La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores

VICENÇ FONT*
JUAN D. GODINO**

Resumen
En este trabajo se argumenta primero que el análisis de libros de texto ha de ser una de las competencias contemplada en la formación de profesores. A continuación, se ilustra el análisis de textos matemáticos que resulta de la utilización del constructo *configuración epistémica*. Por último, se pone de manifiesto la dialéctica que se produce entre los dos tipos básicos de configuraciones epistémicas: las formales (o intra matemáticas) y las empíricas (o extra matemáticas).
Palabras clave: libros de texto; formación de profesores; configuración epistémica.

Resumo
Neste trabalho, argumenta-se, primeiro, que a análise de livros de textos matemáticos deve ser uma das competências contempladas na formação de professores. Em continuidade, ilustra-se a análise de textos matemáticos que resulta da utilização do construto configuração epistêmica. Por último ressalta-se a dialética que se produz entre os tipos básicos de configurações epistêmicas: as formais (ou intramatemáticas) e as empíricas (ou extramatemáticas).
Palavras-chave: *livros didáticos; formação de professores; configuração epistêmica.*

Abstract
In this work, we argue, first, that the analysis of mathematical textbooks should be one of the competences approached in teacher education. Then, we show an analysis of mathematical texts which results from the use of the epistemic configuration construct. Finally, we emphasise the dialectics that is produced between the basic kinds of epistemic configurations: the formal (or intra-mathematics) ones and the empirical (or extra-mathematic) ones.
Key-words: *textbooks; teacher education; epistemic configuration.*

* Universitat de Barcelona.
** Universidad de Granada.

Introducción

Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. La ausencia de efectos significativos de los programas de formación de profesores en dicha práctica se puede explicar, en parte, "por la falta de un conocimiento base ampliamente compartido sobre la enseñanza y la formación de profesores" (p. 201). El saber didáctico que progresivamente va produciendo la investigación en educación matemática queda reflejado en diversas fuentes dispersas y heterogéneas (revistas, monografías de investigación, etc.), pero de manera más accesible a los profesores se refleja en los libros de texto escolares. Los manuales escolares constituyen la fuente inmediata donde se acumula la experiencia práctica de los profesores, y en cierta medida, los resultados de la investigación. En consecuencia, el análisis crítico de los textos escolares, la evaluación de su pertinencia, idoneidad, adecuación, etc. debe ser un componente importante en los programas de formación de profesores de matemáticas. "La preparación de programas de formación puede ser más efectiva centrándola en ayudar a los estudiantes a que adquieran las herramientas que necesitarán para aprender a enseñar, en lugar de competencias acabadas sobre una enseñanza efectiva" (Hiebert, Morris y Glass, 2003, p. 202). Pensamos que entre estas herramientas deben figurar los criterios para analizar la propia práctica docente y las lecciones de los textos escolares como fuente próxima para el diseño de unidades didácticas.

En el currículum de algunos países los tipos de "objetos matemáticos" que se consideran son sólo dos: conceptos y procedimientos. Se trata de una "ontología" demasiado simplista para analizar los objetos matemáticos que componen un texto matemático, y en general la actividad matemática sea profesional o escolar. En nuestra opinión, es necesario contemplar una ontología más amplia formada por los siguientes elementos: 1) lenguaje, 2) situaciones-problema 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas,…, 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc y 6) argumentaciones. Estos seis tipos de objetos se articulan formando *configuraciones epistémicas* (Figura 1) cuyo análisis nos informa de la "anatomía de un texto matemático"[1].

1 Si además de la "estructura" interesa analizar su "funcionamiento" con alumnos son necesarias otras herramientas que no se comentan en este trabajo.

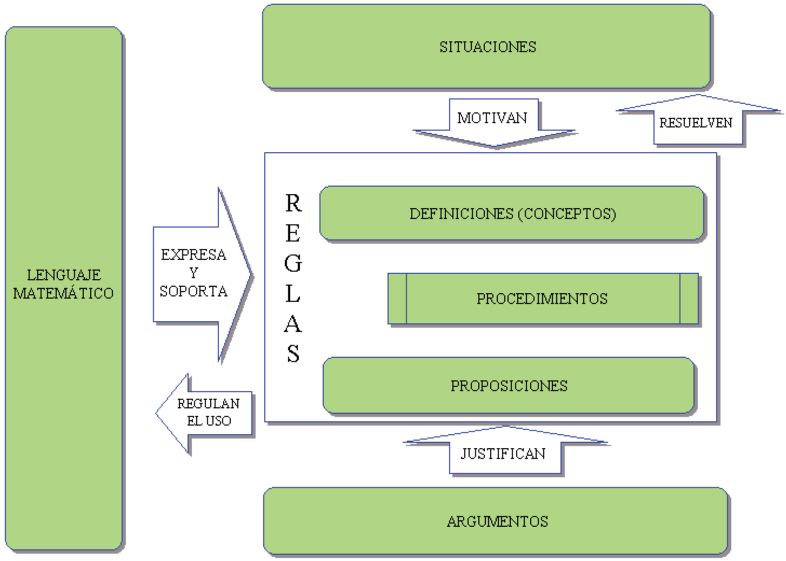


Fig. 1 – Componentes y relaciones en una configuración epistémica.

En este trabajo nos proponemos mostrar que estas nociones pueden ser útiles para describir las características de los textos matemáticos de distintas épocas y orientación epistemológica. Centraremos nuestra atención, en primer lugar, en un breve texto del enunciado y demostración de un sencillo teorema de geometría plana – caracterización de la mediatriz de un segmento (sección 2)[2]. La finalidad es tratar de dar una respuesta a una cuestión planteada en el contexto de la formación de profesores de matemáticas: *¿Cómo pueden hacer los profesores un análisis lo más completo posible de esta demostración?*

Para ello, consideramos necesario adoptar una perspectiva más global que aporte un marco de referencia epistemológico en el que situar el análisis del texto. Con dicho fin describimos en la sección 3 los tipos de objetos que se ponen en juego en los textos matemáticos de carácter formal (configuraciones epistémicas axiomáticas). En la sección 4 y 5 estudiamos las adaptaciones de este tipo de configuraciones axiomáticas

2 Esta tarea fue propuesta por una formadora de profesores en el marco de un proyecto europeo sobre formación de profesores de matemáticas. El problema corresponde a un libro de texto de enseñanza media usado en Polonia actualmente.

en los textos de nivel universitario actuales, así como en textos usados en la época de la llamada "matemática moderna" en el nivel de educación secundaria. Con esta perspectiva de referencia comenzamos en la sección 6 el análisis del texto sobre la mediatriz, presentando la configuración epistémica puntual que se pone en juego en dicho texto, y unas primeras conclusiones sobre el tipo de análisis ontosemiótico aplicado. Terminamos el trabajo realizando en las secciones 7-9 un análisis similar a textos de matemáticas que se apoyan básicamente en el planteamiento y resolución de problemas de tipo empírico (contextualizados, realistas, ...), y con unas reflexiones generales sobre la necesidad de tener en cuenta la dialéctica entre las configuraciones de tipo formal y las empíricas en la formación de profesores.

Un texto matemático como contexto de reflexión

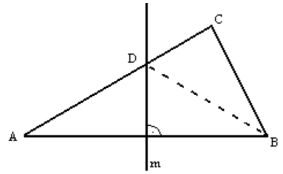
Comenzaremos con un texto matemático que vamos a utilizar, como contexto de reflexión, para mostrar el tipo de aplicación que hacemos al análisis de textos del constructo *configuración epistémica* propuesto por el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino 2002, Godino, Contreras y Font, en prensa). Se trata de un texto correspondiente a la enseñanza media en Polonia, y de la pregunta que hace una formadora de profesores de matemáticas de este país a formadores de profesores de otros países (Polonia, Hungría, Italia, Holanda, Portugal y España) en el marco del diseño e implementación de un proyecto europeo para la formación permanente de profesores de matemáticas:

Cuestión: ¿Cómo podrían hacer los profesores un análisis lo más completo posible de esta demostración?

Teorema: La mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia de los puntos extremos del segmento.

Demostración: Si AB es el segmento, *m* es su mediatriz y C pertenece a *m*, los segmentos AC y BC son simétricos respecto de *m*, de donde resulta que $|AC| = |BC|$. Con esto probamos que si el punto pertenece a la mediatriz del segmento está a la misma distancia de ambos extremos del segmento.

Mostraremos que si el punto no pertenece a la mediatriz entonces no está a igual distancia de ambos extremos del segmento. Consideremos que el punto C está fuera de la recta m (ver dibujo).



