

**Conhecimento de crianças pequenas da Educação Infantil e alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental sobre Combinatória: O que apontam as pesquisas brasileiras no período de 2010 a 2019?**

**Knowledge of young children in Early Childhood Education and students in the early years of elementary school on Combinatorics: What do Brazilian researches point out in the period from 2010 to 2019?**

**Conocimiento de los niños pequeños en Educación Infantil y de los estudiantes de los primeros años de la escuela primaria sobre Combinatoria: ¿Qué señalan las investigaciones brasileñas en el período 2010-2019?**

Cristiane de Arimatéa Rocha <sup>1</sup>

Universidade Federal de Pernambuco  
<https://orcid.org/0000-0002-4598-2074>

Antonio Carlos de Souza <sup>2</sup>

Universidade Estadual Paulista  
<https://orcid.org/0000-0002-8044-0481>

**Resumo**

A presente investigação discorre sobre um recorte de um projeto que visa apresentar as pesquisas em Educação Estatística no Brasil publicadas em periódicos da área de Ensino, entre os anos de 2010 a 2019. Definimos como objetivo para esse recorte discutir pesquisas brasileiras que abordam conhecimentos de crianças pequenas da Educação Infantil e alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental sobre Combinatória no período mencionado. Foram identificados oito trabalhos que tratam – direta ou indiretamente – sobre conhecimentos de combinatória dos estudantes dessas etapas de escolarização. Direcionamos nosso olhar para os problemas combinatórios utilizados nas pesquisas, ressaltando aspectos como os diferentes tipos de problemas, a ordem de grandeza adotada (número total de possibilidades), os contextos evidenciados pelos problemas, além dos recursos utilizados para apresentação das atividades aos participantes da pesquisa. Verificamos que as pesquisas brasileiras estão em consonância com as investigações realizadas em diferentes países e apresentam um avanço no sentido de permitir a discussão, nessas etapas de escolarização, dos diferentes tipos de

---

<sup>1</sup> cristiane.arocha@ufpe.br

<sup>2</sup> ac.souza@unesp.br

problemas combinatórios em um mesmo estudo. Consideramos a necessidade de que outras pesquisas sejam realizadas abordando a elaboração de argumentos pessoais na resolução de problemas combinatórios.

***Palavras-chave:*** Problemas Combinatórios, Contexto, Currículo, Educação Básica.

### **Abstract**

The present investigation discusses an excerpt from a project that aims to discuss the research on Statistical Education in Brazil published in journals in the area of Mathematics Education between the years 2010 to 2019. We set the objective to discuss Brazilian research that addresses the knowledge of young children in kindergarten and students in the early years of elementary school about Combinatorics in this period. Eight papers were identified that deal directly or indirectly with combinatorics knowledge of students' in these schooling stages. We focused on the combinatorial problems used in the research, highlighting aspects such as the different types of problems, the order of magnitude adopted (total number of possibilities), the contexts evidenced by the problems, in addition to the resources used to present the activities to the research participants. We verified that Brazilian research is in line with the investigations from different countries and presents an advance in the sense of allowing the discussion of different types of combinatorial problems in the same study. We consider that further research should be conducted addressing the development of personal arguments in solving combinatorial problems.

***Keywords:*** Combinatorial Problems, Context, Curriculum, K12.

### **Resumen**

La presente investigación discute un extracto de un proyecto que tiene como objetivo presentar las investigaciones en Educación Estadística en Brasil, publicadas en revistas del área de Matemáticas Educativas entre los años 2010 y 2019. Nos fijamos como objetivo, para

este extracto, discutir la investigación brasileña que aborda el conocimiento de los niños pequeños en Educación Infantil y de los estudiantes en los primeros años de la escuela primaria en Combinatoria en ese período de tiempo. Se identificaron ocho estudios que tratan directa o indirectamente el conocimiento combinatorio de los estudiantes de estas etapas de la escolarización. Centramos nuestra atención en los problemas combinatorios utilizados en las investigaciones, destacando aspectos como los diferentes tipos de problemas, el orden de magnitud adoptado (número total de posibilidades), los contextos evidenciados por los problemas, además de los recursos utilizados para presentar las actividades a los participantes de la investigación. Encontramos que la investigación brasileña está en línea con las investigaciones de diferentes países y presenta un avance en el sentido de permitir la discusión de diferentes tipos de problemas combinatorios en un mismo estudio. Consideramos la necesidad de que se realicen otras investigaciones que aborden la elaboración de argumentos personales en la solución de problemas combinatorios.

***Palabras clave:*** Problemas combinatorios, Contexto, Currículo, Educación Primaria.

## **Conhecimento de crianças pequenas da Educação Infantil e de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental sobre Combinatória: O que apontam as pesquisas brasileiras no período de 2010 a 2019?**

A resolução de problemas combinatórios é um tema versátil, posto que é possível fazer articulações com diferentes conceitos matemáticos e diferentes áreas (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1996; Hunter, 2011; Knuth, 2013). Trata-se de um assunto propício para discussão de aspectos relacionados à Educação Matemática (Kapur, 1970; Lockwood et al. 2020), inclusive sobre a tendência da resolução de problemas. Fornece ambiente para discussão sobre processos de ensino e aprendizagem de Matemática, até mesmo sobre os malefícios de apresentar – sem as devidas discussões iniciais – as fórmulas matemáticas (Brasil, 1997, 1998, 2018). Estabelece rumos necessários para a formação inicial e continuada do professor, especificamente a discussão sobre conhecimentos para ensinar combinatória (Brasil, 2014; Rocha, 2011). A Combinatória apresenta uma gama de problemas acessíveis a várias idades, que viabiliza a produção de procedimentos pessoais de resolução (Kapur, 1970; Borba, 2010; 2013). Por isso, faz-se necessária a difusão do que está sendo pesquisado para professores formadores, professores da Educação Básica, futuros professores e curiosos a fim de indicar novas possibilidades para o trabalho com essa temática.

Buscando auxiliar a suprir essa necessidade, delineamos como objetivo para essa investigação discutir pesquisas brasileiras que abordam conhecimentos de crianças pequenas da Educação Infantil e alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental sobre Combinatória. Nessa perspectiva, esse artigo inicia explorando a discussão sobre a inserção da Combinatória no currículo de alguns países, trazendo elementos que justifiquem sua inserção e em alguns casos, práticas que podem ser implementadas em sala de aula. Em seguida, apresentamos uma discussão sobre problemas combinatórios, as habilidades para

resolução de problemas e algumas estratégias utilizadas na sua resolução. O artigo conclui com a elucidação da metodologia e a discussão sobre os resultados encontrados.

### **A inserção da combinatória no currículo da Educação Básica em diferentes países: uma breve introdução**

A discussão sobre a inclusão da Combinatória no currículo da Educação Básica remete a pesquisas nacionais e internacionais há mais de 50 anos. Dentre esses pesquisadores, encontram-se trabalhos em diferentes países tais como: Índia por Kapur (1970), Espanha por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Godino e Batanero (2016), nos Estados Unidos por Kenney e Hirsch (1991), English (1991; 2005) e Hart e Sanderfur (2018), e no Brasil Borba (2010; 2013), Rocha, Lima e Borba (2016), Souza (2007; 2013).

Problemas combinatórios simples não se fundamentam em cálculos profundos. Nessa perspectiva Kapur (1970), considera possível o seu trabalho em todos os níveis de ensino. Apoiando essa afirmação, English (2005) argumenta que tais problemas podem ser resolvidos de diferentes maneiras, o que pode possibilitar a busca pela solução desses problemas com estudantes em início de escolarização. Hart e Sanderfur (2018, p.v, tradução nossa) defendem a Matemática Discreta – inclusive a Combinatória – “deveriam ser incluídas no currículo básico de todos os países para todos os alunos”.

