EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p486-522

Jogo “Grelha Retangular 3 x 4”: Uma Proposta para o Desenvolvimento do Raciocínio Probabilístico

Game “Grelha Retangular 3 x 4”: A Proposal for the Development of Probabilistic Reasoning

Juego “Grelha Retangular 3 x 4”: una propuesta para el desarrollo del razonamiento probabilístico

Jeu "Grille rectangulaire 3 x 4" : une proposition pour le développement du raisonnement probabiliste

Paulo Jorge Magalhães Teixeira [1]
UFF - Universidade Federal Fluminense
https://orcid.org/0000-0001-8256-6486

Resumo

Trabalho que objetiva tornar conhecida proposta de ensino aprendizagem acerca de conteúdos básicos de combinatória e probabilidade, por meio de um jogo de tabuleiro nomeado *Grelha Retangular 3 x 4*. A proposta visa fomentar a apropriação, exercício e desenvolvimento do raciocínio combinatório, enquanto um diagrama de árvore é construído com o objetivo de mostrar possibilidades como uma partida pode se desenrolar a partir de tomadas de decisão dos jogadores por ocasião da movimentação de tampinhas de garrafa pet sobre o tabuleiro. O desenrolar da análise das possibilidades pode se dar logo após o início de uma partida (antes da primeira movimentação) ou a partir de um dado momento de jogo, até que a partida chegue ao seu final. Também fomenta o exercício e o desenvolvimento do raciocínio probabilístico, com o propósito de determinar chances de vitória para cada jogador, e de ocorrência de empate. Em prosseguimento e o consequente reconhecimento das regras do jogo, problemas de probabilidade devem ser propostos aos jogadores, conforme preconiza a teoria de Resolução de Problemas. A proposta do jogo está em consonância com indicações que estão presentes na

[1] Doutor em Educação Matemática: e-mail: paulojorge@id.uff.br

BNCC – Base Nacional Curricular Comum para o ensino aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica, que culminou com a proposta do jogo, que tem como objetivo dimensionar a importância da proposição e criação de um jogo que contribua para melhorar o processo de ensino aprendizagem da Matemática de estudantes dos anos iniciais, e dispor um material didático para os seus professores.

***Palavras-chave*:** Jogo, Raciocínio probabilístico, Raciocínio combinatório, Diagrama de árvore, Árvore de probabilidades.

Abstract

This work aims to make known a teaching-learning proposal about basic contents of combinatorics and probability, through a board game named Grelha Retangular 3 x 4 [Rectangular Grid 3 x 4]. The proposal aims to encourage the appropriation, exercise, and development of combinatorial reasoning, while a tree diagram is built to show possibilities of how a game can unfold from the decision-making of the players when moving pet bottle caps on the board. The development of the analysis of possibilities can take place right after the beginning of a match (before the first move) or from a given moment of the game until the match reaches its end. It also encourages the exercise and development of probabilistic reasoning, with the purpose of determining winning chances for each player, and the occurrence of a tie. In continuation and the consequent recognition of the rules of the game, problems of probability must be proposed to the players, as recommended by the problem solving theory. The game's proposal is in line with indications that are present in the BNCC - National Common Core Curriculum for teaching and learning mathematics in the early years of elementary school. This is bibliographical research, which culminated in the proposal of the game, which aims to dimension the importance of the proposition and creation of a game that contributes to improving the teaching-learning process of mathematics of students in the early years and to provide teachers with teaching materials.

Keywords: Game, Probabilistic reasoning, Combinatorial reasoning, Tree diagram, Probability tree.

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo dar a conocer una propuesta de enseñanza-aprendizaje sobre contenidos básicos de combinatoria y probabilidad, a través de un juego de mesa denominado Grelha Retangular 3 x 4 [Cuadrícula Rectangular 3 x 4]. La propuesta pretende incentivar la apropiación, ejercicio y desarrollo del razonamiento combinatorio, a la vez que se construye un diagrama de árbol que muestra posibilidades de cómo se puede desenvolver un juego a partir de la toma de decisiones de los jugadores al momento de mover las tapas de botellas pet sobre el tablero. El desarrollo del análisis de posibilidades puede tener lugar justo después del comienzo de un partido (antes del primer movimiento) o desde un momento dado del juego hasta que el partido llega a su final. También incentiva el ejercicio y desarrollo del razonamiento probabilístico, con el propósito de determinar las chances de ganar de cada jugador, y la ocurrencia de un empate. A continuación y con el consiguiente reconocimiento de las reglas del juego, se deben plantear a los jugadores problemas de probabilidad, tal y como recomienda la teoría de resolución de problemas. La propuesta del juego está en línea con las indicaciones que están presentes en el BNCC – Base Nacional Común Curricular para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los primeros años de la escuela primaria. Se trata de una investigación bibliográfica, que culminó con la propuesta del juego, que tiene como objetivo dimensionar la importancia de la proposición y creación de un juego que contribuya a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes en los primeros años y brindar materiales de enseñanza a los docentes.

Palabras clave: Juego, Razonamiento probabilístico, Razonamiento combinatorio, Diagrama de árbol, Árbol de probabilidad.

Résumé

Ce travail vise à faire connaître la proposition d'enseignement et d'apprentissage des contenus de base de la combinatoire et des probabilités, à travers un jeu de société nommé Grille Rectangulaire 3 x 4. La proposition vise à favoriser l'appropriation, l'exercice et le développement du raisonnement combinatoire, tandis qu'un diagramme en arbre est construit dans le but de montrer les possibilités de déroulement d'un jeu à partir de la prise de décision des joueurs par le déplacement de petits bouchons de bouteilles sur le plateau. L'analyse des possibilités peut avoir lieu dès le début de la partie (avant le premier coup) ou à partir d'un certain moment de la partie, jusqu'à la fin de celle-ci. Il encourage également l'exercice et le développement du raisonnement probabiliste, dans le but de déterminer les chances de victoire de chaque joueur, ainsi que l'occurrence d'un match nul. Dans la continuité et la reconnaissance conséquente des règles du jeu, des problèmes de probabilité doivent être proposés aux joueurs, comme le recommande la théorie de la résolution de problèmes. La proposition du jeu est conforme aux indications présentes dans la BNCC - Base Nacional Curricular Commune pour l´enseignement et l´apprentissage des Mathématiques des années initiales de l´Enseignement Fondamental Il s'agit d'une recherche bibliographique qui a abouti à la proposition du jeu, qui vise à dimensionner l'importance de la proposition et de la création d'un jeu qui contribue à améliorer le processus d'apprentissage de l'enseignement des mathématiques des élèves des premières années, et à fournir un matériel didactique pour leurs enseignants.

Mots clés : Jeu, Raisonnement probabiliste, Raisonnement combinatoire, Diagramme d'arbre, Arbre de probabilité.

Jogo “Grelha Retangular 3 x 4”: uma proposta para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico

É o recorte de uma pesquisa ampla que objetiva responder a seguinte questão principal: “Que situações de aprendizagem um professor de matemática precisa selecionar, dirigir e propor a seus alunos do Ensino Fundamental, em consonância com as orientações presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), de modo a identificar e conhecer como o raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico são apropriados, exercitados e desenvolvidos pelos estudantes na resolução de problemas próprios das temáticas combinatória e probabilidade, de modo a compreender as dificuldades que eles enfrentam e para ajudá-los a superar essas dificuldades?”

De modo a encontrar subsídios que respondam à questão de pesquisa começamos por fazer uma pesquisa bibliográfica acerca do objeto matemático e o uso de jogos no ensino aprendizagem da Matemática Básica, e ela nos levou a conceber, testar e propor o jogo objeto deste recorte.

Levando em conta os aspectos básicos que caracterizam uma investigação qualitativa, como os presentes em Franco (2005), considerou-se que o estudo caracteriza-se como uma investigação de natureza qualitativa.

Assim, o trabalho tem o propósito de apresentar as regras e os objetivos pedagógicos do jogo além de apresentar proposta para a proposição de problemas que têm relação direta com ele e o objeto matemático requerido para prover as resoluções, qual seja: o conhecimento, desenvolvimento e o exercício dos raciocínios combinatório e probabilístico.

Segundo os autores dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em Brasil (1997):

> [...] um aspecto relevante nos jogos, é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver. (Brasil, 1997, p.49)

O raciocínio combinatório é uma ferramenta combinatória imprescindível a todo aquele que se propõe resolver continuamente problemas de contagem e de probabilidade. Ademais, por toda a escolaridade básica e em nível superior em Matemática o compreenda, aproprie, apreenda e faça correto uso dele, de modo a reunir condições suficientes para se sair bem nessa empreitada.

