Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente

TADEU FERNANDES DE CARVALHO*
ITALA M. LOFFREDO D'OTTAVIANO**

Resumo
Tratamos, neste artigo, do desenvolvimento do *cálculo infinitesimal*, incluindo breves notas históricas relativas às origens dos infinitésimos e contrapondo as *magnitudes infinitesimais* de Leibniz às de Newton. Incluímos, também, notas sobre a análise não-standard de Robinson, que reintroduz os *números infinitesimais* nos domínios da matemática. Destacamos, ainda, a importância das idéias de Leibniz para o desenvolvimento de extensões não clássicas do cálculo infinitesimal, como o *cálculo diferencial paraconsistente*.
Palavras-chave: infinitésimo; cálculo diferencial; lógica paraconsistente.

Abstract
In this paper we present the development of the infinitesimal calculus*, including short historical remarks about the origins of the infinitesimals, and comparing Leibniz's and Newton's conceptions of* infinitesimal magnitudes*. We include brief notes about Robinson's non-standard analysis, which reinstates the* infinitesimal numbers *in the domains of mathematics. In addition, we highlight the importance of Leibniz's ideas for the development of non-classic extensions of the infinitesimal calculus, like* paraconsistent differential calculus*.*
Key-words: *Infinitesimal; Differential calculus; Paraconsistent logic.*

* Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática. Centro de Ciências Exatas, Ambientais e de Tecnologias – Faculdade de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de Campinas – PUC-Campinas. E-mail: tadeu_fc@puc-campinas.edu.br

** Grupo de Lógica Teórica e Aplicada CLE/IFCH. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência e Departamento de Filosofia. Universidade Estadual de Campinas-Unicamp. E-mail: itala@cle.unicamp.br

Introdução

Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), ainda lembrados como protagonistas da histórica disputa acerca da paternidade do cálculo diferencial e integral, estão no foco de várias outras questões conflitantes, tanto dos domínios da matemática quanto dos domínios da física, da lógica e da filosofia. É o caso de sua concepção de magnitudes infinitesimais e de magnitudes infinitas, cujas aparentes inconsistências e contradições são ainda objetos de estudo e discussão. Pretendemos, no presente trabalho, analisar e discorrer sobre alguns dos aspectos inconsistentes dos infinitésimos, inclusive sob a ótica da lógica paraconsistente do brasileiro Newton Carneiro Affonso da Costa.

Mas o que são os infinitésimos? Desprezando certas sutilezas que distinguem suas diferentes concepções, podemos, conforme Bell (1998, pp. 1-5), considerá-los como "a menor parte na qual se poderia fracionar um continuum – como, por exemplo, a linha reta". Ou, conforme a *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, em "Continuity and Infinitesimals", p. 3, "an infinitesimal may be thought of what remains after a (genuine) continuum has been subjected to an exaustive methaphysical analysis...". As *quantidades* (ou *magnitudes*) *infinitesimais*, por outro lado lado, referem-se ao que poderíamos entender como *"números" indefinidamente pequenos – menores do que qualquer número real.*

Newton e Leibniz introduziram concepções distintas para essas entidades: os infinitésimos de Leibniz estão fortemente associados com a lógica e a metafísica, enquanto que os infinitésimos de Newton apresentam forte motivação e conexão com a física e os fenômenos naturais. Suas origens são comuns, porém, remontando à época de Leucipo de Mileto (que viveu no século V a.C, mas do qual não temos informações precisas sobre o período de vida), criador da doutrina atômica (ou atomismo), e de seu discípulo Demócrito de Abdera (460-370).

A doutrina atômica de Leucipo e Demócrito contrapunha-se à doutrina dos eleáticos, como Parmênides de Eléia (530-460), seu fundador, e Zenão de Eléia (495-430), caracterizada pela crença na *unicidade* e *indivisibilidade* das entidades *verdadeiras* e *reais*, ou seja, pela crença na *continuidade* e *homogeneidade* do espaço, do ser e de seus constituintes. Zenão,[1] a propósito, através de seus conhecidos paradoxos, torna-se autor

---

1 Os paradoxos de Zenão dizem respeito, basicamente, à questão da multiplicidade de unidades constituintes do *continuum*, e ao argumento de que o tempo não é mais do

de um dos primeiros e mais marcantes ataques sofridos pelos infinitésimos ao longo de sua história. Assim como no caso de Zenão, os autores das inúmeras investidas registradas contra os infinitésimos buscavam, invariavelmente, com base em suas aparentemente incontornáveis inconsistências, reduzi-los a ficção ou mesmo delírios matemático-filosóficos. Não tardaria mais do que o surgimento de Eudoxo de Cnido (408-355) e Euclides de Alexandria (325-265) para que esses ataques sistemáticos tivessem sucesso. De fato, as magnitudes infinitesimais não encontrariam lugar nos espaços euclidianos, ao final da era clássica grega. Suas raízes, no entanto, permaneceriam vivas na Física, graças à conveniente aceitação tácita de suas propriedades – tão insólitas quanto muitas das entidades às quais eram e continuam sendo aplicadas –, bem como na lógica de Aristóteles e em trabalhos de Archimedes de Siracusa (287-212), como *O método* (Archimedes, 1950).

Depois de seu ressurgimento formal com Newton e Leibniz, de sua nova exclusão da matemática, entre meados do século XIX e meados do século XX, de seu retorno com a análise não-standard de Abraham Robinson (1918-1974) e do advento de lógicas não-clássicas, especialmente da lógica paraconsistente de Newton da Costa, os infinitésimos puderam, finalmente, ser melhor compreendidos e aceitos. Isso não significa que tenham sido cabalmente decifrados, pois parte de suas propriedades, aparentemente inconsistentes, só se revela na presença de um elemento vital e também bastante complexo do pensamento científico: o conceito de verdade. Conceito subjacente às três leis básicas do pensamento aristotélico: princípio da identidade – todo objeto é idêntico a si mesmo; princípio da (não-)contradição – uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo; e princípio do terceiro excluído – toda proposição é verdadeira ou falsa, não havendo outra possibilidade. Conceito também indissociável do conceito de negação, que teve em Crísipo de Soles (280-260), introdutor da lógica das proposições, um dos primeiros a reconhecer o seu importante papel para a lógica. Repousa na complexidade desses conceitos parte da explicação para o reinado absoluto da lógica de Aristóteles por mais de dois milênios. Reinado que perdurou

---

que uma sucessão de momentos, como a reta é constituída por uma sucessão de pontos. Sua solução pode ser considerada um trabalho coletivo, que se estendeu pela história, a partir de sua formulação. É obra de Newton, Leibniz, Kant, Hume, Weierstrass, Einstein e da lógica, filosofia e física contemporâneas.

até que novas lógicas surgissem no século XX. Lógicas que, associadas a novas teorias físicas e matemáticas, propiciaram o ressurgimento dos infinitésimos na matemática em bases talvez mais sólidas.

Leibniz, Newton e os infinitésimos

A noção de *infinitésimo*, como anteriormente dito, relaciona-se diretamente com as propriedades do *contínuo*[2] e remonta à Grécia antiga, por volta do século V a.C, aparecendo, por exemplo, na matemática e na filosofia dos Pitagóricos, de Anaxágoras de Clazomene (499-428), do filósofo atomista Demócrito e de Aristóteles. Mas aparece, de forma mais explícita e relacionada com as propriedades do cálculo, em trabalhos de Eudoxo e Archimedes (ver Boyer, 1974; Lintz, 1999).

Eudoxo, com base no lema

> Se de uma grandeza qualquer se subtrair uma parte não menor do que sua metade, e do resto se subtrair não menos do que sua metade, e assim se prosseguir, restará ao final, uma grandeza menor do que qualquer grandeza da mesma espécie,

desenvolve seu *método da exaustão*, através do qual mostra ser possível trabalhar de forma finita e precisa no cálculo de comprimentos, áreas e volumes.

Archimedes, cerca de um século depois, ao utilizá-lo em *O método* (Archimedes, 1950), antecipa-se às idéias fundamentais da teoria de limites, diferenciação e integração, que seriam desenvolvidas apenas a partir do final do século XVII.

Os infinitésimos aparecem no tratado *O método*, sem magnitude, por não derivarem da divisão de entes geométricos, e pela crença de Archimedes em suas potencialidades, visto já não gozar, à época, da confiança de filósofos e matemáticos.

