

**Tratamentos figurais vinculados a conceitos de geometria espacial de posição,
mobilizados por futuros professores de matemática**

**Figurative treatments linked to concepts of position spatial geometry mobilized by
future mathematics teachers**

**Tratamientos figurais ligados a conceptos de geometría espacial de posición movilizados
por futuros profesores de matemáticas**

Dienifer Ferner Fernandes ¹

Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA)

<https://orcid.org/0000-0002-4551-0763>

Maria Arlita da Silveira Soares ²

Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA)

<https://orcid.org/0000-0001-5159-8653>

Rita de Cássia Pistóia Mariani ³

Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)

<https://orcid.org/0000-0002-8202-8351>

Resumo

Este texto objetiva apresentar uma análise de tratamentos figurais, vinculados a conceitos/conteúdos de geometria espacial de posição, mobilizados por licenciandos em matemática. Para tanto, explorou-se a teoria dos registros de representação semiótica, em particular, as apreensões de uma figura (sequencial, perceptiva, discursiva e operatória). Recorreu-se a uma abordagem qualitativa com produção de dados, orientada pela análise de conteúdo. Constatou-se, durante as atividades, a mobilização das apreensões perceptiva, discursiva e operatória de posição. Destaca-se que, em alguns momentos, a apreensão perceptiva sobressaiu-se em relação à apreensão discursiva, vista a limitação exposta nas justificativas organizadas pelos acadêmicos. A apreensão operatória de posição foi intensamente explorada, pois se verificou sua mobilização em todos os itens propostos. A partir da ação realizada e dos resultados obtidos, pode-se afirmar a importância da visualização em

¹ dieniferlferner@gmail.com

² mariasoaresh@unipampa.edu.br

³ rcpmariani@yahoo.com.br

geometria, isto é, a necessidade que há em realizar a harmonização entre os registros figural e discursivo.

Palavras-chave: Geometria espacial de posição, Registros de representação semiótica, Apreensões de uma figura.

Abstract

This work aims to present an analysis of figural treatments related to concepts/contents of spatial geometry of position mobilised by mathematics undergraduate students. For this purpose, the theory of registers of semiotic representation was explored, in particular, the - sequential, perceptive, discursive, and operative- apprehensions of a figure. A qualitative approach was used with data production guided by content analysis. During the activities, the mobilisation of perceptual, discursive and, operative of position apprehensions was found. It is noteworthy that, in some moments, the perceptual apprehension stood out in relation to the discursive apprehension, given the limitation exposed in the justifications organized by the academics. Operative of position apprehension was intensively explored, given its mobilisation in all proposed items. From the action taken and the results obtained, it is possible to affirm the importance of visualization in geometry, i.e., the need to harmonise the figural and discursive registers.

Keywords: Spatial geometry of position, Registers of semiotic representation, Apprehensions of a figure.

Resumen

Este texto tiene como objetivo presentar un análisis de los tratamientos figurativos vinculados a conceptos/contenidos de geometría espacial de posición movilizados por los estudiantes de grado en matemáticas. Para ello, se exploró la teoría de los registros de representación semiótica, en particular, las apreensiones de una figura (secuencial, perceptiva, discursiva y operativa). Se utilizó un enfoque cualitativo con la producción de datos guiada por el análisis

de contenido. Durante las actividades se encontró la movilización de aprehensiones perceptivas, discursivas y operativas de posición. Es de destacar que, en algunos momentos, la aprehensión perceptiva se destacó en relación con la aprehensión discursiva, dada la limitación expuesta en las justificaciones organizadas por los académicos. Se exploró intensamente la aprehensión operativa de posición, dada su movilización en todos los ítems propuestos. A partir de la acción realizada y los resultados obtenidos, es posible afirmar la importancia de la visualización en geometría, es decir, la necesidad de armonizar los registros figurativos y discursivos.

Palabras clave: Geometría espacial de posición, Registros de representación semiótica, Aprehensiones de una figura.

Résumé

Ce texte a pour objectif de présenter une analyse des traitements figuratifs, liés aux concepts/contenus de la Géométrie Spatiale de Position, mobilisés par les étudiants de "Licenciatura" en Mathématiques. Par conséquent, la théorie des registres de représentation sémiotique a été explorée, en particulier, les appréhensions d'une figure (séquentielle, perceptive, discursive et opératoire). Une approche qualitative a été utilisée avec la production de données, guidée par l'analyse de contenu. Au cours des activités, la mobilisation des appréhensions perceptives, discursives et opératoires de position a été observée. Il est à noter que, parfois, l'appréhension perceptive s'est démarquée par rapport à l'appréhension discursive, compte tenu de la limite exposée dans les justifications organisées par les universitaires. L'appréhension opératoire de position a été intensivement explorée, sa mobilisation étant vérifiée dans tous les items proposés. A partir des actions entreprises et des résultats obtenus, l'importance de la visualisation en géométrie peut être affirmée, c'est-à-dire la nécessité d'harmoniser les registres figuratifs et discursifs.

Mots-clés : Géométrie spatiale de position, Registros de representación sémiotica, Aprehensiones d'une figure.

Tratamentos figurais vinculados a conceitos de Geometria Espacial de Posição, mobilizados por futuros professores de matemática

A aprendizagem de conceitos geométricos permite aos estudantes a mobilização de um tipo de raciocínio que possibilita descrever, analisar, representar e compreender o mundo em que vive. Desta forma, diferentes pesquisadores (Lorenzato, 1995; Almouloud, 2003; Duval, 2004, 2011; Torregrosa & Quesada, 2007; Santos & Oliveira, 2017; Costa, 2020) e propostas curriculares (Brasil, 2002, 2018; Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013) manifestam a importância de abordar conceitos geométricos tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, em especial, na formação do professor de Matemática.

O estudo de conceitos geométricos permite o desenvolvimento de um tipo específico de raciocínio que, conforme Costa (2020, p. 92), está associado “(...) a capacidade mental de produzir conhecimentos em Geometria; de mobilizar, de forma coerente, os instrumentos geométricos na resolução de problemas; é a capacidade de entender a complexidade dos fenômenos e de realizar inferência sobre eles (...)” sejam em questões do cotidiano, de outras áreas do conhecimento ou da própria Matemática. Além disso, sublinha-se que, no estudo da Geometria, “(...) o uso das diversas representações matemáticas e das suas inter-relações podem constituir no desenvolvimento do raciocínio geométrico” (Santos & Oliveira, 2017, p. 7).

Devido à importância do ensino da Geometria, se faz necessário destacar a existência de diferentes estudos que revelam dificuldades na aquisição de conceitos geométricos por professores e estudantes da Educação Básica (Pavanello, 1993; Leivas, 2009; Muraca, 2011; Lovis & Franco, 2015; Novak, 2018). O que pode ser evidenciado nos resultados dos mapeamentos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem de Geometria, elaborados por Sena e Dorneles (2013) e Sanchez (2018).

Leivas (2009), ao investigar as ementas de cursos de licenciatura em Matemática do Rio Grande do Sul, verificou que apenas 50% dos cursos analisados apresentaram indícios de

exploração das habilidades visualização, intuição e imaginação no ensino de conceitos de Geometria. Para o pesquisador, essas habilidades não podem ser tratadas como simples reconhecimento de figuras geométricas e/ou citação de certas propriedades, pois elas influenciarão o desenvolvimento das atividades propostas, pelos futuros professores de Matemática, para a Educação Básica. Em outras palavras, como os acadêmicos não terão, em sua formação, a abordagem de questões que explorem, por exemplo, a visualização, dificilmente eles desenvolverão esse tipo de habilidade em suas práticas de ensino.