Um campo de pesquisa matemática em ampla evolução: a Matemática Discreta, em particular a Teoria dos Grafos, prescinde fortemente do exercício correto do raciocínio combinatório, bem como e a Estatística e a Probabilidade, em conjunto, em particular a Estocástica, do raciocínio probabilístico. É importante perceber e estreita relação que há entre os dois raciocínios, e não naturalizar a combinatória como coadjuvante da probabilidade

Os raciocínios combinatório e probabilístico - raciocínios matemáticos que devem ser desenvolvidos desde os anos iniciais do ensino fundamental, ainda na tenra idade -, têm importância significativa para o letramento matemático dos cidadãos principalmente, mas não apenas, para os estudantes da Escola Básica e os seus professores.

A apropriação (também, a compreensão e o exercício) dos letramentos combinatório e probabilístico se estendem ao longo do tempo - por muitos anos e não apenas durante o período de estudos da escola básica, e devem ser feitos em um constante. Eles precisam ser continuamente alimentados (adquiridos, exercitados), pois senão correm o risco de vir a ser esquecidos ou serem exercitados de maneira incorreta.

Por conta de tudo isso é que a importância de cada um dos dois letramentos, no ensino da Matemática, é constantemente ressaltada e eles são sempre postos à prova, em diferentes áreas da própria Matemática e/ou em diversas situações cotidianas, as quais exigem os seus corretos exercícios (individualmente, ou em conjunto) tanto para a compreensão do contexto quanto quando deles se precisa mobilizar para avaliar e tomar uma decisão, por exemplo.

Parece-nos, pois, diante de tais argumentos - fortes que são -, que não deve ser difícil entender que um estudante não se transforma em um sujeito letrado combinatoriamente e probabilisticamente de um dia para outro. Tampouco a escolaridade na escola básica parece ser suficiente para dotá-lo de tal competência matemática por conta das abrangências e complexidades em que estes letramentos estão presentes, embora não seja isso o que se almeje, queira e busque enquanto professores.

Mas tudo começa do início, desde as situações mais simples presentes no cotidiano dos alunos e suas famílias, por exemplo quando da escolha de uma calça e de uma camisa para sair se no armário há tantas peças de cada; do uso de materiais manipuláveis para ajudar na compreensão do exercício do raciocínio combinatório; do conhecimento acerca das representações espontâneas lúdicas ou gráficas, para se chegar às representações numéricas ou a chance de escolher seis números e sair vencedor na MegaSena, por exemplo. Tudo no seu tempo e hora para, muito tempo depois, se chegar à complexidade que é própria da utilização e o exercício dos raciocínios combinatório e probabilístico em situações mais complexas. Mas, afinal, o que é raciocínio combinatório? O que é raciocínio probabilístico?

Referencial teórico

Segundo Teixeira (2014),

> [...] o raciocínio combinatório é um conjunto de ações cognitivas, não inatas ao sujeito, as quais permitam que ele encaminhe procedimentos sistemáticos de seleção, partição ou colocação de objetos, pessoas, números ou letras, combinando-os adequadamente, de modo que o resultado dessas ações tenha significado e obedeça às sistematizações necessárias à garantia de obtenção de todas as possibilidades (agrupamentos-solução) que satisfazem ao problema de contagem proposto. Além do mais, o resultado das "combinações" é obtido com a exploração e o exercício do raciocínio combinatório de maneira recursiva em relação ao que antes já havia sido "combinado". As "combinações" feitas, passo a passo, podem ser visualizadas por meio da construção de uma representação gráfica, ou compreendidas por meio de uma representação numérica via uma ou mais operações numéricas multiplicativas e/ou aditivas. Portanto, podemos então caracterizar o raciocínio combinatório como o raciocínio que é derivado do ato de "combinar" (o mesmo que associar, juntar, compor) objetos (ou pessoas, letras, algarismos) com outros de igual natureza ou não (TEIXEIRA, 2014, pp.36-37).

O exercício do raciocínio (pensamento) combinatório por alunos e/ou professores são perceptíveis a partir do enfrentamento de situações-problema de contagem nas quais o enunciado peça para fazer a enumeração de todas as soluções (possibilidades, agrupamentos-solução), ou que se determine o quantitativo total das possibilidades. Para enumerá-las, pode ser feito o uso de uma representação gráfica (esquema, produto cartesiano, tabela de dupla entrada, diagrama de árvore (árvore de possibilidades)) e para contar quantas há tal pode ser feito de maneira direta, uma a uma ou por grupos, a partir da representação gráfica que tenha sido construída (caso o quantitativo não seja demasiado grande). Ou então, faz-se uso de uma representação numérica para determinar o quantitativo total de possibilidades, a partir do exercício do raciocínio combinatório. Em qualquer das duas situações, a contagem de possibilidades permite que se utilize um novo jeito de pensar, isto é, será preciso que o raciocínio combinatório seja exercitado para dar conta de obter um ou outro tipo de resposta: qualitativa ou quantitativa.

Em particular, as ideias combinatórias iniciais também são compreendidas por meio da exploração de problemas combinatórios cujo diagrama de árvore constitui uma representação gráfica bastante adequada para introduzir ideias relativas ao exercício do raciocínio (pensamento) combinatório, e segundo o qual é possível obter o quantitativo total de possibilidades. Uma possibilidade (agrupamento) para um problema de combinatória é resultante da “combinação” entre dois ou mais objetos, letras, algarismos, peças, cores etc, presentes no contexto do problema. Tais “combinações” e respectivas possibilidades sempre podem ser representados em um diagrama de árvore, a partir do momento em que o sujeito que o está construindo se coloque na posição da pessoa que vai executar tais “ações de combinação”, mobilizando e exercitando o pensamento combinatório.

Fato é que para fazer a contagem de todas as possibilidades não será preciso lançar mão de um repertório de fórmulas para dar conta de obter tal quantitativo, e sim por meio de um processo que exige a construção de um modelo simples, simplificado, claro, objetivo e explicativo a respeito da situação que está presente no contexto do problema a ser resolvido. De início esse modelo pode atender a situações particulares mas também pode ser mais geral, como é o caso da construção de um diagrama de árvore (árvore de possibilidades).

Uma vez que um sujeito acumule experiências diversas no trato de situações de contagem, tendo total domínio sobre o conceito combinatório presente no enunciado de um problema, por vezes um simples rascunho de como seria o diagrama de árvore é o bastante para que possa definir uma estratégia para encaminhar a resolução do problema.

Mas não pense ser sempre uma tarefa simples resolver um problema combinatório, pois em alguns problemas pode ser que vários conceitos combinatórios precisam ser mobilizados. Em comum, para o sujeito que está para resolver um problema de contagem, o fato de o exercício do raciocínio combinatório não ser dispensável, além da necessidade de ter compreensão plena acerca da situação envolvida no enunciado e de fazer uso de procedimentos diretamente relacionados a ele. Por vezes, enunciados concisos de problemas combinatórios exigem soluções complexas. Para tal, as citações seguintes ajudam na compreensão.

Inhelder e Piaget (1955 apud Navarro-Pelayo,1996) aponta a maneira como o raciocínio combinatório (embora o chame de raciocínio hipotético-dedutivo) opera com as possibilidades, conforme a citação a seguir. De acordo com Inhelder e Piaget (1955),

[...] o raciocínio hipotético-dedutivo opera com as possibilidades que o sujeito descobre e avalia, por meio de operações combinatórias. Esta capacidade pode relacionar-se com os estágios descritos na teoria de Piaget: depois do período das operações formais, o adolescente descobre procedimentos sistemáticos de construção combinatória, ainda que para as permutações seja necessário esperar a idade de 15 anos (Navarro-Pelayo, 1996, p. 2).

Ademais, para Inhelder e Piaget (1955 apud Batanero, Godino, Navarro-Pelayo,1997)

[...] as operações combinatórias representam algo mais importante que um mero ramo da matemática. Elas constituem um esquema tão geral como a proporcionalidade e a correlação, que emergem simultaneamente após a idade de 12 a 13 anos (estágio das operações formais, segundo Piaget). A capacidade combinatória é fundamental para o raciocínio hipotético-dedutivo, o qual opera pela combinação e avaliação das possibilidades em cada situação (Batanero, Godino, Navarro-Pelayo, 1997, p. 27).

Resultados de uma pesquisa feita por Fischbein (1975) mostram que a “capacidade de resolver situações-problemas que envolvem o raciocínio combinatório (problemas combinatórios) nem sempre se alcança no nível das operações formais se um ensino específico do assunto não for oferecido”.

Ou seja, ainda que de forma indireta Fischbein (1975) nos aponta que o raciocínio combinatório precisa ser exercitado, estimulado e desenvolvido pelo professor enquanto propõe que os seus alunos resolvam problemas de contagem e que ele atue como um mediador da aprendizagem.

Diversos documentos curriculares, como os PCN, em (Brasil, 1997); a BNCC, em Brasil (2018), e vários estudiosos da educação matemática (Grando, 2000; Muniz, 2010; Teixeira, 2021 entre outros) defendem o jogo como um recurso didático que possibilita o desenvolvimento não só de conhecimentos matemáticos mas também em relação a formas de pensamento.