Sua reintegração à matemática ocorre, de forma mais efetiva, nos séculos XVI e XVII, graças, em parte, aos trabalhos de Johannes Kepler (1571-1630), de Galileu Galilei (1564-1642), e de um de seus mais

---

2 Referimo-nos, aqui, ao *contínuo matemático*, embora a noção de infinitésimo, ou quantidade infinitesimal, possa igualmente ser associada ao *contínuo físico* relativo ao espaço, tempo e movimento.

destacados discípulos – e sucessor na Universidade de Pisa –, Evangelista Torricelli (1608-1647) (ver Torricelli, 1644), que aplicaram, com relativo sucesso e rigor, o método infinitesimal à física e à matemática.

Kepler (1615, pp. 551-646), utiliza transformações geométricas e métodos infinitesimais no cálculo do volume de inúmeros sólidos de revolução, em particular, no cálculo do volume de tonéis de vinho. Suas falhas conceituais são compensadas pelo pioneirismo de suas idéias.

Galilei (1638) utiliza propriedades dos infinitésimos no estudo de problemas da mecânica e da dinâmica, como no movimento de projéteis e na queda livre de corpos. Um dos resultados obtidos, por exemplo, assegura que "a área delimitada por uma curva dada pela velocidade de um móvel em função do tempo é a distância percorrida pelo mesmo, no intervalo de tempo considerado". Nessa obra é sugerida a existência de objetos compostos por *partículas minúsculas de dimensões infinitesimais*, unidas entre si por uma infinidade de *pequenos vazios*, o que caracteriza uma espécie de "atomismo matemático". Galileu, como podemos ver em Galilei (1890-1909), foi, também, um dos primeiros a utilizar o termo *indivisível*, cujo uso mais extensivo, porém, ocorre com seu discípulo Boaventura Cavalieri (1598-1647). Este, em Cavalieri (1966), desenvolve, mesclando o método da exaustão e o método infinitesimal de Kepler, um novo processo para o cálculo geométrico de áreas e de volumes, pelo qual pode ser considerado um dos mais representativos precursores do cálculo diferencial e integral.[3] Aspectos obscuros de sua obra seriam elucidados por Torricelli, que em Torricelli (1644) apresenta, de forma pioneira, os conceitos de derivada e de integral.

Podemos destacar ainda, entre os precursores do cálculo diferencial e integral, René Descartes (1596-1650), Pierre Simon de Fermat (1601-1655) e John Wallis (1616-1703) (ver Boyer, 1974; Lintz, 1999).[4]

---

3 Baron (1969) apresenta uma comparação entre o método de integração com recursos geométricos de Cavalieri e a integração clássica.

4 Wallis, o mais eminente matemático inglês anterior a Isaac Newton, em 1655, aritmetiza, num certo sentido, os indivisíveis de Cavalieri (ver Wallis, 1693; Baron, 1969), substituindo as razões geométricas de Cavalieri por somas de séries de potências inteiras de números naturais; Fermat (1679, ver também Fermat, 1891-1922), volume 2, introduz a representação gráfica de funções e estuda problemas de máximos e mínimos e de tangência; e Descartes, em *La géométrie* (ver Descartes, 1686) – tratado que integra, praticamente como anexo, a obra Descartes (1637) –, cria a *geometria analítica* e estuda, algebricamente, propriedades de funções, com o auxílio do cálculo.

Mas a paternidade, propriamente, do cálculo, é dividida entre Newton e Leibniz.

Newton foi discípulo e sucessor de Barrow (ver Barrow, 1670) em sua cátedra na Universidade de Cambridge. Motivado em suas pesquisas na física e matemática, pela física de Aristóteles e pelo método axiomático de Euclides, foi também influenciado pelos trabalhos de Wallis, particularmente seu trabalho de 1693. Seus trabalhos mais relevantes para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, na ordem de publicação, são *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687), *Optics* (1704), *Universal aritmethic* (1707), *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias* (1711), *Methodus differentialis* (1711), e *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (1736) (ver Newton 1671, 1687, 1711 e 1967-1981).

Alguns de seus trabalhos são frutos da compilação de manuscritos antigos, que relutara em publicar assim que os produzira, como *Optics* (1704) e *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias* (1711), uma compilação de vários tratados, dos quais, para o cálculo diferencial e integral, o mais importante é *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*. Escrito originalmente em inglês, *De Analysi* inclui, como apêndices, os tratados *Cubic curves*, *Quadrature and rectification of curves by the use of infinite series* e *Method of fluxiones*.

Newton tentou inicialmente, valendo-se de intuições geométricas conjugadas com elementos da então recentemente aperfeiçoada linguagem algébrica, dar consistência lógica e formal ao seu cálculo infinitesimal, construído como suporte matemático necessário à construção de um sistema natural baseado em leis naturais universais. Para isso, aperfeiçoou o uso do conceito cinemático de infinitésimo de Barrow e Fermat – os "momentary increments" (momentos)[5] –, mas não evitou a inconsistência gerada pelos mesmos, presente no fato de se tratarem de quantidades ao mesmo tempo não-finitas e não-nulas. É possível que Newton tenha tido a intuição incompleta das propriedades da moderna teoria de limites, suficientes, porém, de seu ponto de vista, para permitir que operasse com

5 *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Livro II, Seção II, Lema II: Inicialmente é explicado que momentos são produzidos por variáveis quantitativas chamadas "genita" (quantitas genita ou quantidades geradas). Então é enunciado o Lema "O momento de cada genitum é igual aos momentos de cada uma des suas partes geradoras, multiplicados pelos índices das potências dessas partes, e por seus coeficientes, continuamente".

a divisão por "momentos", desconsiderando-os na seqüência dos cálculos, como se fossem nulos. Tendo assim procedido sem maiores explicações, sujeitou-se às críticas daqueles que consideraram ter ocorrido, nos referidos cálculos, de alguma forma, a divisão por zero.

Em *Method of fluxiones*, Newton apresenta uma nova abordagem para o cálculo, explicitando que suas variáveis quantitativas são geradas pelo movimento e definindo as entidades denominadas *fluxões* e *fluentes*. As quantidades infinitesimais são, pois, trabalhadas cinematicamente, de tal modo que as variações infinitesimais da variável *tempo* tornam-se parte do processo que gera magnitudes geométricas. As quantidades variáveis x recebem o nome de *fluentes*, e o conceito de *derivada* é obtido a partir da noção de *fluxão* $\dot{x}$ *do fluente* x: $\dot{x}$ é a fluxão do fluente x; $\ddot{x}$ é a fluxão do fluente $\dot{x}$, etc, enquanto que inversamente, x é o fluente do qual x é a fluxão. O *momento* de um fluente x é definido como o acréscimo ocorrido em x em um período indefinidamente pequeno (o) de tempo, e denotado por o $\dot{x}$.

Newton introduz, através dessas entidades, dois tipos clássicos de problemas do cálculo. O primeiro deles equivale a encontrar a fluxão associada a fluentes dados, a partir de relações conhecidas entre os mesmos, o que corresponde ao processo de *diferenciação* do cálculo usual. O segundo, um processo inverso do primeiro, equivale à determinação da relação entre as fluxões de dois fluentes, dada a equação que traduz a relação existente entre tais fluentes, o que corresponde ao processo de integração do cálculo usual.

Com a persistência de inconsistências no processo, Newton, como terceira alternativa, utilizou as chamadas "*prime and ultimate ratios*" (primeiras e últimas razões), que se aproximam de uma teoria cinemática de limites. Contudo, seu trabalho com fluxões e fluentes é considerado o de maior relevância e brilho[6].

Leibniz, por volta de 1673, em Paris, recorre a trabalhos de Descartes, de Nicholas Mercator (1620-1687), de Wallis, James Gregory (1638-1675) e de Henry Oldenburg (1618-1677) para aprofundar seus

---

6 Fleuriot e Paulson (1998), usando infinitésimos, conceitos da análise não-standard, e recursos do aplicativo Isabelle – utilizado para a demonstração automática de teoremas –, desenvolvem uma geometria denominada *geometria infinitesimal*, com a qual é aprofundada a análise dos resultados introduzidos por Newton em *Principia Mathematica*.

conhecimentos matemáticos e dar início ao seu projeto de formalização do cálculo. Assim como Newton, Leibniz pretendia encontrar um modo de quantificar fenômenos que variam uniformemente com o tempo, mas seus objetivos gerais eram diferentes dos de Newton. Leibniz pretendia dar maior sustentabilidade lógica ao cálculo, e se Newton apresentava uma maior precisão técnica em seu trabalho, Leibniz apresentava um maior refinamento lógico e filosófico. É do que se vale para incluir em seus trabalhos, uma reflexão profunda sobre o conceito lógico de *igualdade* ou *identidade*, intimamente relacionado com o conceito de *verdade.* Por ter sido o primeiro a formalizá-lo, a Leibniz é creditada a autoria do *Princípio da Identidade* dos indiscerníveis: "dois objetos que são indistinguíveis, no sentido de possuírem exatamente as mesmas propriedades, não podem ser, na verdade, *dois* objetos". Dito de outra forma, esse princípio estabelece que "se X possui uma propriedade que Y não possui, então X é diferente de Y".