Muraca (2011), em estudo realizado com professores da Educação Básica, constatou que as definições em Geometria, apresentadas por eles, são restritas. Ao se depararem com o questionamento sobre como determinar retas paralelas, mencionaram apenas características utilizadas em Geometria Plana (GP), ou seja, não possuir nenhum ponto comum entre as retas. Porém, não estenderam esta definição à Geometria Espacial, na qual as retas, além de não possuírem ponto em comum, também devem estar contidas em um mesmo plano. Este fato também pode ser decorrente de como essa questão foi tratada na formação inicial.

Sena e Dorneles (2013), ao realizarem um mapeamento, tendo como fonte de produção de dados pesquisas envolvendo conceitos geométricos publicadas, no período de 1991 a 2011, no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, identificaram que 13% do total de pesquisas mapeadas estão relacionadas à formação de professores de Matemática. Além disso, ao analisá-las, constatou-se a insuficiência de conceitos/conteúdos apontados como necessários por documentos curriculares (Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013) para a formação docente. Este resultado é preocupante, pois além de não contribuir com o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos futuros professores, também pode implicar na aprendizagem dos alunos, pois “(...) quando o professor não possui conhecimentos adequados sobre a estrutura da disciplina que está a ensinar, o seu ensino pode apresentar erradamente o conteúdo aos alunos” (Garcia, 1999, p. 87).

Ao encontro dos resultados apresentados por Sena e Dorneles (2013), o mapeamento de Sanchez (2018) tem como fonte de produção de dados pesquisas no campo da Geometria Espacial, realizadas no período de 2007 a 2017, que foram desenvolvidas em programas de pós-graduação *stricto sensu* em Educação Matemática da Região Sudeste do Brasil. Esse estudo identificou a predominância de investigações em nível de Ensino Médio, mais especificamente, dentre as 14 pesquisas mapeadas, apenas uma teve como sujeitos licenciandos em Matemática. Esse dado confirma que as pesquisas sobre Geometria, nesta etapa, ainda são realizadas em menor número.

A partir dos estudos supracitados, é notório que tanto a formação inicial de professores quanto o ensino de Geometria neste nível precisam ser repensados visto as dificuldades apresentadas por professores e licenciandos em Matemática em conceitos/conteúdos geométricos. Sendo assim, julga-se necessário o aumento de pesquisas nessa área, de modo a contribuir com a identificação de possíveis lacunas, tanto na formação inicial de professores quanto em conceitos/conteúdos de Geometria, visando um melhor desenvolvimento do raciocínio proporcionado nesse campo de estudo.

Entende-se que, para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, é fundamental que exista a mobilização e a coordenação simultânea de representações dos registros figurais e de língua natural. Duval (2012) compreende que os registros figurais contribuem na visualização de formas no plano/espço e no reconhecimento de algumas de suas propriedades, e os registros em língua natural servem para designar propriedades, definições e teoremas, condições necessárias à aprendizagem de conceitos geométricos.

Nessa perspectiva, os registros figurais tornam-se importantes na resolução de problemas geométricos. No entanto, aprender a ver em Geometria está associado a ir além de o primeiro olhar direcionado à figura e isso faz com que esta ação sob uma representação não seja tão bem-sucedida quanto é para objetos concretos. Pensando no papel do professor, essa

ação é dificultada, ainda mais, quando há a necessidade de fazer outro indivíduo obter a mesma visualização de uma representação, isto é, compreender as mesmas operações figurais (apreensão operatória e desconstrução dimensional), realizadas para a resolução do problema geométrico. Conforme Duval (2012), ao se tratar de representações figurais, isso ocorre porque existem quatro maneiras distintas de ver: a apreensão perceptiva, a apreensão sequencial, a apreensão discursiva e a apreensão operatória.

Diante do exposto, compreende-se que a discussão acerca da problemática relacionada à atividade cognitiva, indispensável em Geometria, se faz necessária em cursos de formação de professores de Matemática, em especial, de forma a explorar conceitos/conteúdos abordados e as metodologias adotadas, visto que é natural os professores incorporarem à sua prática docente abordagens vivenciadas durante sua formação inicial. Assim, este texto tem por objetivo apresentar uma análise de tratamentos figurais vinculados a conceitos/conteúdos de Geometria Espacial de Posição, que são mobilizados por licenciandos em Matemática.

O registro figural na aprendizagem de Geometria

A teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS), elaborada por Raymond Duval, compreende o termo registro como um “(...) campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que lhe são próprios” (Duval, 2012, p. 1); estas representações semióticas são entendidas como “(...) produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento” (Duval, 1993, p. 39, tradução nossa).

As representações dos objetos matemáticos são essenciais para o desenvolvimento da atividade cognitiva do pensamento. Estas representações semióticas realizam, de maneira indissociável, uma função de objetivação e uma função de expressão, bem como uma função de tratamento, isto é, elas não são organizadas, apenas, como uma forma de exteriorizar as representações elaboradas mentalmente. Segundo Duval (2009, p. 14), “(...) um mesmo objeto

matemático pode ser dado através de representações muito diferentes”. Nessa perspectiva, só há compreensão em Matemática se a distinção entre o objeto matemático e sua representação for realizada com êxito.

Assim, no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, é preciso considerar as transformações que podem ser realizadas entre os diferentes tipos de representações semióticas de um objeto matemático. Conforme Duval (2011), as duas transformações cognitivas, que ocorrem entre as representações semióticas, são: tratamento, o qual proporciona a construção de uma representação sem alterar o registro inicial, e conversão, que permite construir uma representação em um registro distinto do de partida.

A Geometria é compreendida, conforme Duval (2016, p. 13, tradução nossa), como uma das áreas do conhecimento que “(...) requer a atividade cognitiva mais completa, pois apela ao gesto, à linguagem e ao olhar”. Dessa forma, compreende-se a necessidade de que os “(...) tratamentos figurativos e discursivos sejam realizados simultaneamente e de maneira interativa” (Duval, 2004, p. 155, tradução nossa), pois o registro figural é mobilizado para visualizar as formas dos objetos geométricos no espaço e o registro em língua natural é utilizado para mencionar características e propriedades destes objetos.

Ao citar o termo visualização, se faz necessário diferenciá-lo da visão, pois o primeiro termo mencionado vai muito além do acesso imediato à figura, ele refere-se à organização de relações entre as unidades figurais da representação semiótica que é produzida (Duval, 2011). As unidades figurais são visualmente classificadas como dimensional e qualitativa (Figura 1); por exemplo, um cubo é um objeto tridimensional, que é formado por quadrados (dimensão 2), que são organizados por meio de segmentos de reta (dimensão 1) e estruturados por infinitos pontos (dimensão 0). É importante salientar que, para Duval (2011), o reconhecimento dessas unidades representa o princípio da aprendizagem em Geometria.