Contudo, para caracterizar o jogo como recurso de ensino é necessário que ele apresente desafios às crianças, além da diversão, como é o caso do presente jogo. Assim, é possível aos alunos elaborar estratégias variadas nos jogos propostos por seus professores, compartilhá-las com os colegas e, a partir de reflexões, ampliar os seus conhecimentos. Os jogos didáticos possibilitam aprendizados matemáticos e extra matemáticos, incluindo o levantamento e a testagem de hipóteses, a criação de estratégias, reflexão, análise, debate e argumentação. O professor pode fazer bom uso de jogos, a partir dos quais observará conhecimentos e fragilidades dos alunos em relação aos conceitos que nele são tratados, construídos ou em construção.

Segundo Bryant, P. e Nunes, T. (2012), para o entendimento da probabilidade é preciso que um aluno se aproprie das competências listadas a seguir:

- Compreender a natureza e as consequências do uso do conceito de aleatoriedade no dia a dia;
- Categorizar características dos elementos de modo a formar espaços amostrais;
- Quantificar e comparar probabilidades;
- Estabelecer e entender correlações entre eventos em um espaço amostral, relacionando-os entre si, se for o caso.

A compreensão das competências acima, sem a dispensa de nenhuma delas, configura-se como condições para compreender, caracterizar, exercitar e desenvolver o pensamento (raciocínio) probabilístico. O raciocínio probabilístico é imprescindível para que todo aquele que o compreenda dele se aproprie e continuamente faça correto uso, por toda a sua escolaridade em matemática básica e em nível superior. Ele precisa ser continuamente alimentado (adquirido, exercitado) se não pode vir a ser esquecido ou ser exercitado de maneira incorreta, e o seu desenvolvimento deve ser feito em um crescente e constante. O letramento matemático probabilístico se estende (compreendido, apropriado e exercitado) ao longo do tempo - por muitos anos, e não apenas durante o período de estudos da Escola Básica. Ao longo da sua formação o sujeito que está sendo letrado segundo o exercício do raciocínio probabilístico, vai reunindo condições suficientes para compreendê-lo e desenvolvê-lo de modo a preparar-se para resolver problemas de probabilidade, mas não apenas no universo escolar mas em outras áreas, tais como: avaliações, riscos, seguros, investimentos etc. Portanto, o raciocínio probabilístico - um dos raciocínios matemáticos que devem ser desenvolvidos desde os anos iniciais do ensino fundamental, ainda na tenra idade, por meio de ações pedagógicas na escola e pelos professores -, tem importância significativa para o letramento matemático dos cidadãos e sua inserção cidadã em nossa sociedade, a qual se caracteriza por rápidas mudanças estruturais.

A BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão. Ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes; entre eles e seu cotidiano, e entre os diferentes temas matemáticos. No que concerne ao estudo de noções de probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental, a finalidade é a de promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nessa fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do correspondente espaço amostral.

Segundo a BNCC, em Brasil (2018, p.235), para o 1º Ano do Ensino Fundamental o objeto de conhecimentos é a “Noção de acaso”, e a habilidade requerida é a seguinte: (EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano; Para o 2º Ano do Ensino Fundamental o objeto de conhecimentos é a “Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano”, e a habilidade requerida é a seguinte: (EF02MA21) Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”; Para o 3º Ano do Ensino Fundamental o objeto de conhecimentos é a “Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral", e a habilidade requerida é a seguinte: (EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência; Para o 4º Ano do Ensino Fundamental o objeto de conhecimentos é a "Análise de chances de eventos aleatórios", e a habilidade requerida é a seguinte: (EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações; Para o 5º Ano do Ensino Fundamental os objetos de conhecimentos são a) "Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios", e a habilidade requerida (EF05MA22) Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não; b) "Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis", e a habilidade requerida (EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).

Cumpre salientar que as habilidades elencadas pela BNCC para os anos iniciais do ensino fundamental, como acima, estão em consonância com as três primeiras habilidades defendidas por Bryant, P. e Nunes, T. (2012), como acima.

A incerteza e o tratamento de dados são estudados na unidade temática Probabilidade e Estatística, a qual propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos, presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Nos anos finais do ensino fundamental, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista.

A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem. Ademais, cumpre destacar que os critérios de organização das habilidades na BNCC (com a explicitação dos objetos de conhecimento aos quais se relacionam e do agrupamento desses objetos em unidades temáticas) expressam um arranjo possível (dentre outros). Portanto, os agrupamentos propostos não devem ser tomados como modelo obrigatório para o desenho dos currículos. Essa divisão em unidades temáticas serve tão somente para facilitar a compreensão dos conjuntos de habilidades e de como eles se inter-relacionam. Na elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas, devem ser enfatizadas as articulações das habilidades com as de outras áreas do conhecimento, entre as unidades temáticas e no interior de cada uma delas. Na definição das habilidades, a progressão ano a ano se baseia na compreensão e utilização de novas ferramentas e também na complexidade das situações-problema propostas, cuja resolução exige a execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas distintas.

Em todas as unidades temáticas, a delimitação dos objetos de conhecimento e das habilidades considera que as noções matemáticas são retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a ano. No entanto, é fundamental considerar que a leitura dessas habilidades não seja feita de maneira fragmentada. A compreensão do papel que determinada habilidade representa no conjunto das aprendizagens demanda a compreensão de como ela se conecta com habilidades dos anos anteriores, o que leva à identificação das aprendizagens já consolidadas, e em que medida o trabalho para o desenvolvimento da habilidade em questão serve de base para as aprendizagens posteriores.

O desenvolvimento do ensino-aprendizagem de noções de probabilidade com alunos dos anos iniciais deve ser feito em um crescente, levando em conta as quatro competências listadas acima por meio do uso de recursos didáticos efetivos, tais como a proposição de jogos e a proposição de situações-problema a eles associados, segundo a Teoria de Resolução de Problemas tal qual defendido por Onuchic (1999). Todo o trabalho pedagógico que seja desenvolvido com esses propósitos configura-se parte importante da compreensão, apropriação, exercício e o desenvolvimento do conceito de probabilidade. De maneira mais geral, contribui decisivamente para o desenvolvimento do pensamento matemático.

O papel de mediador (o mesmo que organizador) da aprendizagem exige do professor que conheça muito bem os seus alunos, no tocante às suas expectativas e competências cognitivas, uma vez que ele é o responsável por escolher os problemas que possibilitarão a eles construírem o conhecimento de compreender aspectos procedimentais de resolução dos problemas e constantemente estar alimentando todo o processo de resolução de problemas, tendo em vista os objetivos deseja que eles os alcancem. Outra faceta do professor em todo o processo de ensino aprendizagem deve ser a de se portar com um ouvidor: aquele que alimenta os alunos com informações, textos, materiais etc. que são necessários a todo o processo. Processo que, de antemão, ele sabe que os seus alunos não têm condições de obtê-las sozinhos. Ademais, o próprio professor deve dar o exemplo ao exercitar o raciocínio combinatório quando promover, coletivamente, a resolução de problemas de contagem, durante momentos de reflexões e discussões, e enquanto exerce o papel de mediador. De maneira a acompanhar a apropriação e o exercício do raciocínio combinatório de seus alunos, de maneira adequada, o professor precisa fazer um acompanhamento diligente de como ele está sendo compreendido, exercitado e desenvolvido, durante a resolução dos problemas que propõe.

Não obstante passados mais de 13 anos que os PCN foram lançados ainda é muito presente nas escolas o ensino tradicional da matemática, baseado na exposição de resumo de parte do conteúdo por meio de definições, exemplos e exercícios de fixação/aplicação, presentes no livro didático ou em fichas de atividades auxiliares, metodologia essa que coloca o aluno diante de ações de passividade: ele vê, ouve e reproduz. Se, razoavelmente faz bem tudo isso, fica a sensação de que aprendeu o conteúdo.

Ou seja, o aluno não é instado pelo seu professor a estabelecer conexões entre os seus conhecimentos anteriores e as apropriações dos novos saberes, os quais podem ser feitos por meio da resolução de problemas.

Segundo Freire (2013, p. 83), “O fundamental é que professor e alunos saibam que a postura deles, do professor e dos alunos, *é dialógica, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada*, enquanto fala ou enquanto ouve. O que importa é que *professor e alunos se assumam epistemologicamente curiosos*” (grifos do autor).

Metodologia do estudo

No estudo, a metodologia “*Design Experiment in Educational Research”*, de Cobb; Confrey; DiSessa; Lehrer e Schauble (2003) é a indicada. A escolha da metodologia se dá em função de ela ser dotada de flexibilidade de adaptação ao desenho inicial proposto considerando as produções fornecidas pelos sujeitos do estudo. Segundo a metodologia, um desenho básico flexível - que pode ou não sofrer modificações ao longo de todo o processo do estudo – deve ser preliminarmente elaborado. Por conta de possíveis modificações, a metodologia permite que sejam geradas novas conjecturas, como é preciso, as quais precisam ser testadas a posteriori. Além do mais, tal metodologia prevê a elaboração de experimentos de ensino de conteúdos da matemática, com vistas à obtenção de inovações. Salienta-se que o professor precisa se responsabilizar por identificar as adaptações que se façam necessárias implementar ao longo do estudo ao assumir o papel de orientador, intervindo durante o desenrolar das tarefas propostas somente em momentos críticos, considerados por ele como de bloqueio. O estudo - previsto para ser desenvolvido ao longo de 5 a 6 aulas de 40 minutos cada - deve ter o seu início quando o propósito inicial for o de analisar a produção dos alunos no tocante ao conhecimento, apropriação e exercício do raciocínio combinatório; na construção de diagramas de árvore e nas resoluções e na comunicação de respostas referentes a um conjunto de problemas que devem ser propostos ao final de algumas rodadas do jogo: três, no máximo, para todos os alunos de uma mesma turma. O jogo se propõe a ser um disparador do ensino aprendizagem.