Sua teoria da verdade, por outro lado, está em conexão com o *Princípio da (não-) contradição* e o *Princípio da razão suficiente*, e impregnada por sua profunda fé e religiosidade. Em Leibniz (2006, Prop. 47), por exemplo, assim se manifesta sobre a relação entre Deus e as criaturas:

> Assim, pois, Deus apenas é a unidade primitiva ou substância simples originária, e todas as mônadas criadas ou derivadas são produções suas; e nascem, por assim dizer, por fulgurações contínuas de sua divindade, de momento em momento, limitadas pela receptividade da criatura, caracterizada pelo atributo de ser essencialmente limitada.

Sobre a questão da composição do *continuum*, em particular do *continuum* geométrico, ou da reta, sua posição é a de Aristóteles: trata-se de uma entidade que não pode ser resultante da composição de pontos, meros constituintes das extremidades de segmentos. E como extensão possível de segmentos, não pode ser, ela própria, considerada uma "u-nidade". Mais que isso, o *continuum* geométrico é considerado por Leibniz uma entidade "ideal", em razão de suas propriedades aparentemente contraditórias ou inconsistentes.

Igualmente caracterizadas por propriedades "inconsistentes", do ponto de vista da lógica clássica, são as magnitudes infinitesimais associadas ao *espaço* e ao *tempo*. Leibniz atribui à *matéria*, em contrapartida, um caráter "discreto", e define suas unidades constituintes como as *mônadas* – os *átomos* da matemática. Embora não caiba aqui um detalhamento desse conceito, podemos, pelas proposições iniciais de *Monadologia* (Leibniz, 2006), apresentadas a seguir, conhecer um pouco sobre o pensamento de Leibniz a esse respeito:

> 1. A mônada, de que vamos falar nesse tratado, não é senão uma substância simples, que comparece na formação dos compostos; simples quer dizer sem partes.
> 2. É necessário que existam substâncias simples, uma vez que existem compostas; pois o composto não é mais do que um aglomerado, ou agregado, de simples.
> 3. Por outro lado, onde não há partes, não pode haver extensão, nem figura, nem divisibilidade. E as tais mônadas são os verdadeiros átomos da natureza e, em uma palavra, os elementos das coisas.

Leibniz, em *Nova methodus pro maximus et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (Leibniz, 1684, ver Leibniz, 1983), formaliza o cálculo diferencial antecipando-se em cerca de três anos à publicação dos *Principia Mathematica* de Newton. Nessa obra, utilizando os infinitésimos como "instrumentos úteis", embora "ficcionais", introduz, sob a notação *dx*, a noção de *diferencial* para designar uma "quantidade infinitamente pequena", associada a uma *variável x*. As diferenciais são, na verdade, tratadas como segmentos, dos quais são obtidos os *quocientes diferenciais dy/dx.* A "diferencial" e o "quociente diferencial" de Leibniz correspondem, respectivamente, ao "momento" e à "fluxão" de Newton.

Em *Nova methodus* aparecem fórmulas, como $d\,(xy) = x\,dy + y\,dx$ e $d(x/y) = (y\,dx - x\,dy)/y^2$, em cuja obtenção termos como dxdy são "negligenciados" por serem infinitesimais – uma falta de rigor da qual não seria poupado, mesmo não interferindo na correção do resultado final.

Com a noção de diferencial, Leibniz estabeleceu, independentemente de Newton, o caráter funcional do cálculo diferencial e integral, válido para variáveis associadas a funções contínuas: uma variável (independente) y e uma variável (dependente) x são interdependentes quando uma variação infinitesimal de x acarreta uma variação infinitesimal de y.

Em *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Leibniz, 1686, ver Leibniz, 1983), Leibniz sistematiza o cálculo integral, estabelecendo a notação básica definitiva para o mesmo, como a notação $\int x$, depois modificada para $\int x \, dx$, para a integração usual.

Embora o cálculo de Newton seja, conceitualmente falando, equivalente ao de Leibniz, este último acabou sendo universalmente adotado, em função de sua maior adequação notacional – situação que perdura ainda hoje.

Dentre os críticos do cálculo infinitesimal, o bispo anglicano George Berkeley (1685-1753) foi o mais notório. Prova disso é que Berkeley (1734, The analyst), mesmo não sendo a obra que concentra as discussões mais profundas sobre as inconsistências do método infinitesimal, é a mais citada. O Item VI de *The analyst*, de Berkeley (2002) ilustra bem a aversão de Berkeley a tais entidades e ao uso que delas fazem os seus adeptos, que pejorativamente classifica como "modernos analistas":

> *VI. And yet in the* calculus differentialis*, which Method serves to all the same Intents and Ends with that of Fluxions, our modern Analysts are not content to consider only the Differences of finite Quantities: they also consider the Differences of those Differences, and the Differences of the Differences of the first Differences. And so on* ad infinitum*. That is, they consider Quantities infinitely less than the least discernible Quantity; and others infinitely less than those infinitely small ones; and still others infinitely less than the preceding infinitesimals, and so on without end or limit. Insomuch that we are to admit an infinite succession of infinitesimals, each infinitely less than the foregoing, and infinitely greater than the following. As there are first, second, third, fourth, fifth &c. Fluxions, so there are Differences, first, second, third, fourth, &c. in an infinite Progression towards nothing, which you still approach and never arrive at. And (which is most strange) although you should take a Million of Millions to the least given Quantity, it shall be never the bigger. For this is one of the modest* postulata *of our modern Mathematicians, and it is a corner-stone or Ground-work of their Speculations.*

Críticas como as de Berkeley, contra as quais se insurgiram simpatizantes da nova análise de Newton, como James Jurin (1684-1750) (ver Jurin, 1734, 1735) e Benjamin Robbins (1707-1751) (ver Robins, 1735), não impediam a divulgação dos trabalhos de Newton e de Leibniz. Os matemáticos suiços Jacques Bernoulli (1654-1705) e Jean Bernoulli

(1667-1748), irmãos que mantiveram assídua correspondência com Leibniz,[7] foram os seus primeiros divulgadores (ver Bernoulli, 1744). Jean foi professor do Marquês Guillaume F. A. de l'Hospital (1661-1704), entre 1690 e 1692, a quem teria cedido, supõe-se que por via de um obscuro acordo, descobertas que seriam usadas na redação do primeiro livro sobre o cálculo infinitesimal, de de l'Hospital (1696). Nessa obra é dado o melhor tratamento, até então, ao caráter inconsistente das quantidades infinitesimais, graças à axiomatização utilizada por l'Hospital, da qual destacamos os postulados seguintes.

- *Pode-se tomar, indiferentemente, qualquer uma de duas quantidades que diferem entre si por uma quantidade infinitamente pequena.*
- *Uma linha curva pode ser considerada como uma coleção de infinitos segmentos, todos de comprimento infinitesimal, ou seja, pode ser aproximada por uma linha poligonal com quantidade infinita de lados, todos de comprimento infinitesimal.*

Nesse trabalho fica clara a relação que existe entre a equação da reta tangente a uma curva, em um de seus pontos, e os incrementos infinitesimais considerados.

Porém, nem todo esforço dispendido por Newton e Leibniz no tratamento formal dos infinitésimos e os avanços obtidos com a obra de l'Hospital seriam suficientes para garantir a adequação dos infinitésimos como base segura para a construção do cálculo diferencial e integral. É o que mostram matemáticos e filósofos da Academia Real de Ciências de Paris, cujas opiniões divergentes sobre o tema dariam início a um longo ciclo de discussões entre adeptos e contrários à nova teoria matemática de Newton e Leibniz. Destacam-se entre os seus simpatizantes, Pierre Varignon (1654,-1722) e Joseph Saurin (1659-1737), e entre seus opositores, Michel Rolle (1652-1719). Foram estes os protagonistas dos maiores debates sobre o cálculo na Academia Real de Ciências de Paris, entre os anos de 1700 e 1706.

Varignon, por acreditar na existência real dos infinitésimos – ao que parece crendo ser esta também uma convicção de Leibniz –, apresenta uma defesa frágil contra os argumentos de Rolle, nos debates que travaram entre 1700 e 1701 (ver Pin, 1987; Joven, 1997).