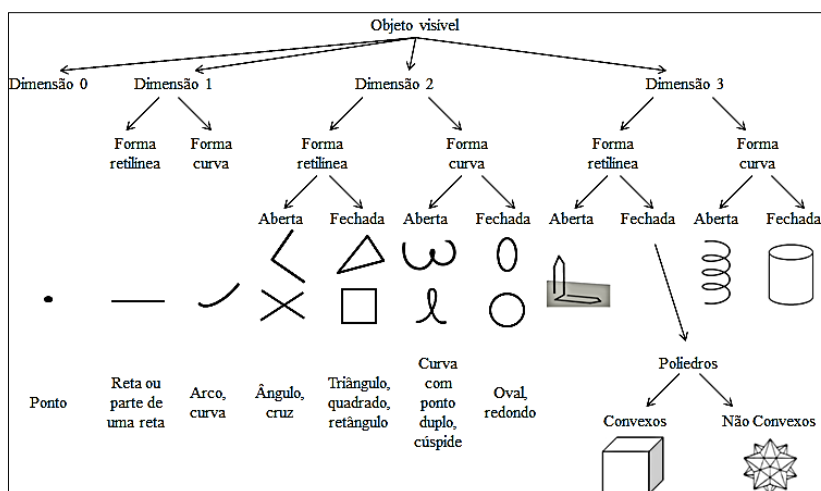


Figura 1.

Classificação das unidades figuras (Adaptado de Duval, 2004, p. 159 e Palles, 2013, p. 41)

Não é trivial identificar as unidades figurais necessárias para a resolução de dado problema geométrico; segundo Duval (2005), para aprender a ver em Geometria, é necessário um treinamento específico. A maioria dos estudantes, ao visualizarem a figura, é incapaz de reconhecer algo a mais que o visto no primeiro olhar e, para esta dificuldade, pode-se indicar duas hipóteses a serem analisadas. Uma delas é a de que não existe nenhum tipo de regra para o tratamento do registro figural, diferente do campo algébrico e numérico. A outra se refere ao “Vai e vem entre visualização e linguagem [que] envolve um salto no número de dimensões para conhecer os objetos matemáticos que são representados dentro de cada registro” (Duval, 2005, p. 5, tradução nossa). Em outras palavras, há variação de dimensão entre os registros figurais e em língua natural, pois geralmente nas figuras o foco se dá nas dimensões 2 ou 3 e, ao descrever o objeto matemático por suas características/propriedades, utilizam-se as dimensões 1 e 0.

Esta última hipótese mencionada é nomeada como hiato dimensional, considerada por Duval (2005, p. 45, tradução nossa) como uma “(...) ruptura entre o número de dimensões consideradas para identificar uma unidade figural no que é percebido e o número de dimensões consideradas para nomear os objetos e as relações que se identifica”. O esquema, exposto na Tabela 1, exemplifica o hiato dimensional por meio das setas pontilhadas. Ao visualizar a

figura, identifica-se primeiramente o poliedro, após o polígono, suas retas/segmentos e pontos, e há uma inversão nesta ordem ao se tratar do discurso.



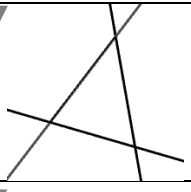

Número de dimensões	Visualização	Discurso
3D / 2D		Um poliedro
2D / 2D		Um polígono que seja uma face de um poliedro ou figura obtida por um plano de intersecção de outro poliedro.
1D / 2D		Retas com relação entre elas permitindo distinguir as propriedades do polígono e as retas sendo reduzidas aos segmentos.
0D / 2D		Pontos que podem ser a intersecção de retas ou vértices de um polígono. Os quais não são pontos arbitrários que marcamos em linha reta ou em um plano e que aparecem independentes.

Tabela 1.

Hiato dimensional (Adaptado de Duval, 2005, p. 47)

Além disso, para Duval (2005), a articulação entre a visualização e o discurso não é uma ação simples e acaba se tornando, para qualquer professor, um obstáculo particular ao se trabalhar com a Geometria. Isso porque, ao realizar uma conversão (setas contínuas) entre uma representação em língua natural para a figural, há um aumento no número de dimensões, enquanto que, em uma conversão inversa, há uma redução no número de dimensões, o que faz com que se mobilize uma desconstrução dimensional das formas.

Pode-se afirmar que a visualização de uma figura ocorre ao se recorrer à desconstrução dimensional ($nD^4 \rightarrow (n-1)D$) da mesma, isto é, o reconhecimento de uma figura geométrica é realizado a partir de suas unidades figurais de menor dimensão. Evidencia-se que a desconstrução dimensional está “(...) onipresente em toda definição, em todo raciocínio como

⁴ Número de dimensões

em toda explicação em relação às figuras em geometria” (Duval, 2011, p. 90). Sendo assim, Duval (2005) compreende que esta ação mobiliza a “maneira matemática de ver” uma figura geométrica.

Além disso, para o autor “Não pode haver ensino de geometria que não leve em consideração as diferentes apreensões às quais uma figura dá lugar” (Duval, 2004, p. 164, tradução nossa). As apreensões figurais podem ser classificadas em quatro tipos destacados na Tabela 2.

Tabela 2.

Apreensões figurais (Adaptado de Duval, 2004)

Apreensão figural	O que é?
Perceptiva	Primeiro reconhecimento e/ou identificação das formas de uma representação geométrica.
Discursiva	Trata da compreensão das unidades figurais, teoremas, definições apresentadas no enunciado do problema a respeito da figura.
Operatória	Modificações e/ou reorganizações em uma figura sem alteração de dimensão.
Sequencial	Construção e/ou descrição de um objeto matemático.

A apreensão perceptiva está associada à maneira comum de ver uma representação figural. A “(...) organização perceptiva de uma figura privilegia o reconhecimento de certas unidades figurais e tende a esconder outras” (Duval, 2004, p. 169, tradução nossa), portanto, nem sempre beneficia as unidades figurais necessárias à resolução do problema geométrico.

Desta forma, torna-se fundamental a indicação verbal do objeto exposto, pois, conforme Duval (2012, p. 133), “(...) uma figura geométrica não se mostra a primeira vista a partir de seu traçado e de suas formas, mas a partir do que é dito”. Logo, a apreensão perceptiva está subordinada à apreensão discursiva, a qual se refere à interpretação dos elementos úteis (unidades figurais, teoremas, definições) para a resolução da atividade proposta, a partir da compreensão do enunciado, de hipóteses e da representação figural do objeto.

Os problemas geométricos, que solicitam a descrição de um objeto matemático por meio de suas unidades figurais de menor dimensão, mobilizam a apreensão sequencial, assim como as situações das construções geométricas, nas quais é essencial seguir uma sequência de passos de modo a garantir suas propriedades. Esse tipo de apreensão também pode ser provocado em situações em que a solução final do problema não seja uma construção e/ou descrição de um dado objeto matemático, porém no processo de solução, esta pode ser evocada para servir de base a outras apreensões figurais (Jahn & Bongiovanni, 2019).