Segundo Lopes e Rezende (2010, p.680), “A associação do jogo com a resolução de problemas torna as aulas mais atraentes e participativas, os alunos tornam-se ativos na construção de seu próprio conhecimento”. Para atender ao propósito do jogo um planejamento precisa ser elaborado tomando por base o objetivo de desenvolver o conceito dos raciocínios combinatório e probabilístico segundo o significado de construir diagramas de árvore e o cálculo de probabilidades, para cada problema proposto. Inclusive, por conta do momento que atravessamos, de isolamento social, é propício que o estudo seja encaminhado pelo professor por meio de aulas on-line, considerando que o material para estruturar o jogo é bastante simples de preparar/encontrar e, espera-se, de fácil entendimento pelos alunos.

O jogo objeto deste trabalho foi testado por 4 alunos (duas duplas) do 4º Ano do ensino fundamental para a resolução do Problema 1, como a seguir. As resoluções objeto do referido problema (construção dos referidos diagramas de árvore; identificação do espaço amostral; a constatação da independência dos eventos, e o cálculo das probabilidades de cada evento) foram apresentadas no quadro branco e, em seguida, discutidas pelos estudantes, sem a intervenção do professor. Em prosseguimento, uma a uma as resoluções foram sendo testadas *in loco* pelos referidos alunos. Em Teixeira (2021) é apresentado o diagrama de árvore contendo todas as possibilidades como o jogo pode se desenrolar, desde os primeiros movimentos possíveis.

Recomenda-se que um estudo mais abrangente reúna um forte cunho descritivo em relação às regras do jogo, incluindo os diálogos havidos entre os estudantes e entre eles e o professor. Quando do retorno às aulas presenciais, recomenda-se o estudo seja desenvolvido mais uma vez, agora em um ambiente natural (sala de aula), para a coleta direta de dados da produção dos alunos, após reflexões, intervenções e discussões entre si e destes com o professor

- momentos em que o professor poderá exercer o efetivo papel de mediador na promoção de reflexões e discussões coletivas.

Conhecendo o jogo Grelha Retangular 3 x 4

I. Material a ser disponibilizado para uso durante o desenrolar do jogo: O jogo utiliza um tabuleiro retangular 3 x 4 (três quadrados menores dispostos no sentido vertical por 4 quadrados menores dispostos no sentido horizontal, totalizando 3 x 4 = 12 quadrados menores), denominado por *Grelha Retangular 3 x 4*. Trata-se de um jogo entre 2(dois) oponentes: A e B. Para realizar os movimentos sobre o tabuleiro são utilizadas 2(duas) *tampinhas de garrafa pet*: uma na cor amarela (para o jogador A) e outra na cor azul (para o jogador B). O jogador que vai dar início ao jogo será decidido por meio de uma disputa tipo *par ou ímpar*. O jogador vencedor dessa disputa deve colocar sua *tampinha de garrafa pet* no quadrado localizado no canto inferior à esquerda (ou canto superior à direita) e o seu oponente deverá colocar a sua *tampinha de garrafa pet* no quadrado localizado no canto superior à direita (ou canto inferior à esquerda), como nos tabuleiros intermediários da Figura 1, a seguir, os quais mostram a disposição das *tampinhas* antes de o jogo ser iniciado. Para o restante do texto considere que o jogador A foi o vencedor da disputa *par ou ímpar*. O tabuleiro mais à direita, na Figura 1, abaixo, aponta para um momento de jogo que foi interrompido após o 4º movimento, movimento este feito pelo jogador B, o último a jogar.

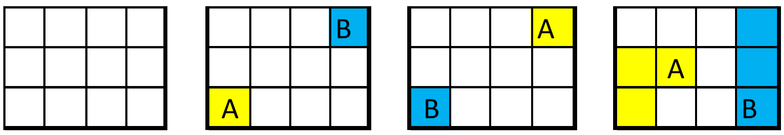

Figura 1: Tabuleiro do jogo *Grelha Retangular 3 x 4*, possíveis posições iniciais e os 4 primeiros movimentos de uma partida

II. Objetivos do jogo: O objetivo de cada jogador é capturar a *tampinha* do seu oponente ou conseguir posicionar sua *tampinha* na posição de partida do seu oponente quando do início do jogo. Para atender a qualquer um dos dois objetivos, será preciso que os jogadores obedeçam a certas regras do jogo, as quais serão mostradas em prosseguimento.

III. Regras do jogo: Eis as 4 regras para o jogo, as quais precisam ser compreendidas:

1ª regra: Conforme os dois primeiros tabuleiros, mostrados na Figura 2, a seguir, a primeira regra estipula que o jogador A pode movimentar sua *tampinha* na posição vertical, uma posição por vez, para cima ou para baixo, sendo permitido retornar à posição anterior apenas uma vez. Também pode movimentar sua *tampinha* na posição horizontal, uma posição por vez, somente para a direita; O jogador B pode movimentar sua *tampinha* na posição vertical, uma posição por vez, para cima ou para baixo, sendo permitido retornar à posição anterior apenas uma vez. Também pode movimentar sua *tampinha* na posição horizontal, uma posição por vez, somente para a esquerda. Uma *tampinha* situada na faixa cinza pode fazer um dentre os três possíveis movimentos, enquanto uma *tampinha* situada em qualquer uma das duas faixas de cor rosa pode fazer um dentre os dois possíveis movimentos.

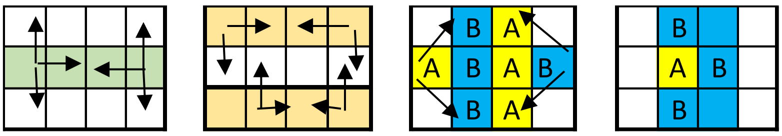

Figura 2: Movimentos permitidos no Tabuleiro do jogo *Grelha Retangular 3 x 4*

2ª regra: É obrigatória a captura da *tampinha* do oponente sempre que possível: quando as *tampinhas* do jogador e de seu oponente se encontrarem *em diagonal* (deve ser respeitado o sentido horizontal do jogador que vai fazer a captura: a captura da *tampinha* de B por A se dará apenas *em diagonal* para a direita, enquanto a captura da *tampinha* de A por B se dará apenas *em diagonal* para a esquerda. A captura de uma *tampinha* também pode ser feita quando uma *tampinha* estiver adjacente (junta) à outra. O último dos quatro tabuleiros, na Figura 2, acima, mostra a *tampinha* de A e as três possibilidades de captura da *tampinha* de B, na situação em que esta *tampinha* esteja adjacente a ela, a saber: o jogador A pode capturar a *tampinha* de B, e adjacente à sua, no sentido vertical, se o movimento não resultar em retorno à posição anterior pela segunda vez, mas o jogador A também pode capturar a *tampinha* de B que esteja adjacente à sua, no sentido horizontal, se este movimento indicar o sentido horizontal estabelecido: o sentido do jogador A, para a direita. Situações análogas são válidas em relação às movimentações da *tampinha* do jogador B. *3ª regra:* Será obrigatório finalizar a disputa sempre que um jogador estiver com a sua *tampinha* junto ao quadrado inicial do seu oponente ou sempre que a *tampinha* do seu oponente estiver em posição que o permita fazer a captura. *4ª regra:* O movimento das *tampinhas* durante o desenrolar do jogo não poderá ultrapassar o limite máximo de 10 (dez) movimentos. Assim, cada jogador poderá movimentar sua *tampinha*, no máximo por 5 vezes. Quando o jogador B fizer o 10º movimento (considerando que o jogador A inicia a disputa, como foi dito) a disputa estará encerrada. Se após o 10º movimento o jogador B não conseguir colocar sua *tampinha* na posição inicial do jogador A, a disputa será finalizada e o empate estará configurado.