---

7 A denominação *cálculo integral*, sugerida por Jacques Bernoulli, foi acatada por Leibniz.

Leibniz, manifestando-se junto à Academia de Paris, depois de um período um tanto longo de silêncio, declara sua descrença quanto à *extensão material dos infinitésimos*, ao considerá-los *ficções úteis*, embora capazes de justificar propriedades de objetos com existência real. Isso desagrada seus adeptos que, como Varignon, nutriam a crença na existência real dos infinitésimos. Os debates se estendem até 1706, com o envolvimento mais direto de Saurin e Rolle, terminando apenas após a ação conciliatória de uma comissão, especialmente criada pela Academia para tal fim. Rolle e seus partidários saem com a sensação de vitória, considerando que não fora apresentada por Saurin ou qualquer de seus partidários, justificativa rigorosa para a existência dos infinitésimos.

Foi assim, com os infinitésimos em vias de serem banidos da matemática e a teoria de limites já despontando no horizonte matemático, que Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) faria uma das últimas tentativas de seu tempo para consolidar o cálculo a partir do uso dos infinitésimos, considerados, agora, como quantidades fixas e não mais como variáveis tendendo a um limite. Seria, no entanto, mais uma tentativa infrutífera. Cauchy se concentra, então, na emergente teoria de limites, e em Cauchy (1821 e 1826-1829), introduz resultados que o tornam um dos mais importantes precursores do cálculo diferencial e integral moderno.

Os contornos definitivos do cálculo diferencial e integral seriam traçados por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), com sua aritmetização, através da qual problemas remanescentes dos trabalhos de Cauchy seriam sanados. Em particular, a Weierstrass são creditadas a definição rigorosa de limite através dos ε's e δ's, e as correspondentes definições de continuidade, diferenciabilidade e outras noções afins. Entre seus poucos artigos publicados em vida, destaca-se o de 1854, no qual é introduzida a teoria de *funções abelianas*. As obras completas de Weierstrass são editadas apenas entre 1894 e 1927 (Weierstrass 1894-1927), com uma reedição em 1967.

Destacamos, entre outros matemáticos que contribuiram efetivamente para a consolidação da moderna análise, baseada na teoria de limites, Cantor com sua teoria do infinito e resultados sobre números ordinais e cardinais, indispensáveis tanto para a lógica quanto para a matemática contemporâneas (ver Bocheński, 1951 e 1961; Boyer, 1974).

O retorno dos infinitésimos ao cenário da matemática se dá com Abraham Robinson (1918-1974), que em 1996 (reedição revisada da primeira edição publicada em 1966) apresenta uma nova teoria para a análise matemática, baseada nos infinitésimos e com o uso da teoria de modelos. Esboçada em 1960, essa teoria é apresentada em novembro do mesmo ano em seminário realizado na Universidade de Princeton, Estados Unidos, e depois, em janeiro de 1961, no encontro anual da Association for Symbolic Logic, quando é, então, publicada nos *Proceedings of the Royal Academy of Sciences of Amsterdam* (ver Robinson, 1961), sob o título *Non-Standard Analysis.* Tendo sido editada como livro em 1966, foi revisada por Robinson em 1973, e teve sua segunda edição lançada em 1974 – versão que é reeditada em 1996 (ver Robinson, 1996). O tratamento aí dispensado por Robinson às quantidades infinitesimais reflete de forma precisa, segundo Stroyan e Luxemburg (1976), as idéias originais de Leibniz.

Robinson (1996) estabelece um modelo não-standard de ordem superior para a aritmética e um modelo não-standard para a análise, os quais preservam suas operações e propriedades usuais. O primeiro baseia-se numa extensão não standard do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, denotada por $^*\mathbb{N}$, cujos elementos, que incluem *números naturais infinitos*, são chamados *números hipernaturais*. O segundo baseia-se numa extensão do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, denotada por $^*\mathbb{R}$, que inclui *números reais infinitos* e *infinitésimos*, denominados *números hiper-reais.* Dentre suas principais propriedades, destacamos aquelas expressas pelos dois resultados a seguir, que caracterizam sua relação de ordem e definem os infinitésimos.

Princípio da Extensão

a) O conjunto dos números reais forma um subconjunto do conjunto dos números hiper-reais, e a relação de ordem $x < y$ para os números reais é um subconjunto da relação de ordem para números hiper-reais.

b) Há um número hiper-real que é maior do que zero, mas menor do que todo número real positivo.

c) Para toda função real f de uma ou mais variáveis, corresponde uma função hiper-real f^* com o mesmo número de variáveis, sendo f^* denominada uma *extensão natural* de f.

Uma conseqüência da propriedade (a) é que a reta real é parte da reta hiper-real.

Definição

• Um número hiper-real b é um *infinitésimo positivo* se b é positivo e menor do que todo número real positivo.

• Um número hiper-real b é um *infinitésimo negativo* se b é negativo e maior do que todo número real negativo.

• Um número hiper-real b é um *infinitésimo* se b é um infinitésimo positivo, ou um infinitésimo negativo, ou zero.

Uma conseqüência fundamental dos resultados acima é que podemos aplicar funções reais ordinárias, como as que definem as operações aritméticas sobre o conjunto dos reais, a números hiper-reais. É o caso, por exemplo, da adição, $+$, cuja extensão é denotada por $+^*$.

H. Jerome Keisler (ver Keisler, 1976) utiliza a análise não-standard de Robinson para, em 1969, na Universidade de Wisconsin, elaborar uma proposta experimental para um curso de cálculo baseado no uso de infinitésimos, em lugar da teoria de limites, bem aceito e bastante utilizado pelas universidades norte-americanas nos anos 70.

Numa perspectiva distinta da de Robinson, da Costa propõe um cálculo diferencial paraconsistente, como uma das várias teorias inconsistentes, mas não-triviais, que podem ser desenvolvidas com o uso da lógica paraconsistente e da teoria paraconsistente de conjuntos, satisfazendo o assim denominado Princípio de l'Hospital (ver da Costa, 2000):

> *On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l´autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même...*[8]

Pin (1987) analisa as críticas históricas ao método das fluxões de Newton e, especialmente, às idéias de Leibniz, concluindo que a redenção deste último vem, de certo modo, através de Abraham Robinson, em sua análise não standard:

---

8 Simplificadamente: "duas quantidades finitas, que diferem por uma quantidade infinitamente pequena, são iguais".

> *El Análisis no-standard viene a otorgar razón a la intuición de Leibniz, a legitimar su instalación en la aporía y, al tiempo, redimile de ella, a procurar um modelo en el que dos magnitudes que difieren por una magnitud infinitamente pequena son – en el registro al menos, que interessaba a Leibniz – equiparables entre sí, sin que ello excluya a tal diferencia del concepto proprio de magnitud.* (p. 101)

Os trabalhos de Robinson e de da Costa põem em evidência a importância de se estabelecer, em bases lógicas e conjuntistas rigorosas, a linguagem sobre a qual é desenvolvida a análise infinitesimal. A construção de uma análise que tenha subjacentes, como no caso de da Costa, uma lógica e uma teoria de conjuntos paraconsistentes, exige ainda mais profundos cuidados. Por se tratar de algo intimamente relacionado ao advento das lógicas e teorias de conjuntos não-clássicas, consolidadas apenas na segunda metade do século XX, parece-nos conveniente relembrar aqui, ainda que de forma bem resumida, o caminho trilhado pela lógica, de Aristóteles ao final do século XX.

Os princípios estabelecidos por Aristóteles para a lógica, em boa parte reunidos na coleção de trabalhos conhecida como *Organon*, mais especificamente nos *Analytica priora* e no *De interpretatione* (ver Aristotle, 1978a e 1978b), mantiveram-se aceitos, praticamente sem discussão, até o final do século XIX. Com o aprofundamento das discussões sobre a natureza desses princípios, novos sistemas lógicos, ditos não-clássicos, surgiriam especialmente a partir do início do século XX (ver D'Ottaviano, 1990; D'Ottaviano e Feitosa, 2003).

