Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental

MARIA LUCIA FARIA MORO*
MARIA TEREZA CARNEIRO SOARES**

Resumo

O estudo descreve níveis do raciocínio combinatório de crianças na solução de problemas de produto cartesiano conforme Piaget e Vergnaud. Os participantes, 50 alunos de uma escola pública (7;8 a 11;2) resolveram quatro problemas multiplicativos de produto cartesiano (prova lápis e papel) empregando o tipo de notação que quisessem. Os resultados mostram: níveis hierárquicos da elaboração do raciocínio combinatório; sinais de relação desses níveis com a escolaridade dos sujeitos, apesar da incidência de soluções aditivas, e desses níveis com o tipo de problema, mas somente quando considerada a escolaridade. A discussão destaca, na construção descrita, marcas da abertura para os possíveis em seu interjogo com o necessário, e a elaboração de esquemas específicos às relações matemáticas em jogo. Implicações para a educação matemática são também inferidas dos resultados.
Palavras-chave: raciocínio combinatório; produto cartesiano; matemática na escola elementar.

Abstract

This paper describes children's construction of combinatory reasoning when solving problems of Cartesian product inspired by Piaget's and Vergnaud's proposals. Fifty students attending a State Elementary School (7;8 to 11;2) solved four multiplicative problems (paper and pencil test) concerning the Cartesian product, with any type of notation. Results show hierarchical levels of the construction of the combinatory reasoning. These levels seem to be related to subjects' school grade, despite the incidence of additive solutions, and to problem type, but only when linked to school grade. The discussion underlines, in the described construction, the marks of an overture to the possibilities in their interplay with the necessities, but also the elaboration of specific schemata concerning the mathematical relationships involved. Implications for mathematical education can also be inferred from the results.
Key-words: *combinatory reasoning; Cartesian product; mathematics at elementary school.*

---

* Universidade Federal do Paraná. Doutora em Psicologia, Psicologia da Educação, PUC-SP. E-mail: mlfmoro@sul.com.br

** Universidade Federal do Paraná. Doutora em Educação, USP. E-mail: marite@brturbo.com.br

Introdução

O estudo ora relatado foi realizado para responder à questão sobre a possibilidade de se verificar como ocorre a construção do raciocínio combinatório quando da solução de problemas multiplicativos de produto cartesiano na escola fundamental. A hipótese em exame é a de que podem ser identificados e descritos diferentes níveis da construção inicial daquele modo de raciocínio, em direção à sua organização lógico-formal, quando alunos, mesmos os das séries iniciais, 3ª e 4ª séries, solucionam problemas matemáticos do tipo produto cartesiano.

Em décadas recentes, no quadro dos avanços científicos internacionais para uma educação matemática de melhor qualidade, muitas investigações foram realizadas sobre conceitos e relações que marcam a natureza das operações aritméticas clássicas ensinadas nas séries iniciais da escola fundamental. Nesse quadro, já se sabe bastante sobre as formas pelas quais crianças compreendem a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão, do que derivações significativas sobre o ensino dessas operações têm sido identificadas (Carpenter, Moser e Romberg, 1982; Harel e Confrey, 1994; Hiebert, 1986; Nunes e Bryant, 1997; Steffe e Wood, 1990; Vergnaud, 1985, *e.g.*).

Investigações sobre a aprendizagem da multiplicação em sua forma clássica, apoiadas em perspectivas construtivistas, têm fornecido resultados interessantes sobre os caminhos complexos da sua compreensão progressiva por crianças e adolescentes, a serem necessariamente levados em conta pelo professor (Nunes e Bryant, 1997, *e.g.*).

Entretanto, há poucas investigações sobre o processo de compreensão de problemas envolvendo relações multiplicativas do tipo produto cartesiano, os também chamados problemas de produto de medidas.

Segundo a teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud (1983; 1985), diferentemente da maior parte dos problemas escolares de tipo multiplicativo – que comportam uma relação quaternária entre medida –, problemas por ele denominados produto de medidas comportam uma relação ternária entre tais medidas: uma delas é produto de duas outras nos planos numérico e dimensional, sendo generalizável a mais de duas dimensões. É, segundo o autor, estrutura de proporção dupla que envolve três ou mais variáveis e um modelo de função bilinear. Sua forma mais natural de representação é a da tabela cartesiana, a qual dá conta da dupla correspondência envolvida (não mais uma simples correspondência, como no caso da estrutura de isomorfismo de medidas).

Vergnaud (ibid.) assevera a elegância do produto cartesiano como algo que o faz ser usado freqüentemente na França para introduzir a multiplicação na escola elementar. No entanto, segue o autor: "a estrutura aritmética do produto cartesiano, como produto de medidas, mesmo assim é difícil e, de fato, não pode ser dominada até ser analisada como proporção dupla. A proporção simples deve vir antes" (ibid., p.135).

Vergnaud (1983; 1985) assim define as duas classes de problemas de produto de medidas:

a) de multiplicação, consistindo em encontrar uma "medida-produto", combinando-se duas ou mais medidas elementares;

b) de divisão, consistindo em encontrar uma das medidas elementares a partir de outra(s) combinada(s) a uma "medida produto". Nesse caso, o procedimento de dividir não pode ser facilmente visto como caso de operador escalar ou de função, pois a dimensão da quantidade a ser encontrada vem da divisão da dimensão do produto pela dimensão da outra medida básica. Salvo no caso dos problemas que alunos da escola elementar e da secundária podem calcular (por exemplo, os de área, de volume), aquela medida básica advinda do cálculo é mesmo medida básica e não um quociente.

O mesmo autor sustenta que a estrutura de produto de medidas traz dificuldades específicas, não redutíveis às das demais estruturas, por conta de conceitos e relações funcionais (de proporção inversa) não totalmente entendidos pelas crianças pequenas, mas que podem ter sua compreensão iniciada nas séries iniciais da escola elementar. Também não nos deixa esquecer outras dificuldades que esses problemas colocam, por conta das propriedades dos números empregados (inteiros, decimais, menores ou maiores) e dos conceitos de referência (por exemplo: de produtos entre dois valores discretos; ou de dois valores contínuos envolvendo ou não a idéia de valor médio).

É assim que propriedades de valores numéricos e conceitos de referência são critérios a serem levados em conta na escolha de problemas de produto cartesiano a serem resolvidos por grupos de alunos diversos.

Por outra parte, a posição de Vergnaud (ibid.) sobre a natureza dos problemas de produto de medidas (ou cartesianos) no campo conceitual das estruturas multiplicativas nos faz entender que a relação ternária presente nos referidos problemas se apóia no raciocínio combinatório, o que nos permite falar de relações multiplicativas de caráter combinatório para o caso daqueles problemas. Mas não se pode relegar o fato de que, subjacentes à elaboração dessas relações, estão presentes vários outros esquemas e sistemas de esquemas organizadores da cognição humana, tais como o das correspondências um para um e/ou um para muitos.