IV. Objetivo pedagógico do jogo: A restrição em relação ao número máximo de 10(dez) movimentos tem duas razões: A primeira é a de permitir que o jogo não se estenda por muitos movimentos, tornando-o cansativo e desinteressante pelos alunos. A segunda razão tem a ver com a resolução de problemas combinatórios e probabilísticos associados ao jogo - que são sugeridos aos professores, em prosseguimento - de modo que avaliem a viabilidade/possibilidade de propor aos seus alunos. Tal razão vai ao encontro de encurtar as resoluções de alguns problemas, sem deixar de permitir que o exercício dos raciocínios combinatório e probabilístico, durante a construção de diagramas de árvore (para se chegar à lista de todas as possibilidades como o jogo poderia se desenrolar, a partir de determinado momento do jogo ou desde o seu início), e a determinação da chance de cada jogador vencer. Ademias o objetivo pedagógico do jogo oportuniza aos alunos refletirem acerca do estabelecimento de uma *estratégia vencedora* que possa ser posta em prática, se for o caso, enquanto vão sendo explorados conceitos de combinatória e de probabilidade. Espera-se que cada jogador se comporte como um jogador pro ativo, isto é, um jogador que deseja vencer o jogo e aprender com ele. Podemos dizer que o jogo é, por assim dizer, um disparador do ensino aprendizagem de alguns conceitos da análise combinatória e da probabilidade. Para resolver os problemas, sugerimos que o professor e alunos recorram à construção de diagramas de árvore com o propósito de identificar todas (ou algumas) possibilidades que o rumo de uma partida pode tomar. Está aí o primeiro conhecimento básico de combinatória a partir do jogo: a construção de diagramas de árvore. Uma vez construído o diagrama de árvore por completo (a partir do início de uma partida, ou de um particular momento do jogo) todos os resultados finais do prosseguimento da partida tornar-se-ão conhecidos. Por sua vez, cada resultado mostrado no diagrama da árvore pode ser alcançado por cada jogador conforme tenha sido o desenrolar de uma partida. Então, os objetivos pedagógicos do jogo são que os jogadores se deparem com a necessidade de ter de tomar uma decisão para movimentar sua *tampinha*, e dar prosseguimento à partida, respeitando as regras estabelecidas; exercitem o raciocínio combinatório enquanto aprendem a construir um diagrama de árvore; se apropriem de novos conhecimentos próprios da combinatória e da probabilidade e, se for o caso, encontrem uma *estratégia vencedora* para a partida - desde o início dela, ou a partir de um particular momento.

Portanto, não se trata de um simples jogo que se joga por jogar, de uma diversão, mas de um jogo que contém desafios a serem alcançados pelos jogadores. Um dos desafios, e não menos importante, é o de verificar a possibilidade de estabelecer uma *estratégia vencedora*, se for o caso. Ademais, importante e necessário se faz considerar que os jogadores reflitam e decidam quanto ao jogo ser um jogo de sorte/azar ou um jogo de estratégia. Também, que decidam em relação ao jogo ser um *jogo combinatório* ou não.

V. Organização dos alunos em sala: Os participantes podem participar do jogo tanto de modo individual (um jogador contra outro jogador) quanto em grupos menores. *VI. Alunos comunicando a aprendizagem*: Recomendamos ao professor que oportunize aos alunos a possibilidade de mostrarem o que aprenderam com o jogo. Para tal, o professor deve promover reflexões e discussões conjuntas a esse respeito e pedir que os alunos escrevam sobre o que aprenderam com o jogo. *VI. Explorando problemas associados com o jogo*: Uma vez que os alunos conheçam bem as regras do jogo - após terem jogado por algumas rodadas, no máximo por 3 vezes - o professor deve propor problemas a ele relacionados em prosseguimento às disputas. Sugerimos alguns, como a seguir:

Problema 1: A e B estão jogando o jogo *Grelha Retangular 3 x 4***.** O professor Rui chega junto à mesa onde eles estão, observa a disposição das *tampinhas de garrafa pet* sobre o tabuleiro após os 6 primeiros movimentos; confere as anotações que fizeram no desenho do tabuleiro, em papel, e faz a seguinte proposta: agora vocês não vão mais continuar jogando. Juntos, devem encontrar todas as possibilidades como a partida poderá se desenrolar a partir desse 6º movimento, como mostrado aqui no tabuleiro, até que ela chegue ao seu final, assinalando as possibilidades e as chances de A sair vencedor, de B sair vencedor e/ou ocorrer empate, se for o caso. Eis a configuração da partida após o 6º movimento:

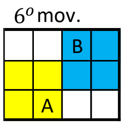

Figura 3: Configuração do jogo *Grelha Retangular 3 x 4*, após o 6º movimento

A Figura 4, a seguir, mostra todos os possíveis movimentos até o 10º movimento de uma partida (os últimos movimentos, pois conforme a 4ª regra o jogo termina aí), a partir do particular momento, após o 6º movimento da partida, o qual foi considerado. A indicação dos quadrados na *cor verde* mostra-nos que a *tampinha* (do jogador A e do jogador B, em cada caso) retornou ao quadrado pintado na cor verde e, portanto, nenhum dos jogadores poderá retornar com a sua *tampinha* para estes quadrados nas jogadas subsequentes. Para esta particular situação de uma partida, em análise, percebe-se que não será necessário tal preocupação em relação ao retorno, uma vez que as *tampinhas* foram *capturadas* em seguida.

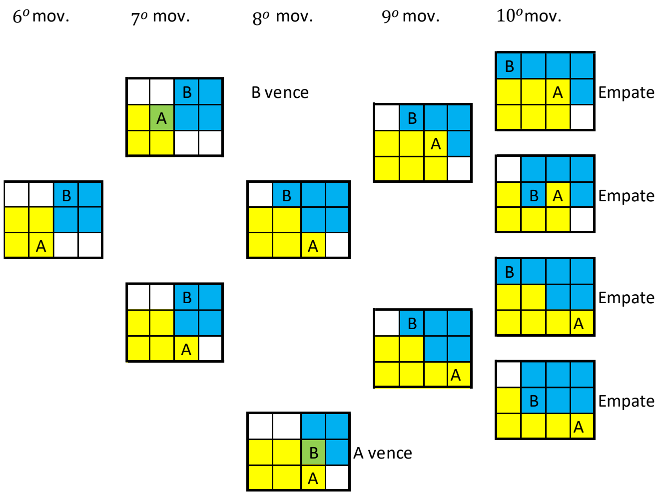

Figura 4: Situações de jogo possíveis após o fim de uma partida considerando o movimento inicial, por ocasião do 6º movimento

Observe que A pode vencer a partida no 9º movimento e B pode vencer no 8º movimento, e em quatro possibilidades ocorre empate. Assim, considerando uma disputa que se inicie ao final do 6º movimento, com a distribuição conforme indicado, na situação em que A movimenta sua *tampinha* no sentido horizontal para a direita ele não perde o jogo. A partir daí é possível levantar hipótese de uma possível *estratégia vencedora* para A? Há uma *estratégia vencedora* para B? Um ponto para a reflexão dos alunos é perguntar-lhes sobre o que levou B a vencer a partida em uma única oportunidade, considerando que ele sempre faz sua jogada depois que A faz a sua. O diagrama de árvore pode dar pistas para responder essa pergunta? Seria uma pista, para encontrar uma possível *estratégia vencedora* para B?

De início, é importante que o professor apresente situações de uma partida após o 6º ou o 7º movimento e peça aos alunos que construam diagramas de árvore até a sua finalização. Mais adiante, o mesmo pode ser solicitado a partir do 4º ou do 5º movimento e, por fim, a construção do diagrama de árvore completo a partir dos primeiros movimentos de jogo (os quais podem ser feitos pelo jogador A). Assim, a construção do diagrama de árvore completo para o jogo finaliza a consecução do propósito de haver permitido que o aluno compreenda ações e possíveis tomadas de decisão, necessárias para tal, para este particular problema e outros que se sigam ao estudo da temática. O importante é que o aluno tenha entendido bem as regras do jogo e se apropriado das orientações iniciais acerca da construção de um diagrama de árvore de modo que tenha autonomia para fazer o que é preciso: exercitar o raciocínio combinatório quando da tomada de decisões em relação à movimentação da sua *tampinha* e que reúna competências para resolver problemas de probabilidade, como os propostos a seguir.