A lógica moderna inicia-se no século XVII, com Leibniz (ver Leibniz, 1966; Leibniz, 1983; Couturat, 1903; D'Ottaviano, 1992, D'Ottaviano e Feitosa, 2003), que teria sido, caso seus trabalhos não tivessem permanecido quase desconhecidos até o início do século XX, um dos responsáveis diretos pelo desenvolvimento da lógica contemporânea, que ocorreu a partir dessa época. Conforme podemos inferir de comentários de Bertrand Russell em *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz* (Russell, 1900, capítulo 1), esse desconhecimento teve como causa principal o fato de Leibniz não ter reunido em uma grande obra, suas notáveis idéias e projetos:

> *1.Reason why Leibniz never wrote a magnum opus*
> *The philosophy of Leibniz, though never presented to the world as a systematic whole, was nevertheless, as a careful examination shows, an*

> *unusually complete and coherent system. As the method of studying his views must be largely dependent upon his method of presenting them, it seems essential to say something, however brief, as to his character and circumstances, and as to the ways of estimating how far any given work represents his true opinions.*
>
> *The reasons why Leibniz did not embody his system in one great work are not to be found in the nature of that system. On the contrary, it would have lent itself far better than Spinoza's philosophy to geometrical deduction from definitions and axioms. It is in the character and circumstances of the man, not of his theories, that the explanation of his way of writing is to be found. For evervthing that he wrote he seems to have required some immediate stimulus, some near and pressing incentive. To please a prince, to refute a rival philosopher, or to escape the censures of a theologian, he would take any pains. It is to such motives that we owe the Theodicee, the Principles of Nature and of Grace and the New Essays, and the Letters to Arnauld. But for the sole purposes of exposition he seems to have cared little. Few of his works are free from reference to some particular person, and almost all are more concerned to persuade readers than to provide the most valid arguments. This desire for persuasiveness must always be born in mind in reading Leibniz's works, as it led him to give prominence to popular and pictorial arguments at the expense of the more solid reasons which be buried in obscurer writings. And for this reason we often find the best statement of his view on some point in short papers discovered among his manuscripts, and published for the first time by modern students, such as Erdmann or Gerhardt. In these papers we find, as a rule, far less rhetoric and far more logic than in his public manifestoes, which give a very inadequate conception of his philosophic depth and acumen.*

De acordo com da Costa (1992), o século XIX foi um dos períodos áureos da matemática, e muito influenciou a cultura e o pensamento em geral do século XX, tendo contribuído, direta ou indiretamente, para o surgimento da lógica matemática e, principalmente, das lógicas não-clássicas.

Os passos essenciais para a introdução do método logístico e da lógica matemática foram dados por Friedrich L. G. Frege (1848-1925) – o verdadeiro fundador da lógica moderna –, em 1977, juntamente com Bertrand Russell (1872-1970) e Alfred N. Whitehead (1861-1947), com Russell, em 1908 e Whitehead e Russell (1910-1913).

Seus trabalhos, juntamente com os trabalhos de Hugh McColl (1837-1909), Jań Łukasiewicz (1878-1956), Nicolaj A. Vasiliev (1880-1940), Luitzen E. J. Brouwer (1881 – 1966), Alfred Tarski (1902-1983), Stanislaw Jaśkowski (1906-1965), Kurt Gödel (1906-1978) e, contemporaneamente, de Newton Carneiro Affonso da Costa, foram fundamentais para que se alterasse o panorama da lógica e da matemática no século XX, com a formalização da lógica clássica e o advento e multiplicação das lógicas não-clássicas.

Frege, em *Begriffsschrift*, apresenta o cálculo proposicional, pela primeira vez, na forma lógica moderna, introduzindo os princípios que iriam delinear a doutrina logicista. No entanto, se consegue alcançar com sua linguagem o rigor que faltava a Cantor, falha na concepção de alguns princípios, como na do Princípio da Compreensão, que implicava uma importante inconsistência, descoberta por Russell, e conhecida como Paradoxo de Russell (ver D'Ottaviano e Feitosa, 2000 e 2003).

Com os trabalhos de Frege, Cantor e Russell, principalmente, desencadeia-se a célebre *crise dos paradoxos*, entre o final do século XIX e o início do século XX, que leva os matemáticos a se conscientizarem da necessidade de uma revisão cuidadosa dos fundamentos da matemática.

Russell e Whitehead, com *Principia mathematica*, consolidam a posição da corrente *logicista* e formalizam, pela primeira vez, a lógica clássica, como proposta de solução para a chamada *crise dos fundamentos da matemática*, com enfoques distintos da corrente *formalista* de Hilbert e da corrente *intuicionista* de Brouwer.

A formalização da teoria de conjuntos de Cantor e os trabalhos de Zermelo, Skolem, Fraenkel, von Neumann e Gödel, entre outros, também contribuíram fortemente para o aperfeiçoamento dos fundamentos da matemática, via lógica clássica.

Alguns filósofos e matemáticos, entretanto, buscaram soluções fora do contexto clássico.

Łukasiewicz, em 1910[9] e no artigo "Über der satz von widerspruch bei Aristoteles" (1910), discute sobre a posição central do Princípio da (não-) contradição na lógica e discorre sobre a conveniência de uma revisão das leis básicas da lógica aristotélica (ver LeBlanc, 2002). Introduz, posteriormente, em 1920, um cálculo proposicional trivalente ($Ł_3$),

9 Com o livro: *Sobre o princípio da contradição de Aristóteles: estudo crítico*.

que é generalizado para cálculos com uma quantidade finita qualquer de valores de verdade e, em 1922, para cálculos proposicionais com quantidades infinitas de valores de verdade (ver Łukasiewicz e Tarski, 1930; Borkowski, 1970).

Jaśkowski, discípulo de Łukasiewicz, motivado por problemas diversos relativos a contradições, especialmente os concernentes às "*convincing reasoning which nevertheless yield two contradictory conclusions*", constrói o primeiro sistema de lógica paraconsistente (D2) em 1948 e 1949, restrito, porém, ao caso proposicional (ver Jaśkowski, 1969). O sistema D_2 de Jaśkowski é conhecido como *lógica discussiva* ou *lógica discursiva* (ver D'Ottavianno, 1992).

O brasileiro da Costa, porém, é considerado o verdadeiro fundador das lógicas paraconsistentes, assim como das teorias paraconsistentes de conjuntos (ver da Costa, 1963a, 1963b e 1974).

Arruda (1980), da Costa e Marconi (1989), D'Ottaviano (1990 e 1992), D'Ottaviano e Epstein (1990), da Costa (1992), Carnielli (1992 e 2000), Feitosa (1997), Carnielli e Marcos (2002) e Pizzi (1992), constituem referências importantes, que abordam, sob variados enfoques, o processo de criação e formalização das lógicas não-clássicas.

A lógica paraconsistente e a teoria paraconsistente de conjuntos como base para a edificação de um cálculo diferencial paraconsistente

Sejam T uma teoria (dedutiva) e L a lógica subjacente a T, cuja linguagem possui um símbolo de negação "$\neg$". A teoria T é *consistente* se não tiver como teoremas duas fórmulas da linguagem de L tais que uma seja a negação da outra, isto é, se não tiver teoremas contraditórios; caso contrário, T é *inconsistente*, isto é, encerra teoremas do tipo A e $\neg$A. Portanto, se uma teoria T é inconsistente e em sua lógica subjacente são válidas as propriedades usuais da conjunção, então em T ocorrem contradições $A \wedge \neg A$ como teoremas, e reciprocamente.

Uma teoria T é *trivial* (ou *supercompleta*) se toda fórmula (ou toda sentença) de sua linguagem é teorema; caso contrário, T diz-se *não-trivial* (ou *não-supercompleta*).

Uma lógica é *paraconsistente* – simplificadamente falando –, se pode servir de base para teorias inconsistentes, porém não triviais, que são ditas *teorias paraconsistentes*. Nas lógicas paraconsistentes, o escopo do princípio da (não-) contradição é, num certo sentido, restrito.

De fato, nas lógicas paraconsistentes, o princípio da (não-) contradição não é necessariamente inválido, mas em toda lógica paraconsistente, de uma fórmula e sua negação não é possível, em geral, deduzir qualquer fórmula.

As hierarquias de cálculos proposicionais paraconsistentes C_n, de cálculos de predicados paraconsistentes C_n^* e de cálculos de predicados paraconsistentes com igualdade $C_n^=$ de da Costa, $1 \leq n \leq \omega$, foram introduzidas em da Costa (1963a, ver também 1974 e 1993). Esses sistemas são apresentados em uma série de artigos, a partir de 1963 (ver Arruda, 1980 e 1989; da Costa e Marconi, 1989; D'Ottaviano, 1990). Sobre a linguagem do cálculo proposicional C_1 de da Costa, ver Kleene (1952), da Costa (1963a, 1963b, 1974 e 1993). A negação básica do sistema C_1, usualmente denominada "negação fraca", é denotada por $\neg$. A negação $\neg^*$, denominada "negação forte", desempenha, nesse sistema, papel equivalente ao da negação clássica. Lê-se $\neg A$ como "negação de A" ou "negação fraca de A", e $\neg^* A$ como "negação forte de A".