Na busca por solucionar alguns problemas em Geometria, tratamentos figurais podem ser realizados. Esses tratamentos constituem a apreensão operatória (Duval, 2012). Em outros termos, diferentes modificações e reorganizações podem ser realizadas nas figuras. Quando a modificação concerne apenas no tamanho da figura geométrica, sem variações na sua forma ou orientação no plano, ela é classificada como ótica. A modificação posicional está vinculada às transformações de rotação e translação de um objeto matemático, considerando um referencial. As modificações que realizam divisões e/ou organizações de uma figura em outras de mesma dimensão, sejam elas de forma física, gráfica ou simplesmente olhando (não “mentalmente”) (Duval, 2005) são as mereológicas.

É importante destacar que não existe uma hierarquia entre as apreensões e que, geralmente, não há apenas a mobilização de uma apreensão para a resolução de uma atividade, estas são promovidas de forma conjunta em um mesmo problema. Conforme Jahn e Bongiovanni (2009), é fundamental proporcionar aos estudantes situações geométricas em que estes, na busca pela solução, mobilizem a ação de visualização da figura e as apreensões operatórias, visto que as operações puramente figurais são as que “(...) permitem transformar qualquer figura em outra com a finalidade de fazer aparecer uma solução ou de produzir um contraexemplo ou ainda de modelar uma situação” (Duval, 2011, p. 85).

Desta forma, compreende-se que o desenvolvimento do pensamento geométrico está associado à visualização e à conexão entre as apreensões, pois este pensamento relaciona-se ao ato de construir, descrever, reconhecer e analisar as propriedades de um objeto matemático, assim como operar modificações figurais sobre sua representação a partir de manipulações, transformações e decomposições (Duval, 2005, 2011, 2012).

Encaminhamentos metodológicos

A atividade analisada, neste artigo, pertence a um conjunto de três tarefas desenvolvidas no segundo semestre de 2018, no componente curricular MTM1062 – Educação Matemática II, o qual é ofertado para o curso de Matemática Licenciatura Noturno da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Essas tarefas compõem a dissertação, elaborada pela primeira autora deste texto, e emergem de discussões realizadas no grupo de pesquisa EMgep⁵ sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, em particular, de Geometria, bem como da análise de estudos que revelam dificuldades na aquisição de conceitos geométricos por professores e estudantes da Educação Básica, com o objetivo de problematizar atividades que envolvem conceitos/conteúdos referentes à Geometria Espacial de Posição, explorando diferentes representações.

Foram realizados três encontros que totalizaram sete horas-aula. Estes encontros contaram com a presença de sete acadêmicos⁶, sendo que todos haviam sido aprovados no componente curricular de Geometria Plana e apenas dois (B2 e C3) não haviam cursado Geometria Espacial⁷.

⁵ Educação Matemática: grupo de estudos e pesquisas/UFSM.

⁶ Denominados por A1, A2, B1, B2, C1, C2 e C3, seguindo os preceitos éticos da pesquisa, conforme projeto foi aprovado no primeiro semestre de 2018 pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos (CEP) da UFSM sob o Certificado de Apresentação para Apreciação Ética-CAAE: 89496118.1.0000.5346.

⁷ Cabe destacar que no curso de Matemática Licenciatura da UFSM, a componente curricular de Geometria Espacial tem como pré-requisito a componente curricular Geometria Plana.

Com base nas relações interpessoais, foram organizados duas duplas e um trio, visto que, no decorrer das aulas do componente curricular de Educação Matemática II, eles tinham o hábito de realizar as atividades e discussões inicialmente a partir de subgrupos. Desta forma, durante a análise da atividade selecionada para este texto, serão denominadas três equipes, a saber, A (A1 e A2), B (B1 e B2) e C (C1, C2 e C3).

A atividade aqui discutida (Figura 2) pertence à tarefa II, desenvolvida no segundo encontro e foi disponibilizada para as equipes de forma impressa. Buscou-se, com a realização dessa atividade, analisar posições relativas entre retas e planos, a partir da visualização de um objeto tridimensional (cubo). Para tanto, foi apresentada uma representação do cubo que não é tão recorrente em livros direcionados à Educação Básica, bem como em livros elaborados para o Ensino Superior. Salienta-se que esta forma de representação do cubo foi exposta aos participantes em uma das atividades da tarefa I, que solicitava a representação figural do cubo em uma malha isométrica.

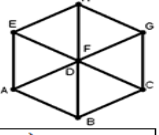
<p>Análise a representação do cubo e identifique posições relativas entre os entes geométricos, justificando suas respostas com notação matemática pertinente:</p>		
<p>Posições relativas entre duas retas: paralelas, concorrentes (perpendiculares) e reversas (ortogonais).</p>		
a) Retas EF e DC:	b) Retas AE e AD:	
c) Retas HD e FG:	d) Retas AE e DF:	
<p>Posições relativas entre <u>reta e plano</u>: reta contida no plano, reta secante ao plano e reta paralela ao plano.</p>		
e) Reta HD e plano formado pelos pontos E, F, G:	f) Reta BG e plano formado pelos pontos C, G, F:	
<p>Posições relativas entre dois planos: coincidentes, secantes e paralelos.</p>		
g) Planos formados pelos pontos A, B, F e B, C, D:	h) Planos formados pelos pontos A, B, E e C, D, H:	

Figura 2.

Organização da atividade (Adaptado de Lima et al., 2006, p 185-186)

Esta pesquisa baseia-se nos pressupostos da Análise de Conteúdo. Para Bardin (2011, p. 48), a Análise de Conteúdo refere-se a um conjunto de procedimentos de “(...) análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do

conteúdo das mensagens, indicadores (...) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (...) destas mensagens”. Ela é organizada em três etapas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados e interpretações. A pré-análise consiste na organização da pesquisa, na qual se define o objetivo, os participantes, a elaboração das atividades, baseada na fundamentação teórica e nas categorias de análise, as quais, nesta pesquisa, são as apreensões de uma figura (sequencial, perceptiva, discursiva e operatória).

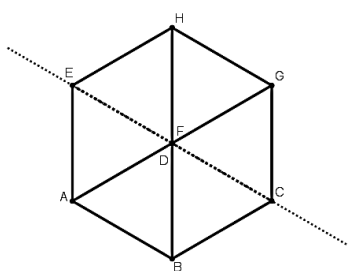
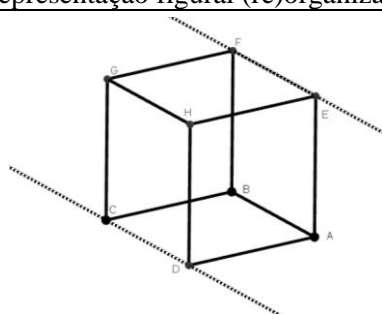
Na segunda etapa, exploração do material, é realizada a produção de dados que, neste caso, foi feita a partir dos protocolos de registros dos acadêmicos para, então, analisá-los conforme pressupostos teóricos dos RRS. Na terceira e última etapa, tratamento dos resultados e interpretações, os dados obtidos são tratados de modo a se tornarem válidos e significativos. Assim, na próxima seção, são analisados e descritos os dados produzidos visando o objetivo desta pesquisa.

Análise e discussão dos resultados

A atividade proposta aos acadêmicos explora posições relativas entre duas retas; uma reta e um plano; e, entre dois planos por meio de uma representação não usual do cubo, na qual os participantes utilizaram justificativas com representações em língua natural, buscando uma notação matemática pertinente. As tabelas a seguir, além de apresentarem os argumentos expostos pelos participantes, exemplificam o que ocorre entre os entes geométricos por meio da demarcação destes sobre a representação figural, fornecida no enunciado da atividade, e também em uma representação figural que auxilia a visualização dos posicionamentos entre os elementos indicados. A Tabela 3 expõe as relações apontadas pelas equipes entre as retas EF e DC.