Problema 2: Ainda em relação ao Problema 1, uma vez que a visualização das possibilidades de uma partida no diagrama de árvore nem sempre é confortável, por conta do grande número de combinações de jogadas e o fato de em alguns movimentos haver superposição da cor amarela sobre a cor azul (e vice-versa) sem que haja a captura de uma *tampinha*, sugerimos que outra representação possa ser utilizada pelos jogadores. Por exemplo, considere a situação em que o jogador A vence uma partida no 9º movimento de jogo - como a situação representada na Figura 5, a seguir, levando em conta uma possível numeração para os 12 quadrados:

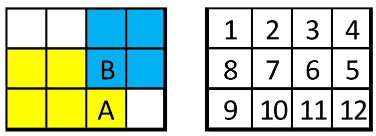

Figura 5: Tabuleiro de jogo com numeração e movimentos de um jogo que levaram A vencer

Uma possibilidade de representação para os 9 movimentos de uma partida em que o jogador A vence, como mostrado acima, poderia ser apresentada assim: $\begin{pmatrix} A: 9, 8, 7, 10, 11, 6 \\ B: 4, 5, 6, 3, 6 \end{pmatrix}$. Neste exemplo, A vence o jogo ao *capturar* a *tampinha* de B no quadrado 6. Nesta representação, A é vencedor quando o seu último movimento é 4 (posição inicial de B) ou quando os dois últimos lançamentos dos dois jogadores mostrarem valores iguais, antes que o jogo chegue ao final e A tenha mais registros que B; B é vencedor quando seu último movimento é 9 (posição inicial de A) ou quando os dois últimos lançamentos dos dois jogadores mostrarem valores iguais, antes que o jogo chegue ao final e B tenha mais registros que A; Quando os valores dos últimos movimentos dos dois jogadores apontarem valores diferentes tem-se um empate, que ocorre no final. Em caso de empate há igual quantitativo de registros para os dois jogadores (limitado à quantidade de 10 movimentos, conforme a 3ª regra do jogo) e os últimos valores registrados para os dois jogadores não coincidem. Em seguida, mostramos todas as possibilidades do jogo *Grelha Retangular 3 x 4* por meio desta nova representação após a movimentação das *tampinhas* por ocasião do 6º movimento de uma partida, como início da análise de todas as possibilidades. Claramente, estas possibilidades estão no diagrama de árvore, acima. Representação da vitória de A após o 9º movimento: $E_1 = \begin{pmatrix} A: 9, 8, 7, 10, 11, 6 \\ B: 4, 5, 6, 3, 6 \end{pmatrix}$; representação da vitória de B após o 8º movimento: $E_2 = \begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,7 \\ B: 4,5,6,3,7 \end{pmatrix}$; representações dos 4 empates: $E_3 = \begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,11,6 \\ B: 4,5,6,3,2,1 \end{pmatrix}$ ou $E_4 = \begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,11,6 \\ B: 4,5,6,3,2,7 \end{pmatrix}$ ou $E_5 = \begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,11,12 \\ B: 4,5,6,3,2,1 \end{pmatrix}$ ou $E_6 = \begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,11,12 \\ B: 4,5,6,3,2,7 \end{pmatrix}$.

Problema 3: Suponha, ainda para a situação de jogo apresentada no Problema 1, que A e B vão disputar o jogo *Grelha Retangular 3 x 4* de um modo diferente, a partir do 6º movimento de jogo, como foi mostrado. Eis a maneira diferente como eles vão disputar o jogo: A e B vão fazer os movimentos de suas respectivas *tampinhas* de maneira aleatória, assim: antes de fazer cada movimento com a sua respectiva *tampinha*, e que esteja em um quadrado pintado de cor rosa, como na Figura 2, acima, cada um lança uma moeda ao chão e observa a face voltada para cima. Caso apareça *cara* na face voltada para cima deve movimentar a *tampinha* na direção horizontal e caso apareça *coroa* na face voltada para cima deve movimentar a *tampinha* na direção vertical. Se a *tampinha* está em um quadrado pintado de cor verde claro, como na Figura 2, acima, se lança um dado honesto de 6 faces ao chão e observa-se a face voltada para cima. Caso apareça *1* ou *6* na face voltada para cima deve movimentar a tampinha na direção horizontal; caso apareça *2* ou *5* na face voltada para cima deve movimentar a *tampinha* na direção vertical para cima, e caso apareça *3* ou *4* na face voltada para cima deve movimentar a *tampinha* na direção vertical para baixo. As demais regras do jogo devem continuar sendo respeitadas. Para tanto, não esqueça que no caso de as duas *tampinhas* estarem em diagonal é obrigatório fazer o *movimento de captura* da *tampinha* do oponente, bem como se as duas *tampinhas* estiverem adjacentes. Nestes casos, a moeda não deve ser lançada pois considera-se estar diante de um evento certo, probabilidade igual a 1. O mesmo ocorre em relação à chegada à posição inicial de jogo do oponente.

Cada um desses últimos *eventos* é dito tratar-se de *evento certo*, probabilidade igual a 1. Então, o jogo vai funcionar assim: Se dois quadrados adjacentes (um junto ao outro) estiverem disponíveis, o jogador que vai fazer o movimento tem probabilidade ½ para mudar sua *tampinha* na direção horizontal e probabilidade ½ para mudar sua *tampinha* na direção vertical (para cima ou para baixo, apenas uma delas); Se três quadrados adjacentes (um junto ao outro) estiverem disponíveis, o jogador que vai fazer o movimento tem probabilidade 1/3 para mudar sua *tampinha* na direção horizontal; probabilidade 1/3 para mudar sua tampinha na direção vertical para cima e probabilidade 1/3 para mudar sua *tampinha* na direção vertical para baixo; Se apenas um quadrado estiver disponível o jogador que vai fazer o movimento tem probabilidade 1 para mudar sua *tampinha*. Ou seja, se está diante de um *evento certo*. Já vimos que o Espaço Amostral para esse experimento aleatório, segundo o que foi mostrado no diagrama de árvore acima, apresenta 6(seis) *eventos elementares*. Isto é, há 6 ramos do diagrama de árvore. Devemos, pois, calcular as probabilidades de ocorrência para cada um desses *eventos elementares,* neste espaço amostral, segundo a função de probabilidade que foi definida.

Vamos determinar a probabilidade para cada um dos 6 eventos elementares, como apresentados nas representações acima. As movimentações das tampinhas são *eventos* independentes. A probabilidade do evento E_1 = {$\begin{pmatrix} A: 9, 8, 7, 10, 11, 6 \\ B: 4, 5, 6, 3, 6 \end{pmatrix}$}: p($E_1$) = 1/2 (o jogador A movimenta sua *tampinha* do quadrado 10 para o quadrado 11, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 10 para o quadrado 7) x 1/2 (o jogador B movimenta sua *tampinha* do quadrado 3 para o quadrado 6, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 3 para o quadrado 2) x 1 (evento certo: o jogador A captura a *tampinha* do jogador B no quadrado 6, movimento obrigatório de captura) = ¼; evento E_2 = {$\begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,7 \\ B: 4,5,6,3,7 \end{pmatrix}$}: p($E_2$) = 1/2 (o jogador A movimenta sua *tampinha* do quadrado 10 para o quadrado 7, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 10 para o quadrado 11) x 1 (evento certo: o jogador B captura a tampinha do jogador A no quadrado 7, movimento obrigatório de captura) = ½; E_3 = {$\begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,11,6 \\ B: 4,5,6,3,2,1 \end{pmatrix}$}: p($E_3$) = 1/2 (o jogador A movimenta sua *tampinha* do quadrado 10 para o quadrado 11, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 10 para o quadrado 7) x 1/2 (o jogador B movimenta sua *tampinha* do quadrado 3 para o quadrado 2, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 3 para o quadrado 6) x 1/2 (o jogador A movimenta sua *tampinha* do quadrado 11 para o quadrado 6, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 11 para o quadrado 12) x 1/2 (o jogador B movimenta sua *tampinha* do quadrado 2 para o quadrado 1, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 2 para o quadrado 7)= 1/16; E_4 = {$\begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,11,6 \\ B: 4,5,6,3,2,7 \end{pmatrix}$}: p($E_4$) = 1/2 (o jogador A movimenta sua *tampinha* do quadrado 10 para o quadrado 11, mas teria a possibilidade de movimentar sua tampinha do quadrado 10 para o quadrado 7) x 1/2 (o jogador B movimenta sua tampinha do quadrado 3 para o quadrado 2, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 3 para o quadrado 6) x 1/2 (o jogador A movimenta sua tampinha do quadrado 11 para o quadrado 6, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 11 para o quadrado 12) x 1/2 (o jogador B movimenta sua tampinha do quadrado 2 para o quadrado 7, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 2 para o quadrado 1) = 1/16; E_5 = {$\begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,11,12 \\ B: 4,5,6,3,2,1 \end{pmatrix}$}: p($E_5$) = 1/2 (o jogador A movimenta sua tampinha do quadrado 10 para o quadrado 11, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 10 para o quadrado 7) x 1/2 (o jogador B movimenta sua tampinha do quadrado 3 para o quadrado 2, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 3 para o quadrado 6) x 1/2 (o jogador A movimenta sua tampinha do quadrado 11 para o quadrado 12, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 11 para o quadrado 6) x 1/2 (o jogador B movimenta sua tampinha do quadrado 2 para o quadrado 1, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 2 para o quadrado 7) = 1/16; $E_6 = \{\begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,11,12 \\ B: 4,5,6,3,2,7 \end{pmatrix}\}$: p($E_6$) = 1/2 (o jogador A movimenta sua tampinha do quadrado 10 para o quadrado 11, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 10 para o quadrado 7) x 1/2 (o jogador B movimenta sua tampinha do quadrado 3 para o quadrado 2, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 3 para o quadrado 6) x 1/2 (o jogador A movimenta sua tampinha do quadrado 11 para o quadrado 12, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 11 para o quadrado 6) x 1/2 (o jogador B movimenta sua tampinha do quadrado 2 para o quadrado 7, mas teria a possibilidade de movimentar do quadrado 2 para o quadrado 1) = 1/16. Portanto: p (A vencer) = p(E_1) = 1/4; p (B vencer) = p(E_2) = 1/2; p (Empate) = p($E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6$) = p($E_3$) + p($E_4$) + p($E_5$) + p($E_6$) = 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 = ¼. Importante observar a vantagem de utilizar a representação mostrada acima para o cálculo das probabilidades, diferente do que seria no diagrama de árvore. Note que o Espaço Amostral EA = $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ não é equiprovável.