Unimos el punto c con los puntos A y B usando segmentos. Consideremos que C está situado al mismo lado de la recta m que el B. En este caso el segmento AC corta a la recta m en el punto D. Puesto que $|AD| = |BD|$ tenemos,

$$|AC| = |AD| + |DC| = |BD| + |DC| > |BC|$$

De modo que $|AC| \neq |BC|$, lo que termina la demostración.

Si bien hay muchas maneras de comenzar el análisis, una sería preguntarse por el "contexto" de este teorema, entendiendo el contexto de una manera "ecológica", es decir como "entorno" del texto en cuestión. Se trataría de responder a preguntas del tipo ¿En qué "lugar" se halla"? ¿Qué tiene a su alrededor? ¿Dónde "vive"? ¿Con qué otros objetos matemáticos se relaciona?, ¿En qué institución se utiliza? etc.

Alguna de estas preguntas son fáciles de responder. Por ejemplo, de entrada se nos dice que es un texto que se utiliza en una institución de secundaria de Polonia. Con relación a la institución, hay que resaltar que, por ejemplo en España, es un texto que en otras épocas podría haber sido utilizado en las instituciones de secundaria, pero que ahora sería impensable su utilización. Es decir, se trata de un texto que "vive" actualmente en las instituciones de secundaria de Polonia y que, por el contrario, "vivió" en las instituciones de secundaria de España pero que actualmente se ha "extinguido" de dichas instituciones. Para reflexionar sobre este hecho es necesario poner de manifiesto la dialéctica que se produce entre los dos tipos básicos de configuraciones epistémicas: las formales y las empíricas (contextualizadas, realistas,…). Comenzaremos con las formales y, puesto que el texto que se utiliza como contexto de reflexión es de geometría, empezaremos con una mirada a unos de los libros clásicos sobre la axiomatización de la geometría, nos referimos a los *Fundamentos de la Geometría* de Hilbert (Hilbert, 1899, 1991).

Configuraciones epistémicas axiomáticas[3]

La respuesta dominante en las instituciones universitarias ante la crisis de fundamentos de finales del siglo XIX consistió en fundamentar toda la matemática sobre los números naturales y éstos sobre la teoría de conjuntos axiomatizada por Zermelo – con axiomas *ad hoc* que impidan la aparición de las contradicciones conocidas, pero conservando en lo posible la riqueza y agilidad de la teoría intuitiva de conjuntos. Esta solución, llamada normalmente "formalismo contemporáneo" o "conjuntismo" es descendiente del formalismo hilbertiano, pero no es exactamente lo mismo. Este tipo de formalismo (Mosterín 1980) considera que en la evolución y desarrollo de las teorías matemáticas hay que considerar, como mínimo, tres estadios sucesivos, correspondientes a tres diferentes niveles de precisión y rigor en el concepto de prueba. En el primer estadio, llamado intuitivo, informal o ingenuo, se prueban los enunciados de la teoría, pero no se dice ni de dónde parte la prueba ni cuáles son los procedimientos admisibles para probar. En el segundo estadio, llamado axiomático, se determina el punto de partida de la prueba, eligiendo ciertos enunciados de la teoría como axiomas y exigiendo que todos los demás sean probados a partir de ellos, aunque sigue sin explicitarse cuáles son los procedimientos, reglas o medios de prueba admisibles. En el tercer y último estadio, llamado formalizado, el concepto de prueba está completamente precisado y explicitado, tanto en lo que respecta al punto de partida de la prueba como a los medios de prueba permitidos.

El tercer estadio es más propio de los lógicos que de los matemáticos, mientras que los dos primeros estadios son los propiamente matemáticos. Por este motivo, comenzaremos comentando las configuraciones epistémicas axiomáticas. En dichas configuraciones se usa el método axiomático, es decir se eligen ciertos enunciados de la teoría como axiomas y se exige que todos los demás sean probados a partir de ellos. Se trata de una configuración epistémica (figura 3) en la que se presupone un carácter convencional a las reglas matemáticas y, por tanto, los conceptos que se definen y las proposiciones que se introducen no se intentan justificar por su acuerdo con una realidad extra matemática.

---

3 El lector puede consultar el libro *Fundamentos de la Geometría* de David Hilbet (1991) para observar este tipo de de configuraciones.

La figura 3 se puede considerar como el modelo básico de las configuraciones epistémicas axiomáticas.

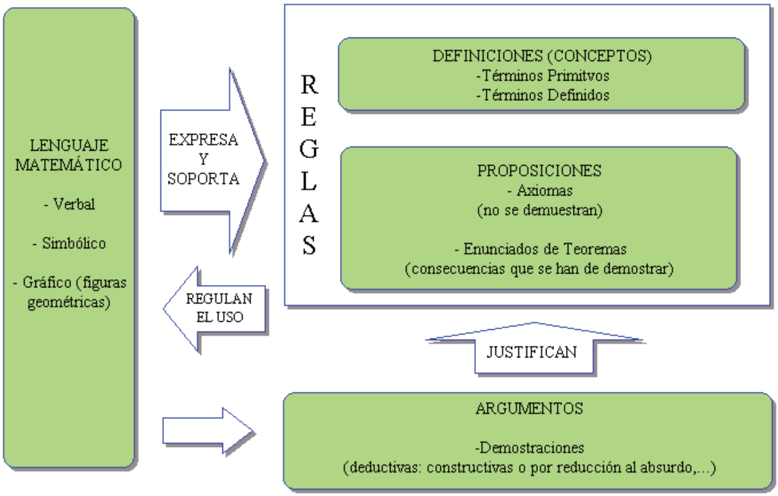


Fig. 3 – Configuración epistémica axiomática.

En esta configuración la situación-problema que la motiva, aunque no aparece en el texto de manera explícita, se podría expresar del siguiente modo: *¿Cómo reorganizar el conjunto de conocimientos de la geometría euclídea de manera deductiva a partir de un sistema mínimo de axiomas?* Existe un trasfondo problemático de carácter intra-matemático relacionado con la construcción de unos fundamentos consistentes para el "edificio matemático" que permita evitar las paradojas y contradicciones.

Para abordarlo se usa el "método axiomático" así como procedimientos de carácter lógico – deductivos.

Configuraciones epistémicas "formalistas" en los textos universitarios de matemáticas

Las configuraciones epistémicas de los textos universitarios correspondientes a lo que se suele llamar "conjuntismo", "matemáticas modernas" o "formalismo" (aunque no en el tercer sentido de Mosterín comentado anteriormente) se sitúan a medio camino entre los dos primeros niveles comentados por Mosterín (1980). Se puede decir, que interpretan el modelo de las configuraciones epistémicas axiomáticas de una manera bastante laxa.

Consideremos un capítulo de un libro de texto universitario. En este caso vamos a cambiar de tópico para no restringirnos a la geometría y nos fijaremos, por ejemplo, en el capítulo de continuidad de uno de los manuales clásicos de análisis funcional (Rudin, 1971). Como este capítulo está precedido de otros anteriores que se consideran conocidos, el bloque de conceptos se modifica de la siguiente manera: hay conceptos que ya se suponen conocidos y otros que se introducen en el capítulo mediante definiciones. Otra modificación a destacar es que, puesto que se trata de un manual, hay ejemplos cuyo objetivo es facilitar al lector la comprensión de las definiciones. También se propone una amplia lista de problemas descontextualizados, al final del tema, cuyo objetivo es la aplicación de los objetos matemáticos introducidos en la unidad para realizar una demostración deductiva. Es decir, el bloque de las situaciones aumenta su importancia en la estructura de la unidad, sobre todo los problemas descontextualizados en los que hay que hacer una demostración utilizando los objetos matemáticos introducidos previamente en la unidad. También resulta significativo que, a pesar que es una unidad sobre funciones, no aparece ningún gráfico.

Otra modificación a destacar es que en el bloque de las proposiciones desaparecen los axiomas y los teoremas se van matizando en diferentes tipos. En la unidad que estamos comentando se distingue entre teoremas y corolarios, pero en otros libros se utilizan además términos como "proposición", "propiedad", "lema" o "regla", aunque hay que resaltar que los enunciados correspondientes a dichos términos siempre se presentan como "algo" a demostrar. Por otra parte, si bien en algunos textos se hace observar cómo de determinados teoremas se derivan procedimientos y técnicas (por ejemplo, la regla de L'Hopital), en este tipo de unidades los procedimientos son básicamente técnicas de demostración de tipo deductivo que se tienen que aplicar en la resolución de los problemas del final del capítulo y que, en el mejor de los casos, se presentan aplicados en la demostración de los teoremas.