A teoria paraconsistente de conjuntos CHU_1 de da Costa, de forma igualmente simplificada, pode ser vista como uma extensão da teoria de conjuntos CHU (de Church, 1974) – intitulada *set theory with universal set* –, que corresponde à teoria CHU_0 da hierarquia CHU_n, $0 \leq n \leq \omega$ de teorias de conjuntos de da Costa. Detalhes sobre essas teorias podem ser encontrados em da Costa (1964c, 1965, 1967, 1971 e 1974); Arruda e da Costa (1964 e 1977); Arruda (1964, 1970a, 1970b, 1975a, 1975b e 1980); Rosser (1953); Forster (1995); da Costa (1986 e 1989), Béziau (1990 e 1993), e Carvalho (2004).

Um cálculo diferencial paraconsistente $\mathbb{P}$, satisfazendo o Princípio de l'Hospital, pode ser construído se adotarmos como teoria de conjuntos subjacente a teoria CHU_1 de da Costa, com sua lógica subjacente $C_1^=$ (ver da Costa, 2000, e da Costa, Béziau, Bueno, 1998, onde esse cálculo é esboçado). Carvalho (2004) e D'Ottaviano e Carvalho (2005) analisam propriedades dos infinitésimos, introduzem resultados sobre continuidade e diferenciabilidade, e demonstram um Teorema de Transferência, mostrando que esse cálculo estende, efetivamente, o cálculo clássico.

O passo inicial para a obtenção do cálculo $\mathbb{P}$ é a construção da extensão algébrica $\mathcal{A}$ para o anel $\mathbb{R}$ dos números reais, denominada um *hiperanel*, com a definição de variáveis infinitesimais e o acéscimo dos infinitésimos aos elementos de $\mathbb{R}$; e de uma outra extensão algébrica de $\mathbb{R}$, o quase-anel $\mathcal{A}^*$, que contém, além dos elementos de $\mathcal{A}$, também elementos infinitos. Os elementos de $\mathcal{A}$ e de $\mathcal{A}^*$ são denominados números hiper-reais, reais generalizados, ou, simplesmente, g-reais, dentre os quais incluem-se os números reais usuais: $\mathbb{R} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$. Os números infinitesimais e números infinitos são definidos como a seguir.

Definição 2.1. Fixados o intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e o ponto a pertencente ao interior de I, definimos uma *variável infinitesimal* como uma função real

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$[10].

Com o conjunto das variáveis infinitesimais, que denotaremos por $\mathcal{V}$, podemos definir o conjunto dos números hiper-reais.

Definição 2.2. Fixado o intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in I$, o *conjunto dos números hiper-reais*, denotado por $\mathcal{A}$, é assim definido:

$$\mathcal{A} =_{def} \{\langle r, f\rangle : r \in \mathbb{R} \text{ e } f \in \mathcal{V}\}.$$

Na definição acima, quando a variável infinitesimal f é a função nula, o hiper-real correspondente, $\langle r, 0\rangle$, pode ser identificado com o real standard r.

Definição 2.3. Chama-se *infinitésimo* a todo número hiper-real da forma $\langle 0, f\rangle$, em que f é uma variável infinitesimal.

Definição 2.4. Uma *variável infinita* é uma função v, $v: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$\lim_{x \to a} v(x) = \infty \cdot$$

Definição 2.5. Um *número hiper-real infinito*, ou simplesmente um *g-real infinito*, é um par da forma $\langle v, 0\rangle$, em que v é uma variável infinita.

Definição 2.6. O *conjunto dos números hiper-reais estendidos*, denotado por $\mathcal{A}^*$, é definido por

$$\mathcal{A}^* = \{a: a \in \mathcal{A} \text{ ou a é um hiper-real infinito}\}.$$

Essas são as estruturas clássicas para a construção do cálculo diferencial paraconsistente $\mathbb{P}$.

---

10 Igualmente podem ser usados limites laterais na definição das variáveis infinitesimais, observando-se que o conceito de limite aqui utilizado é o clássico.

Carvalho (2004) introduz o predicado de quase-igualdade $\equiv$[11] e os conceitos de superestrutura paraconsistente, de monomorfismo entre uma superestrutura clássica e uma superestrutura paraconsistente, e de valoração.

O resultado fundamental obtido por Carvalho (2004) é um Teorema de Transferência,[12] que mostra que qualquer fórmula α é um teorema do cálculo diferencial clássico se, e somente se, uma sua interpretação (tradução) é um teorema do cálculo diferencial paraconsistente.

Considerações finais

O Cálculo Diferencial e Integral, uma das maiores conquistas da matemática, exalta a genialidade, não só de Newton e de Leibniz, mas de uma legião de lógicos, físicos, filósofos e matemáticos que os antecederam ou que os sucederam, como Archimedes, Kepler, Galileu, Newton, Leibniz, Gauss, Cauchy e Weierstrass. Os novos caminhos abertos para a análise matemática a partir do século XX, com o advento das lógicas não-clássicas, introduzem na história da ciência moderna os trabalhos pioneiros de Łukasiewicz e Jaśkowski, e, especialmente, de Newton da Costa, reconhecido como o verdadeiro fundador das lógicas paraconsistentes.

O desenvolvimento de teorias matemáticas não-clássicas, como o cálculo paraconsistente, justifica-se pelo avanço de pesquisas em distintas áreas de conhecimento, como na física, na psicologia, no direito, na computação e na própria matemática, que nem sempre encontram elementos de apoio suficientes nas teorias clássicas. É o caso da física quântica, da criptografia qüântica, da inteligência artificial, da teoria da informação e de estudos da mente, entre outros, cujas fronteiras, cada vez mais indefinidas, concorrem para o estabelecimento acelerado de novos paradigmas e a revisão contínua de suas teorias.

---

11 O predicado de *igualdade generalizada*, ou *identidade generalizada*, denotado por $\equiv$, é definido por: $t_1 \equiv t_2 =_{def} t_1 - t_2 = \varepsilon$, com t_1 e t_2 termos da linguagem, ε infinitésimo, e $=$ o predicado primitivo de igualdade de L.
Além disso, definimos $\neg(t_1 \equiv t_2)$ por: $t_1 \not\equiv t_2 =_{def} t_1 \neq t_2$.

12 *Teorema de Transferência* (Carvalho, 2004, p. 190). Sejam as superestruturas $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{S}$, as funções de interpretação i e i'', e o monomorfismo $\blacklozenge$, e seja $\alpha(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ uma fórmula de L, cujas variáveis livres estão entre $x_1, x_2,\ldots,x_n$. Nessas condições, $\alpha(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ é válida em $\mathfrak{R}$ segundo a valoração v_i se, e somente se, $\blacklozenge(\alpha(x_1, x_2,\ldots,x_n))$ é válida em $\mathfrak{S}$ segundo a valoração $v_{i''}$.

Devemos considerar, por outro lado, o potencial didático de um cálculo assim desenvolvido. Sabemos que o cálculo diferencial e integral é uma disciplina básica dos cursos de graduação da área de ciências exatas, freqüentemente alvo de pesquisas e discussões nas academias, motivadas, principalmente, pelas dificuldades apresentadas pelos alunos em lidar com as propriedades pouco intuitivas da teoria de limites. O uso dos infinitésimos, em diversos aspectos, é bem mais natural e instigante, especialmente se associado a noções e aplicações de lógica e teoria de conjuntos, clássicas e não-clássicas. H. Jerome Keisler, da Universidade de Wisconsin, ao qual já nos referimos neste trabalho, assim se expressa sobre os infinitésimos no Prefácio da segunda edição de sua obra *Elementary calculus: an infinitesimal approach*[13] (1986):

> O uso de infinitésimos apresenta três importantes vantagens para o estudante. A primeira é sua maior afinidade com os aspectos intuitivos que conduziram à criação do cálculo. A segunda é que torna mais simples para o estudante, a compreensão e a utilização dos conceitos fundamentais de derivada e de integral. A terceira é que apresenta tanto a abordagem via infinitésimos quanto a abordagem tradicional, munindo o estudante de um ferramental extra, que pode se tornar progressivamente importante no futuro.

E acrescenta mais à frente, ainda no Prefácio:

> Recentemente, os infinitésimos têm apresentado estimulantes aplicações fora da matemática, notadamente nos campos da economia e da física. Como é bastante natural o uso de infinitésimos na modelagem de processos físicos e sociais, essas aplicações tendem a crescer em variedade e importância. Essa é uma oportunidade única para a descoberta de novas aplicações para a matemática, mas por ora poucas pessoas estão preparadas para tirar vantagens dessa oportunidade.