De trabalhos de Jean Piaget e colaboradores (Inhelder e Piaget 1972; Piaget e Szeminska, 1971), vêm importantes contribuições sobre a construção inicial e progressiva do raciocínio combinatório já em crianças pequenas, com alterações expressivas lógico-formais durante a adolescência.

Por exemplo, em prova que trata diretamente da combinação de variáveis, os elementos químicos, para obter determinado resultado (substância de cor amarela), Inhelder e Piaget (1972) identificam a seguinte progressão para o raciocínio combinatório implicado: a marca inicial de associações quaisquer entre as variáveis, propostas ao acaso (de ordem pré-causal); adiante, porém, sujeitos de mais idade (entre 6 a 9 anos, aproximadamente) iniciam uma forma de combinação muito elementar, multiplicando os fatores por somente um deles, obtendo, por tateio, combinações entre mais de um fator (multiplicativas, mas sem que ocorra sistematização um a cada um dos outros). Combinações entre fatores ocorrem, de fato, depois, mas ainda de modo empírico mediante tateio. É somente em patamar seguinte que as combinações entre os fatores aparecem como sistemáticas, em um sistema que atinge equilíbrio com sistematização ainda mais avançada, em idades posteriores (a partir de 11 anos).

Vale notar ainda que, para problemas com outro tipo de conteúdo, ligados à geometria e à física em particular (igualdade de ângulos de incidência e de reflexão, flutuação dos corpos, flexibilidade de uma vareta), Inhelder e Piaget (1972) obtêm, em linhas gerais, o mesmo tipo de progressão: de formas de tratamento ainda nitidamente pré-operatórias entre os pequenos, para formas em que já há identificação de alguns fatores e de suas relações parciais por tateio, possível pelas operações concretas para, enfim, os fatores serem dissociados, controlados e sistematicamente combinados, adiante, segundo um modelo formal.

Em obra anterior (Piaget e Szeminska, 1971), ao discutir resultados referentes às composições aditivas e multiplicativas, os autores argumentam a favor da presença, em crianças, já no plano das operações concretas, da relação multiplicativa "para cada um, *x* vezes a unidade", quando são elas capazes de combinar entre si unidades de medida que vêm da igualação das diferenças.

Em trabalho posterior, ao examinar o lugar da tensão dialética entre os possíveis e os necessários na elaboração de um conhecimento novo, Piaget, com Berthoud-Papandropoulos e Kilcher (1986) nos oferecem indicadores importantes sobre compreensão da multiplicação em sua diferenciação da adição. São resultados que, embora não referentes a multiplicações que envolvem produto cartesiano, mostram, na construção daquela operação, o papel organizador de composições de ajustamentos ou correspondências "um para muitos", buscados pelos sujeitos, continuamente, nos diversos momentos daquela compreensão devido à necessidade de ajustamentos. As correspondências permitem a progressiva coordenação de variáveis por associatividade, até chegar-se a multiplicações de segundo grau, de caráter formal, que exigem associatividade multiplicativa e comutativa. São resultados que reforçam a idéia da complexidade da construção da multiplicação, até tomar o sujeito consciência "do número n dessas adições de adições, enquanto número de operações, esse número torna-se, por isso, um multiplicador..." (ibid., p. 88).

Na literatura de psicologia da Educação Matemática contemporânea há diversos estudos (Kishimoto, 2000; Meira, 1994; Monteiro, 2003; Monteiro, Serrazina e Barros, 2002; Misailadou e Williams, 2003; Schliemann e colaboradores, 2003; Spinillo, 1994; Spinillo e Bryant, 1999, *e.g.*) indicando que crianças, nas séries iniciais da educação básica, são capazes de iniciar a compreensão de conceitos e relações multiplicativas relativamente complexas, como as de razão, proporção, função, e que pertencem, também, ao campo conceitual das estruturas multiplicativas. São resultados que falam a favor da probabilidade de que uma construção afiliada, como a do raciocínio combinatório, também possa ocorrer quando se trata de organizar conteúdos de campos os mais diversos de aprendizagem na escola fundamental.

Mais do que ser sua ocorrência provável, é necessário que essa construção cognitiva aconteça porque essa forma de raciocínio multiplicativo é significativa para a cultura do ser humano: faz-se ela presente, tanto na solução de diversos problemas do mundo cotidiano, de ordem matemática, como no trato de conceitos e relações de outros ramos das ciências em níveis os mais variados de compreensão (a física, a economia, por exemplo).

Eizenberg e Zaslavsky (2002), entre outros, são autores que bem argumentam a favor do significado do domínio do conceito de combinatória na prática profissional e no cotidiano das pessoas, como também sobre sua conexão com vários aspectos da matemática e com outras áreas (as da computação, comunicação, genética e estatística). Também defendem a presença de problemas de combinatória, no currículo da matemática desde os inícios da escola elementar, problemas que são vistos pelos autores como "*good problems*".

Há relativamente poucos estudos que tratam do raciocínio combinatório entre variáveis e seus valores. Menos freqüentes ainda são os que examinam essa forma de raciocínio na solução de problemas multiplicativos, os de produto cartesiano.

Iannece, Nazzaro e Tortora (2002) mostraram que crianças de 6 a 7 anos passam de formas corporais e verbais para gráficas, com diagrama cartesiano, para representar bidimensionalmente a relação entre espaço e tempo a partir de uma história (dramatização). O diagrama é visto como ferramenta e objeto matemático poderoso.

Hino (2000) relata, em estudo de caso, a transformação que fazem alunos japoneses de 4ª série no uso da multiplicação durante lições sobre medida de áreas: desde usar a multiplicação como um algoritmo externo (não dedutível internamente como instrumento de pensamento), até usá-la como instrumento de pensamento com o objetivo de medir área, passando antes pelo uso dessa operação, por tentativas, diante de problemas novos. Malgrado diferenças individuais na interpretação da tarefa, os resultados apontam para uma construção significativa da multiplicação pelos alunos como ferramenta poderosa de pensamento.

Eizenberg e Zaslavsky (2002) identificaram estratégias de verificação de solução de problemas matemáticos de combinatória de estudantes adultos e avaliaram o nível de eficiência dessas estratégias para atingir a solução correta. Duas das estratégias usadas, adicionar justificativa à solução e usar outro método de solução, mostraram-se muito eficientes; entretanto, uma das mais freqüentes estratégias, a de reexaminar a solução, apareceu entre as de menor eficiência, algo já esperado em se tratando de problemas matemáticos. O sucesso no acrescentar justificativa às respostas é atribuído à ajuda dessa estratégia em detectar pequenos erros. Já o pouco uso da estratégia de avaliar a racionalidade da resposta é atribuído à não familiaridade dos estudantes com ela, sendo difícil fazer estimativas de resultado em problemas matemáticos de combinatória. Os autores destacam que seus resultados falam a favor da atitude de encorajar os estudantes a verificar suas soluções a esse tipo de problema.