Problema 4: Considere o jogo *Grelha Retangular 3 x 4* segundo as regras estabelecidas acima. Encontre todas as possibilidades como uma partida pode se desenrolar, a partir dos dois primeiros possíveis movimentos, até que ela chegue ao seu final com vitória (s) de A ou vitória (s) de B ou empate (s). Observe que em 2(duas) possibilidades possíveis de desenvolvimento da partida, o jogador A é vencedor já no 3º movimento; em 5 possibilidades, o jogador A é vencedor no 5º movimento de jogo; em 12 possibilidades, o jogador A é vencedor no 7º movimento de jogo; em 2 possibilidades, o jogador B é vencedor no 8º movimento de jogo, e em 6 possibilidades ocorre empate no 8º movimento de jogo. Assim, A vence em 19 possibilidades de jogo, enquanto B vence em apenas 2 possibilidades, e ocorre empate em 6 possibilidades. Para todas estas 27 possibilidades, que precisam ser mostradas em um diagrama de árvore, utilize a outra representação, como mostrado acima, não só por conta do grande número de combinações de jogadas quanto pelo fato de em alguns movimentos haver superposição da cor amarela sobre a cor azul (e vice-versa) sem que haja a *captura* de tampinha.

Problema 5: Considere que A e B vão fazer os movimentos de suas respectivas *tampinhas* de maneira aleatória, assim: antes de fazer cada movimento com a sua respectiva *tampinha*, cada um lança uma moeda ao chão e observa a face voltada para cima. Caso apareça *cara* na face voltada para cima ela deve movimentar a tampinha na direção horizontal e caso apareça *coroa* na face voltada para cima ela deve movimentar a *tampinha* na direção vertical. As demais regras do jogo devem continuar sendo respeitadas. Também não esqueça, no caso de as duas *tampinhas* estarem em diagonal que é obrigatório o movimento de *captura* da *tampinha* do oponente e, então, a moeda não deve ser lançada. O mesmo ocorre em relação à chegada à posição inicial de jogo do oponente. Cada um desses *eventos* é dito *evento certo*, probabilidade igual a 1. Então, o jogo vai funcionar assim: Se dois quadrados adjacentes (um junto ao outro) estiverem disponíveis o jogador que vai fazer o movimento tem probabilidade ½ para mudar sua *tampinha* na direção horizontal e probabilidade ½ para mudar sua *tampinha* na direção vertical (para cima ou para baixo, apenas uma delas); Se três quadrados adjacentes (um junto ao outro) estiverem disponíveis o jogador que vai fazer o movimento tem probabilidade 1/3 para mudar a sua *tampinha* na direção horizontal; probabilidade 1/3 para mudar sua *tampinha* na direção vertical para cima, e probabilidade 1/3 para mudar sua *tampinha* na direção vertical para baixo; Se apenas um quadrado estiver disponível o jogador que vai fazer o movimento tem probabilidade 1 para mudar sua *tampinha*. Ou seja, estamos diante de um *evento certo*. O Espaço Amostral para esse experimento aleatório apresenta 27 *eventos elementares*, isto é, há 27 ramos do diagrama de árvore. Devemos, pois, calcular as probabilidades de ocorrência para cada um desses *eventos elementares* neste espaço amostral.

(a) Determine a probabilidade para cada um dos 27 eventos elementares; (b) Segundo as regras estabelecidas, este Espaço Amostral é equiprovável? Explique; (c) Qual a probabilidade de Ana vencer o jogo?; (d) Qual a probabilidade de Bia vencer o jogo?; (e) Qual a probabilidade de ocorrer empate?; (f) Por que a probabilidade de A vencer o jogo é tão maior que a probabilidade de B vencer o jogo ou de ocorrer empate? Explique.

Problema 6: A e B estão jogando o jogo *Grelha Retangular 3 x 4***.** Supondo que após o 5º movimento a *tampinha* de A esteja no quadrado de número 8 e a tampinha de B esteja no quadrado de número 1, há algum movimento que A possa fazer para impedir que B vença o jogo? Explique.

Problema 7: A e B estão jogando o jogo *Grelha Retangular 3 x 4*. Há algum movimento inicial de jogo que A possa fazer de modo que este movimento já lhe garanta vitória sobre B logo no 3º movimento de jogo? Se sim, qual?

Problema 8: A e B estão jogando o jogo *Grelha Retangular 3 x 4*. Considerando que A inicia jogando, você identificou uma *estratégia ganhadora* de modo que B vença o jogo? Em caso afirmativo, descreva-a;

Problema 9: A e B estão jogando o jogo *Grelha Retangular 3 x 4*. Considerando que A inicia jogando, você identificou uma *estratégia ganhadora* de modo que A vença o jogo? Em caso afirmativo, descreva-a.

Conhecimentos do conteúdo raciocínio probabilístico

Uma vez que o professor de Matemática já saiba de antemão que o conceito de raciocínio combinatório está presente em um particular conjunto de problemas ele precisa ter amplo domínio acerca deste conceito e dos seus diferentes significados, conforme seja a aplicação que está em estudo. A maioria das aplicações podem ser exploradas com alunos do Ensino Fundamental, mas também com alunos do Ensino Médio.

O domínio do conteúdo permite ao professor sentir-se em condições de fazer a transposição didática para cada um dos significados do conceito raciocínio combinatório, conforme o universo de alunos em que a temática está sendo desenvolvida. Não é uma tarefa simples, pois o professor precisa ter compreensão plena acerca das ferramentas que devem ser mobilizadas para caracterizar o modelo matemático que atende a situação que está sendo explorada. É o que Shulman (1986, p.2) chama de "*conhecimento pedagógico do conteúdo*" (tradução nossa).

Para este particular contexto, tal conhecimento deve ser mobilizado pelo professor de modo que mostre compreensão plena acerca dos significados dos princípios de contagem, os quais precisam ser apropriados pelos alunos quando da apresentação e o desenvolvimento da temática independentemente do conteúdo que esteja sendo explorado e para qual universo de alunos do ensino básico tenha como propósito atender.

Neste estudo, o objeto matemático que foi ressaltado contempla as competências que estão associadas com o propósito de propor, refletir, discutir e resolver problemas de contagem que, por sua vez, permitem o exercício do raciocínio combinatório - explorando ideias básicas, em um contexto da combinatória -, desde os anos iniciais e em um crescente.

Também, porque os problemas relacionados com esse conteúdo devem ser explorados ao longo de toda a educação básica segundo uma metodologia que se aproxime de uma *espiral*: o conteúdo é retomado de tempos em tempos, para ser ampliado com a proposição de novos e mais complexos problemas de contagem. Todo o estudo tem o propósito de tornar conhecidas técnicas de contagem para resolver problemas de contagem, desde os problemas mais simples até os mais complexos, os quais exigem técnicas de contagem mais sofisticadas e/ou o uso de mais que um conteúdo em conjunto com outro (s). Em comum, o exercício do raciocínio combinatório e do exercício do pensamento probabilístico, quando for o caso.

Ao iniciar o estudo, o professor precisa estimular a exploração de conceitos matemáticos associados com o pensamento aditivo, o pensamento multiplicativo e o raciocínio combinatório por meio da proposição de problemas que envolvam diferentes tipos de agrupamentos de problemas. Trata-se de um conteúdo da Matemática que precisa ser apresentado, explorado, discutido e fundamentado desde os anos iniciais do ensino fundamental, uma vez que tal possibilidade permite promover a inserção dos alunos em problemas presentes no cotidiano de suas famílias, desde então, a partir de conceitos da própria Matemática.

Por essas razões, consideramos que o conhecimento e a apropriação de conceitos da combinatória e da probabilidade pelos alunos mostram-se importantes e indispensáveis ser desenvolvidos na escola, já desde a mais tenra idade. Por conta dessas considerações, concordamos com Teixeira (2020), quando este enfatiza que

> [...] tais experiências apresentam possibilidades de novas aprendizagens no exercício docente a partir de ações dialógicas e da interação entre pares, as quais vêm reforçar uma tese muito presente na área de formação e prática docente de professores, em grupos colaborativos, segundo a qual é pela reflexão na prática e sobre a prática que se pode reestruturar os conhecimentos profissionais dos professores (Teixeira, 2020, p.111).

Considerações finais

Ao apresentar e analisar o jogo da *Grelha Retangular 3 x 4* e algumas possibilidades de como ele pode contribuir para o estudo inicial acerca da construção de diagramas de árvore e a apropriação dos raciocínios combinatório e probabilístico por estudantes do ensino fundamental, entendemos ser este um caminho promissor para o ensino das temáticas.