John L. Bell, destacado matemático e filósofo, pode ser citado como um dos grandes divulgadores contemporâneos dos infinitésimos. Em artigos e livros, como em 1998, expõe com clareza e originalidade

---

13 Obra não mais editada , mas que se encontra disponível, gratuitamente, na página de H. J. Keisler, na Internet.

aspectos matemáticos, lógicos e filosóficos sobre o assunto, contemplando tanto linhas avançadas de pesquisa quanto aspectos didáticos básicos. Através de seu site (Professor John L Bell, Western Ontario University), Bell disponibiliza muitos de seus artigos e notas de aula. Observamos, porém, que seu cálculo infinitesimal tem origem na teoria de categorias, e não na lógica – ao contrário do que ocorre com a análise não-standard de Robinson, que tem origem na lógica clássica e na teoria clássica de conjuntos, e com o cálculo diferencial paraconsistente, baseado na lógica paraconsistente e na teoria paraconsistente de conjuntos.

Os infinitésimos associados a esses diferentes modelos do cálculo apresentam particularidades que os diferenciam significativamente uns dos outros. Os infinitésimos adotados por Bell em *A primer of infinitesimal analysis*, não são inversíveis, em razão de admitirem potências nulas, enquanto que os da análise não-standard e os do cálculo paraconsistente são inversíveis. Embora distintos em variados aspectos, conservam a essência dos infinitésimos de Newton e de Leibniz: seu uso simplifica a demonstração da maior parte dos teoremas em que substituem a *teoria de limites*, possuem propriedades aparentemente contraditórias que desafiam os conceitos lógicos clássicos, mas que, convenientemente operadas, não produzem contradição. E, o que é mais importante, podem, como nos mostram Robinson, Bell e da Costa, ser trabalhados logica e matematicamente, de modo a cumprir seu ideal, traçado por Newton e Leibniz, de servir de base segura para o Cálculo Diferencial e Integral.

Referências

ARCHIMEDES (1950). *Works of Archimedes*. Capítulos introdutórios por T. L. Heath. Nova York, Dover (com o suplemento “The method of Archimedes”).

ARISTOTLE (1978a). “De interpretatione”. In: HUTCHINS, R. M. (ed.). Great books of the western world. Trad. E. M. Edghill. Chicago, *Encyclopaedia Britannica*, v. 8, pp. 23-36.

______(1978b). “Analytica priora”. In: HUTCHINS, R. M. (ed.). Great books of the western world. Trad. E. M. Edghill. Chicago, *Encyclopaedia Britannica*, v. 8, pp. 37-93.

ARRUDA, A. I. (1964). *Considerações sobre os sistemas formais* NF_n. Tese. Curitiba, Universidade Federal do Paraná.

ARRUDA, A. I. (1970a). Sur les systèmes formels NF_i de da Costa. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 270A, p. 1081-1084.

_____(1970b). Sur le système NF_ω. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 270A, pp. 1137-1139.

_____(1975a). Remarques sur les systèmes C_n. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 280-A, pp. 1253-1256.

_____(1975b). Le schéma de la séparation dans les systèmes NF_n. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 280A, pp. 1341-1344.

_____(1980). *A survey of paraconsistent logic*. In: LATIN AMERICAN SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL LOGIC, 4. 1978, Santiago, Chile. *Mathematical Logic in Latin America: proceedings*. Editado por A. I. Arruda; N. C. A. da Costa e R. Chuaqui. Amsterdam, North Holland, pp. 1-41.

_____(1989). "Aspects of the historical development of paraconsistent logic". In: PRIEST, G.; ROUTLEY, R. e NORMAN, J. (eds). *Paraconsistent Logic: essays on the inconsistent*. Philosophia Verlag.

ARRUDA, A. I. e COSTA, N. C. A. da (1964). Sur une hiérarchie de systèmes formels. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 259, pp. 2943-2945.

_____(1977). Une sémantique pour le calcul $C_1^=$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 284A, pp. 279-282.

BARON, M. E. (1969). *The origins of the infinitesimal calculus.* Hungary, Pergamon Press.

BARROW, I. (1670). *Lectiones geometricae*. Londres, John Collins.

BELL, J. L. (1998). *A primer of infinitesimal analysis*. Cambridge, Cambridge University Press.

BERKELEY, G. (1734). *The analyst*. Londres, J. Tonson.

_____(2006). *The analyst.* Dublin, Trinity College. Versão eletrônica adaptada por David R. Wilkins a partir de texto de 1898, de George Sampson. www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/ Acesso em junho.

BERNOULLI, J. (1744). *Opera*. Genevae, Cramer & Philibert.

BÉZIAU, J.-Y. (1990). *La logique propositionnelle paraconsistante C_1 de N. C. A. da Costa.* Paris, Université Denis Diderot (Paris 7).

_____(1993). Nouveaux resultats et nouveaux regard sur la logique paraconsistante C_1. *Logique et Analyse*, n. 141-142, pp. 45-58.

BOCHENSKI, I. M. (1951). *Ancient formal logic*. Amsterdã, North-Holland.

______(1961). *A history of formal logic.* Nova York, Chelsea Publishing Co.

BORKOWSKI, L. (1970). *Selected works of J. Łukaziewicz*. Amsterdã, North Holland.

BOYER, C.B. (1974). *História da matemática*. Trad. E. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher/Edusp.

CARNIELLI, W. A. (1992). "Lógicas não-clássicas, teoria da informação e inteligência artificial". In: ÉVORA, F. (ed.). *Século XX: o nascimento da ciência contemporânea*. Campinas, Unicamp (Col. CLE, v. 11).

______(2000). *Possible translations semantics for paraconsistent logics*. In: I WORLD CONGRESS ON PARACONSISTENCY, 1998, Ghent, Belgium. *Frontiers in Paraconsistent Logic: proceedings*. Editado por D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, J. P. van Bendegen. Londres, King's College Publications, pp. 116-139.

CARNIELLI, W. A. e MARCOS, J. (2002). "A taxonomy of C-systems". In: CARNIELLI, W. A.; CONIGLIO, M. E. e D'OTTAVIANO, I. M. L. (eds). *Paraconsistency: the logical way to the inconsistent*. Nova York, Marcel Dekker (Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, v. 228).

CARVALHO, T. F. (2004). *Sobre o cálculo diferencial paraconsistente de da Costa.* Tese de doutorado. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas.

CAUCHY, A. L. (1821). "Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique: 1er partie' (analyse algébrique)" .In: *Oeuvres complètes 2*. Paris, Gauthier-Villars, v. 3.

______(1826-1829). "Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal: leçons sur le calcul différentiel". In: *Oeuvres complètes 2.* Paris, Gauthier-Villars, v. 4.

CAVALIERI, B. (1966). *Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri*. Lucio Lombardo-Radice (ed.). Turim, Unione Tipografico - Editorice Torinese (tradução para o Italiano da edição original, em latim, de 1635, e da versão póstuma aperfeiçoada, de 1653 – *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*).

CHURCH, A. (1974). A formulation of the simple theory of types. *Journal of Symbolic Logic*, v. 5, pp. 56-68.

COUTURAT, L. (ed.) (1903). *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*. Paris.

DA COSTA, N. C. A. (1963a). *Sistemas formais inconsistentes*. Tese (Cátedra). Curitiba, Universidade Federal do Paraná.

______(1963b). Calculs propositionels pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 257, pp. 3790-3793.

______(1964a). Calculs de prédicats pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 258, pp. 27-29.

______(1964b). Calculs de prédicats avec égalité pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 258, pp. 1111-1113.

______(1964c). Sur un système inconsistant de théorie des ensembles. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 258, pp. 3144-3147.

______(1965). Sur les systèmes formels C_1, $C_1{}^*$, $C_1{}^=$, D_i et NF_i. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 260, pp. 5427-5430.

______(1967). Une nouvelle hiérarchie de théories inconsistantes. *Publications du Département de Mathématiques.* Université de Lyon, n. 4, pp. 2-8.

______(1971). Remarques sur le système NF_1. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris*, t. 272A, pp. 1149-1151.

______(1974). On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 15, n. 4, pp. 497-510.

______(1986). On paraconsistent set theory. *Logique et Analyse*, v. 115, pp. 361-371.

______(1989). *Matemática e paraconsistência*. Curitiba, UFPR (monografias da Sociedade Paranaense de Matemática, v. 7).

______(1992). "O ambiente matemático no século XIX e a lógica do século XX". In: ÉVORA, F. (ed.). *Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea.* Campinas, Unicamp (Col. CLE, v. 11).