Contudo, seguem os autores, tais problemas são tidos como difíceis de serem ensinados e aprendidos na escola, apesar de resultados promissores de pesquisa sobre o aparecimento de raciocínio combinatório em crianças pequenas. Sua utilização na escola, além de não ter estratégias imediatas de solução, acarreta incertezas em relação às formas de abordá-los. É também considerado difícil verificar as respostas a esses problemas, uma vez que diferentes modos de solução a um mesmo problema resultam em diferentes respostas aparentemente convincentes, e detectar um erro não leva necessariamente à solução correta.

English (1992) obtém, de crianças de 4 a 9 anos, soluções a problemas de combinatória sobre vestir bonecos (ursinhos em madeira) combinando duas variáveis (valores até 3). Seus resultados falam a favor de uma sofisticação progressiva das estratégias conforme avançam as idades. As estratégias identificadas – de ausência de planejamento, de transição e as chamadas odométricas – retratam o aparecimento progressivo de maior número de combinações entre valores das variáveis mediante procedimentos mais sistemáticos de obtê-las. Outro resultado interessante do autor aponta formas progressivas de exame atento (*scanning actions*) dos sujeitos ao monitorar seus procedimentos de solução, com a identificação de uma associação significativa dessas formas com as estratégias de solução: com a adoção de estratégias mais complexas, a natureza daquele reexame se alterava, algo crucial ao sucesso quando há alguma restrição complementar no problema. O autor comenta especialmente seus resultados como alterações evolutivas no terreno do conhecimento de princípios e de estratégias gerais de ordem combinatória. Recomenda o trabalho com problemas de combinatória desde cedo na escola, em especial em matemática, asseverando que mais precocemente do que indicado nos estudos de Piaget (7 anos, por exemplo), as crianças são capazes de adquirir conhecimento conceitual de ordem combinatória

Em outro estudo, English (1996), interessado na transferência de estratégias de solução entre problemas de combinatória resolvidos com material e de forma escrita, descobre que o nível esperado de desempenho de alunos de 9 anos, alto ou baixo, não é preditor de que eles cheguem a estratégias mais avançadas: alunos de rendimento esperado baixo construíram conhecimento combinatório sofisticado, não ocorrendo o mesmo com alunos de alto rendimento. É novamente ressaltada a importância de que estratégias gerais para essas elaborações sejam dominadas.

Mekhmandarov (2000) relata estudo sobre a compreensão de produto cartesiano com crianças de jardim de infância de classe média (Israel), com base nos seguintes pontos: os resultados de English, com tarefas de produto cartesiano pouco complicadas; os resultados piagetianos de crianças que classificaram elementos segundo duas dimensões em tabelas de dupla entrada de formas perceptual ou gráfica (não ainda operatória); e a dificuldade em comparar resultados de estudos sobre multiplicação cartesiana que examinam a solução das crianças em tarefas de construção ou classificação, mas não em ambas, alguns empregando conjunto de elementos idênticos ou diferentes.

O autor, com tarefas de manipulação para compor pares ordenados (dois conjuntos diferentes e dois conjuntos idênticos de elementos, os blocos lógicos) de classificação de um conjunto de pares dado e de predição da extensão final do conjunto combinado (com apoio em um quadro vazio de dupla entrada), mostra que construir pares ordenados de dois conjuntos idênticos é mais difícil. Com conjuntos diferentes, um terço das crianças foi, inclusive, capaz de analisar a estrutura bidimensional do produto. As dificuldades com o conjunto de elementos idênticos são atribuídas ao fato de os sujeitos colocarem o foco nas relações entre os elementos dentro dos pares, um obstáculo perceptual mais do que matemático.

Mekhmandarov (ibid.) descreve os seguintes princípios que empregou para analisar as construções de seus sujeitos: saber que um par é construído tomando-se um e somente um elemento de cada um dos conjuntos; compreender que o par é um elemento no novo conjunto-produto; aceitar o fato de que cada elemento do "conjunto-multiplicando" pode aparecer em diversos pares (diferentemente do que ocorre com a estrutura aditiva); compreender que cada par deva aparecer somente uma vez no conjunto produto.

Dos resultados do autor, há a salientar que, enquanto altos percentuais de crianças mostraram compreender ou ter compreendido (durante a tarefa) os princípios que embasam o produto cartesiano, são mais baixos os percentuais das que, ao predizerem o total de combinações, mostraram dispor de estrutura "interna" multiplicativa ou foram capazes de produzir diferentes tipos de classificação e computar resultados de dois ou mais tipos em conjunto.

Mesmo assim, Mekhmandarov (ibid.) considera auspiciosos e surpreendentes seus resultados com crianças pequenas, pelas dificuldades que crianças maiores (4ª e 5ª séries) encontram para obter todas as possibilidades em problemas de combinatória: elas (as maiores) teriam mais dificuldades em analisar uma situação problema do que em lidar com o modelo matemático de produto cartesiano de solução. De qualquer forma, é sugerido que tarefas que envolvam produto cartesiano podem ser oferecidas a crianças pequenas de jardim de infância.

Dentre os parcos estudos brasileiros sobre o tema, temos, de Brito e Correa (2003), a análise das soluções de alunos de quarta, quinta e sexta séries do ensino fundamental a cinco problemas de estrutura multiplicativa do tipo produto de medidas. Verificando melhor desempenho dos sujeitos de sexta série, as autoras apontam o uso de procedimentos aritméticos com estrutura multiplicativa como ligado ao melhor desempenho, sem que diferenças atribuíveis a gênero tenham sido detectadas. Também foi confirmado que, quanto maiores os números envolvidos no problema, menor a média de pontos obtidos na questão.

Apesar de recomendações de especialistas, é sabido que problemas de produto cartesiano são muito pouco freqüentes na matemática da escola básica brasileira. Logo, identificar e descrever as estratégias de solução desses problemas pelos alunos é um caminho para estimular sua presença nas propostas dos professores. E, no terreno da aprendizagem escolar da matemática, é interessante conhecer a progressão do raciocínio combinatório do aluno da escola elementar que, provavelmente, venha a ser revelada e/ou estimulada pela solução de tal gênero de problemas. Desse tipo de resultado será possível inferir formas de intervenção do professor para ativar a elaboração de conceitos e relações matemáticas pertinentes e seus organizadores subjacentes.

O que até agora expusemos compõe, em nosso entender, justificativas plausíveis para este estudo sobre as particularidades das soluções de alunos da 3ª e da 4ª série do ensino fundamental a problemas de produto cartesiano no terreno da matemática básica, com o objetivo de identificar e descrever formas progressivas de raciocínio combinatório, presentes naquelas soluções.

Método

O estudo foi efetuado em uma escola pública municipal de extensa região metropolitana, escolhida por conveniência (disponibilidade da escola em receber os pesquisadores).

Os sujeitos foram 50 alunos, de 3ª e 4ª séries (idade cronológica média de 8 anos e 10 meses), os que se encontravam então presentes em cada turma e que concordaram em participar do estudo. As turmas também foram amostra de conveniência, pois foram escolhidas pela direção da escola e conforme a disponibilidade das professoras em ceder tempo na ocasião, dentre as demais turmas de 3ª e 4ª séries da escola.