Consideramos ser esta mais uma possibilidade para o professor explorar esse conteúdo no seu trabalho docente, sem desconsiderar outras possibilidades didáticas. Como consequência, tanto o entendimento do jogo quanto a sua proposição e avaliação revestem-se de oportunidades para o professor ampliar conceitualmente os seus conhecimentos: de conteúdo e pedagógicos acerca da temática, segundo Shulman (1986). O entendimento acerca dos propósitos do jogo representa um degrau a mais para o professor galgar na longa construção e (re) significação da sua prática docente, tanto no que refere ao conhecimento de conteúdo quanto em relação aos conhecimentos pedagógico de conteúdo e curricular. Embora o jogo tenha sido testado por um pequeno número de 4 estudantes, os resultados obtidos mostraram-nos que a ampliação conceitual que ele proporciona de aprendizado foi bastante significativo, uma vez que 3 dentre as 4 competências elencadas por Bryant, P. e Nunes, T. (2012) foram contempladas. Com a resolução de mais problemas (dentre os outros 8 problemas sugeridos, ou outros) e o aumento do número de sujeitos de estudo (toda a turma), são esperados resultados promissores.

Não podemos considerar relevante que a proposição de um jogo em um contexto de sala de aula revista-se da ideia de que seja "*uma diversão, o jogo pelo jogo, e mais nada além do fato de ocupar os alunos com o seu jogar e divertir-se*".

Um jogo didático deve fazer parte de um contexto de ensino aprendizagem mais amplo que a simples ocupação de o estar jogando. Ou seja, um jogo didático, como é o caso do jogo da grelha retangular 3 x 4, deve propiciar condições favoráveis para a apropriação de um ou mais conhecimentos. É neste contexto que o jogo da grelha apresenta a proposta de ir além da diversão, permitindo que os jogadores exercitem o raciocínio combinatório para a construção de diagramas de árvore; o estabelecimento do espaço amostral de possibilidades (eventos prováveis ocorrer); bem como a quantificação e a comparação de probabilidades.

Assim, a proposição deste jogo não foi concebida visando a diversão dos alunos com o seu jogar mas que, por meio dele e com ele, possibilite ao aluno construir conhecimentos.

De modo que um jogo possa se caracterizar como um recurso auxiliar do professor no ensino aprendizagem da Matemática escolar é imprescindível que esse jogo faça o jogador pensar para tomar uma decisão: pensar sobre a jogada que vai fazer em seguida, e os desdobramentos de poder ter tomado uma decisão e não outra. O jogo da grelha se propõe a tal.

Um jogo didático precisa apresentar desafios a todos os que o jogam de modo que, para vencer o jogo, um jogador precise superar tais desafios por meio do estabelecimento de estratégia (s) proativa (s) que o permitam sair vencedor e não que os jogadores considerem o jogo apenas como só mais uma diversão, entre tantas outras, em que ora um vence ora vence o outro. É claro que a diversão é um componente importante para o desenrolar de um jogo, mas a diversão não pode ser apenas o mote que motive professor para propor um jogo didático. É preciso que o jogo contenha o componente didático, o pensar, o decidir, como é o caso do jogo grelha, ora proposto, e não um jogo de sorte e azar.

Além do mais é recomendável e saudável que os alunos, após terem elaborado estratégias pessoais para vencer um jogo, as compartilhem com os colegas do seu "time" e, em algum momento posterior à disputa, também o façam com os colegas que foram seus oponentes quando da disputa, e outros colegas que não participaram do jogo até então. Enquanto partilham as variadas estratégias pessoais de jogo, invariavelmente os alunos criam uma atmosfera agradável de trocas, reflexões e questionamentos entre si, as quais os levam a uma ampliação conceitual acerca do conhecimento matemático subjacente ao jogo em si e os conhecimentos que, subliminarmente, também estão presentes quando do desenrolar do jogo.

Um jogo didático, como é o caso do jogo grelha retangular 3 x 4, favorece, pois, a oportunidade de trabalhar em grupo, a descoberta, a partilha de saberes e a ampliação da aprendizagem de um novo conteúdo matemático nele presente - estendendo-se ao desenvolvimento de competências que visam o preparar cada jogador para competir no jogo de modo mais eficiente. O jogo da grelha 3 x 4 também possibilita o exercício do pensamento (raciocínio) probabilístico; a análise de possibilidades para fazer a *combinação de objetos* de modo a formar o espaço amostral; as reflexões para a tomada de decisões; a realização de testes de hipóteses, que são levantadas durante as discussões coletivas; a ampliação do debate acerca da descoberta e a ampliação de estratégias de jogo que visam melhorar a compreensão e a apropriação de conceitos.

Um jogo didático também leva os atores envolvidos a atitudes relacionadas com o hábito e o desenvolvimento de ações pertinentes ao processo de argumentação. Portanto, ressaltamos o quanto um jogo didático pode favorecer o trabalho de um professor no tocante à apresentação e o desenvolvimento de ferramentas matemáticas concernentes ao ensino e aprendizagem de um conteúdo matemático, por meio dele e a partir dele. Em particular, o ensino aprendizagem de probabilidade em conjunto com o de combinatória, desde os anos iniciais do ensino fundamental, por meio do jogo grelha retangular 3 x 4.

Ressaltamos, também, que o bom uso de um jogo e a sua adequada exploração pode contribuir com o professor para que ele melhore os seus instrumentos observacionais em relação ao rendimento e os conhecimentos dos seus alunos, de maneira mais amiúde. Tudo isso, porque o jogo permite ao professor conhecer melhor as dificuldades de seu aluno e as interpretações que ele faz quando da leitura do enunciado de um problema, por exemplo. Também em relação às fragilidades conceituais que porventura o aluno possa vir a ter - mais facilmente identificáveis, durante o jogo -, bem como as concepções e crenças que cada um tem a respeito do conhecimento matemático objeto do jogo e em relação às atividades que devem se seguir ao seu desenrolar.

Com base em todas essas considerações, o professor pode/deve refletir acerca de quais conhecimentos e competências terá de considerar para ajudar o seu aluno a superar as dificuldades que tem e, assim, poder contribuir para melhorar o rendimento escolar dos seus alunos no tocante ao ensino aprendizagem da Matemática como um todo.

Finalizando, enfatizamos a pertinência de se realizar futuros estudos que abordem as propostas presentes nos problemas sugeridos (e, talvez, outros), de modo a conhecer mais amiúde como se dá a compreensão e o exercício do pensamento combinatório para a construção de diagramas de árvores; o estabelecimento de outros espaços amostrais e a quantificação e a comparação de probabilidades, em consonância com o desenvolvimento de habilidades e competências salientadas na BNCC.

Referências

Batanero, C.; Godino, J.D.; Navarro-Pelayo, V. (1997). *Combinatorial reasoning and its assessment*. In: Gal, I.; Garfield, D.J.B. (Ed.). The assessment challenge in statistics educativo. Minnesota: IOS Press, pp. 239-252. https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbkref. Acesso: 13 abr.2021.

Brasil. (1997) *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos*. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. Brasília.

Brasil. (1998) *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: Matemática.* Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2018) *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação. Brasília. Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_19mar2018_versaofinal.pdf

Bryant, P.; Nunes, T. (2012) *Children's understanding of probability: a literature review*. Londres. Nuffield Foundation. Recuperado de https://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003) *Design Experiments in Educational Research*. Educational Researcher, volume (32. No. 1) pp. 9-13.

Fischbein, E. (1975) The intuitive sources of probabilistic thinking in children. *Dordrecht: Reidel*.

Franco, M.A.S. (2005). *Pedagogia da Pesquisa-ação*. Revista Educação e Pesquisa. V.31.n.3. set/dez. 483-502. São Paulo. SP. Recuperado de http:// www.sciwlo.br/pdf/ep/v31/n3/a11v31n3.pdf

Freire, P. (2013). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra.

Grando, R.C. (2000) *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas (SP). Recuperado de http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/251334

Lopes, J.M.; Rezende, J. de C. (2010). *Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade*. Bolema, Rio Claro (SP), v.23, no 36, pp.657-682.

Muniz, C.A. (2010) *Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. & Godino, J.D. (1996) *Razonamiento combinatório em alumnos de secundaria. Educación Matemática*. Grupo Editorial Ibero América, Madrid, volume (8(1)), pp. 26-39.

Onuchic, L. R. (1999) *Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas*. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP.

Teixeira, P.J.M. (2014) *Resolvendo problemas de Análise Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Editora Ciência Moderna Ltda, 1ª Edição, Rio de Janeiro, 173p.

Teixeira P.J.M. (2020) *Práticas de professores do ensino fundamental durante a resolução de problemas de contagem. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v.22, n.2, p.081-113.*

Teixeira, P.J.M. (2021) *Curiosidades, Passatempos, Desafios e Jogos Combinatórios*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Shulman, L. S. (1986) *Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational*, volume (15, n.2), p.4-14.