Nos Estados Unidos, houve a discussão do livro do ano do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), de Kenney e Hirsch (1991). Essa se deu centrada na inserção da Matemática Discreta no currículo, incluindo aspectos sobre a Combinatória, que é parte fundamental dessa área. Gardiner (1991) declara que o papel desse conteúdo é promover a oportunidade para estudantes desenvolverem raciocínios como aqueles produzidos na elaboração de contagens sistemáticas. Especificamente na Educação Primária, Schielack (1991) discute a inclusão de alguns problemas combinatórios envolvendo cores de

tintas variando a incidência da ordem (gerando ou não novas possibilidades), viabilizando para as crianças identificarem o total de possibilidades, a fim de desenvolver habilidades sobre o que e como contar.

De acordo com DeBellis e Rosenstein (2004), após essa publicação, conteúdos de matemática discreta foram incorporados em poucas escolas por meio de atividades que utilizassem a resolução de problemas, uma das justificativas elencadas pelos autores, trata da lacuna na formação dos professores para essa área.

DeBellis e Rosenstein (2004) ainda acrescentam que – com a publicação dos *Principles and Standards for School Mathematics* pelo NCTM (2000) – um dos três conteúdos da Matemática Discreta que foram inseridos no currículo, da escola primária ao Ensino Médio, foi a Combinatória; no entanto, como existe autonomia entre os estados na escolha do currículo de Matemática, não é unânime a presença da Combinatória em seus currículos estaduais. Esse documento discute a relação entre a resolução de problemas e a Combinatória e indica a importância de oportunizar ao aluno, a construção de conhecimento por meio da resolução de problemas, enfatizando o aprendizado e a prática de estratégias heurísticas, bem como a possibilidade de estabelecer conexões entre diferentes maneiras de pensar sobre um dado conteúdo matemático (NCTM, 2000).

Tal elaboração de heurísticas pessoais na resolução de problemas combinatórios, como também as conexões e relação entre elas, é evidenciada por Hart (2007) em suas orientações realizadas para professores da Louisiana. O autor prescreve propostas de atividades para o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória para a Educação Básica nos Estados Unidos, percorrendo as etapas brasileiras equivalentes a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Hart (2007) sugeriu, para a abordagem da Combinatória na Educação Infantil, o trabalho com listagens, princípio aditivo e diagrama de Venn, já nos anos iniciais o autor

indica o uso informal do Princípio Fundamental da Contagem, além de diversificação das representações na resolução desses problemas como tabelas, árvores e enumerações sistemáticas, descrevendo possíveis relações entre tais registros.

Tal proposta estabelece alguma hierarquia para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, e já que promove a discussão desde a Educação Infantil pode potencializar processos de identificação das propriedades de ordenação e repetição e na identificação de problemas combinatórios de natureza semelhantes.

Outra proposta curricular apresentada por pesquisadores ocorre na Espanha. Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) propuseram uma organização para o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória, apresentando objetivos, uma lista de atividades e orientações para gestão dessas aulas para toda a Educação Básica. Tais autores defendem a necessidade de processos de ensino e aprendizagens adequados para que haja o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Fischbein (1975) também considerou necessário que estudantes vivenciem o ensino de Combinatória para que os mesmos consigam identificar e utilizar diferentes técnicas para a resolução desses problemas.

Para tanto, é necessário discutir de que maneira esse processo de ensino aprendizagem de Combinatória pode ocorrer na Educação Básica. Para expor algumas ideias trazidas pelos pesquisadores espanhóis em seu livro *Razonamiento Combinatorio*, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) sugerem objetivos e algumas atividades para a gestão da classe orientando o trabalho de professores que atuam na Educação Primária da Espanha (10-11 anos). Verificamos – nessa proposta – ideias que estabelecem orientações para o professor da Educação Primária planejar e organizar as aulas de Combinatória, mas para que consigam implementá-las são necessários discussões na formação inicial e continuada, tal como defendem Gea, Batanero e Venegas (2019) sobre a necessidade de mais debates e investigações focalizando aspectos vivenciados durante a aula de Combinatória,

especialmente, no que diz respeito à formação de professores. Godino e Batanero (2016) defendem a inserção do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória ao longo da Educação Básica.

[...] a combinatória deve ser parte integrante do currículo e desenvolver-se ao longo de diferentes etapas educacionais, seguindo a ideia do currículo em espiral. Uma primeira escolha no desenvolvimento do referido currículo é a sua distribuição durante um longo período de tempo. (Godino & Batanero, 2016, p. 9).

Outros colaboradores Roldán López de Hierro, Batanero e Beltrán-Pellicer (2018, p. 54) defendem que, apesar de Combinatória, não esteja em evidência no currículo. Esse conteúdo aparece “não apenas na probabilidade, mas também na aritmética (números fatoriais, divisibilidade), amostragem, matrizes, determinantes e até mesmo em pesquisa operacional”.

English (2005, p.122, tradução nossa) atesta essa afirmação e complementa que “dada a ampla aplicabilidade do domínio combinatório (por exemplo, Química, Biologia, Física), problemas interdisciplinares podem ser criados em contextos do mundo real para os alunos”. As pesquisadoras mexicanas Rivera López e Maldonado Mejía (2012) afirmam que os documentos oficiais que guiam o ensino e aprendizagem de Matemáticas na Educação Primária – 6 a 12 anos – apontam que o trabalho de Combinatória, nessa etapa, deve ter em conta, nos três primeiros anos, noções de conjunto, relações e princípio multiplicativo; nos últimos três anos, apresenta explicitamente o ensino e aprendizagem de problemas de permutação e combinação.

No Brasil, várias pesquisas que sugerem que o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória inicie mais cedo (Borba, 2010; 2013) permitindo, inclusive, a introdução da discussão na Educação Infantil (Silva, 2019; Souza, 2007; 2013; Souza & Lopes, 2012). Sabe-se que a distribuição das pesquisas brasileiras por nível de escolaridade sobre Combinatória percorre desde a Educação Infantil até o Ensino Superior; de certa forma,



indica que o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória pode ocorrer nas diferentes etapas e modalidades de ensino, considerando a particularidade e especificidade de cada um (Souza & Rocha, 2020).

Algumas investigações alertam para presença de problemas combinatórios em livros didáticos dos anos iniciais, tanto em nível nacional (Barreto & Borba, 2010) quanto em outros países, tais como Chile (Rocha, Diaz-Levicoy, Borba, 2017), no México (Rivera López & Maldonado Mejía, 2012), entre outros. Tais pesquisas seguem a orientação de documentos oficiais curriculares de cada país para a Educação Básica.

O ensino e aprendizagem de Combinatória no Brasil se apresenta – por vezes – de maneira implícita no Ensino Fundamental, e grande parte das inserções de Combinatória na prática docente, tradicionalmente, acontece apenas no 2º ano do Ensino Médio (Rocha, 2011). Apesar de as orientações do Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (Brasil, 1997) indicarem esse trabalho desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e das atuais habilidades da Base Nacional Comum Curricular – BNCC – (Brasil, 2018) indicarem desde o 4º ano do Ensino Fundamental, algumas práticas de professores e pesquisadores discutem a inserção de problemas combinatórios desde a Educação Infantil (Borba, 2010; 2013; Silva, 2019; Souza, 2007; 2013).

Atualmente, a BNCC (Brasil, 2018) é o documento de referência para a Educação Básica no país; diante disso, consideramos relevante apresentar o que consta neste documento em relação à Combinatória, explicitando no Quadro 1 abaixo algumas considerações referentes aos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Quadro 1.

*Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental de acordo com a BNCC (Brasil, 2018, p. 291; 295)*

Ano	Unidades temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
4º	Números	Problemas de contagem	(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas

			simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
5 °	Números	Problemas de contagem do tipo: “Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?”	(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

O programa Pacto Nacional para Alfabetização na Idade Certa – PNAIC – (Brasil, 2014) vai além do discutido pela BNCC (Brasil, 2018): nos Cadernos que orientam a formação continuada de professores que atuam entre o 1º ao 3º ano do Ensino Fundamental – alunos com idade de 6 a 8 anos – já apontavam a inserção de práticas para a Educação Estatística, dentre as quais a que discute diferenças entre problemas combinatórios (produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação) e diferentes estratégias de resolução desses problemas utilizadas pelas crianças, desde as mais informais até aquelas mais sistematizadas, orientando o processo gradativo de aprofundamento entre as mesmas a fim de promover o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Rocha, Lima e Borba (2016, p. 22) acrescentam que, de acordo com a opinião de alguns professores de Anos Iniciais, “a Combinatória pode ser ensinada antes mesmo do que consideram os documentos curriculares oficiais, ou seja, desde a Educação Infantil”.

Os trabalhos analisados no presente texto foram publicados antes da BNCC (Brasil, 2018). Dessa forma, não apresentam sua influência ou a citam. Dentre esses trabalhos, alguns autores citam documentos oficiais vigentes na ocasião da realização de suas respectivas pesquisas. Apresentamos a seguir o que dizem sobre os documentos oficiais.

Os conteúdos relacionados à Combinatória, juntamente com os de Estatística e Probabilidade, foram introduzidos nos currículos de Matemática da Educação Básica a partir dos anos 1990, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997), que apresentam os estudos relativos às noções de Estatística, de Probabilidade e de Combinatória no bloco Tratamento da Informação. Entretanto, o Referencial Curricular Nacional para

Educação Infantil – RCNEI (BRASIL, 1998) não faz menção à abordagem da Combinatória na Educação Infantil (Souza & Lopes, 2012, p. 149).

Apesar das recomendações nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), os professores de anos iniciais do Ensino Fundamental parecem carecer de suficientes conhecimentos de conteúdo e curricular no que diz respeito à Combinatória, o que reforça nossa preocupação com o ensino deste conteúdo (Borba, Pessoa & Rocha, 2013, p. 904-905).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) propuseram mudanças expressivas para o Ensino Fundamental, acrescentando ao estudo de Números e Operações, de Espaço e Formas e de Grandezas e Medidas o bloco de conteúdos denominado Tratamento da Informação, o qual se refere aos estudos sobre as noções de Estatística, Probabilidade e de Combinatória. Logo, a Análise Combinatória é um tema tratado como relevante nesta proposta curricular, em que se aponta sua aplicabilidade em situações que requerem tratamento de dados e tomada de decisões por parte do indivíduo. Os PCN sugerem como objetivo em relação à combinatória para o 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental “levar o aluno a lidar com situações-problemas que envolvem combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem” (BRASIL, 1997, p. 57). Esses objetivos passam a requerer a inclusão da Análise Combinatória já no 1º ciclo (Melo, Silva & Spinillo, 2016, p. 2).

Os autores citam documentos curriculares como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dos anos iniciais do Ensino Fundamental (Brasil, 1997) e o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil – RCNEI – (Brasil, 1998) e afirmam que a Combinatória pode ser trabalhada desde a Educação Infantil, apesar do RCNEI não a mencionar. Atestam a necessidade do trabalho com diferentes tipos de problemas combinatórios, bem como contestam a ausência de informação que auxilie o trabalho do professor nessas etapas de escolarização.

### **Resolução de problemas combinatórios na Educação Básica: o que apontam pesquisas de diferentes países?**

O processo de ensino e aprendizagem de Combinatória possui intrínseca relação com a resolução de problemas. Um problema combinatório simples pode ser caracterizado por: situar a existência de invariantes de conceito diferenciados classificadas em produto cartesiano, permutação, combinação e arranjo (Borba, 2010; 2013); ter variadas ordens de grandeza o que implica em menor ou maior número total de possibilidades (English, 1991; Maher, Poweel & Uptegrove, 2010); versar sobre contextos diferenciados que possuam relações com atividades cotidianas das crianças ou que discutam relações entre conceitos

matemáticos ou outras áreas (Navarro-Pelayo, 1991; Roa, Batanero & Godino, 2001) e podem ser apresentados utilizando diferentes recursos tais como materiais de manipulação, desenhos, ferramentas tecnológicas, fichas de leitura, dentre outras.

Essa variação possibilita ao professor uma diversidade de caminhos para iniciar a discussão e o trabalho com Combinatória para crianças pequenas e alunos dos anos iniciais, permitindo a criação de estratégias pessoais dos estudantes e a elaboração de justificativas iniciais durante o ensino e aprendizagem de Combinatória (Rocha, 2019). Em seguida, apresentam-se discussões de autores para orientar o trabalho com combinatória na Educação Básica, e em especial, voltados para a Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental em diferentes países.

Roa, Batanero e Godino (2001, p.43) reconhecem que “a resolução de problemas combinatórios requer uma série de elementos, não só conceituais, como técnicas e destrezas, emprego adequado de notação, capacidade de argumentação e sua relação com os problemas dados”. De acordo com os pesquisadores americanos Hadar e Hadass (1981), existem habilidades necessárias para que alunos resolvam problemas combinatórios sobre as quais se ressaltam: discernir as informações e características envolvidas nesses tipos de problema, utilizar corretamente as notações combinatórias, compreender as semelhanças entre problemas combinatórios, ou ainda, perceber as mudanças promovidas pela ampliação do número de elementos dos conjuntos envolvidos em cada situação e elaborar um plano sistemático para resolver diferentes problemas combinatórios.

Navarro-Pelayo (1991), em sua pesquisa, discutiu a variação de contextos em problemas combinatórios presentes em diferentes livros didáticos da etapa final da Educação Básica na Espanha. A autora elaborou a seguinte classificação para os contextos encontrados: Algébrico (situações que necessitam provas e/ou recorrem a equações como forma de resolução); Letras e/ou números; Pessoas; Objetos; Geométricos e Gráficos.

A autora verificou ainda que os contextos mais empregados nos livros analisados foram o Algébrico e o de Letras e/ou Números. De acordo com essa autora, esses não são os únicos contextos para o trabalho com Combinatória; foram esses os encontrados nos livros didáticos analisados. Navarro-Pelayo (1991, p. 99) defende o uso de contextos diferenciados para problemas combinatórios, inclusive aqueles que apresentem relações com “os diferentes ramos da Matemática e outras matérias, assim como o terreno das curiosidades ou recreações matemáticas”.

English (1991) examinou as estratégias utilizadas por crianças de 4 e 9 anos para resolver problemas combinatórios. Os materiais produzidos para entrevista foram ursos em madeira, com blusas e calças (com até 4 cores diferentes) e com adesivos – para fácil manuseio – utilizados para discussão de sete tarefas nas quais variavam também o número de botões (até dois em calças e até cinco em blusas). As tarefas foram pensadas para que o número possível de agrupamentos fosse ampliado gradativamente. Na sétima tarefa, as crianças tinham que retirar dos materiais disponibilizados elementos que não poderiam ser escolhidos, de acordo com a situação proposta.

Como resultado desse estudo, a autora evidenciou algumas estratégias como a seleção arbitrária de itens, a tentativa e erro na identificação de possibilidades e a elaboração de um padrão, no qual a criança fixa uma blusa e combina com todas as calças, listando todos os agrupamentos, evitando a duplicação de elementos, o não esgotamento de possibilidades com um elemento fixo e a não enumeração de todas as opções.

Mekhmandarov (2000) investigou a compreensão de crianças sobre as estruturas de problemas de produto cartesiano examinando a habilidade de construir e analisar produtos de dois conjuntos. Nesse estudo, o autor entrevistou 45 crianças da Educação Infantil (3 a 5 anos) em Israel com uso de três atividades: a primeira consistia na construção de torres com dois blocos de encaixar (o menor com duas cores e o maior com três cores diferentes); a

segunda solicitava que fossem elaborados cartões com duas partes utilizando carimbos (escolhidos de um mesmo conjunto, ou de dois conjuntos diferentes); a terceira demandava que a criança classificasse o conjunto-produto (conjunto que resulta do produto cartesiano) elaborado pelo pesquisador.