Tabela 3.

Resolução das equipes para o item a da atividade (Dados da pesquisa)

Posições relativas entre as retas EF e DC		
Representação figural fornecida	Representação figural (re)organizada	
		
Justificativas das equipes		
Equipe A	Equipe B	Equipe C
$\vec{EF} // \vec{DC}$, pois estão em faces opostas e na mesma direção.	$EF // DC$, pois \vec{EF} e \vec{DC} não se tocam, mas existe um plano que as contém.	Paralelas, estão contidas em planos paralelos.

Os participantes identificaram que as retas, citadas no item, são paralelas entre si.

Verificando as representações figurais apresentadas na Tabela 3, compreende-se que os acadêmicos não se apoiaram apenas na representação fornecida pelo enunciado, pois nesta as retas se sobrepõem, o que permite a classificação de retas coincidentes, fato que não ocorreu. Logo, pode-se constatar que houve a mobilização da apreensão perceptiva para o reconhecimento da figura e operatória de posição, visto a necessidade de rotacionar o cubo (de forma mental) para, então, identificar corretamente a posição assumida pelas retas.

A solicitação pela justificativa da posição estabelecida entre as retas fez com que a apreensão discursiva fosse mobilizada. Isso porque, além de compreender as propriedades matemáticas do cubo, os acadêmicos precisaram recorrer a outras definições matemáticas. Em relação à notação matemática, apenas a Equipe C não utilizou da simbologia de paralelismo “//” para informar a relação entre as retas, optando por escrever o termo “paralelas”. Na busca por justificar a posição entre as retas, as Equipes A e B, de certa forma, recorreram à definição de retas paralelas⁸. A Equipe B mencionou, de forma clara, características da definição. A

⁸ Não possuem ponto em comum e estão contidas em um mesmo plano.

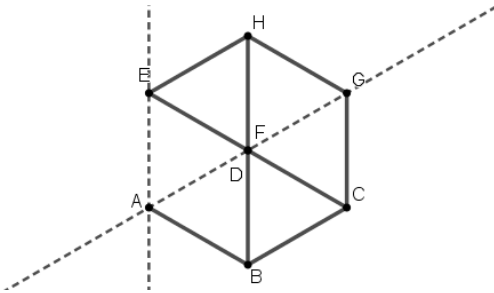
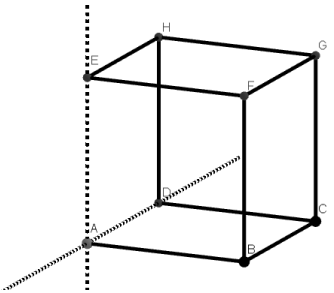
Equipe A citou que as retas não possuem ponto em comum, pois pertencem a faces opostas. E, ao referir-se que as retas EF e DC possuem a mesma direção (termo mais utilizado na Geometria Analítica), garante o fato de que elas sejam paralelas ou coincidentes, caso descartado visto que a equipe mencionou a não existência de pontos em comum.

A Equipe C apontou que as retas “estão contidas em planos paralelos” (Excerto Equipe C). Porém, somente este argumento não garante o paralelismo entre as retas. As retas EF e CH, por exemplo, também, pertencem a planos paralelos, no entanto, não são paralelas entre si, e sim reversas. A justificativa utilizada pela equipe evidencia apenas que não há ponto em comum entre as retas; assim, tendo em vista a definição de retas paralelas, ainda é necessário mostrar que as retas estão contidas em um mesmo plano. Situação esta que é análoga a ocorrida com os participantes do estudo de Muraca (2011).

As equipes constataram o fato de haver a interseção entre as retas AE e AD e a existência do ângulo reto formado por elas. Na Tabela 4, apresentam-se as justificativas, elaboradas pelas equipes, referentes à posição relativa entre as retas citadas.

Tabela 4.

Resolução das equipes para o item b da atividade (Dados da pesquisa)

Posições relativas entre as retas AE e AD		
Representação figural fornecida	Representação figural (re)organizada	
		
Justificativas das equipes		
Equipe A	Equipe B	Equipe C
$\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}$, pois a interseção entre as duas retas forma 90° .	$AE \perp AD$, perpendiculares, pois entre elas forma-se um ângulo reto, \exists um plano que os contém.	Concorrentes, estão no mesmo plano e se interceptam formando ângulo de 90° .

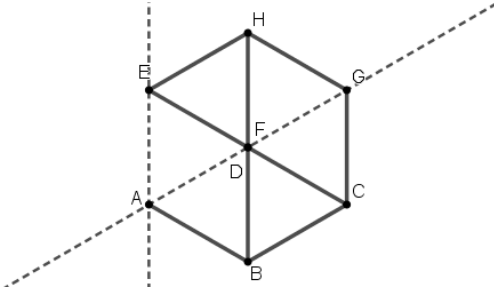
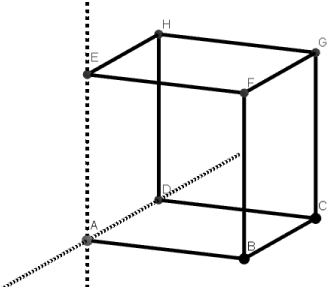
As representações figurais, exibidas na Tabela 4, levam a concluir que as retas mencionadas possuem um ponto em comum, assim como a nomenclatura utilizada para identificá-las, pois ambas contêm o ponto A. No entanto, primeiramente, se faz necessário reconhecer a figura do cubo na representação figural apresentada pelo enunciado (apreensão perceptiva) e identificar a posição correta dos pontos D e F que estão sobrepostos na figura. Esclarecendo, desta forma, se AD pertence a uma das arestas do cubo ou que AD é uma diagonal da face do objeto, pois estas combinadas com a reta AE possuem angulações distintas. Então, após a identificação, é preciso rotacionar a figura (apreensão operatória de posição), ou, então, mobilizar propriedades do cubo (apreensão discursiva) para constatar o ângulo contido entre as retas AE e AD.

As Equipes A e B optaram por utilizar a simbologia de perpendicularidade “ \perp ”, já a Equipe C mencionou que as retas são concorrentes e apenas em sua justificativa comentou sobre o ângulo reto, formado pelos elementos mencionados. Quanto aos argumentos apresentados, todas as equipes indicaram o ângulo de 90° e a interseção e/ou a coplanaridade das retas, o que garante que estas são concorrentes e perpendiculares.

Apresentam-se a seguir (Tabela 5) as justificativas fornecidas pelos licenciandos referentes à posição entre as retas HD e FG.

Tabela 5.

Resolução das equipes para o item c da atividade (Dados da pesquisa)

Posições relativas entre as retas AE e AD		
Representação figural fornecida	Representação figural (re)organizada	
		
Justificativas das equipes		
Equipe A	Equipe B	Equipe C

$\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}$, pois a interseção entre as duas retas forma 90° .	$AE \perp AD$, perpendiculares, pois entre elas forma-se um ângulo reto, \exists um plano que os contém.	Concorrentes, estão no mesmo plano e se interceptam formando ângulo de 90° .
--	---	---

As equipes observaram que as retas HD e FG são ortogonais, o que leva a identificar que, assim como nos itens anteriores desta atividade, foi necessário utilizar outra perspectiva da representação figural, além da apresentada pelo enunciado da questão, mobilizando, desta forma, a apreensão operatória de posição. A figura inicial pode induzir que as retas são concorrentes, fato que não ocorre, pois os pontos D e F não são coincidentes.