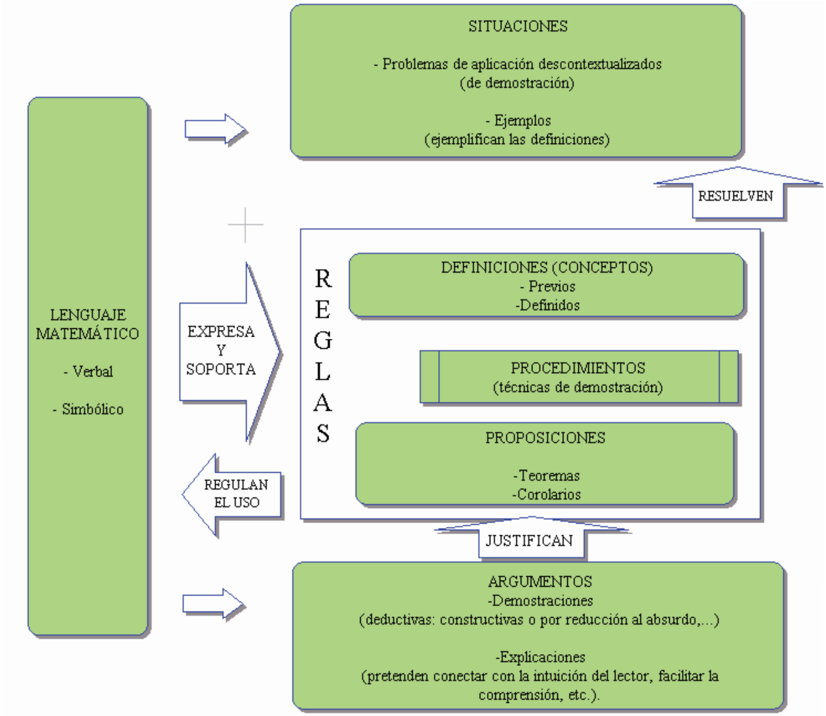


Fig. 4 – Configuración epistémica formalista.

Configuraciones epistémicas "formalistas" en los textos de secundaria de matemáticas

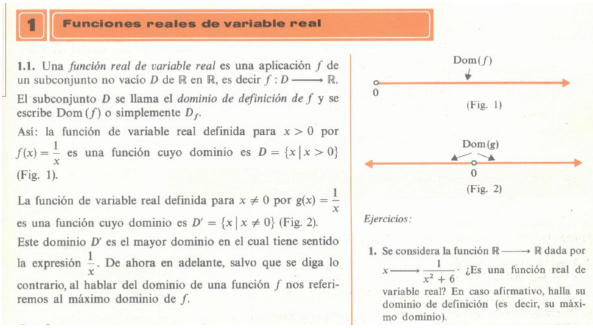
Desde el punto de vista educativo la herencia del formalismo ha sido las "matemáticas modernas", tanto en la enseñanza universitaria como no universitaria. La idea que inspiró la reforma de la enseñanza no universitaria en España para incorporar las matemáticas modernas fue que la enseñanza de las matemáticas tenía que estar de acuerdo con el espíritu de la época – que creía que las matemáticas servían para estructurar el pensamiento y que eran el lenguaje de la ciencia. Podemos encontrar matemáticas en todas partes, se decía, pero no cualquier clase de matemáticas, sino las matemáticas de hoy en día: la teoría de conjuntos, las estructuras matemáticas, la probabilidad, la estadística, el álgebra, etc.; y cuanto más pronto los alumnos entren en contacto con estas matemáticas, mejor.

Como ejemplo de este interés por introducir lo más tempranamente posible las matemáticas modernas, tenemos la introducción de la teoría de conjuntos en la etapa infantil. Este intento de poner la enseñanza de las matemáticas al nivel de las matemáticas del siglo XX se consideraba especialmente necesario en los niveles primario y secundario, en los cuales se creía que se estaban enseñando contenidos obsoletos por no estar de acuerdo con el espíritu de las matemáticas modernas.

En la elaboración de los nuevos programas se procuró conseguir una coherencia interna desde el punto de vista de los contenidos matemáticos que se concretó en: 1) el desarrollo consecuente del punto de vista conjuntista y vectorial, 2) el desarrollo sistemático y coherente de la geometría a través del concepto de transformación y 3) el desarrollo de las estructuras algebraicas con aplicación inmediata a diferentes partes de la aritmética, del álgebra y de la geometría.

Los matemáticos profesionales partidarios de esta reforma creían que las dificultades que se producían en el aprendizaje de las matemáticas eran causadas, básicamente, por las presentaciones defectuosas de la matemática tradicional (definiciones poco precisas, conceptos no suficientemente generales, demostraciones poco rigurosas, etc.) que inducían en el alumno una concepción confusa de la matemática por la ausencia de una estructura deductiva rigurosa. Dicho en términos constructivistas actuales: consideraban que la matemática tradicional hacía una presentación confusa de las matemáticas y que, por lo tanto, no era potencialmente significativa para los alumnos.

Un ejemplo ilustrativo de esta manera de enseñar las matemáticas en el Bachillerato se puede observar en el libro de texto editado por la editorial Santillana (Anzola et al, 1976). Si nos fijamos en la unidad de funciones, para seguir con este tópico, observamos que en él se proponen actividades como la siguiente (figura 5), en la se puede observar como las funciones se entienden básicamente como un caso particular de correspondencia entre conjuntos:



1 Funciones reales de variable real

1.1. Una *función real de variable real* es una aplicación f de un subconjunto no vacío D de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es decir $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$.

El subconjunto D se llama el *dominio de definición de* f y se escribe $\mathrm{Dom}(f)$ o simplemente D_f.

Así: la función de variable real definida para $x > 0$ por $f(x) = \frac{1}{x}$ es una función cuyo dominio es $D = \{x \mid x > 0\}$ (Fig. 1).

La función de variable real definida para $x \neq 0$ por $g(x) = \frac{1}{x}$ es una función cuyo dominio es $D' = \{x \mid x \neq 0\}$ (Fig. 2).

Este dominio D' es el mayor dominio en el cual tiene sentido la expresión $\frac{1}{x}$. De ahora en adelante, salvo que se diga lo contrario, al hablar del dominio de una función f nos referiremos al máximo dominio de f.

Dom(f)

0

(Fig. 1)

Dom(g)

0

(Fig. 2)

Ejercicios:

1. Se considera la función $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \longrightarrow \frac{1}{x^2+6}$. ¿Es una función real de variable real? En caso afirmativo, halla su dominio de definición (es decir, su máximo dominio).

Fig. 5 – Fragmento de un libro de texto de matemáticas modernas.

La organización de la unidad de funciones propuesta en este libro del año 1976 (titulada "Operaciones con funciones") se puede representar mediante la siguiente *configuración epistémica* (Figura 6):

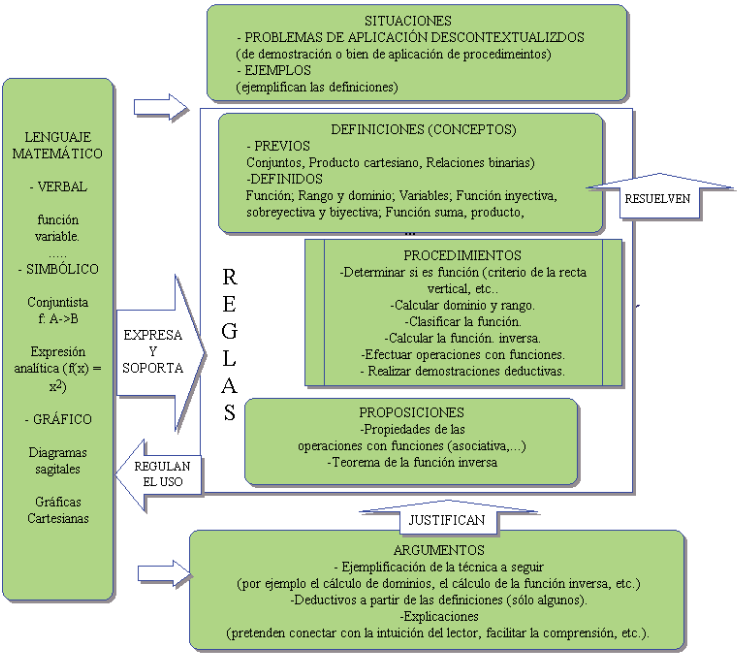


Fig. 6 – Configuración epistémica formalista en secundaria.[4]

---

4 Ejemplo tomado de Ramos (2006)

El concepto de función se define como un caso particular de relación: "una relación es una función sí y sólo si todo elemento de A se relaciona con un solo elemento del conjunto B". El concepto de función se presenta de una manera descontextualizada y las situaciones problemas, o bien son ejemplos que sirven para ilustrar la definición o bien son problemas descontextualizados propuestos al final de la unidad con el objetivo de que los alumnos apliquen la definición de función. Es decir, las situaciones problema sólo tienen la función de concretar el concepto de función, en ningún caso sirven para que se construya dicho concepto a partir de ellas.