Foram apresentados aos sujeitos os quatro problemas de produto cartesiano, abaixo reproduzidos. A solução de todos eles pede multiplicação, sendo o alvo encontrar uma "medida-produto" combinando-se duas ou mais medidas elementares.

Eis os quatro problemas:

1. Em uma loja de carros há 5 Monzas, 3 Fuscas e 6 Pampas. Ao comprar o carro, você pode escolher 2 tipos de rodas: esportiva e comum. De quantas maneiras diferentes os tipos de carros e rodas podem ser combinados?
2. Em uma sorveteria por quilo existem 28 sabores de sorvetes, 12 coberturas e 5 tipos de casquinhas. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de casquinha e cobertura?
3. Vou dar uma festa e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches, comprei 3 tipos de frios (presunto, mortadela e salame), 2 tipos de queijo (mussarela e queijo prato) e 4 tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches com um tipo de pão, um tipo de frios e um tipo de queijo posso servir?
4. Valéria fez 32 colares, 92 pulseiras e 115 anéis para vender. De quantas maneiras ela pode arrumar, em uma caixinha, apenas 1 colar, 1 pulseira e 1 anel para mostrar aos clientes?

Esses problemas foram escolhidos por contemplarem duas ou três variáveis, característica essa combinada a valores baixos e altos para as variáveis; há, ainda, um problema (o primeiro) contendo valores distractores (Vergnaud, 1983; 1985).

Outro critério que marcou a escolha dos quatro problemas foi comportarem eles solução exclusiva por multiplicações. Para o grupo de alunos considerado, seriam eles problemas de solução menos complexa dos que os de divisão. Logo, seriam mais prováveis as tentativas de solução dos sujeitos, alunos de 3ª e 4ª série, já familiarizados na escola, se não com problema de produto cartesiano, ao menos com os algoritmos da multiplicação.

Os quatro problemas foram apresentados aos sujeitos no formato de um teste escrito. As soluções individuais por escrito em caneta foram obtidas em sessão coletiva (sala de aula) de duração aproximada de 50 minutos. A sessão foi orientada pelos pesquisadores, um em cada turma (aplicação simultânea).

Antes informados de que as respostas aos problemas serviriam somente à pesquisa, os sujeitos foram orientados para que resolvessem todos os quatro problemas, na medida do possível, no tempo disponível, sem preocupação com a obtenção exclusiva da resposta correta. Foi destacado também que poderiam utilizar diferentes formas de expressar a solução: desenhos, escritas numérica e alfabética, gráficos, por exemplo. Foi-lhes indicado ainda que cada um deles deveria expressar sua solução para cada problema, no espaço indicado na folha, deixando todas as operações e marcas utilizadas no papel.

Antes de iniciar a execução da solução, os sujeitos foram convidados a acompanhar a leitura dos enunciados dos problemas feita pelo pesquisador. Durante a sessão, os pedidos de esclarecimentos e dúvidas dos sujeitos foram atendidos, limitando-se o pesquisador a somente prestar esclarecimentos sobre o texto do enunciado.

O principal procedimento de análise dos dados foi de ordem qualitativa e compreendeu a descrição interpretativa do conteúdo das soluções dos sujeitos a cada um dos problemas, segundo o que este conteúdo estaria revelando sobre a significação combinatória da solução.

Os critérios usados foram inspirados de elementos da literatura, compondo-se em três eixos principais: pertinência à pergunta do problema (Vergnaud, 1983; 1985; Nunes e Bryant, 1997); presença de um ou mais casos de combinação de valores das variáveis (Inhelder e Piaget, 1972; English, 1992; Mekhmandarov, 2000); presença de cálculo relacional aditivo e/ou multiplicativo (Piaget, Berthoud-Papandropuolos e Kilcher, 1986; Lemoyne, Vincent, Brun, Conne e Portugais, 1994; Vergnaud, 1983; 1985).

Essa análise foi efetuada segundo três momentos: a) da primeira descrição das principais características de cada solução; b) de uma segunda descrição, de depuração daquelas características nos diversos casos em que se faziam presentes, verificando seus traços e significados comuns com base na conjunção dos eixos de critérios acima referidos, para obter níveis e/ou subníveis prováveis de elaboração do raciocínio combinatório; c) de uma terceira descrição, a revisão dos níveis (subníveis) obtidos em b), para verificar a validade das descrições obtidas e da provável hierarquia ali presente.

Complementar à análise qualitativa, foi feito levantamento quantitativo em freqüências e percentuais das soluções a cada problema dos sujeitos de cada série conforme níveis e subníveis encontrados, para verificar sua distribuição por série e por problema na amostra estudada.

Resultados

A seguir estão descritos os níveis e subníveis de raciocínio combinatório obtidos da análise das soluções de todos os sujeitos de 3ª e 4ª séries aos quatro problemas de produto cartesiano resolvidos. Cada exemplo é identificado pelas iniciais adaptadas do nome do seu autor, série escolar e problema.

Nível 0 – De resposta alheia ao contexto: consiste em solução não numérica, sem relação com o que pede o problema, e sem referências às variáveis. Por exemplo, Mat (3ª série, problema 4):

os que sobram
ela vende e os
outros mostra
aos clientes

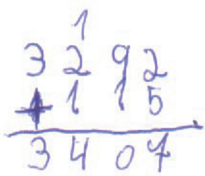
Nível I – De resposta contextualizada sem indício de combinação

Subnível IA – Da escolha de variáveis, consistindo de soluções que contêm escolhas relativas a uma ou mais variáveis, sem qualquer combinação entre elas. Por exemplo, Gab (3ª série, problema 4):

Subnível IB – Da adição de valores, consistindo em soluções que se limitam ao cálculo aditivo (mental ou não) de alguns ou de todos os valores envolvidos, seguindo ou não sua ordem de aparecimento e incluindo ou não os distractores. Por exemplo, Ally (4ª série, problema 4):

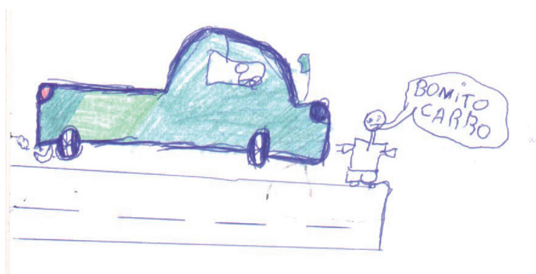
$$
\begin{array}{r}
115 \\
+\quad 32 \\
92 \\
1 \\
1 \\
\hline
62
\end{array}
$$

Subnível IC – Das composições numéricas em diferentes formas de cálculos, quando há emprego de algoritmo escolar de composição numérica em contexto ao qual ele não se aplica. São obtidas uma ou mais composições numéricas (com ou sem desenho ilustrativo) com os valores das variáveis (e/ou com os distractores) entre si combinados. São efetuados cálculos diversos (aditivos, multiplicativos), na aparente busca de “muitas maneiras”. Por exemplo, Fel (3ª série, problema 4):



Nível II – Das primeiras aproximações à solução combinatória

Subnível IIA – Do caso favorito, quando é representada uma, e somente uma possibilidade de combinação entre as variáveis (um e somente um valor de cada uma delas). Seria a combinação escolhida por razão estética ou por adequação de uso. Quando presentes, os valores distractores são também considerados. Por exemplo, Ale (4ª série, problema 1):



Subnível IIB – Dos casos favoritos conforme valor distractor ou de variável estranha, quando há a representação de alguns casos de combinação das variáveis, envolvendo um ou mais valores, inclusive distractores e variáveis não presentes no problema, e que não se excluem quando os valores são pequenos. Para valores maiores, a cada valor de uma variável corresponde somente um valor da outra, por vezes ainda conforme critério de uso adequado, e com forte marca da correspondência termo a termo como organizador. Por exemplo, Nic (3ª série, problema 1):

Rodas comum: os mon-
zas, fuscas. Rodas espartista: pampas.