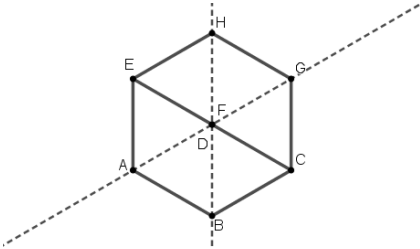
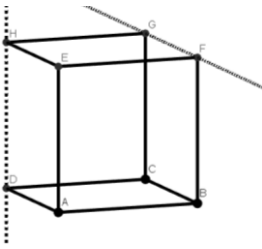
Apenas a Equipe A utilizou o símbolo para ortogonalidade “ \perp ”, mas cabe destacar que os participantes discutiram essa ideia com a pesquisadora. Já as outras equipes apenas mencionaram que as retas são reversas/ortogonais. Na tentativa por justificar a posição entre as retas, a Equipe A mencionou que estas estão em faces opostas, logo, não possuem pontos em comum e que HD e FG possuem direções diferentes, o que não garante que as retas formam um ângulo reto, pode-se afirmar apenas que elas não são paralelas entre si. A Equipe B somente apontou que as retas não são coplanares, logo, são reversas, mas, como a Equipe A, o caso da ortogonalidade também não foi argumentado.

A Equipe C indicou, em sua justificativa, que as retas HD e FG são paralelas por não se interceptarem, mas que estas formam um ângulo reto. Destaca-se que não há como ocorrer o caso mencionado. A equipe, na busca por fundamentar que as retas não possuem ponto em comum, apresentou apenas o resultado de quando se está na dimensão 2, pois, ao se abordar o tridimensional, há a possibilidade de serem reversas, caso este que foi afirmado pela equipe. Percebe-se, nas justificativas, que a apreensão perceptiva se sobressai diante da apreensão discursiva, pois as equipes não conseguem argumentar sobre a ortogonalidade existente entre as retas. A apreensão operatória de posição contribuiu para identificar algumas propriedades da figura, mas estas não foram suficientes para a elaboração de uma argumentação coerente.

As justificativas elaboradas pelos acadêmicos para o item d da atividade, o qual se refere à posição entre as retas AE e DF, estão dispostas na Tabela 6.

Tabela 6.

Resolução das equipes para o item d da atividade (Dados da pesquisa)

Posições relativas entre as retas HD e FG		
Representação figural fornecida	Representação figural (re)organizada	
		
Justificativas das equipes		
Equipe A	Equipe B	Equipe C
$\vec{HD} \perp \vec{FG}$, pois estão em faces opostas, mas em direções diferentes.	Reversas (ortogonais), pois não existe um plano que as contém.	Reversas (ortogonais), são retas paralelas que não se interceptam, mas forma um ângulo de 90° .

A partir da representação figural, fornecida pelo enunciado da atividade, os pontos D e F estão sobrepostos, podendo levar ao entendimento de que são pontos coincidentes. A apreensão perceptiva dessa representação pode ter influenciado a Equipe C a pensar que as retas mencionadas fossem paralelas, assim como influenciar na argumentação elaborada pela Equipe A, que as classificou como ortogonais, tendo em vista a simbologia utilizada.

A Equipe B identificou de forma correta a posição entre as retas AE e DF, reversas. Desta forma, compreende-se que foi realizada uma mudança de perspectiva da figura (apreensão operatória de posição) para uma melhor interpretação da posição das retas. No entanto, não houve justificativas para a classificação, na qual se destaca a forte influência da apreensão perceptiva e a não mobilização da apreensão discursiva.

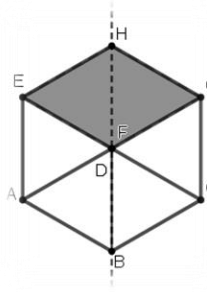
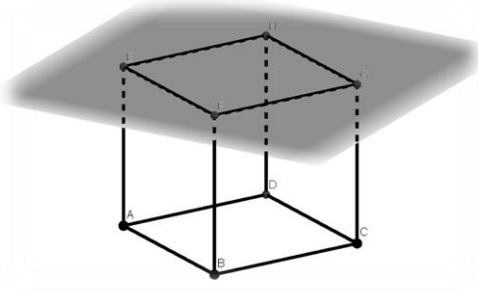
Analisando a justificativa da Equipe A, verifica-se que ocorreram dificuldades na visualização das retas AE e DF, pois além da classificação da posição entre as retas estar equivocada, a equipe mencionou que estão em faces opostas do cubo, sendo que a reta DF não

pertence a nenhuma face do objeto. Já a Equipe C informou que as retas citadas seriam paralelas, porém, argumentou que estariam em planos distintos, sendo que, por definição, retas paralelas estão contidas em um mesmo plano.

A Tabela 7 expõe os argumentos dos licenciandos quanto à posição relativa entre a reta HD e o plano EFG.

Tabela 7.

Resolução das equipes para o item e da atividade (Dados da pesquisa)

Posições relativas entre a reta HD e o plano formado pelos pontos E, F e G		
Representação figural fornecida	Representação figural (re)organizada	
		
Justificativas das equipes		
Equipe A	Equipe B	Equipe C
$\vec{HD} \perp \alpha$, secante, pois apenas um ponto da reta intercepta o plano.	Secante ao plano.	Reta secante ao plano, intercepta o plano.

A partir do item e, os acadêmicos começam a se questionar sobre a posição dos pontos D e F, refletindo sobre qual viria primeiro na representação dada no enunciado. No item c, este fato também era importante e influenciava na resposta correta, pois se formam retas que contêm arestas do cubo ou retas na diagonal das faces do objeto. No entanto, os itens anteriores, a e b, tratavam de retas que compreendem arestas; isto pode ter influenciado os acadêmicos, naquele momento, de forma automática (apreensão perceptiva), a associar que o ponto F estava sobreposto ao ponto D.

A partir deste caso, pode-se afirmar que os participantes não reconhecem uma ordem para a nomeação dos vértices do cubo. Após discussão sobre a organização dos pontos, foi

exposta, pela pesquisadora, a ordenação adotada, que é a mesma utilizada pelas obras de nível superior e livros didáticos.

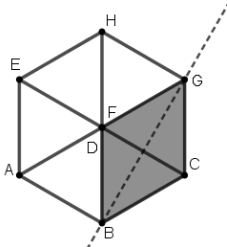
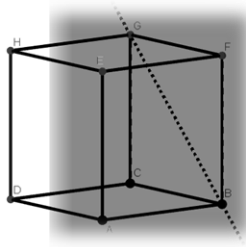
A representação figural, exposta no enunciado da atividade, gera a possibilidade de apontar que a reta HD está contida no plano EFG (denominado de α pela Equipe A). Porém, as equipes observaram que a reta e o plano citados são secantes. Sendo assim, foi possível constatar que os acadêmicos mobilizaram a apreensão operatória de posição para reconhecer a posição correta. As Equipes A e C, na busca por justificar a classificação realizada, destacaram a interseção existente entre os elementos, a reta e o plano.