O autor considera que – para haver a aprendizagem do problema de produto cartesiano – faz-se necessário compreender alguns aspectos de sua estrutura:

Saber que uma possibilidade é construída escolhendo um e apenas um elemento de cada um dos dois conjuntos; entender que uma possibilidade é um elemento do novo conjunto-produto; aceitar o fato de que cada elemento dos conjuntos originais podem aparecer em várias possibilidades (diferente da situação em uma estrutura aditiva) e compreender que cada possibilidade pode aparecer apenas uma vez no conjunto-produto (nao há repetição na construção de pares) (Mekhmandarov, 2000, p.296-297, tradução nossa).

O autor ainda acrescenta outro princípio que objetiva uma percepção da estrutura multiplicativa utilizada para prever o número total de possibilidades, além da estratégia de construção sistematizada de possibilidades (por exemplo, escolher um elemento de um conjunto e formar todos os possíveis pares com ele e assim sucessivamente).

Mekhmandarov (2000) constatou que grande parte dos participantes da pesquisa apresentaram conhecimentos sobre a estrutura de problemas de produto cartesiano, ou conseguiram aprender ao longo do processo de entrevistas. Para esse autor, é possível abordar esse tipo de problema com crianças dessa idade utilizando objetos reais.

As pesquisadoras suecas van Bommel e Palmer (2018) investigaram como crianças de 6 anos resolvem um problema de permutação que questionava “de quantas maneiras 3 ursos podem se sentar no sofá?” utilizando lápis e papel e outra seção utilizando um artefato tecnológico junto ao lápis e papel focalizando nas representações e sistematizações realizadas pelos estudantes. Com o trabalho por meio de lápis e papel, as autoras identificaram dificuldades na sistematização de processos enumerativos, o que ocasionava a

duplicidade de possibilidades e o uso de registros não estruturados, impedindo a comparação entre as possibilidades novas e as já encontradas.

Com relação à seção que utilizava o artefato tecnológico e o lápis e papel, as autoras relataram que a utilização de ambos recursos possibilitou que crianças apresentassem maior sistematização e representação na resolução do problema de permutação. Uma justificativa para esse resultado apresentada por van Bommel e Palmer (2018) indica que o contato inicial com a versão digital da tarefa (artefato tecnológico) oportunizou a compreensão do contexto, o que pode ter tornado a tarefa com lápis e papel mais compreensível.

Höveler (2018) estudou como crianças de terceiro ano – em diferentes escolas – resolvem três tipos de problemas combinatórios (combinação com repetição, combinação e arranjo), considerando a influência de diferentes variáveis (operação, natureza dos elementos, valor dos parâmetros  $m$  e  $n$ ). As coletas de informações foram realizadas por meio de entrevistas clínicas individuais, nas quais os estudantes resolveram três problemas.

Os contextos utilizados para os problemas de combinação versavam sobre uma partida de futebol e seleção de números em sorteios; para combinação com repetição, foram utilizadas escolha de sabores de sorvete e a construção de peças de dominó; para problemas de arranjo os contextos, foram formar torres com blocos coloridos e criar números com cartões numerados.

Höveler (2018) atestou, ainda, que crianças da terceira série já utilizam diferentes estratégias na resolução dos problemas combinatórios investigados como, por exemplo, princípio multiplicativo, estratégias de compensação, estruturas aditivas, estratégias recursivas, entre outras.

No Brasil, Lopes (2003) evidencia que – nas operações combinatórias quando o número de casos possíveis é pequeno – as crianças são capazes de desenvolver métodos que lhes permitam determinar os arranjos e as combinações possíveis, e destaca que, para que

isso ocorra, é preciso que a problematização apresentada às crianças aconteça em contextos que tenham significado para elas.

Silva (2019) – pesquisadora brasileira – investigou como crianças de 5 anos resolvem problemas combinatórios (arranjo, combinação, permutação e produto de medidas<sup>3</sup>) ou com uso de materiais de manipulação ou por meio de desenhos com lápis e papel. Os contextos utilizados abordavam: corrida de carros e de animais (arranjo), brincadeira no pula-pula e escolha de frutas para salada (combinação), organização de pets e de sapatos (permutação), escolha de vestimentas e pares para dança (produto cartesiano). A ordem de grandeza dos problemas variavam entre 6 a 8 possibilidades.

Nessa pesquisa, as crianças foram divididas em dois grupos: o primeiro com foco em desenhos; o segundo com foco em materiais de manipulação; depois, passaram por três seções individuais (teste inicial, sessão de ensino e teste final). A autora destacou algumas dificuldades dos participantes na sistematização, no esgotamento das possibilidades e na identificação do invariante de ordem em problemas combinatórios; no entanto, afirma que as crianças tiveram melhoras em seus desempenhos após a seção de ensino e que materiais de manipulação podem auxiliar crianças no desenvolvimento de raciocínio combinatório.

Maher, Powell e Uptegrove (2010) realizaram um estudo longitudinal com crianças, desde o Ensino Fundamental até depois do Ensino Médio. Os autores escolheram os problemas combinatórios para esse trabalho investigativo, posto que eles permitem aos estudantes a busca para sistematização de soluções, a descoberta de padrões e sua generalização, além de possibilitar a elaboração de diferentes estratégias pessoais de resolução.

---

<sup>3</sup> Na presente pesquisa, compreendemos que as estruturas dos problemas de produto de medidas discreta se assemelham às dos problemas de produto cartesiano. Na classificação dos problemas combinatórios dessa pesquisa, referendamos em Borba (2010, 2013) e utilizaremos produto cartesiano para denominar esse tipo de problema, tal como English (1991, 2005). Compreendemos que essa escolha pode gerar dúvidas, posto que um produto cartesiano em Matemática representa o conjunto de todos os pares ordenados cujo primeiro termo pertence ao primeiro conjunto dado, e o segundo termo pertence ao segundo conjunto dado.



Os problemas combinatórios utilizados por esses autores, com crianças de 7 a 11 anos, versavam sobre a enumeração de conjuntos formados com número de blusas e calças jeans (variando o número de blusas e calças); a construção de torres com blocos do Lego (4 ou 5 peças, variando – gradativamente – as cores dos blocos), a seleção de copos, tigelas e pratos para festas e a escolha de sabores de pizzas. As discussões nas seções videogravadas, ou solicitavam o número total de possibilidades, ou questionavam os estudantes se a quantidade total era suficiente para atingir um número dado; ainda, pediam para adivinhar uma possibilidade pré-escolhida pelos pesquisadores, estimulando a elaboração de argumentos e sistematizações das informações.

Observamos ao longo das leituras que – diferentemente dos contextos classificados na pesquisa de Navarro-Pelayo (1991) – as investigações apresentadas nesse trabalho, fazem uso de outros contextos, já que possuem outros públicos, a saber: contextos de brincadeiras (vestir bonecos, construir torres com lego, pula-pula), de alimentos (sabores de sorvetes, pizzas, salada de frutas), de Matemática (formar números), de atividades cotidianas (sentar no sofá, organização de sapatos, vestimentas) e de atividades que envolvem a ideia de acaso (partida de futebol, corrida de carros, sorteio). A concepção de contexto de um problema, discutida por Valero (2002), indica a importância desse construto no estabelecimento de conexões entre o que os alunos conhecem e aquilo que precisa ser compreendido, trazendo o comprometimento com a construção ativa do próprio conhecimento.

Verificamos o interesse de pesquisadores de diferentes países frente à temática indicando que crianças, desde a Educação Infantil, podem compreender e resolver problemas combinatórios, de diferentes tipos (inclusive combinação com repetição) desde que o número total de possibilidades seja pequeno, utilizem contextos condizentes com a sua faixa etária e usem recursos manipuláveis para discussões de processos enumerativos.