Subnível IIC – Dos casos favoritos ignorados os distractores, em que as soluções representam número limitado de casos de combinação das variáveis, cujos valores aparecem emparelhados, sem que os distractores interfiram na solução, por vezes ainda conforme critério de uso adequado. Há também forte marca do esquema de correspondência termo a termo como organizador. Por exemplo, Car (4ª série, problema 1):

Um monzas e esporte

~~e uma pampa e uma roda comum~~

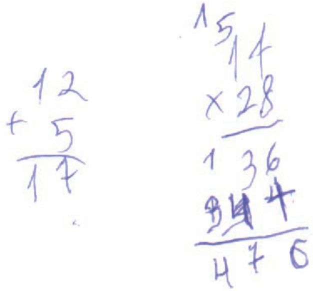
~~um fusca e roda comum~~

Nível III – Da obtenção de algumas combinações

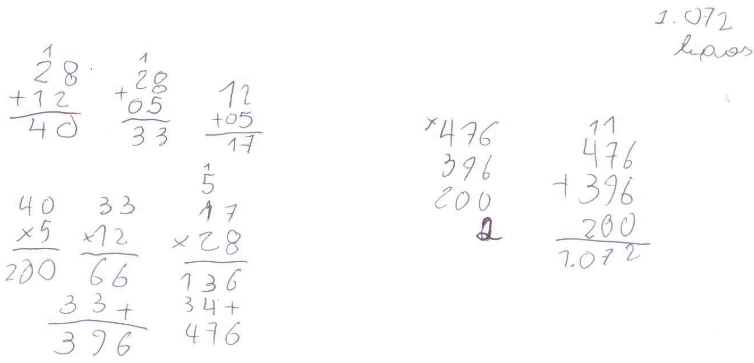
Subnível IIIA – Das buscas iniciais de combinações, "distorcidas" pelos "distractores", abrangendo soluções em que estão representadas muitas combinações entre os valores das variáveis, mas regidas pelos valores distractores. Essas combinações são obtidas ou apenas com cálculo aditivo ou mesclando tais cálculos com os multiplicativos, na aparente busca de "muitas maneiras". Por exemplo, CarC (4ª série, problema 1):

$$\begin{array}{r} 5 \\ 3 \\ 6 \\ \hline 14 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 2 \\ \hline 28 \end{array}$$

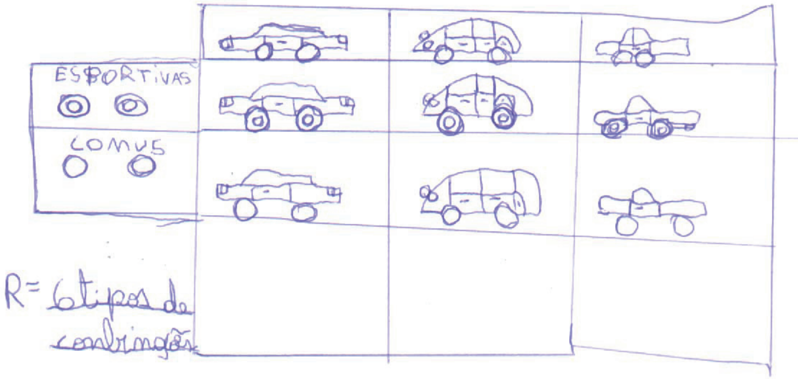
Subnível IIIB – Das aproximações aditivas, multiplicativas e por divisão, consistindo na busca de um certo número de combinações obtidas mediante diferentes junções e complementações de cálculos variados entre alguns e/ou todos os valores das variáveis envolvidas, repetidos ou não, bem como entre resultados desses cálculos, complementados por valores unitários do texto do problema. Por exemplo, And (4ª série, problema 2):



Subnível IIIC – Das muitas combinações aditivo-multiplicativas com três variáveis, consistindo de número limitado de combinações entre os valores envolvidos, obtidas de diferentes "junções" aditivo-multiplicativas na busca da resposta final em termos de "muitos casos". Por vezes, há também a representação por diagrama com recursos pictóricos, quando aparece a dificuldade em representar os valores das três variáveis. Por exemplo, Fel (4ª série, problema 2):



Nível IV – Da presença de solução combinatória, quando estão presentes todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, quer em representação pelo diagrama cartesiano, quer por cálculo multiplicativo canônico. Por exemplo Wil (4ª série, problema 1):



Lembramos que os níveis e subníveis acima descritos relativos às soluções dos sujeitos aos quatro problemas considerados configuram momentos da construção, no terreno multiplicativo, do raciocínio combinatório implicado naqueles problemas. Porém, como se distribuem esses níveis e subníveis em relação à série escolar dos sujeitos e conforme os problemas trabalhados?

A Tabela 1 apresenta as freqüências e os percentuais das soluções dos sujeitos, por série e por problema, e conforme os níveis e subníveis acima descritos.

Em primeiro lugar, devemos destacar que, comparativamente, os mais altos percentuais de soluções dos sujeitos da 3ª série e da 4ª série aos quatro problemas localizam-se no nível I – *de resposta contextualizada sem indício de combinação*. Por sua vez, no interior desse nível, os mais altos percentuais correspondem a soluções do subnível IB, as de cálculo aditivo.