El lenguaje utilizado básicamente es el conjuntista. Para los conjuntos infinitos se recurre a las gráficas cartesianas y, en algunos casos, también se recurre a expresiones simbólicas. No se contemplan las conversiones entre diferentes formas de representación y, en los pocos casos que esto sucede, siempre es la conversión de expresión simbólica a gráfica.

La metodología implícita es la siguiente: el profesor define los conceptos, pone ejemplos y demuestra propiedades (de manera deductiva) mediante una clase magistral. Los alumnos han de aplicar dichos conceptos y propiedades a la resolución de problemas descontextualizados.

Esta unidad se impartía a continuación de otra unidad titulada "Aplicaciones" y era seguida de otras tres unidades tituladas "Simetría, monotonía y acotación", "límites" y "continuidad de funciones reales". En la unidad previa se introducían, entre otros, los conceptos de correspondencia, relaciones binarias, relaciones de equivalencia y conjunto cociente y aplicaciones. En las tres unidades posteriores se introducían los conceptos de simetría, monotonía, acotación; los límites finitos e infinitos definidos en términos de epsilones y deltas; y la continuidad a partir del concepto de límite. Por otra parte, se suponía que en cursos anteriores los alumnos ya habían estudiado algunos modelos de funciones (proporcionalidad directa, afín y cuadrática) y que iban a estudiar en otras dos unidades posteriores las funciones circulares y las funciones exponenciales y logarítmicas.

Hay que destacar que lo que en el modelo del texto universitario eran proposiciones o teoremas a demostrar se han reconvertido, en la mayoría de los casos, en "propiedades" o "técnicas". Algunas de las propiedades se demuestran de manera deductiva y también los pocos teoremas que se presentan con dicho nombre, pero lo que aumenta mucho es la ejemplificación de las técnicas (procedimientos)

Configuración epistémica del texto sobre la mediatriz

Volviendo a la pregunta formulada por la profesora de Polonia:

> Cuestión: ¿Cómo podrían hacer los profesores un análisis lo más completo posible de esta demostración?

y utilizando el análisis epistémico precedente podemos hacer las siguientes observaciones:

1) Se trata de un texto matemático que se debe enmarcar en el último tipo de configuraciones epistémicas comentado anteriormente. Es decir, hay que enmarcarlo en una configuración epistémica "formalista" de las matemáticas de secundaria. Por tanto, de acuerdo con el tipo de configuración epistémica en la que se enmarca, es un texto matemático que nos presenta el "producto" acabado pero no el "proceso" que se ha seguido para obtener dicho producto, su razón de ser o motivación.

2) La estructura de este texto también se puede representar por una configuración epistémica. Es decir, una de las características de las CE es que son *hologramáticas* puesto que se pueden aplicar a una unidad completa o bien a un texto más puntual.

Podemos considerar el enunciado no como un teorema demostrado sino como una situación– problema de demostración. Desde esta perspectiva lo que hay que hacer es conseguir demostrar el enunciado. El tipo de *situación-problema* implícita se puede describir como, ¿Qué argumento deductivo permite establecer que la proposición P es verdadera? ¿De qué conocimientos o proposiciones previamente establecidas debemos partir para establecer la verdad de P?

Para ello, hay que utilizar *conceptos* (la definición de la mediatriz, puntos extremos de un segmento; distancia, igualdad de segmentos). También se usan *proposiciones* del tipo "si D es un punto del segmento AC, se cumple que $|AC| = |AD| + |DC|$" o bien "si dos segmentos son simétricos respecto de una recta, tienen la misma longitud", dichas proposiciones se suponen demostradas anteriormente. Se usan también *argumentos* deductivos como el siguiente:"Si $|AD| = |BD|$ entonces $|AC| = |AD| + |DC| = |BD| + |DC|$.", etc. Por otra parte, puesto que el enunciado es la caracterización implícita de una definición es necesario probar dos proposiciones:

• Si una recta es mediatriz de un segmento entonces todos sus puntos equidistan de los extremos.

• Si un punto no está en la mediatriz de un segmento entonces las distancias a los extremos del segmento no son iguales.

Por tanto, hay al menos una *regla procedimental*: Para probar que un enunciado caracteriza a un objeto que se ha definido previamente hay que probar el teorema directo y el contrario ("Si C está en la mediatriz, entonces CA = CB" ; "Si C no está en la mediatriz, entonces CA ≠ CB".). Por último, también hay que utilizar un determinado *lenguaje* simbólico (por ejemplo $|BD|$) y gráfico (la figura del teorema), etc. Por tanto, la estructura de este texto se puede representar por una configuración epistémica como la siguiente (figura 7):

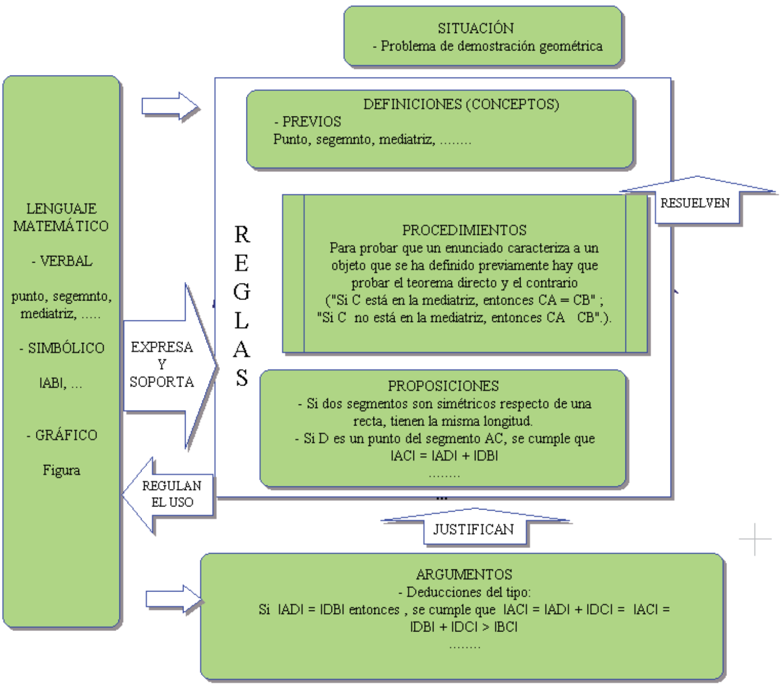


Fig. 7 – Configuración epistémica asociada al texto de la mediatriz.

3) Otra característica que hay que resaltar es la *conexión* entre los diferentes elementos de esta CE. Consideremos, por ejemplo, uno de los elementos del bloque "lenguaje", nos referimos a la figura 2 que aparece

en el texto de la mediatriz. Nos podemos preguntar cuál es su función, o lo que en cierta manera es lo mismo, cómo se relaciona con los otros elementos de la CE.

La figura es estática pero, a pesar de ello, facilita el razonamiento con "elementos genéricos". El punto C por una parte es un punto particular, pero, por otra parte, lo que se dice de él se puede aplicar a cualquier otro punto del plano que no sea de la mediatriz (la cual debe permanecer como particular). Después el segmento AB (y su mediatriz) se puede considerar como un segmento (y su mediatriz) cualquiera. Dicho de otra manera la principal función que cumple la figura 2 es a) introducir un caso particular sobre el cual razonar y b) facilitar que este caso particular sea considerado como un elemento genérico (una cadena de elementos genéricos para ser más exactos).

El razonamiento matemático, para ir de lo general a lo general, hace intervenir una fase intermedia que consiste en la contemplación de un objeto individual. Este hecho plantea un grave dilema: si el razonamiento se ha de aplicar a un objeto concreto (por ejemplo el punto C de la figura 2), es preciso que se tenga alguna garantía de que se razona sobre un objeto cualquiera para que quepa justificar la generalización en la que termina el razonamiento.

Ahora bien, con relación al elemento genérico hay que considerar tres cuestiones conexas pero distintas, a saber:

- ¿Por qué se hace intervenir en la demostración de una proposición matemática (el enunciado de una definición, etc.), una fase intermedia que se refiere a un objeto particular?

- ¿Cómo es posible que un razonamiento en que intervenga semejante fase intermedia pueda, pese a ello, dar lugar a una conclusión universal?

- El elemento particular normalmente forma parte de una cadena en la que los eslabones anteriores son elementos genéricos. A su vez, el elemento particular al ser considerado como genérico se convertirá en el eslabón previo de un nuevo caso particular y así sucesivamente.