### **Procedimentos metodológicos**

Apoiados em Sampaio e Mancini (2007) e Rother (2007), apresentamos, neste texto, uma revisão sistemática visando selecionar, descrever e discutir criticamente os trabalhos encontrados. Utilizamos um recorte temporal o período de 2010 a 2019 e direcionamos nosso olhar para artigos de periódicos brasileiros que apresentavam pesquisas sobre Educação Estatística (Estatística, Probabilidade e Combinatória). Dessa maneira, selecionamos para a presente investigação 42 periódicos da área de ensino da Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior e que publicam trabalhos sobre Educação Matemática. Tal seleção considerou periódicos do quadriênio 2013-2016 classificados na Plataforma Sucupira da Capes nos estratos da lista Qualis em A1, A2, B1 e B2.

Com base nessa seleção, realizamos buscas nos repositórios ou indexadores. Para isso, utilizamos como palavras-chave os seguintes termos: combinatória, combinatório, estocástica, probabilístico. Com a intenção de ampliar e melhorar a busca, as palavras utilizadas eram seguidas do termo or (ou); dessa forma, foi possível ter acesso a distintos artigos que continham ao menos uma das palavras-chaves e com isso foram encontrados 104 trabalhos, mas – em alguns periódicos pesquisados – não localizamos artigos com essas palavras-chaves.

Encontramos 48 artigos que versavam sobre Combinatória, distribuídos da seguinte forma: 4 artigos em periódicos publicados no estrato A1, 26 artigos em periódicos A2, 15 artigos em periódicos B1 e 3 artigos em periódicos B2, conforme apresentado na Tabela 1.

Tabela 1.

*Visão Geral da frequência dos periódicos analisados*

<b>Nome do periódico</b>	<b>Qualis 2013/2016</b>	<b>Frequência</b>
<b>Bolema</b>	<b>A1</b>	<b>1</b>
<b>Educar em Revista</b>	<b>A1</b>	<b>2</b>
<b>Educação &amp; Realidade</b>	<b>A1</b>	<b>1</b>
<b>Acta Scientiae</b>	<b>A2</b>	<b>1</b>
<b>Alexandria</b>	<b>A2</b>	<b>1</b>

<b>Educação Matemática Pesquisa</b>	<b>A2</b>	<b>11</b>
<b>Educação Matemática em Revista</b>	<b>A2</b>	<b>1</b>
<b>Revista de Ensino de Ciências e Matemática</b>	<b>A2</b>	<b>2</b>
<b>Zetetiké</b>	<b>A2</b>	<b>3</b>
<b>Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT)</b>	<b>A2</b>	<b>3</b>
<b>Revista Eletrônica de Educação (REVEDUC)</b>	<b>A2</b>	<b>3</b>
<b>AMAZÔNIA</b>	<b>A2</b>	<b>1</b>
<b>BOEM</b>	<b>B1</b>	<b>2</b>
<b>Em Teia</b>	<b>B1</b>	<b>11</b>
<b>Perspectivas da Educação Matemática</b>	<b>B1</b>	<b>2</b>
<b>Caminhos da Educação Matemática em Revista</b>	<b>B2</b>	<b>3</b>

---

Após a localização desses artigos, procedemos à leitura de seus resumos com o objetivo de identificar quais mencionavam a temática relacionada à Combinatória. Outros critérios de análise foram utilizados para um aprofundamento da discussão como, o foco sobre os níveis de escolarização das pesquisas: Educação Básica (Educação Infantil, anos iniciais do Ensino Fundamental, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio) e Ensino Superior; e a delimitação da pesquisa em Combinatória: formação de professores (inicial e/ou continuada), análise de recursos (livros didáticos, jogos, objetos de aprendizagem), conhecimentos de alunos, processos de ensino e aprendizagem, análise de documentos curriculares (estaduais e nacionais) e revisão de literatura.

No presente artigo, trazemos um recorte em que consideramos o conhecimento de alunos da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental sobre Combinatória. Assim, direcionamos nossos olhares para os trabalhos que tiveram a participação de crianças pequenas (Brasil, 2018) matriculadas na Educação Infantil e alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Dentre os trabalhos selecionados, encontramos oito que atendiam a essa classificação, a saber: Moro, Soares e Camarinha Filho (2010); Pessoa e Santos (2012); Souza e Lopes (2012); Borba, Pessoa e Rocha (2013); Azevedo e Borba (2013); Melo, Silva e Spinillo (2016); Pereira e Curi (2016) e Magina, Spinillo e Melo (2018). Discorreremos sobre as características de cada um desses trabalhos na próxima seção, focalizando aspectos

como tipos de problemas combinatórios, ordem de grandeza (número total de possibilidades), contexto evidenciado nas situações, além dos recursos utilizados para aplicação das atividades.

### **Discussão e apresentação das pesquisas brasileiras**

Moro, Soares e Camarinha Filho (2010) – no estudo intitulado *Raciocínio combinatório em problemas escolares de produto cartesiano* – buscaram tratar da construção do raciocínio combinatório presente na solução de quatro problemas de produto cartesiano por alunos de 3<sup>a</sup> a 6<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental. Os autores usam essa denominação (séries) porque os dados para o estudo foram coletados ainda no contexto do Ensino Fundamental de oito anos.

Dele participaram 110 alunos de escolas públicas, respondendo a quatro problemas escolares, que foram apresentados aos participantes no formato de um teste escrito. Esses problemas tinham como contexto: (a) venda de carros; (b) escolha de sabor, de casquinha e cobertura de um sorvete; (c) montagem de sanduíche; e (d) organização de bijuterias em caixas. Em relação às ordens de grandeza adotadas nos problemas, foram seis possibilidades em (a), 1680 em (b), 24 em (c) e 338560 em (d).

Quanto às considerações, os autores afirmam que – em síntese – os resultados obtidos apontam para a necessidade e a relevância do trabalho com problemas de produto cartesiano no Ensino Fundamental, desde as séries iniciais, não somente pelo seu significado matemático específico, mas também como alternativa para promover o desenvolvimento cognitivo do aluno, ao ativar a construção de seu raciocínio combinatório, com possíveis reflexos em outras áreas da aprendizagem escolar. Os autores confirmam que o problema (d) é o que apresenta maior dificuldades e apresentam como justificativas para isso os altos valores numéricos e a presença de distratores nos enunciados.

O trabalho de Pessoa e Santos (2012), intitulado *Estudo de caso: como duas crianças passam a compreender a combinatória a partir de intervenções?*, teve como participantes dois alunos do quinto ano e seu objetivo foi analisar de forma detalhada como as duas crianças passaram a compreender os quatro tipos de problemas combinatórios (Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação e Combinação). As autoras utilizaram como recursos o quadro (lousa), um pré-teste, um pós-teste e questões impressas. No Quadro 2, foram organizados os tipos de problemas combinatórios, a ordem de grandeza dos problemas e os contextos utilizados.

Quadro 2.

*Características dos problemas combinatórios (Elaborado pelos autores com base em Pessoa & Santos, 2012)*

<b>Tipos de problemas combinatórios</b>	<b>Ordem de grandeza</b>	<b>Contexto</b>
Permutação (Pré-teste)	6	Organização de fotos
	24	Senha
	24	Bolas de sorvete
Permutação (Pós-teste)	6	Ocupação de assentos
	24	Formação de anagramas
Produto Cartesiano (Pré-teste)	6	Formação de casais para dançar quadrilha
	28	Escolha de roupa
	32	Relacionar sabor de suco com cor do copo
Produto Cartesiano (Pós-teste)	8	Combinação de objetos
	24	Tamanho de bolo e sabor
Combinação (Pré-teste)	3	Sorteio
	21	Formação de grupos de amigos
	28	Brincadeira no parque
Combinação (Pós-teste)	10	Sabores de suco
	20	Elaboração de questões de prova
Arranjo (Pré-teste)	6	Eleição
	24	Copa do Mundo (Partidade Futebol)
	24	Posição de chegada em uma corrida
Arranjo (Pós-teste)	6	Escolha de comissão
	24	Concurso de beleza

Pessoa e Santos (2012), em suas considerações finais, destacaram a relevância de estudos como o que realizaram por apontarem a importância de um ensino sistemático com a combinatória nos anos iniciais. Segundo as autoras, os resultados do estudo apontam que

alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental são capazes de criar estratégias próprias de resolução, compreender os invariantes de problemas combinatórios, sistematizar seus procedimentos e fazer generalizações.