Além disso, dentre os percentuais relativamente mais baixos de soluções do nível II, são mais expressivos os correspondentes às soluções de subnível IIA dos sujeitos da 3ª série, o subnível menos adiantado daquele nível e em todos os problemas. Por seu lado, as soluções percentualmente mais altas dos sujeitos de 4ª série no nível II são de subnível IIB (16,0%) no problema 3 e de subnível IIC (16,7%) no problema 1, logo, soluções mais avançadas na hierarquia proposta. E somente sujeitos da 4ª série

Tabela 1 – Freqüências e percentuais (entre parênteses) de soluções dos sujeitos a cada problema, por série, conforme níveis e subníveis de raciocínio combinatório (n = número de sujeitos/ soluções)

Raciocínio Combinatório		Problema/Série							
		1		2		3		4	
		3ª	4ª	3ª	4ª	3ª	4ª	3ª	4ª
		n=24	n=24	n=23	n=23	n=24	n=25	n=24	n=22
0		0(0,0)	0(0,0)	1(4,3)	0(0,0)	1(4,1)	0(0,0)	2(8,4)	0(0,0)
I	IA	2(8,4)	1(4,1)	4(17,4)	2(8,7)	8(33,4)	0(0,0)	4(16,6)	2(9,1)
	IB	8(33,4)	9(37,6)	7(30,5)	13(56,6)	5(20,8)	14(56,0)	8(33,4)	15(68,2)
	IC	4(16,6)	0(0,0)	2(8,7)	0(0,0)	2(8,4)	2(8,0)	3(12,5)	0(0,0)
% Sub-total		58,4	41,7	56,6	65,3	62,6	64,0	62,5	77,3
II	IIA	7(29,1)	2(8,4)	8(34,8)	1(4,3)	6(25,0)	0(0,0)	7(29,1)	1(4,5)
	IIB	3(12,5)	1(4,1)	1(4,3)	1(4,3)	2(8,3)	4(16,0)	0(0,0)	0(0,0)
	IIC	0(0,0)	4(16,7)	0(0,0)	0(0,0)	0(0,0)	0(0,0)	0(0,0)	0(0,0)
% Sub-total		41,6	29,2	39,1	8,6	33,3	16,0	29,1	4,5
III	IIIA	0(0,0)	6(25,0)	0(0,0)	0(0,0)	0(0,0)	0(0,0)	0(0,0)	0(0,0)
	IIIB	0(0,0)	0(0,0)	0(0,0)	2(8,7)	0(0,0)	3(12,0)	0(0,0)	4(18,2)
	IIIC	0(0,0)	0(0,0)	0(0,0)	2(8,7)	0(0,0)	1(4,0)	0(0,0)	0(0,0)
%Sub-total		0,0	25,0	0,0	17,4	0,0	16,0	0,0	18,2
IV		0(0,0)	1(4,1)	0(0,0)	2(8,7)	0(0,0)	1(4,0)	0(0,0)	0(0,0)

expressam soluções correspondentes aos níveis III e IV, os mais adiantados da hierarquia. É a notar que somente sujeitos da 3ª série expressaram solução de nível 0, a *de resposta alheia ao contexto*.

Assim, parece que alguma relação existe entre os níveis de raciocínio combinatório expressos nas soluções analisadas e a série escolar, ainda que a notável incidência de soluções do subnível IB, as aditivas, pareça perturbar a regularidade desta relação.

Quanto à relação entre os quatro problemas e os níveis (subníveis) de suas soluções, os dados indicam que somente para os sujeitos da 4ª série uma diferença interessante aparece para o problema 1 (duas variáveis com valores baixos e com distractores): tem o menor percentual de soluções de nível I, mas tem o maior percentual de soluções dos níveis II e III em comparação com as soluções dos outros problemas, os quais envolvem três variáveis (problemas 2, 3 e 4).

Nos casos restantes, não há indícios fortes para aquela relação (são relativamente próximos os percentuais das soluções dos níveis I e II dos sujeitos da 3ª série aos quatro problemas), apesar de ali haver diferença maior entre os percentuais das soluções de nível II aos problemas 1 e 4. E, diferentemente dos outros casos, na 4ª série, somente o problema 4 (três variáveis com valores muito altos) não trouxe qualquer solução de nível IV, o mais adiantado.

Portanto, o tipo de problema (grandeza numérica dos valores das variáveis e número de variáveis, com e sem valores distractores) não aparece ligado ao nível de raciocínio combinatório das soluções, exceto se associado ao nível mais adiantado de escolaridade (a 4ª série).

Discussão

Em primeiro lugar, e conforme a hipótese deste estudo, encontramos diferentes níveis da construção inicial do raciocínio combinatório, nas soluções dos alunos amostrados, aos quatro problemas de produto cartesiano.

Os níveis e subníveis identificados configuram, em síntese, desde soluções não pertinentes e/ou pertinentes ao problema, sem qualquer sinal de raciocínio combinatório, até soluções que trazem a presença desse raciocínio. Há, entre uns e outros, diferentes momentos de transição que se fazem notar pelo aumento de casos de combinação e pela passagem do cálculo de caráter aditivo, linear, para o cálculo de caráter multiplicativo, bidimensional.

É possível apreciar a progressão do raciocínio combinatório que encontramos, segundo os traços gerais que Inhelder e Piaget (1972) descreveram para condutas em provas de combinação de variáveis (como as antes mencionadas). Há, nitidamente, entre essas progressões, elementos correspondentes no caminho que vai de soluções da ausência de combinação entre as variáveis (o que corresponderia a pré-operações no quadro clássico piagetiano), às soluções em que, por tateio, mais e melhores relações entre variáveis são efetuadas com dissociação e controle progressivos entre elas, e maior sistematização.

Porém, as poucas soluções correspondentes ao nível mais avançado de solução combinatória que encontramos neste estudo (nível IV) não nos autorizam a vê-las como de caráter formal. Embora descritas como de presença de raciocínio combinatório, por conter sinais de dissociação, controle, sistematização no trato combinado das variáveis e de seus valores, são casos que mais parecem caracterizar a presença de raciocínio combinatório no plano das operações concretas, pelo apoio marcante em diagrama cartesiano como ferramenta para o cálculo multiplicativo (Iannece, Nazzaro e Tortora, 2002; Meira, 1994).

A salientar ainda que, como coletamos e analisamos somente dados de solução escrita dos sujeitos e nenhum dado (verbal, por exemplo) de sua interpretação da solução produzida, nada podemos dizer da sua compreensão, em plano metacognitivo, das relações e dissociações sistemáticas que regeriam as combinações, em certo sentido, sua compreensão dos princípios indicados por Mekhmandarov (2000). A compreensão metacognitiva desses princípios é que seria, para nós, indício decisivo de elaborações no plano formal.

Logo, e diversamente de posições que consideramos muito otimistas sobre a presença de raciocínio combinatório, e mesmo de sua precocidade em crianças (English, 1992; Mekhmandarov, 2000, *e.g.*), entendemos que se deva falar de momentos progressivos de obtenção de soluções com marcas desse tipo de raciocínio, sempre em relação ao tipo de tarefa empregado. Se crianças pequenas obtêm, com material manipulativo, pares combinados conforme dois ou mais critérios ao menos, apoiadas em disposição espacial de marca cartesiana, isto pode não significar raciocínio combinatório em planos mais adiantados. A lembrar que do próprio Piaget temos resultados desse teor (Piaget e Inhelder, 1971).

A respeito desse aspecto, não podemos deixar de considerar o quanto diferenças entre tarefas em sua forma e conteúdos marcam os resultados (Mekhmandarov, 2000). Em nosso caso, nunca é demais lembrar que os problemas eram de matemática, com diferentes graus de dificuldades por conta da presença de duas e/ou três variáveis, de valores de menor e maior extensão numérica e da presença de "distractores", embora essas dimensões não tenham, parece, pesado tanto nos resultados.