Verifica-se, mais uma vez, a apreensão perceptiva se sobressaindo em relação à apreensão discursiva, diante dos poucos argumentos, ou nenhum (Equipe B), apresentados pelas equipes. A Equipe A ainda buscou ir além da classificação, indicando que os elementos mencionados são perpendiculares entre si, por meio da simbologia matemática “ \perp ”. No entanto, apenas argumentou sobre o fato de a reta e o plano serem secantes.

As justificativas elaboradas pelas equipes quanto à posição relativa entre a reta BG e o plano CGF estão descritas na Tabela 8.

Tabela 8.

Resolução das equipes para o item f da atividade (Dados da pesquisa)

Posições relativas entre a reta BG e o plano formado pelos pontos C, G e F		
Representação figural fornecida	Representação figural (re)organizada	
		
Justificativas das equipes		
Equipe A	Equipe B	Equipe C
$\overrightarrow{BG} \subset \alpha$, pois todos os pontos de \overrightarrow{BG} estão contidos no plano.	$\overrightarrow{BG} \subset \text{CGF}$, pois os pontos B e G que estão na reta estão no plano também.	Secante ao plano, a reta intercepta o plano.

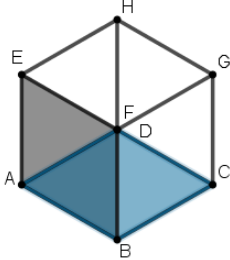
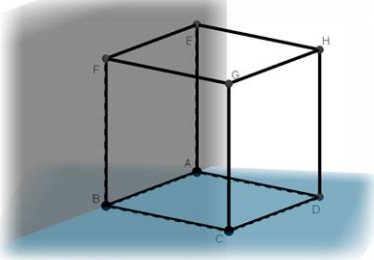
Na tentativa de classificar a posição da reta BG e o plano CGF, por meio da representação figural expressa no enunciado da atividade, pode surgir a ideia de que somente uma parte da reta está contida no plano, caso este seja limitado pelos segmentos que determinam a face BCGF. Entretanto, um plano é infinito, bem como uma reta; sendo assim, ou a reta está totalmente contida no plano ou estes possuem apenas um, ou nenhum, ponto em comum. Para uma melhor compreensão da posição entre a reta e o plano, é necessário mudar a perspectiva do cubo (apreensão operatória de posição) de modo que seja possível reconhecer que a reta BG está contida no plano CGF, assim como classificaram as Equipes A e B com o auxílio da simbologia de contido “ \subset ”. A Equipe A mencionou que todos os pontos da reta BG estão contidos no plano CGF (denominado de α pela Equipe A). A Equipe B utilizou especificamente a definição de que se dois pontos da reta fazem parte do plano, então a reta está contida no plano. Por estas justificativas, verifica-se a mobilização da apreensão discursiva de modo articulado com as apreensões perceptiva e operatória de posição.

A Equipe C se equivocou ao classificar a reta e o plano como secantes. Este caso pode ter sido influenciado pela representação figural exposta no enunciado, por aspectos conceituais e/ou pela forma de nomear a reta e o plano, pois ambos fazem referência à letra G, tendo, assim, um ponto em comum que pode ter sido a interseção avaliada pela equipe. Em outras palavras, o equívoco pode estar relacionado ao fato de os acadêmicos ficarem “presos” aos aspectos globais da figura (apreensão perceptiva), o que indica que as apreensões operatórias e discursivas não foram mobilizadas.

Na Tabela 9, estão dispostos os argumentos utilizados pelos participantes ao buscar definir a posição relativa entre os planos ABF e BCD.

Tabela 9.

Resolução das equipes para o item g da atividade (Dados da pesquisa)

Posição relativa entre os planos formados pelos pontos A, B, F e B, C, D		
Representação figural fornecida	Representação figural (re)organizada	
		
Justificativas das equipes		
Equipe A	Equipe B	Equipe C
Secantes, pois os planos se interceptam em uma única reta.	Secantes, pois forma um ângulo reto, e sua interseção é uma reta AB.	Secantes, os planos se interceptam.

Utilizando a representação figural, apresentada no enunciado da atividade para classificar a posição relativa entre os planos ABF e BCD, é possível perceber que estes se sobrepõem, logo, seriam coincidentes. Entretanto, as equipes classificaram os planos como secantes; para isto, foi necessária a mudança de perspectiva do cubo, pois, desta forma, verifica-se que cada plano contém faces distintas do objeto. Assim, pode-se afirmar que os participantes mobilizaram, de forma simultânea, as apreensões perceptiva e operatória de posição.

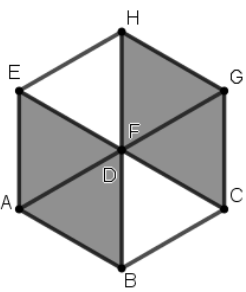
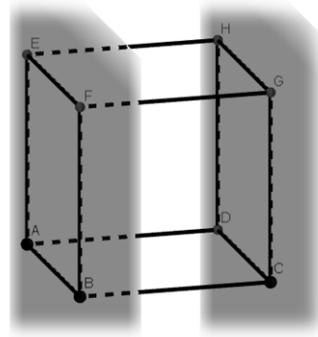
Os participantes justificaram a classificação afirmando que há interseção entre os planos. As Equipes A e B ainda apontaram que esta gera uma reta. Destaca-se que a descrição realizada pela Equipe B, ao argumentar sobre a posição dos planos, informou que eles são secantes pelo fato de “gerar” um ângulo reto. Ressalta-se que, para dois planos serem secantes, é necessário e suficiente haver interseção entre eles, sem nenhuma restrição ao ângulo formado entre os elementos. Em vista disso, a apreensão discursiva, bem como a classificação, é mobilizada de forma limitada nesta situação, pois os acadêmicos das Equipes A e C não

conseguiram verificar a perpendicularidade entre os planos descritos, e a Equipe B compreende que a definição de planos secantes também tem como característica o ângulo de 90° entre os planos.

Quanto à posição relativa entre os planos ABE e CDH, as justificativas apresentadas pelas equipes estão expostas na Tabela 10.

Tabela 10.

Resolução das equipes para o item h da atividade (Dados da pesquisa)

Posição relativa entre os planos formados pelos pontos A, B, E e C, D, H		
Representação figural fornecida	Representação figural (re)organizada	
		
Justificativas das equipes		
Equipe A	Equipe B	Equipe C
$\alpha // \beta$, pois não há pontos em comum entre os planos.	Paralelos, pois a interseção é vazia.	Paralelos, são planos paralelos, não se interceptam.