Cuando en las prácticas matemáticas utilizamos elementos genéricos estamos actuando sobre un objeto particular, pero nos situamos en un "juego de lenguaje" en el que se entiende que nos interesan sus características generales y que prescindimos de los aspectos particulares. Para conocer los detalles sobre las características de este juego del lenguaje, y de las dificultades que tienen los alumnos para participar en él, es necesario el análisis de diálogos entre profesores y alumnos relacionados con el uso de elementos genéricos. La asimilación (o no) de las reglas de este juego de lenguaje es fundamental para que los alumnos puedan convivir con la complejidad semiótica asociada a las prácticas en las que interviene el elemento genérico. A partir del estudio de dichos diálogos, en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005) se ponen en juegos otros constructos del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, los cuales permiten que la "complejidad semiótica" asociada al uso de elementos genéricos se concrete en una trama de funciones semióticas (dualidad expresión-contenido) que relacionan objetos que pueden ser extensivos o intensivos (dualidad extensivo-intensivo).

5) Para comprender este texto matemático es necesario la activación de una configuración epistémica como la descrita anteriormente, pero que de esta configuración también pueden emerger nuevos "objetos" matemáticos. En concreto, a partir de este texto se construye una nueva definición de mediatriz y también se podría obtener un procedimiento de construcción de la mediatriz con regla y compás.

6) La modificación de alguno de los elementos de la CE repercute sobre los demás. Por ejemplo, si la representación de la figura se puede hacer con un programa dinámico como el Cabri se está facilitando mucho el razonamiento con elementos genéricos. En concreto, se facilita no sólo la demostración del teorema (el producto) sino que, gracias a la abstracción reflexiva (si se toma como referencia a Piaget) o hipostática (si la referencia es Peirce), incluso se podría llegar a la formulación de aquello que se tiene que demostrar. Es decir, se podría modificar la situación problema para convertirla en una situación más rica ya que primero se podría proponer que se buscase aquello que se quiere demostrar y después, si se considera conveniente, pedir la demostración. Por ejemplo, podemos formular la siguiente pregunta a los alumnos:

Tarea: La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por el punto medio. A partir de la siguiente construcción geométrica realizada con el programa Cabri:

a) Halla una propiedad que cumplan todos los puntos de la mediatriz.
b) Demuestra esta propiedad.
c) Da una nueva definición de mediatriz.

d) Halla a partir de los apartados anteriores un procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz.

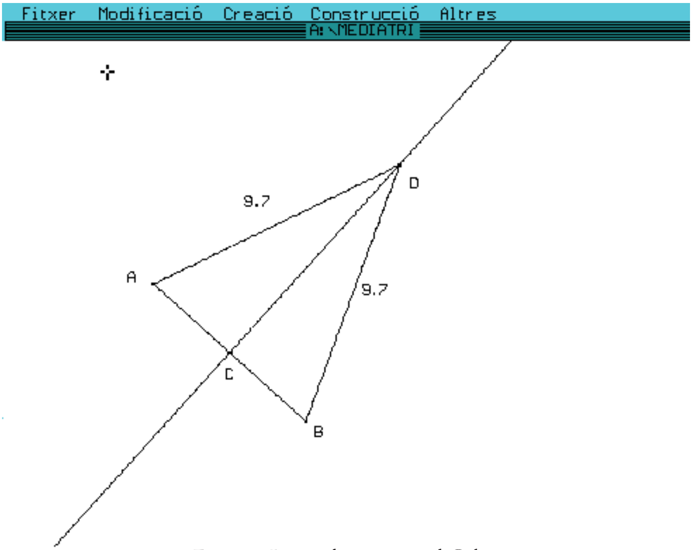


Fig. 8 – La mediatriz con el Cabri

La configuración epistémica asociada es la siguiente:

En esta configuración destaca el papel central que juega la situación problema (de tipo intra matemático) y también que está orientada a la emergencia de nuevos objetos matemáticos (nueva definición de la mediatriz y nuevo procedimiento de construcción). Si bien este tipo de configuración epistémica puntual, orientada sobre todo a la emergencia de nuevos objetos, puede convivir con configuraciones epistémicas globales de tipo formalista, hay que resaltar que "viven" mejor en configuraciones epistémicas globales que no sean de tipo formalista, lo cual nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las configuraciones epistémicas globales alternativas a las formalistas? La respuesta es que la principal alternativa a las configuraciones epistémicas formalistas son las empíricas (contextualizadas, realistas, inductivas, etc.), las cuales pasamos a comentar en el siguiente apartado.

Tabla 1 – Configuración epistémica "emergente" asociada a la mediatriz

LENGUAJE
Verbal mediatriz, segmento, recta perpendicular, punto medio etc. *Gráfico* - Figura geométrica dinámica *Simbólico*: A, B, …

SITUACIONES	CONCEPTOS
- Problema descontextualizado de construcción geométrica en el que se ha de hallar y justificar una propiedad de la mediatriz.	*Previos* - Segmento, recta perpendicular, punto medio - Mediatriz (definida como recta perpendicular que pasa por el punto medio) *Emergentes* - Mediatriz (definida como recta formada por todos los puntos que están a la misma distancia de los extremos del segmento)

ACCIONES	PROPIEDADES
- Hallar una condición que cumplan todos los puntos de la recta -Simbolizar esta propiedad - justificar/demostrar esta propiedad *Emergente* - Procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz	- El punto medio divide al segmento en dos segmentos de igual longitud - La recta perpendicular forma un ángulo de 90º con el segmento - …. *Emergente* Los puntos de la mediatriz se hallan a igual distancia de los extremos del segmento

ARGUMENTOS
- Justificación visual de la propiedad "Los puntos de la mediatriz se hallan a igual distancia de los extremos del segmento". - Justificación de la propiedad utilizando elementos genéricos. - Demostración deductiva (?)

Configuraciones epistémicas empíricas en la enseñanza secundaria

Sin entrar en un análisis exhaustivo de las consecuencias del enfoque "moderno" de las matemáticas en la enseñanza no universitaria, podemos decir que los aspectos más perjudiciales de la aplicación concreta de esta reforma fueron (Núñez y Font 1995): a) Deductivismo exagerado: las matemáticas se presentaban como unos conocimientos terminados y organizados deductivamente. Esta presentación podía poner de manifiesto al alumno la ordenación lógica de la materia, pero, al presentar el producto terminado, impedía la acción, las conjeturas, la imaginación, etc.; es decir, en la terminología de la época, "impedía hacer matemáticas". b) Definiciones formalizadas: se cayó en el error de identificar el concepto que se quería enseñar con su definición formalizada. Esta identificación llevó: 1) a presentar a los alumnos un exceso de simbolismo, 2) a hacerlos manipular mecánicamente estos símbolos, sin saber lo que estaban haciendo (formalismo prematuro) y 3) a olvidar que, para comprender un concepto matemático, son necesarias situaciones de referencia que le den sentido, al mismo tiempo que permiten descubrir las relaciones con otros conceptos. c) Exceso de generalización y, por tanto, falta de procesos de abstracción: los conceptos se presentaban de la manera más general posible, con lo cual se iba de lo más general a lo más particular y, por tanto, no se mostraban al alumno las situaciones concretas que permitían abstraer sus similitudes e ir de lo concreto a lo más general. d) Las matemáticas por las matemáticas: se presentaban unas matemáticas centradas sobre ellas mismas y muy alejadas de las otras ciencias. Los textos didácticos ofrecían pocas situaciones no matemáticas que permitiesen a los alumnos conocer la aplicación de las matemáticas a la realidad, lo cual facilitaba preguntas del tipo "esto para qué sirve".

El estrepitoso fracaso de la aplicación concreta de las matemáticas modernas modificó la manera de enseñarlas en las instituciones no universitarias españolas en diferentes direcciones. Una fue enseñar teorías acabadas, sin demostrarlas deductivamente, focalizando el trabajo en el aula en el dominio de las técnicas algorítmicas que se derivaban de la teoría. Los partidarios de este estilo docente asumían, en muchos casos implícitamente, el punto de vista conductista en psicología. La otra, si bien consideraba fundamental el aprendizaje de las estructuras matemáticas, inició tímidamente una línea de trabajo, que llamaremos "semántica" –entendiendo por semántica todo aquello que tiene que ver con la construcción de significado que hace el alumno–, que pretendía resolver una de las grandes dificultades del aprendizaje de las matemáticas: su nivel de abstracción y generalización. Esta forma de entender la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas consideraba imprescindible presentar contextos variados que diesen sentido al concepto; oponiéndose a las versiones más formalistas de la matemática moderna, las cuales pretendían presentarlos de la manera más general posible y separados de los contextos que les daban sentido, para así evitar las dificultades de comprensión que la presentación contextualizada pudiese producir. Con el paso del tiempo esta segunda opción se fue desarrollando y se convirtió en la dominante en los currículos oficiales del estado español y, además, está presente en muchos textos escolares actuales (aunque no se puede decir que sea el estilo dominante en todos ellos).