Em *Combinando roupas e vestindo bonecos: ideias de combinatória no desenvolvimento profissional de uma educadora da infância* – com o objetivo de identificar os conceitos e os procedimentos mobilizados por uma professora da Educação Infantil na resolução de problemas de Combinatória e Probabilidade com uso de recursos didático-pedagógicos para inserir a Educação Estatística em suas aulas – Souza e Lopes (2012) apresentam o processo de realização e discussão de algumas atividades que a professora realizou com 24 crianças pequenas, com idades entre 4 e 5 anos. Nas duas atividades realizadas, foram discutidas, com a utilização de material manipulativo, questões de produto cartesiano: ambas com ordem de grandeza igual a 4 e tendo como contexto a escolha de roupas.

No processo de análise de Souza e Lopes (2012), evidenciaram-se as possibilidades de trabalho com a Combinatória desde a Educação Infantil. Os autores citam Souza (2007) para defender a necessidade de ruptura com algumas concepções de aulas de Matemática como a crença de que crianças pequenas e não leitoras não têm condições de pensar matematicamente. Os autores se fundamentam em Lopes (2003) quando defendem que crianças pequenas podem resolver problemas combinatórios.

Borba, Pessoa e Rocha (2013) em *Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios*, objetivaram investigar como crianças de anos iniciais do Ensino Fundamental resolvem problemas combinatórios e analisar o que professores deste nível de ensino pensam sobre a Combinatória e as compreensões dos estudantes. Para isso, realizaram a pesquisa com a participação de 99 estudantes (de 6 a 12 anos) utilizando um teste com oito problemas combinatórios.

### Quadro 3.

*Características dos problemas combinatórios (Elaborado pelos autores com base em Borba, Pessoa & Rocha, 2010)*

<b>Tipos de problemas combinatórios</b>	<b>Ordem de grandeza</b>	<b>Contexto</b>
Permutação	6	Organização de fotos em estante
	24	Formação de anagramas
Produto Cartesiano	12	Escolha de casais para dança
	15	Escolha de roupa
Combinação	3	Sorteio
	126	Escolha de grupo de professores
Arranjo	6	Seleção de representante e vice-representante
	24	Pódio de Copa do Mundo

Em suas considerações, Borba, Pessoa e Rocha (2013) ressaltam a importância do estudo da Combinatória, desde os anos iniciais do ensino, como modo de desenvolver um pensar específico que pode auxiliar o desenvolvimento do conhecimento matemático de modo geral e outras áreas do conhecimento. Enfatizam também que as crianças, desde novas, têm condições de resolver situações combinatórias simples, e os professores de diferentes níveis de ensino devem conhecer esse fato para auxiliar os estudantes a – gradativamente – ampliarem seus raciocínios combinatórios.

No trabalho intitulado *Construindo árvores de possibilidades virtuais: o que os alunos podem aprender discutindo relações combinatórias?* Azevedo e Borba (2013) analisaram a influência da construção de árvores de possibilidades na resolução de problemas combinatórios com o uso de um software educativo. Para a realização dos trabalhos, contaram com a participação de 20 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas da rede pública municipal de Recife. Os alunos foram divididos em dois grupos e, para o trabalho com o primeiro deles, o recurso utilizado foi o *software* Diagramas de *Árbol*; com o segundo grupo, considerado como Grupo Controle Assistido, foram trabalhados problemas multiplicativos não combinatórios, por meio de desenhos. O Quadro

4, a seguir, apresenta os tipos de problemas combinatórios, a ordem de grandeza dos problemas e os contextos utilizados pelas as autoras.

Quadro 4.

*Características dos problemas combinatórios (Elaborado pelos autores com base em Azevedo & Borba, 2013)*

<b>Tipos de problemas combinatórios</b>	<b>Ordem de grandeza</b>	<b>Contexto</b>
Permutação	6	Posições de pessoas em um fila
	24	Disposição de bolas em uma caixa
Produto Cartesiano	6	Sabor de suco e tamanho de copo
	24	Entradas e saídas de um parque
Combinação	3	Escolha de <i>pets</i> em uma loja de bichos
	21	Escolha de frutas para uma salada
Arranjo	6	Pódio em uma corrida de <i>Play Station</i>
	20	Construção de placas de carrinhos de brinquedo

Azevedo e Borba (2013), a partir de suas análises, concluíram que os alunos do grupo de intervenção em Combinatória, com uso do *software* Diagramas de *Árbol*, avançaram em seus raciocínios combinatórios. Quanto aos do grupo experimental, esses demonstraram desempenhos significativamente melhores nos pós-testes imediato e posterior, comparado aos dos teste respondido antes da intervenção. Segundo as autoras, os resultados revelam que o trabalho com árvores de possibilidades em ambiente virtual pode resultar em eficiente metodologia para o trabalho com a Combinatória para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Concluíram ainda que o trabalho com árvores de possibilidades construídas por software é um excelente caminho para o aprendizado da Combinatória.

Melo, Silva e Spinillo (2016) tiveram como objetivo em *Os princípios invariantes e a resolução de problemas de raciocínio combinatório*, investigar se a explicitação dos princípios invariantes do raciocínio combinatório tem um efeito facilitador na resolução de problemas de produto cartesiano e de problemas de combinação. Para tanto, contaram com a participação de 60 crianças de ambos os sexos, alunas do 3º ano do Ensino Fundamental,



com média de oito anos de idade e recorreram a cartelas contendo os problemas, lápis, papel e borracha. No Quadro 5, vemos os tipos de problemas combinatórios, a ordem de grandeza dos problemas e os contextos utilizados pelas autoras.

Quadro 5.

*Características dos problemas combinatórios (Elaborado pelos autores com base em Melo, Silva & Spinillo, 2016)*

<b>Tipos de problemas combinatórios</b>	<b>Ordem de grandeza</b>	<b>Contexto</b>
Produto Cartesiano (com explicitação dos invariantes)	12	Escolha de uma entrada e uma saída de um Shopping
Produto Cartesiano (sem explicitação dos invariantes)	10	Escolha de roupa
Combinação (com explicitação dos invariantes)	15	Sorteio
Combinação (sem explicitação dos invariantes)	10	Sorteio
	15	Formação de equipe para um jogo

Os dados obtidos por Melo, Silva e Spinillo (2016) levaram-nas a concluir que explicitar os invariantes de problemas combinatórios favorece o entendimento de problemas de produto cartesiano, mas ressalvam que o mesmo efeito não é constatado em relação a problemas de combinação. Apontam que apresentar tais princípios aumenta – de maneira significativa – a quantidade de acertos em problemas de produto cartesiano, não há garantia de que haverá êxito na resolução de problemas de combinação.

Já o trabalho *Problemas que envolvem relação entre dois ou mais conjuntos no âmbito do raciocínio combinatório*, de Pereira e Curi (2016), teve a participação de 22 alunos do quinto ano. O objetivo desse estudo foi apresentar dados de problemas que envolvem dois ou mais conjuntos e ressaltar a importância dos princípios que regem a busca de todos os agrupamentos que estabelecem a relação entre esses conjuntos. Os autores, para a realização da pesquisa, tomaram como contexto o material do Projeto EMAI – Educação Matemática nos Anos Iniciais – utilizado pela rede estadual de educação de São Paulo. O

Quadro 6 expõe os tipos de problemas combinatórios, a ordem de grandeza dos problemas e os contextos utilizados pelos autores.

Quadro 6.