Questionados sobre a posição existente entre os planos ABE e CDH, os participantes os classificaram como paralelos entre si. Logo, identifica-se que houve uma mudança de perspectiva para que houvesse este reconhecimento, pois se os planos fossem demarcados na representação figural apresentada no enunciado da atividade, estes seriam coincidentes, ou se demarcadas apenas as faces contidas nos planos, estes teriam um ponto em comum (caso impossível de ocorrer entre planos). Como no item anterior, verifica-se que as apreensões operatória de posição e perceptiva foram mobilizadas. Apenas a Equipe A utilizou a simbologia de paralelismo “//” e denominou os planos por letras do alfabeto grego, α e β . As justificativas expostas pelos acadêmicos foram semelhantes entre si, baseando-se na ideia de não haver

pontos em comum entre os planos citados. Porém, percebem-se as dificuldades dos futuros professores ao explorar mais características desta posição, assim como em outros momentos da atividade, evidenciando a necessidade de se desprender da apreensão perceptiva e se aprofundar na mobilização da apreensão discursiva.

Após finalizar a intervenção, a pesquisadora questionou os participantes sobre a facilidade/dificuldade em visualizar os entes geométricos solicitados durante a atividade na representação figural fornecida. As equipes mencionaram que não era mais “difícil” de visualizar do que em uma representação usual do cubo, porém era mais “chato”, pois o reconhecimento das posições obtidas não era tão explícito e este requeria uma análise mais rigorosa.

Ponderações finais

Apresentada a importância das discussões sobre o campo da Geometria na formação inicial de professores de Matemática, tanto sobre assuntos relacionados ao conhecimento matemático, quanto sobre questões referentes à atividade cognitiva exigida nesta área, e em decorrência das análises expostas, é significativo apontarmos algumas considerações sobre as atividades realizadas.

Constatou-se que os participantes mobilizaram, durante a busca das soluções das atividades, as apreensões perceptiva, discursiva e operatória de posição. Destaca-se que, em alguns momentos, umas ficaram subordinadas a outras. Este fato ocorreu quando os acadêmicos tiveram dificuldades em justificar suas classificações relacionadas aos elementos destacados nas atividades. Isto é, eles perceberam a posição relativa entre os elementos, no entanto, não conseguiram mencionar as propriedades necessárias à ocorrência da situação.

A apreensão operatória de posição foi intensamente explorada, visto sua mobilização em todos os itens propostos. Além disso, em cada questionamento, os acadêmicos necessitavam realizar diferentes tipos de rotação da figura para, então, visualizar, de uma melhor forma, os

elementos mencionados (pontos, retas e/ou planos). No entanto, a apreensão discursiva foi mobilizada de forma limitada, tendo em vista as justificativas apresentadas pelas equipes.

Durante as justificativas, não houve equívocos em relação à simbologia matemática, quando utilizada. Torna-se importante frisar que, em uma das atividades, ocorreu situação semelhante à apontada por Muraca (2011), o uso de definições que abrangem apenas a Geometria Plana e que não são válidas para a Geometria Espacial. Isso reforça, mais uma vez, a necessidade da abordagem da Geometria Espacial de Posição nos cursos de licenciatura em Matemática.

A partir da ação realizada com os acadêmicos e dos resultados obtidos, pode-se afirmar que o desenvolvimento das atividades possibilitou aos sujeitos compreender a importância da visualização em Geometria, isto é, a necessidade que há em realizar a harmonização entre os registros figurais e discursivos. Duval (2004, p. 7, tradução nossa) alerta que “(...) nem sempre é fácil ‘ver’ em uma figura as relações ou propriedades relacionadas à hipótese dada e que correspondem à solução procurada”. Assim, torna-se essencial realizar atividades que promovam a mobilização da apreensão figural, bem como a desconstrução dimensional, de modo que sejam abordadas em qualquer nível escolar, assim como em outros componentes curriculares dos cursos de Matemática Licenciatura; por exemplo, em planejamentos de atividades didáticas a serem implementadas na educação básica pelos licenciandos, durante as ações práticas e estágios supervisionados.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

- Almouloud, S. A. (2003). Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In S. D. A. Machado. *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica* (pp. 125-148). Papirus.
- Bardin, L. (2011). *Análise de Conteúdo*. Edições 70.

- Brasil, Ministério da Educação. (2002). *PCN+ Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciência da Natureza, Matemática e Tecnologia*. <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>
- Brasil, Ministério da Educação. (2018). *Base nacional comum curricular*. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf
- Costa, A. P. da. (2020). O pensamento geométrico em foco: construindo uma definição. *Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar*, 6 (16), 77-94. <http://periodicos.uern.br/index.php/RECEI/article/view/3913/2130>
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnements cognitifs de la pensée. *Annales de didactique et Sciences Cognitives*, 5 (1), 37-65.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Editora da Universidade del Valle.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 10 (1), 5 - 53.
- Duval, R. (2009). Semiósisis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução L. F. Levy & M. R. A. da Silveira. Livraria da Física.
- Duval, R. (2011). *Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas*. Org.: T. M. M. Campos. PROEM.
- Duval, R. (2012). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: M. T. Moretti. *Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat*, 7 (1), 118-138. <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/19811322.2012v7n1p118/2382>
- Duval, R. (2016). Las Condiciones Cognitivas del Aprendizaje de la Geometría: desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. In R. Duval & A. Saézn-ludlow. *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-60). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Garcia, M. (1999). *Formação de professores: para uma mudança educativa*. Trad.: I. Narciso. Porto Editora.
- Jahn, A. P., & Bongiovanni, V. (2019). Apreensão Operatória de Figuras em Situações Geométricas. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*. 12 (3), 245-257. <https://revista.pgskroton.com/index.php/jieem/article/view/7584>
- Leivas, J. C. P. (2009) *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática* [Tese de doutorado em Educação, Universidade Federal do Paraná]. http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=182495
- Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., & Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*. Editora SBM

- Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, 3 (4), 3–13.
- Lovis, K. A., & Franco, V. S. (2015) As concepções de geometrias não euclidianas de um grupo de professores de matemática da educação básica. *Bolema*, 29 (51), 369-388. <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v29n51/1980-4415-bolema-29-51-0369.pdf>
- Muraca, F. S. (2011). *Educação Continuada do professor de Matemática: um contexto de problematização desenvolvido por meio de atividades exploratório–investigativas envolvendo Geometria Espacial de Posição* [Dissertação de mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo]. <https://repositorio.pgsskroton.com/handle/123456789/3557>
- Novak, F. I. L. (2018). *O ambiente Dinâmico GeoGebra para o desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em Geometria segundo Raymond Duval: olhares, apreensões e desconstrução dimensional* [Dissertação de mestrado em Educação, Universidade Estadual de Ponta Grossa]. <http://tede2.uepg.br/jspui/handle/prefix/2641>
- Palles, C. M. (2013). *Um estudo do icosaedro a partir da visualização em Geometria Dinâmica* [Dissertação de mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10978>
- Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké*, 1 (1), 7-17. <https://doi.org/10.20396/zet.v1i1.8646822>
- Sanchez, J. B. (2018). dos. *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre Geometria Espacial: período 2007 a 2017* [Dissertação de mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/21655>
- Santos, L., & Oliveira, H. (2017). O ensino e a aprendizagem da geometria: perspectivas curriculares. *Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, 3-8.
- Sena, R. M., & Dorneles, B. V. (2013). Ensino de Geometria: Rumos da pesquisa (1991-2011). *Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat*, 8 (1), 138-155. <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p138/25095>
- Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM. (2013). A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM. *Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Boletim SBEM*, 21 (1), p. 1-42.
- Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (2), 275-300. https://www.researchgate.net/publication/28182867_Coordinacion_de_procesos_cognitivos_en_Geometria.