Si se compara el capítulo de las funciones del año 1976 comentado anteriormente con el capítulo de otro libro de texto publicado en España con 21 años de diferencia se puede observar que los autores de este último proponen tareas en las que se manifiesta un interés por presentar problemas contextualizados, por el uso de diferentes representaciones y por las conversiones entre ellas. Son tareas como la siguiente:

Tarea: Debemos cambiar los cristales de unas ventanas cuadradas. El precio del cristal es de 0,5 euros por cada decímetro cuadrado. Elabora una tabla de valores, dibuja una gráfica y determina una fórmula que permita calcular directamente el coste para cada longitud del lado de la ventana

La organización de la unidad de funciones propuesta en el libro del año 1997 (Bujosa et al. 1997), titulada "Funciones" se puede representar mediante la siguiente *configuración epistémica*:

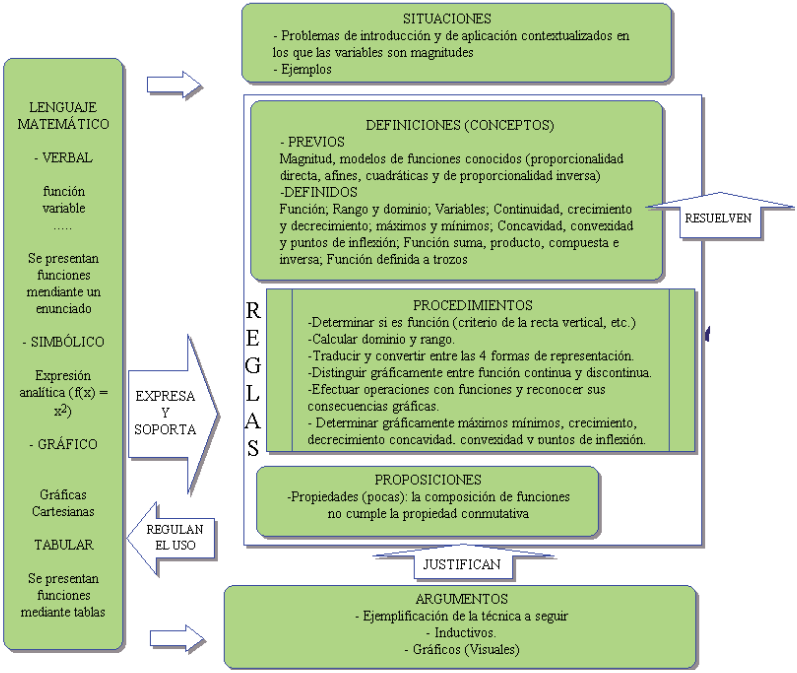


Fig. 9 – Configuración epistémica empírica de las funciones en secundaria.[5]

La unidad sigue la estructura siguiente: a) problemas contextualizados introductorios, b) desarrollo de la unidad didáctica con problemas contextualizados de aplicación intercalados y c) problemas contextualizados de consolidación propuestos al final del tema. En realidad se trata de poner en el centro de la actividad matemática escolar la modelización.

El concepto de función se generaliza a partir de diferentes situaciones en las que hay una relación entre magnitudes. No se necesitan conceptos previos conjuntistas (por ejemplo, el de correspondencia). El concepto de función se presenta de una manera contextualizada ya que se presentan situaciones problemas al inicio de la unidad cuyo objetivo es facilitar al estudiante su construcción del concepto de función. En este caso, no se trata tanto de aplicar conocimientos matemáticos acabados de estudiar, sino que el objetivo es presentar una situación del mundo real que el alumno puede resolver con sus conocimientos previos

5 Ejemplo tomado de Ramos (2006)

(matemáticos y no matemáticos). Son problemas introductorios diseñados para que queden dentro de la zona de desarrollo próximo (en términos de Vygotsky). Su principal objetivo es facilitar la construcción, por parte de los alumnos, de los conceptos matemáticos nuevos que se a van estudiar en la unidad didáctica.

El lenguaje conjuntista ha desaparecido. En cambio, se introducen cuatro formas de representación de las funciones (enunciado, tabla, gráfica y fórmula) y se proponen actividades cuyo objetivo es la traducción dentro del mismo tipo de representación y la conversión entre diferentes formas de representación, lo que potencia y enriquece la comprensión.

La metodología implícita es la siguiente: el profesor propone problemas que los alumnos han de intentar resolver (normalmente en grupo). En el proceso de puesta en común de las soluciones, además de resolver los problemas, se van construyendo los conceptos de la unidad. Estos conceptos se relacionan y organizan para ser primero aplicados a ejercicios y después ser utilizados en la resolución de problemas contextualizados más complejos.

Puesto que se pretende que los conceptos, propiedades y procedimientos surjan a partir de generalizaciones y de procesos de abstracción adecuados a la edad de los estudiantes, la argumentación deductiva es casi inexistente. El tipo de argumentación que se utiliza es de tipo inductivo. También tiene un papel importante la argumentación a partir de gráficas para distinguir gráficamente entre función continua y discontinua; reconocer gráficamente los conceptos de función creciente, decreciente, cóncava y convexa; reconocer y distinguir gráficamente los máximos y mínimos relativos, así como los puntos de inflexión de las funciones.

Otro aspecto a destacar es que esta unidad incorpora de manera explícita pocas propiedades. De hecho, sólo resalta que la composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa. En cambio, en la unidad de 1976 se resaltan muchas propiedades de las operaciones con funciones puesto que se tiene como objetivo caracterizar al conjunto de las funciones reales como grupo abeliano (si se considera como operación interna la suma); como anillo conmutativo con unidad (si se consideran la suma y el producto) o como espacio vectorial (si se considera la suma y el producto de una función por un número).

El cambio que se puede observar entre las dos unidades didácticas de funciones es el resultado de diferentes factores. Algunos son específicos de la investigación didáctica sobre las funciones (por ejemplo, las investigaciones didácticas sobre las traducciones y conversiones entre las diferentes representaciones de las funciones) mientras que otros son generales, como es el caso de la reflexión de tipo constructivista sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, o bien la importancia que se le da al contexto en los intentos para relacionar lo que los psicólogos han aprendido sobre el modo en que los humanos razonan, sienten, recuerdan, imaginan y deciden con lo que, por su parte, han aprendido los antropólogos sobre la manera en que el significado es construido, aprendido, activado y transformado. En palabras del antropólogo Geertz, este intento de relación *"(...) supone el abandono de la idea de que el cerebro del Homo sapiens es capaz de funcionar autónomamente, que puede operar con efectividad, o que puede operar sin más, como un sistema conducido endógenamente y que funciona con independencia del contexto"* (Geertz, 2002, p. 194).

Las configuraciones contextualizadas como la descrita anteriormente dan un papel preponderante a las situaciones problemas contextualizadas y están claramente enfocadas a la emergencia de nuevos objetos matemáticos. Estas configuraciones empíricas (contextualizadas, realistas, intuitivas, etc.,...) presuponen una cierta concepción empírica de las matemáticas. Es decir, una concepción que considera que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones de la experiencia; una concepción de las matemáticas que supone que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales.

Por otra parte, también presuponen que "saber matemáticas" incluye la competencia para aplicar las matemáticas a situaciones extra matemáticas de la vida real[6] (criterio epistémico) lo cual lleva a la siguiente

---

6 El tema de la alfabetización matemática ha sido motivo de debate en diferentes reuniones científicas (por ejemplo la CIEAEM del año 2001) y de estudio por diferentes organismos internacionales, Entre los cuales destacan los realizados por la OCDE (2000 y 2001). También son relevantes los trabajos del NCTM (1989). Algunos investigadores que se han interesado por el tema son, entre otros, Abrantes, 2001; Kilpatrick, 2001 y Noss, 2001. En la discusión que se ha producido en la comunidad de investigadores en educación matemática sobre lo que se debe entender por *alfabetización matemática de los ciudadanos*, si bien las opiniones difieren en muchos aspectos, hay casi unanimidad en que ésta ha de facilitar a los ciudadanos el desarrollo de un conjunto de conocimientos, habilidades, estrategias y actitudes que les permitan resolver las situaciones matemáticas que plantea la vida cotidiana. Es decir, hay un acuerdo en aplicar el criterio de

pregunta: ¿Cómo conseguir que los alumnos de la enseñanza primaria y secundaria sean competentes en la aplicación de las matemáticas a contextos no matemáticos?. Para contestar a esta pregunta hay que descomponerla, entre otras, en las siguientes subpreguntas: a) ¿El uso de contextos en el proceso de enseñanza-aprendizaje facilita o dificulta la comprensión de los alumnos? (criterio semiótico), b) ¿El uso de contextos matemáticos sirve para motivar (frustrar) a los alumnos? (criterio emocional), c) ¿Qué papel juegan los conocimientos previos de los contextos que tienen los alumnos? (criterio cognitivo), e) ¿La enseñanza con el enfoque contextualizado consume más tiempo que la enseñanza descontextualizada? (criterio mediacional).