*Características dos problemas combinatórios (Elaborado pelos autores com base em Pereira & Curi, 2016)*

<b>Tipos de problemas combinatórios</b>	<b>Ordem de grandeza</b>	<b>Contexto</b>
Produto cartesiano (Problema direto)	12	Sabor e cobertura de sorvete
Produto cartesiano (Problema inverso)	15	Cardápio de sanduíche
Produto cartesiano (Problema direto com três ações)	30	Combinação de roupas e sapatos
Produto cartesiano (Formato de tabela)	25	Cardápio de bebidas e biscoitos
Produto cartesiano (Problema direto)	12	Trajeto de casa à escola
Produto cartesiano (Problema inverso)	18	Composição de uniforme para jogar futebol
Produto cartesiano (problema direto com três ações)	24	Cardápio
Produto cartesiano (problema em forma de tabela)	12	Brinquedos que oferecem brindes em um parque de diversões

Pereira e Curi (2016) observaram que os participantes da pesquisa apresentaram conhecimentos sobre a elaboração de agrupamentos (possibilidades) em problemas de produto cartesiano, posto que utilizaram os princípios citados por Mekhmandarov (2000). Os autores compreendem que a proposição desses problemas para crianças deve ser adequada às suas realidades e afirmam que – em situações reais – não é necessário que crianças explicitem todas as possibilidades apesar de alguns problemas escolares exigirem.

No trabalho intitulado *A Resolução de Problemas de Produto Cartesiano por Alunos do Ensino Fundamental*, Magina, Spinillo e Melo (2018) investigaram como de 269 estudantes do Ensino Fundamental de escola pública estadual da cidade de São Paulo, com idades entre 8 a 10 anos, resolveram problemas combinatórios considerados menos complexos, como é o caso de problemas de produto cartesiano. Esses alunos solucionaram problemas de produto cartesiano apresentados por escrito em um pequeno caderno, sendo um problema por página. O contexto considerado nesses problemas foram trajetos derivados

de possibilidades de entradas e saídas em um parque de diversão e versavam sobre produto cartesiano direto, com número total de possibilidades igual a 8, bem como produto cartesiano inverso (ordem de grandeza igual a 6).

As autoras, em suas considerações finais, afirmam que o problema de produto cartesiano inverso foi mais difícil de resolver que o problema direto para esses estudantes. Com relação às estratégias de resolução adotadas pelos alunos para os diferentes tipos de problema investigado, as autoras constataram que havia estratégias comuns aos dois tipos de problema; além disso, foram identificadas estratégias variadas aplicadas apenas ao produto cartesiano direto.

Magina, Spinillo e Melo (2018) identificaram a progressão no raciocínio combinatório que se manifesta na resolução de problemas de produto cartesiano direto, mas não em relação aos inversos. O estudo revelou a grande dificuldade que os estudantes encontraram frente a problemas que requerem raciocinar de forma combinatória, principalmente quando se trata de alunos que estão no 5º ano do Ensino Fundamental, pois esses já conhecem as operações de multiplicação e de divisão e já foram formalmente instruídos a outros conceitos próprios do campo das estruturas multiplicativas. Assim, concluem que – no ensino de Matemática – dois aspectos deveriam ser considerados: expor os alunos a problemas de produto cartesiano e tornar explícitas as relações um-para-muitos, primeiro em problemas diretos; posteriormente, em problemas inversos. Para as autoras, devido à natureza dos problemas de produto cartesiano, eles não podem ser tratados como apenas um problema de multiplicação ou de divisão.

### **O que apontam as pesquisas brasileiras sobre conhecimentos sobre Combinatória de crianças pequenas e estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental?**

As pesquisas brasileiras discutidas abordam o conhecimento de Combinatória a partir da Educação Infantil, com crianças pequenas, até o último ano dos anos iniciais do Ensino

Fundamental. Observamos que as investigações discutem todos os tipos de problemas combinatórios simples – produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação –, mas dão mais ênfase aos problemas de produto cartesiano, posto que focalizam estruturas diferenciadas como, por exemplo, o uso de distratores em seus enunciados, produto cartesiano inverso e problemas com duas ou mais ações. Não foi observada pesquisas brasileiras, nesse recorte, que discutam outros tipos de problemas combinatórios como a combinação com repetição.

Ademais, percebe-se que as ordens de grandezas adotadas nas pesquisas possibilitam o uso de estratégias enumerativas, não excedendo o valor de 24 nos problemas de arranjo e permutação o que pode promover a elaboração de estratégias pessoais diferenciadas (Borba, 2010; 2013). Alguns problemas contidos no trabalho de Moro, Soares e Camarinha Filho (2010) envolviam situações acima de 1000 possibilidades; igualmente, no estudo de Borba, Pessoa e Rocha (2013) que apresentava um problema com mais de 100 possibilidades. Tais situações podem ser utilizadas para complementar a discussão sobre o princípio multiplicativo – também chamado Princípio Fundamental da Contagem – o que se encontra em acordo com os documentos curriculares brasileiros (Brasil, 2018).

Atentamos para o uso de contextos distintos contextos de brincadeiras (parque de diversões, corrida no videogame), de alimentos (sabores de sorvetes, sanduíches, cardápios), de Matemática (anagramas, senhas), de atividades cotidianas (sentar no sofá, organização de estantes, escolha de roupas), atividades que envolvem a ideia de acaso (partida de futebol, sorteio), escolares (elaboração de questões de prova, eleição de presidente e vice-presidente), entre outros, adequados às faixas etárias dos participantes das pesquisas, tal como as pesquisas de diferentes países. Observamos ainda a utilização de diferentes recursos para apresentar essas situações (tecnológicos, manipulativos, questões escritas em cadernos, cartelas e em fichas) o que possibilita uma melhor participação dos alunos na resolução das

questões. Além disso, alguns autores relatam sobre intervenções realizadas pelos mesmos ou pelos professores das turmas pesquisadas.

Os trabalhos discutidos estão em consonância com as investigações dos diferentes países apresentadas nesse texto, já que usam algumas dessas referências em seus trabalhos, mesmo assim, consideramos que avançam no sentido de permitir a discussão dos diferentes tipos de problemas combinatórios no mesmo estudo.

Com relação às propostas de problemas combinatórios, faz-se necessário ainda ampliar a discussão sobre o número total de possibilidades ou procedimentos diversos (enumerativos ou não), pensando em mudanças nos enunciados de modo que permita a elaboração de argumentos pessoais tal como sistematizado em Maher, Powell e Uptegrove (2010), buscando promover em outras discussões a interação entre os estudantes na proposição de estratégias diferenciadas.

Apesar de não explicitar o trabalho com Combinatória na Educação Infantil, a BNCC afirma que “as crianças também se deparam, frequentemente, com conhecimentos matemáticos (contagem, ordenação, relações entre quantidades, [...] conhecimento e reconhecimento de numerais cardinais e ordinais etc.) que igualmente aguçam a curiosidade.” (Brasil, 2018, p.43). Dessa forma, acredita-se que, a partir das discussões aqui apresentadas, professores da Educação Infantil possam propor práticas docentes integradoras, com uso de materiais diversificados e adequados para crianças nessas etapas de escolarização, a fim de iniciar o processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório mais cedo. Observamos nesse recorte que ainda são escassos os trabalhos que investigam o desenvolvimento do raciocínio combinatório na Educação Infantil.

## **Referências**

Azevedo, J. & Borba, R. E. S. R. (2013). Construindo árvores de possibilidades virtuais: o que os alunos podem aprender discutindo relações combinatórias? *Revista Eletrônica de Educação*. 7 (2), 39-62.

