, su probabilidad. Este valor coincide con el que se obtiene cuando se emplea la regla de Laplace, en aquellos casos en que esta puede utilizarse; esto es, cuando los sucesos elementales son equiprobables. Por este motivo es indispensable poner sobre la mesa situaciones en que los sucesos elementales no son equiprobables (chinchetas, dado de papel, tiempo atmosférico) y, entre estas situaciones, incluir algunas en las que la probabilidad pueda calcularse a priori considerando algún tipo de medida (ruletas, a partir del área de los sectores).

Como se ha mencionado en la introducción, la edad para la que se plantea esta secuencia es al comienzo de la educación secundaria (12-13 años). El objetivo es sentar unas bases sólidas sobre las que incorporar en cursos posteriores elementos más sofisticados para cada uno de los significados: situaciones que requieran un análisis combinatorio (clásico), más situaciones sobre variabilidad muestral y determinar cuál sería un número aceptable de repeticiones de un experimento (frecuencial) y el teorema de Bayes (subjetivo), importancia que ha sido destacada por diversos autores (Martin & Theis, 2016).

El diseño de una secuencia didáctica flexible permite aportar una estrategia al profesorado, quien a veces concibe la enseñanza de las matemáticas como una disciplina orientada a la aritmética y las reglas, que suele derivar en una visión determinista de la probabilidad, tanto en su enseñanza como en su aprendizaje (Stohl, 2005). En cualquier caso, es importante considerar, tanto en la fase de diseño como de adaptación de nuevas variaciones, la aplicación de "criterios de idoneidad didáctica en probabilidad" (Beltrán-Pellicer, Godino, Giacomone, 2018) que permitan fundamentar la propuesta educativa y guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro de los proyectos PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033, PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y PFID-FID-2021-45 (Gobierno de Panamá) y del grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo). Damos las gracias también a la compañera Ana Isabel Martínez Pérez, cuyos comentarios durante el curso 2019/20 sobre la implementación de esta secuencia no han hecho sino mejorarla.

Referencias

Alsina, A., Maurandi-Lopez, A., Ferre, E. & Coronata, C. (2021). Validating an Instrument to Evaluate the Teaching of Mathematics Through Processes. *International Journal of Science and Mathematics Education, 19,* 559–577.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 8*(3), 247-263.

Batanero, C., Green, D. R., & Serrano, L. (1998). Randomness, its meanings and implications for teaching probability. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 29*(1), 113-123.

Begué, N., Batanero, C., & Gea, M. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudiantes de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las ciencias, 36*(2), 63-79.

Beltrán-Pellicer, P. (2017). Modelado e impresión 3D como recurso didáctico en el aprendizaje de la probabilidad. *Épsilon: Revista de Educación Matemática, 34*(95), 99-106.

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D., Giacomone, B. (2018). Elaboración de Indicadores Específicos de Idoneidad Didáctica en Probabilidad: Aplicación para la Reflexión sobre la Práctica Docente. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(61), 526-548.

Beltrán-Pellicer, P., Medina, A., & Mercedes Quero (2018). Movies and TV series fragments in mathematics: Epistemic suitability of instructional designs. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education, 26*(1), 16-26.

Bingolbali, F., & Bingolbali, E. (2019). One curriculum and two textbooks: opportunity to learn in terms of mathematical problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 31, 237-257.

Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. *Research and issues in teaching mathematics through problem solving*, 241-254.

Cai, J., & Lester, F. (2010). Why is Teaching with Problem Solving Important to Student Learning? *NCTM Research Brief, 13*(12), 1-6.

Danielson, C. (2016). *Which One Doesn't Belong? A Shapes Book*. Portland, EE.UU.: Stenhouse Publishers.

English, L. D., & Gainsburg, J. (2015). Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. En L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education. Third edition*, (pp. 313-335). Nueva York: Routledge.

Gallardo, S., Cañadas, M. C., Martínez-Santaolalla, M. J., & Molina, M. (2007). Jugando con la probabilidad. En P. Flores, R. Roa, & R. Pozuelo, (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas: estadística y azar* (pp. 200-207). Granada: SAEM Thales y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1991). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.

Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3.000 pupils aged 11 -16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the ICOTS 1*, vol 2., (pp. 766-783). University of Sheffield.

Heuton, C., & Falacci, N. (2005). *Numb3rs*. [Serie de TV]. The Barry Schindel Company / Scott Free Productions / Paramount Network Television / CBS Paramount Network Television.

Hunter, C. (2018). Alike and Different: Which One Doesn' t Belong? and More. *Vector, 60*(1), 17-20.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction, 6*(1), 59-98.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En Glasersfeld, E. von (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in «purely random» situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(1), 557-568.

Lecoutre, M. P., & Durand, J. L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics, 19*(3), 357-368.

Martin, V., & Theis, L. (2016). L'articulation des perspectives fréquentielle et théorique dans l'enseignement des probabilités: regard sur un changement de posture chez un enseignant du primaire. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 16*(4), 345-358.

McNiff, J. (2013). *Action Research: Principles and Practice*. Nueva York, EE.UU.: Routledge.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Thales

Orlin, B. (2015). *What Does Probability Mean in Your Profession?* [Entrada de blog]. Disponible en https://mathwithbaddrawings.com/2015/09/23/what-does-probability-mean-in-your-profession/

Ricart, M., Beltrán-Pellicer, P., & Estrada, A. (2019). Actividad scaffolding en geometría para desarrollar habilidades de argumentación y clasificación en futuros maestros de Educación Infantil. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 503-512). Valladolid: SEIEM.

Serrano, L., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, *10*(01), 7-25.

Stohl H. (2005) Probability in Teacher Education and Development. En Jones G.A. (Eds.) *Exploring Probability in School. Mathematics Education Library*, v. 40. Springer, Boston, MA.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science, 185*(4157), 1124-1131.

Vickery, N. (2012). *BEANO. Probability with beans*. [Entrada de blog]. Disponible en http://walkinginmathland.weebly.com/teaching-math-blog/beano-probability-with-beans

Recebido: 06/04/2021

Aceito: 05/05/2021