Las configuraciones epistémicas contextualizadas dan pie, además de las cuestiones anteriores, a otras cuestiones relevantes que han sido también objeto de numerosas investigaciones. Por ejemplo: ¿qué características han de cumplir los problemas contextualizados, ¿Cómo se consigue la emergencia de los objetos matemáticos a partir de los contextos?¿Con las configuraciones contextualizadas se consigue que los alumnos sean competentes en la resolución de problemas contextualizados en otra materias o en ámbitos no escolares?¿ Es posible en las instituciones de secundaria implementar configuraciones epistémicas contextualizadas que permitan una actividad de modelización "rica"? ¿Qué competencias necesitan los profesores para diseñar e implementar este tipo de configuraciones epistémicas? ¿Cómo se relacionan este tipo de configuraciones epistémicas con las formales y qué dificultades tienen los alumnos en la transición[7] entre estos dos tipos de configuraciones epistémicas? etc.

---

idoneidad epistémica a los procesos de instrucción en la enseñanza obligatoria ya que se considera que "saber matemáticas incluye la competencia para aplicar las matemáticas a situaciones extra matemáticas de la vida real". Un proceso de instrucción que no asegure está competencia no se consideraría idóneo. Este criterio también es el que toma en cuenta, en estos momentos, en los estudios internacionales de evaluación del sistema educativo, por ejemplo el estudio Pisa 2003 (OCDE 2004).

7 Por ejemplo, investigadores como Artigue (1998) se han preocupado por poner de relieve que la ruptura que se observa entre las configuraciones epistémicas de secundaria y las de la universidad es una de las causas importantes del fracaso académico de muchos estudiantes.

Contextos extra-matemáticos. Revisión de la literatura y clasificaciones

"Problemas contextualizados", "problemas del mundo real", "problemas relacionados con el trabajo", "problemas situados" son sólo algunos de los diferentes nombres que se dan a las tareas escolares que simulan situaciones del mundo real.

Revisión de la literatura

Los estudios cuyo objetivo ha sido comprender mejor cómo las personas solucionan los problemas en su lugar de trabajo (Lave, 1988) y los que se han interesado en comparar y contrastar el diferente uso que hacen las personas de las matemáticas en la escuela y en el trabajo (Jurdak y Shahin, 1999 y 2001) han puesto de manifiesto que las matemáticas informales e idiosincrásicas son las dominantes en la resolución de problemas en la vida cotidiana y en el mundo laboral, mientras que las matemáticas más formales son las que predominan en la escuela. Algunos de estos estudios han puesto de manifiesto que las personas que fracasan en situaciones matemáticas escolares, pueden ser extraordinariamente competentes en actividades de la vida diaria que implican el uso del mismo objeto matemático. En situaciones de la vida real en las que las personas se sienten implicadas, se ha observado que éstas utilizan matemáticas "propias" que pueden ser muy diferentes a las que estudiaron en la escuela. En estas situaciones el problema y la solución se generan simultáneamente y la persona está implicada cognitiva, emocional y socialmente. Estas investigaciones han puesto de manifiesto que los conocimientos se construyen usándolos en contextos reales. En la vida diaria, los problemas son concretos y sólo se pueden resolver si las personas los consideran como problemas a resolver. También plantean un problema para la Didáctica de las Matemáticas: ¿Cómo conseguir la transferencia del conocimiento usado o generado en un contexto a otro contexto diferente? y, más en concreto, el problema de la transferencia del conocimiento aprendido en la escuela a las situaciones prácticas de la vida cotidiana y viceversa.

Con relación a la introducción de los problemas contextualizados en el currículum destaca el proyecto "Realistic Mathematics Education" desarrollado en el instituto Freudenthal (De Lange, 1996; Reewijk, 1997). Este proyecto considera que "saber matemáticas" es "hacer matemáticas", lo cual comporta, entre otros aspectos, la resolución de problemas de la vida cotidiana. Uno de sus principios básicos afirma que para conseguir una actividad matemática significativa hay que partir de la experiencia real de los estudiantes. Otros principios, importantes, son que hay que dar al estudiante la oportunidad de reinventar los conceptos matemáticos y que el proceso de enseñanza-aprendizaje debe ser muy interactivo. Según De Lange (1996), básicamente se dan cuatro razones para integrar los problemas contextualizados en el currículum: (a) facilitan el aprendizaje de las matemáticas, (b) desarrollan las competencias de los ciudadanos, c) desarrollan las competencias y actitudes generales asociadas a la resolución de problemas y (d) permiten ver a los estudiantes la utilidad de las matemáticas para resolver tanto situaciones de otras áreas como situaciones de la vida cotidiana.

En muchas investigaciones se usan los términos "modelo", "modelización" o "matematización" en lugar de contexto y contextualización, con lo que surge la problemática de saber cuál es la línea divisoria entre estos conceptos. Diversos autores coinciden en entender la modelización en términos de una terna (S, M, R), siendo S una situación problema real, M una colección de entidades matemáticas y R una relación mediante la cual objetos y relaciones de S se conectan con objetos y relaciones de M. Por otra parte, hay bastante acuerdo en que gran parte de la actividad matemática puede ser descrita como procesos de modelización. Este proceso seguiría las cinco fases siguientes: 1) Observación de la realidad. 2) Descripción simplificada de la realidad. 3) Construcción de un modelo. 4) Trabajo matemático con el modelo. 5) Interpretación de resultados en la realidad.

Cuando se utiliza el término contextualización, no necesariamente va ligado a "complejidad" mientras que cuando se utiliza el término "modelización" se suele tener en mente un proceso complejo que implica primero partir de la situación concreta para, gracias a un proceso descontextualizador, obtener un objeto matemático y después, gracias a un proceso de contextualización, aplicar este objeto a diferentes situaciones reales. Por tanto, parece razonable utilizar el término "descontextualización" para referirse al proceso que va de la realidad al objeto matemático, "contextualización" para indicar el proceso que va del objeto matemático a la realidad, "matemáticas contextualizadas" para cuando se pretende que el alumno realice alguno –o ambos– de estos procesos y "modelización" cuando se presenta a los alumnos una situación suficientemente rica que tenga por objetivo la realización de los 5 pasos descritos anteriormente {por ejemplo, Gómez y Fortuny (2002)}.

Clasificación de los problemas contextualizados

Los problemas contextualizados que normalmente se proponen a los alumnos son de contexto evocado, es decir presentan una descripción escrita de una situación real. Con relación a este tipo de problemas, conviene hacer una primera clasificación en función de la complejidad de los procesos necesarios para su resolución. En un extremo tendríamos problemas contextualizados que se han diseñado para activar procesos complejos de modelización, mientras que en el otro extremo tendríamos problemas relativamente sencillos cuyo objetivo es la aplicación de los conceptos matemáticos previamente estudiados. Entre estos dos extremos hay una línea continua en la que podemos situar a la mayoría de los problemas contextualizados propuestos en el ámbito escolar. Además, un mismo problema puede estar más o menos cerca de uno de dichos extremos en función del momento en que sea propuesto a los alumnos.

Otra clasificación está relacionada con el momento en que se propone a los alumnos los problemas contextualizados. Se pueden proponer a continuación de un proceso de instrucción en el que se han enseñado los objetos matemáticos necesarios para la resolución del problema. En este caso, el objetivo es que sirvan, por una parte, como problemas de consolidación de los conocimientos matemáticos adquiridos y, por otra parte, para que los alumnos vean las aplicaciones de las matemáticas al mundo real. A este tipo de problemas (Font, 2006; Ramos 2006) les llamaremos *problemas contextualizados evocados de aplicación* si son relativamente sencillos o *problemas contextualizados evocados de consolidación* cuando su resolución resulte más compleja. En ambos casos, se trata fundamentalmente de aplicar los conocimientos adquiridos previamente en el proceso de instrucción.

También se pueden proponer los problemas contextualizados al inicio de un tema con el objetivo de que sirvan para la construcción de los objetos matemáticos que se van a estudiar en esta unidad didáctica. En este caso, no se trata tanto de aplicar conocimientos matemáticos acabados de estudiar, sino que el objetivo es presentar una situación del mundo real que el alumno puede resolver con sus conocimientos previos (matemáticos y no matemáticos). Llamaremos a esta nueva categoría *problemas de contexto evocado introductorios* puesto que se proponen al inicio de un tema matemático y se han diseñado para que queden dentro de la zona de desarrollo próximo (en términos de Vygotsky). Su principal objetivo es facilitar la construcción, por parte de los alumnos, de los conceptos matemáticos nuevos que se van estudiar en la unidad didáctica. A su vez, estos problemas pueden ser más o menos complejos en función de los procesos de modelización que se pretendan generar.