Nesse ponto, é importante destacar que, no caso da multiplicação de produto cartesiano, afora traços específicos às estruturações multiplicativas, ela traz, como o sugerem nossos resultados, questões particulares, como as da passagem do pensar as variáveis e seus valores de um plano linear, aditivo, para um plano bidimensional, multiplicativo, sendo o diagrama cartesiano, como dissemos, ferramenta relevante.

Segundo essa perspectiva, os níveis de raciocínio combinatório, descritos para as soluções a problemas de produto cartesiano, podem ser interpretados como uma progressiva abertura de possibilidades em seu interjogo com o necessário (Piaget, Berthoud-Papandropoulos e Kilcher, 1986). Estaríamos diante de sinais de uma crescente necessidade de coordenação, por associatividade, das possibilidades abertas de composições "um para muitos" (cada uma das variáveis com todos os valores das outras) no plano das operações concretas, não ainda como multiplicações de segundo grau, no plano formal, quando a associabilidade é multiplicativa e comutativa.

A escolha dos quatro problemas utilizados pode ter marcado as soluções encontradas quanto ao seu significado combinatório, ainda que, segundo nossa análise descritiva, tenham sido encontrados sinais muito limitados da relação entre tipo de problema e os níveis e subníveis encontrados.

Esse é mais um motivo para admitirmos que nosso instrumento de coleta de dados tem algumas limitações: compôs-se somente de quatro problemas (número plausível para solução em curta sessão por alunos das séries focalizadas); dentre eles, três (problemas 2, 3, 4) continham três variáveis que traziam, em dois deles, valores mais altos; sem esquecer que a pergunta no problema 4, tal como redigida, sugeriu fortemente valores unitários que agiram como distractores. O único problema contendo duas variáveis e com valores baixos (problema 1), potencialmente o mais fácil, continha valores distractores. Pode ser que a suposta maior complexidade na seqüência do problema 1 a 4 tenha relação também com o incremento de soluções com cálculo aditivo entre problemas, mesmo na 4ª série (*vide* Tabela 1) em comparação a outros tipos de solução. Assim, embora pretendêssemos o contrário, o instrumento não parece ter bom equilíbrio.

Então, como seriam os resultados com outros problemas de produto cartesiano? E com outro tipo de instrumentos de coleta, que não o de formato de teste escolar que empregamos? Essas são interrogações importantes porque, como antes dissemos, o conteúdo e o tipo de tarefa são dimensões que marcam resultados como os obtidos, como também o faz o cenário de sua obtenção, em nosso caso, a própria sala de aula (embora soubessem os sujeitos que se tratava de obter soluções para um estudo especial, não para avaliar seu desempenho escolar).

Com essas considerações, queremos completar nossa argumentação, reforçando a idéia sobre o quanto a natureza específica dos conceitos e dos conteúdos tratados em problemas matemáticos, no caso os de produto cartesiano, podem marcar o nível de raciocínio combinatório que exigem. É interessante lembrar que de Inhelder e Piaget (1972) temos, na análise da situação de prova sobre a combinação de substâncias químicas (coloridas e incolores, para obter uma substância de cor amarela), o alerta para que as particularidades conceituais do conteúdo do problema tratado sejam levadas em conta.

Outro aspecto de nossos resultados requer atenção: trata-se da indicação de que quanto mais avançadas as séries escolares, haveria a probabilidade de encontrar soluções mais adiantadas a problemas de produto cartesiano (como os oferecidos), quanto ao raciocínio combinatório que organizaria as soluções, mesmo que a maioria das soluções seja de nível I.

A esse respeito, temos a considerar que no nível de escolaridade dos sujeitos da amostra correspondem idades cronológicas médias diversas: 8 anos e 5 meses para os alunos da 3ª série, e 9 anos e 2 meses para os da 4ª série. Assim sendo, embora essa relação não tenha sido objeto específico de exame no estudo, os resultados sugerem que a idade cronológica teria relação com presença de patamares mais avançados do raciocínio combinatório nas soluções dos sujeitos. Logo, como não foi verificada essa relação sujeito a sujeito, independentemente de série, nada mais podemos adiantar sobre esse ponto.

Ainda cabe uma palavra sobre a grande maioria de soluções com cálculo aditivo (subnível IB, um dos definidos como de *resposta contextualizada sem indício de combinação*) nas duas séries e em todos os problemas: embora elas expressem a presença de raciocínio aditivo, linear, na busca de resposta aos problemas, em termos de "muitos casos", sua freqüência e percentual consistentemente tão altos chamam a atenção. E faz-nos pensar que aquele tipo de raciocínio ali se impõe, mas muito fortalecido pela tentativa dos sujeitos de resolver os problemas com os recursos algorítmicos aritméticos de que dispõem, "arriscando" uma "continha". Assim, devemos dar espaço à experiência escolar dos sujeitos como explicação das formas de solução obtidas, no caso apontado, as canônicas (em comparação a outras também encontradas: pictóricas, diagramáticas, de escrita alfabética).

Considerações finais

Apesar de seu caráter exploratório e com os limites metodológicos que apresenta, o estudo ora reportado permitiu a identificação e a descrição de níveis e subníveis de soluções aos problemas de produto cartesiano focalizados, em uma hierarquia que vai de soluções não pertinentes e/ou pertinentes ao problema, sem sinal de raciocínio combinatório, até aquelas em que sinais desse raciocínio aparecem.

Porém, embora com marcas de raciocínio combinatório, as poucas soluções mais avançadas não podem ser vistas como do plano formal, mas sim do plano das operações concretas, mesmo porque são muito apoiadas no diagrama cartesiano como ferramenta para o cálculo multiplicativo. Logo, julgamos prudente falar de momentos progressivos de elaboração daquele raciocínio, mas sempre conforme o tipo de tarefa empregado, em sua forma e conteúdo (no caso, problemas de matemática, com diferentes graus de dificuldades).

Para finalizar, cabem algumas indicações dos resultados deste estudo para a Educação Matemática: o papel importante do conteúdo e da forma dos problemas matemáticos, elementos favoráveis ou desfavoráveis a soluções que contemplem a transformação de esquemas de compreensão, além das canônicas da matemática escolar; a necessidade de ser dada aos alunos margem para que aquelas soluções alternativas se manifestem em formas diversas de notação; a relevância da interpretação das soluções típicas dos alunos como indicador essencial à natureza e ao conteúdo das intervenções docentes.

Em especial, e em consonância com recomendações presentes na literatura que examinamos, nossos resultados vão ao sentido da necessária presença de problemas que envolvam raciocínio combinatório na escola fundamental. Em particular, defendemos que, então, os alunos não somente se mostram capazes, como devem trabalhar com problemas de produto cartesiano. Ao lado de sua utilidade em tantas áreas, lidar com tais conteúdos e em problemas interessantes é circunstância indispensável ao aparecimento e à transformação de esquemas e relações pertinentes ao raciocínio combinatório, sendo este uma das dimensões que condiciona o surgimento da lógica das proposições, na perspectiva piagetiana (Inhelder e Piaget, 1972).