- Barreto, F. L. S. & Borba, R. (2010), Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador. SBEM.1-10.
- Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1996). *Razonamiento Combinatorio*. Madrid: Síntesis.
- Borba, R. E. S. R. (2010). O raciocínio combinatório na educação básica. In: *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador. SBEM. 1-10.
- Borba, R. E. S. R. (2013). Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo Combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática*: Curitiba. SBEM. 1-10.
- Borba, R. E. S. R., Pessoa, C. A. S. & Rocha, C. A. (2013). Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo. 15(Número Especial), 895-908.
- Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental. Brasília.
- Brasil. (1998). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria Fundamental de Educação. *Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil*. Brasília: MEC/SEF.
- Brasil. (2014). Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Educação Estatística*. Ministério da Educação. Brasília.
- Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília
- DeBellis, V. A., & Rosenstein, J. G. (2004). Discrete mathematics in primary and secondary schools in the United States. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 36(2), 46–55.
- English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 22(5), 451–474.
- English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In J. Graham (Ed.) *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 121-141.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Gardiner, A. (1991). A cautionary note. . In: M. J. Kenney & C.R. Hirsch. (Eds) *Discrete mathematics across the curriculum*, K-12. Virginia: NTCM. 10-17.
- Gea, M. M., Batanero, C., & Venegas, A. (2019). Lenguaje y estrategias utilizados por futuros profesores de educación primaria en la resolución de problemas combinatorios. *Práxis Educativa*, 15(33), 208-232.
- Godino, J. D & Batanero, C. (2016). Implicaciones de las relaciones entre epistemología e instrucción matemática para el desarrollo curricular: el caso de la Combinatoria. *La matemática e la sua didáctica*, 24(1-2), 17-39.
- Hadar, N. & Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*, 12(4), 435–443.
- Hart, E. W. (2007). Discrete Mathematics For All Overview of Discrete Mathematics in Prekindergarten through Grade 12. *LATM Journal. Louisiana Association of Teachers Mathematics*, 4 (2), 1-20.

- Hart, E. W. & Sandefur, J.(org) (2018). *Teaching and learning Discrete Mathematics Worldwide: curriculum and research*. Springer.
- Höveler, K. (2018). Children's Combinatorial Counting Strategies and their Relationship to Conventional Mathematical Counting Principles In. E. W. Hart & J. Sandefur.(org) (2018). *Teaching and learning Discrete Mathematics Worldwide: curriculum and research*. Springer. 81-92.
- Hunter, D. (2011) *Fundamentos da Matemática Discreta*. São Paulo: LTC.
- Kapur, J. N. (1970). Combinatorial Analysis And School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 3(1), 111-127.
- Kenney, M. J. & Hirsch, C. R. (Eds.). (1991) *Discrete Mathematics across the curriculum, K-12*. Reston, VA: NCTM.
- Knuth, D. E. (2013) Two Thousand Years of combinatorics. In R. Wilson e J.J. Watkins, *Combinatorics: ancient e modern*. United Kingdon: Oxford University Press. 2-38.
- Lockwood, E., Wasserman, N.H. & Tillema, E.S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *Journal of Mathematical Behavior*, 59, 1-14.
- Lopes, C. E. (2003). *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil*. Tese (Doutorado)– Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- Magina, S. M. P., Spinillo, A. G. & Melo, L. M. S. (2018). A resolução de problemas de produto cartesiano por alunos do Ensino Fundamental. *Educação & Realidade*, Porto Alegre, 43(1), 293-311, jan./mar.
- Maher, C. A., Powell, A. B. & Uptegrove, E.B. (Eds). (2010). *Combinatorics and Reasoning.Representing, Justifying and Building Isomorphisms*. Springer. New York Dordrecht Heidelberg London.
- Melo, L. M. S., Silva, J. F. G. & Spinillo, A. G. (2016). Os princípios invariantes e a resolução de problemas de raciocínio combinatório. *EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 7(1),1-20.
- Mekhmandarov, I. (2000). Analysis And Synthesis Of The Cartesian Product By Kindergarten Children. In. *24th Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Hiroshima, Japan, July 23-27, 3, 295-301.
- Moro, M. L. F. & Soares, M. T. C.; Camarinha Filho, J. A. (2010). Raciocínio combinatório em problemas escolares de produto cartesiano. *ZETETIKÉ*. 18(33), 211-242.
- National Council of Teachers of Mathematics – NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.
- Navarro-Pelayo, V. (1991). *La Enseñaza de la Combinatoria en Bachillerato*. [Dissertação. Didática da Matemática, Universidade de Granada em Granada].
- Pereira, J. F. F. & Curi, E. (2016). Problemas que envolvem relação entre dois ou mais conjuntos no âmbito do raciocínio combinatório. *EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*. 7(1) 1-17.
- Pessoa, C. A. S. & Santos, L. T. B. (2012). Estudo de caso: como duas crianças passam a compreender a combinatória a partir de intervenções? *Revista Eletrônica de Educação*. São Carlos, SP: UFSCar, 6(1), 358-382.

- Rivera López, M. I. & Maldonado Mejía, E. S. (2012). Elementos de la Combinatoria en la educación primaria. In. *Memoria de la XV Escuela de Invierno en matemática educativa*. Universidad Autónoma de Guerrero, México, 326-334.
- Roa, R. Batanero, C. & Godino, J.D. (2001). Dificultad de los problemas combinatorios em Estudiantes com preparación matemática avanzada. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*. 47(2), 33-47.
- Rocha, C. A. (2011). *A Formação Docente e o Ensino de Problemas Combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos*. [Dissertação de mestrado em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco em Recife].
- Rocha, C.A. (2019). *Estudo de Combinatória no ensino médio à luz do enfoque ontossemiótico: o que e por que priorizar no livro didático e nas aulas?*. [Tese de doutorado em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco em Recife].
- Rocha, C.A., Diaz-Levicoy, D. & Borba, R.E.S.R. (2017). Atividades de combinatória em livros da educação primária chilena. In. *Anais do 7 Congresso Internacional de Ensino da Matemática*, Canoas. ULBRA.
- Rocha, C.A., Lima, A. P. B. & Borba, R.E.S.R. (2016). Conhecimentos Pedagógicos para Ensinar Combinatória: currículo e documentos orientadores para os anos iniciais. *EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 7(1),1-26.
- Roldán López de Hierro, A. F., Batanero, C. & Beltrán-Pellicer, P.(2018). El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, 100, 49-63.
- Rother, E. T. (2007). Revisão sistemática X revisão narrativa. *Acta paulista de enfermagem*. 20(2), v-vi.
- Sampaio, R. F. & Mancini, M. C. (2007). Estudos de Revisão Sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. *Revista Brasileira de Fisioterapia*. São Carlos, 11(1), 83-89.
- Schielack, V. P. (1991). Combinatorics and geometry. In: M. J. Kenney & C.R. Hirsch.(Eds.) *Discrete mathematics across the curriculum*, K-12. Virginia: NTCM. 137-142.
- Silva, A. C. (2019). *O uso de Material Manipulativo e a produção de desenhos no desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Educação Infantil*. [Dissertação de mestrado em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco em Recife].
- Souza, A. C. (2007). *A Educação Estatística na Infância*. [Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul em São Paulo].
- Souza, A. C. & Lopes, C. E. (2012). Combinando roupas e vestindo bonecos: ideias de combinatória no desenvolvimento profissional de uma educadora da infância. *Revista Eletrônica de Educação*. São Carlos, SP: UFSCar, 6(1), 148-159.
- Souza, A. C. (2013). *O desenvolvimento profissional de educadoras da infância: uma aproximação à educação estatística*. [Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul em São Paulo].
- Souza, A. C. & Rocha, C. A. (2020). Pesquisas brasileiras sobre combinatória: uma investigação em periódicos na última década. In: C. R. Campos, A. P. Perin. (Org.).



*Investigações hispano-brasileiras em educação estatística*. 1ed. Taubaté: Akademy. 41-46.

Valero, P. (2002). Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia. *Cuadrante*, 11(1), 49-59.

van Bommel, J. & Palmér, H. (2018). Enhancing young children's understanding of a combinatorial task by using a duo of digital and physical artefacts. *Early Years an International Research Journal*. 1-14.

Recebido: 07/04/2021

Aceito: 12/05/2021