Situaciones "ricas" y globalización

En muchos casos, los procesos de descontextualización (modelización) se realizan a partir de situaciones de enseñanza-aprendizaje "ricas" (Font 2005) las cuales, implican también una globalización de los contenidos. Según el grado de globalización se pueden distinguir las siguientes categorías:

1) Primer nivel: *Intradisciplinariedad.* Se establece una relación interactiva entre los contenidos que forman los diferentes bloques del currículum de matemáticas.

2) Segundo nivel: *Transdisciplinariedad.* Una de las áreas asume el tratamiento simultáneo de contenidos propios y ajenos en el espacio lectivo que le corresponda.

3) Tercer nivel: *Transversalidad*. El centro de interés son los denominados temas transversales (Educación para la Igualdad entre Sexos, Educación para la Paz, etc.)

4) Cuarto nivel: *Interdisciplinariedad*. Exige la colaboración entre diferentes áreas, un horario acordado dentro de la jornada lectiva y una programación conjunta hacia un idéntico interés.

Las configuraciones epistémicas también pueden ser herramientas útiles para profundizar en lo que se tiene que entender por "situación rica" o por globalización. Dada una situación problema es posible que se pueda resolver por diferentes métodos. Es decir, que pueda formar parte de dos configuraciones epistémicas diferentes que, a su vez, formen parte de bloques matemáticos muy diferentes (por ejemplo geometría y álgebra). Este hecho convierte a la situación problema en una situación potencialmente rica ya que puede permitir la integración y la conexión entre contenidos matemáticos correspondientes a dos bloques diferentes del currículum.

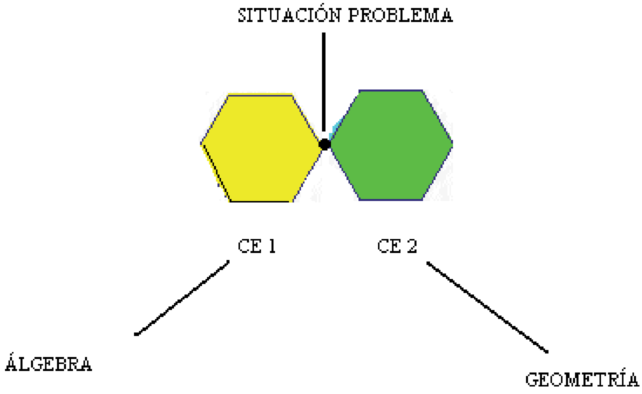


Fig. 10 – Configuraciones epistémicas que comparten la misma situación problema.

Una diferencia importante entre las unidades didácticas que presenten configuraciones epistémicas empíricas como las descritas en el apartado 7 y las propuestas de globalización es que, en el primer caso, el problema, aunque potencialmente puede ser muy rico, se utiliza para generar la configuración epistémica que se corresponde con los contenidos de la unidad didáctica. En cambio, en una perspectiva globalizadora el objetivo será generar varias configuraciones epistémicas diferentes del mismo problema, de cara a su integración y conexión.

Conclusiones

En este trabajo se ha puesto de manifiesto que el constructo configuración epistémica resulta útil para el análisis de textos matemáticos de distintas épocas y orientación epistemológica, una de las competencias que debe contemplar la formación de profesores. También se ha puesto de manifiesto que los currículum de algunos países que consideran sólo dos tipos de objetos matemáticos: conceptos y procedimientos proponen una "ontología" demasiado simplista para analizar los textos matemáticos, y en general la actividad matemática sea profesional o escolar.

El análisis realizado ha puesto de manifiesto que las configuraciones epistémicas resultan útiles tanto para el análisis global de una unidad didáctica como para el análisis de un texto puntual. También ha puesto de manifiesto dos tipos de configuraciones epistémicas globales:

las formales (o intra matemáticas) y las empíricas (o extra matemáticas). Ambas responden a concepciones filosóficas muy diferentes sobre la naturaleza de las matemáticas. Las formales se basan en una concepción convencionalista de las matemáticas y suelen "vivir" en las instituciones universitarias, mientras que las empíricas (contextualizadas, realistas,…) parten del supuesto de que las reglas matemáticas se pudieran justificar por su acuerdo con situaciones extra matemáticas y suelen "vivir" en las instituciones de secundaria.

La dialéctica que se produce entre estos dos tipos de configuraciones epistémicas es un tema muy sugerente para la investigación didáctica y puede ser el origen de una agenda de investigación con resultados relevantes. No entraremos aquí en la discusión de si todas las reglas en matemáticas son convencionales, en el sentido de que no se pueden justificar por su acuerdo con la experiencia; nos limitaremos a señalar que, incluso en el supuesto de que la mayoría de las reglas matemáticas se pudieran justificar por su acuerdo con situaciones extra matemáticas, hay ciertas reglas que indiscutiblemente son convencionales y que, por tanto, difícilmente se pueden justificar en base a su acuerdo con situaciones extra matemáticas.

Otra conclusión importante es que las configuraciones epistémicas han resultado muy útiles para explicar los dos usos básicos del término contexto, el ecológico y el relacionado con la dualidad extensivo/intensivo. El segundo consiste en considerar el contexto como un ejemplo particular de un objeto matemático, mientras que el primero es un uso "ecológico" que consiste en enmarcarlo en el entorno

Referencias

ABRANTES, P. (2001). Mathematical competence for all: options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics,* v. 47, n. 2, pp. 125-143.

ANZOLA, M.; CARUNCHO, J y GUTIÉRREZ, M. (1976). *Matemáticas 2º de Bachillerato*. Madrid, Santillana.

ARTIGUE, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 18, n.2, pp. 231-262.

BUJOSA, J.M. et alii (1997). *Matemàtiques Aplicades a les ciencies socials 1*. Barcelona, Castellnou.

CONTRERAS A.; FONT, V.; LUQUE, L. y ORDÓÑEZ, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 25, n. 2, pp. 151-186.

FONT, V. (2005). "Reflexión en la clase de Didáctica de las Matemáticas sobre una 'situación rica'". In: BADILLO, E.; COUSO, D.; PERAFRÁN, G. y ADÚRIZ-BRAVO, A. (eds.). *Unidades didácticas en Ciencias y Matemáticas.* Bogotá, Magisterio.

______(en prensa). La relación entre las matemáticas y la realidad. Una mirada desde la educación matemática. *Cuadernos de pedagogia*.

GEERTZ C. (2002). *Reflexiones antropológicas sobre temas filosóficos*. Barcelona, Paidós Studio.

GODINO, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 22, n. 2/3, pp. 237–284.

GODINO, J. D.; CONTRERAS, A. y FONT, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (aceptado).

GÓMEZ, J. y FORTUNY, J. M. (2002). Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. *Uno*, n. 31, pp. 7-23.

HIEBERT, J.; MORRIS, A. K. y GLASS, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education,* n. 66, pp. 201-222.

HILBERT, D. (1991). *Fundamentos de la Geometría*. Madrid, CSIC.

JURDAK, M. y SHAHIN I. (1999). An ethnographic study of the computational strategies of a group of young street vendors in Beirut. *Educational Studies in Mathematics Education*, v. 40, n. 2, pp. 155-172.

______(2001). Problem solving activity in the workplace and the school: the case of constructing solids. *Educational Studies in Mathematics Education*, v. 47, n. 3, pp. 297-315.

KILPATRICK, J. (2001). Understanding mathematical literacy: the contribution of research. *Educational Studies in Mathematics Education*, v. 47, n. 1, pp. 101-116.

LANGE, J. de (1996). “Using and applying mathematics in education”. In: BISHOP et alii. *International handbook of mathematics education*. Dordrecht, Kluwer A. P.

LAVE, J. (1988). *Cognition in practice*. New York, Cambridge University.

MOSTERÍN, J. (1980). *Teoría axiomática de conjuntos*. Barcelona, Ariel.

NOSS, R. (2001). For a learnable mathematics in the digital cultures. *Educational Studies in Mathematics Education*, v. 48, n. 1, pp. 21-46.

NÚÑEZ, J. M. y FONT, V. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las Matemáticas. Una aproximación histórica. *Revista de Educación*, n. 306, pp. 293-314.

OCDE (2004). *Learning for Tomorrow's World – First Results from PISA 2003*. París, OCDE.

RAMOS, A. B. (2006). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

REEUWIJK, M. van (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *Uno,* n. 12, pp. 9-16.

RUDIN, W. (1971). *Principios de Análisis Matemático*. Madrid, Ediciones del Castillo.

Recebido em jul./2006; aprovado em ago./2006.