Não é demasiado insistir que, ao que tudo indica, conforme as diferentes situações e em relação aos diferentes conceitos, a construção do raciocínio combinatório se faz em diversos níveis, em um processo que requer tempo (como para outros tantos conceitos e relações no terreno matemático), embora possa e deva iniciar em idades relativamente precoces, quando suas raízes psicogenéticas poderão se manifestar e serem trabalhadas.

Referências

BRITO, M. R. F. de e CORREA, J. (2003). *O significado do conceito de divisão em crianças de escola elementar*. III Conferencia Argentina de Educación Matemática. Libro de Resúmenes. Salta, Soarem/ UNSa.

CARPENTER, T. P; MOSER, J. M. e ROMBERG, T. A. (eds.) (1982). *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum.

ENGLISH, L. D. (1992). Children's use of domain-specific knowledge and domain-general strategies in novel problem solving. *British Journal of Educational Psychology*, n. 62, pp. 203-216.

_____(1996). Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form. *The Journal of Mathematical Behavior*, v. 15, n. 1, pp. 81-112.

EIZENBERG, M. M. e ZASLAVSKY, O. (2002). "Undergraduate student's verification strategies of solutions to combinatorial problems". In: COCKBURN, A. D. e NARDI, E. (eds.). *Proceedings of the 26th. Annual Conference of the PME*, v. 2. Norwich, UEA/PME, pp. 321-328.

HAREL, G. e CONFREY, J. (1994). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany, NY, State University of New York Press.

HIEBERT, J. (ed.) (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Ass.

HINO, K. (2000). "Process of internalizing new use of multiplication through classroom instruction: a case study". In: NAKAHARA, T. e KOYAMA, M. (eds.). *Proceedings of the 24th. Annual Conference of the PME*, v. 3. Hiroshima, Hiroshima University, pp. 49-56.

IANNECE, D.; NAZZARO, P. e TORTORA, R. (2002). "From naïve drawing to Cartesian representation". In: COCKBURN, A. D. e NARDI, E. (eds.). *Proceedings of the 26th. Annual Conference of the PME*, v. 1. Norwich, UEA/PME, p. 323.

INHELDER, B. e PIAGET, J. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente.* Trad. M. T. Cevasco. Buenos Aires, Paidós (originalmente publicado em 1955).

KISHIMOTO, T. (2000). "Solving multiplicative word problems with decimal fractions: The effects of proportional reasoning and metacognition". In: NAKAHARA, T. e KOYAMA, M. (eds.). *Proceedings of the 24th. Annual Conference of the PME*, v. 3. Hiroshima, Hiroshima University, pp. 295-301.

LEMOYNE, G.; VINCENT, S. BRUN, J.; CONNE, F. e PORTUGAIS, J. (1994). « Addition, addition répetée, multiplication: un trajet éclairé par les schèmes d'action ». In: ARTIGUE, M.; GRAS, R.; LABORDE, C. e TAVIGNOT, P. (eds.). *Vingt Ans de Didactique des Mathématiques en France* Grenoble, La Pensée Sauvage.

MEIRA, L. L. (1994). "Aprendizagem e ensino de funções". In: SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D.; SPINILLO, A. G.; MEIRA, L. L. e FALCÃO, J. T. R. *Estudos de psicologia da educação matemática.* Recife, Editora da UFPE.

MEKHMANDAROV, I. (2000). "Analysis and synthesis of the Cartesian product by kindergarten children". In: NAKAHARA, T. e KOYAMA, M. (eds.). *Proceedings of the 24th. Annual Conference of the PME*, v. 3. Hiroshima, Hiroshima University, pp. 295-301.

MISAILADOU, C. e WILLIAMS, J. (2003). "Measuring children's proportional reasoning, the 'tendency' for an additive strategy and the effect of models". In: PATEMAN, N. A .; DOUGHERTY, B. J. e ZILLIOX, J. (eds.). *Proceedings of the 27th. Joint Meeting of PME and PMENA*, v. 3. Honolulu, PME/University of Hawai'I.

MONTEIRO, C. (2003). "Prospective elementary teachers' misunderstanding in solving ratio and proportion problems". In: PATEMAN, N. A.; DOUGHERTY, B. J. e ZILLIOX, J. (eds.). *Proceedings of the 27th. Joint Meeting of PME and PMENA*, v. 3. Honolulu, PME/University of Hawaii.

MONTEIRO, C.; SERRAZINA, L. e BARROS, E. (2002). "Children's strategies to solve proportion problems in a real world context". In: COCKBURN, A . D. e NARDI, E. (eds.). *Proceedings of the 26th Annual Conference of the PME*, v. 1. Norwich, UEA/PME.

NUNES, T. e BRYANT, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Trad. S. Costa. Porto Alegre, Artes Médicas.

PIAGET, J.; BERTHOUD-PAPANDROPOULOS, J. e KILCHER, H. (1986). "Multiplicação e associatividade multiplicativa". In: PIAGET, J. (dir.). *O possível e o necessário II - A evolução dos necessários na criança*. Trad. B. M. de Albuquerque. Porto Alegre, Artes Médicas (originalmente publicado em 1983).

PIAGET, J. e INHELDER, B. (1971). *Gênese das estruturas lógicas elementares*. Trad. A. Cabral. Rio de Janeiro, Zahar (originalmente publicado em 1959).

PIAGET, J. e SZEMINSKA, A. (1971) *A gênese do número na criança*. Trad. C. M. Oiticica. Rio de Janeiro, Zahar (originalmente publicado em 1941).

SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D.; BRIZUELA, B.; EARNEST, D.; GOODROW, A.; LARA-ROTH, S. e PELED, I. (2003). "Algebra in Elementary School". In: PATEMAN, N. A.; DOUGHERTY, B. J. e ZILLIOX, J. (eds.). *Proceedings of the 27th Joint Meeting of PME and PMENA*, v. 4. Honolulu, PME/University of Hawai'I, pp. 127-134.

SPINILLO, A. (1994). "Proporções nas séries iniciais do primeiro grau". In: SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D.; SPINILLO, A. G.; MEIRA, L. L. e FALCÃO, J. T. R. *Estudos de psicologia da educação matemática.* Recife, Editora da UFPE.

SPINILLO, A. G. e BRYANT, P. (1999). Proportional reasoning in young children: part-part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition*, v. 5, n. 2, pp. 181-197.

STEFFE, L. P. e WOOD, T. (eds.) (1990). *Transforming children's mathematics education.* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Ass.

VERGNAUD, G. (1983). "Multiplicative structures". In: LES, R. e LANDAU, M. (orgs.). *Acquisition of_Mathematics: concepts and processes*. Londres, Academic Press.

______(1985). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berna, Peter Lang.

Recebido em jul./2006; aprovado em jul./2006.