______(1993). *Sistemas formais inconsistentes*. Curitiba, Universidade Federal do Paraná.

DA COSTA, N. C. A. (2000). *Paraconsistent mathematics*. In: I WORLD CONGRESS ON PARACONSISTENCY, 1998, Ghent, Belgium. *Frontiers in Paraconsistent Logic: proceedings*. Editado por D. Batens; C. Mortensen; G. Priest e J. P. van Bendegen. Londres, King's College Publications.

DA COSTA, N. C. A.; BÉZIAU, J. Y. e BUENO, O. (1998). *Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos*. Campinas, Unicamp (Col. CLE, v. 23).

DA COSTA, N. C. A. e MARCONI, D. (1989). An overview of paraconsistent logics in the 80's. *The Journal of Non-Classical Logic*, v. 6, n. 1, pp. 5-31.

DE L'HOSPITAL, G. F. A. (1696). *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris, Imprimerie Royale.

DESCARTES, R. (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*. Leyde, Jean Maire.

______(1686). *La géométrie*. Paris, Hermann (1. ed. 1637, 2. ed. 1659-1661).

D'OTTAVIANO, I. M. L. (1990). On the development of paraconsistent logic and da Costa's work. *The Journal of Non-Classical Logic*, v. 7, pp. 89-152.

______(1992). "A lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas". In: ÉVORA, F. (ed.). *Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea*. Campinas, Unicamp (Col. CLE, v. 11).

D'OTTAVIANO, I. M. L e CARVALHO, T. F. (2005). "Da Costa's Paraconsistent Differential Calculus and a Transference Theorem". *2nd Indian International Conference on Artificial Intelligence (II CAI – 05): proceedings*. Pune, India.

D'OTTAVIANO, I. M. L. e EPSTEIN, R. L. (1990). "A paraconsistent many-valued propositional logic: J_3". In: EPSTEIN, R. L. *The semantic foundations of logic* (com a colaboração de W. A. Carnielli, I. M. L. D'Ottaviano, S. Krajewski e R. D. Maddux). Dordrecht, Kluwer Academic Publishers (v. 1: Propositional Logics, pp. 263-287).

D'OTTAVIANO, I. M. L. e FEITOSA, H. A. (2000). Paraconsistent logics and translations. *Synthese*, v. 125, n. 1/2, pp. 77-95.

D'OTTAVIANO, I. M. L. e FEITOSA, H. A. (2003). "História da lógica e o surgimento das lógicas não-clássicas". In: NOBRE, S. (org.). *Coleção História da Matemática para Professores*. Rio Claro, Sociedade Brasileira de História da Matemática (preprint).

FEITOSA, H. A. (1997). *Traduções conservativas*. Tese de doutorado. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas.

FERMAT, P. (1679). *Varia opera mathematica*. Editor D. Petri Fermat. Tolosae (Tolouse). Apud Joannem Pech.

_____(1891-1922). *Oeuvres de Fermat*. Editadas por Paul Tannery e Charles Henry. Paris, Gauthier-Villars et Fils.

FLEURIOT, J. D e PAULSON, L. C. (1998). *A combination of Nonstandard Analysis and geometry theorem proving, with applications to Newton's Principia*. CADE, p. 3-16. Electronic Editor (Springer Link).

FORSTER, T. E. (1995). *Set theory with a universal set*. Oxford, Clarendon.

FREGE, G. (1977). *Begriffsschrift: eine der arithmetischen nach gebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Hildesheim, Georg Olms Verlag (publicado originalmente em 1879).

GALILEI, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze.* Leide, Louis Elsevier (tradução para o italiano da primeira edição, em latim, de 1635).

_____(1890-1909). *Le opere di Galileo Galilei*. Edizione Nazionale. Florença, Tip. di G. Barbera.

JASKOWSKI, S. (1948). Rachunek zdan dla systemów dedukcyjnych sprzecznych. *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sectio A, I, pp. 55-77.

_____(1949). O konjuncji dyskusyjnej w rachunsku zdán dla systemów dedukcyjnych sprzeczcych. *Studia Societatis Torunensis*, Sectio A, I, pp. 171-172.

_____(1969). Propositional calculus for contradictory deductive systems. *Studia Logica*, n. 24, pp. 143-157.

JOVEN, F. (1997). Los infinitesimales como ficciones utiles para Leibniz: la polémica en la Academia de Paris. *Theoria*, segunda época, v. 12, n. 2, pp. 257-279.

JURIN, J. (1734). *Geometry no friend to infidelity...* Cambridge, T. Cooper.

______(1735). *The minute mathematician...* Londres, T. Cooper.

KEISLER, H. J. (1976). *Elementary calculus: an infinitesimal approach*. 1 ed. Boston, Prindle, Weber & Schmidt.

KEPLER, J. (1615). *Nova stereometria doliorum vinariorum*. Lincii, J. Pancvs.

KLEENE, S.C. (1952). *Introduction to metamathematics*. Amsterdã/Nova York, North Holland/Van Nostrand.

LeBLANC, O. (2002). Łukasiewicz, Aristotle and contradiction. *Polish Philosophy Page*. Disponível em: http://www.fmag.unict.it/PolPhil/Lukas/LeBlanc.html Acesso em: 3 jan.

LEIBNIZ, G. W. (1684). Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus. *Acta Eruditorum.* Leipzig.

______(1686). De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum. *Acta Eruditorum.* Leipzig.

______(1965). *Monadology and Other Philosophical Essays*. Trad. Paul e A. M. Schrecker. Indianápolis, Bobbs-Merrill.

______(1966). *Logical papers*. Trad. G. H. R. Parkinson. Oxford, Clarendon Press.

______(1983). *Oeuvre concernant le calcul infinitésimal*. Trad. J. Peyroux. Bordeaux, A. Blanchard.

______(2006). *Los filósofos y sus textos: Monadología (texto completo)*. Disponível em: http://cantemar.com/cronolista.html. Consulta: 23 maio.

LINTZ, R. (1999). *História da Matemática*. Blumenau, Editora da FURB, v. 1.

ŁUKASIEWICZ, J. (1910). *O Zasadzie sprzecznosci u Arystotelesa: studium krytyczne*. Kraków, Akademia Umiejetnosci.

______(1910). Über den satz von widerspruchs bei Aristoteles. *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie: Classe d'Histoire de Philosophie*, pp. 15-38 (tradução para o inglês em Borkowski, 1970).

ŁUKASIEWICZ, J. e TARSKI, A. (1930). Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes Rendus des Séances de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie.* Classe III, v. 23, pp. 30-50 (tradução para o inglês em Borkowski, 1970).

NEWTON, I. (1687). *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Londres, Royal Society.

______(1711). *De analysi per aequationies numero terminorum infinitas*. Londres, William Jones.

______(1736). *The method of fluxions and infinite series*. Ed. John Colson. Londres (*De methodus fluxionum et serierum infinitarum*, 1671).

______(1967-1981). *The mathematical papers of Isaac Newton*. Ed. D. T. Whiteside. Cambridge, Cambridge University Press (8 v.).

PIN, V. G. (1987). Ontologia e história del calculus (la tarea de Abraham Robinson). *Theoria*, segunda época, v. 2, pp. 97-119.

PIZZI, C. (1992). "Considerações sobre as lógicas não-clássicas". In: ÉVORA, F. (ed.). *Século XX: O nascimento da ciência contemporânea*. Campinas, Unicamp (Col. CLE, v. 11, pp. 95-99)

ROBINS, B. A. (1735). *A discourse concerning the nature and certainty of Sir Isaac Newton's methods of fluxions and of prime and ultimate ratios.* Londres, W. Innys & R. Manby.

ROBINSON, A. (1961). Non-standard analysis. *Proceedings of the Royal Academy of Sciences*, ser. A, n. 64, pp. 432-440. Amsterdã.

______(1996). *Non-standard analysis* (edição revisada da 1 ed. de 1966). Princeton, Princeton University Press.

ROBINSON, A. e ZAKON, E. (1967). A set theoretical characterization of enlargements. *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*. C.I.T., Holt, Rinehart and Winston, pp. 109-122.

ROSSER, J. B. (1953). *Logic for mathematicians*. Nova York, McGraw-Hill.

RUSSELL, B. (1900). *A critical exposition of the philosophy of Leibniz*. Cambridge, Cambridge University Press.

______(1908). Mathematical logic as based on the theory of types. *American Journal of Mathematics*, v. 30, pp. 222-262. Baltimore, The Johns Hopkins University Press.

STANFORD ENCYCLOPEDIA OF PHILOSOPHY (2006). *Continuity and Infinitesimals.* Disponível em: http://plato.stanford.edu/entries/continuity/. Acesso em: 19 jan.

STROYAN, K. D. e LUXEMBURG, W. A. J. (1976). *Introduction to the theory of infinitesimals*. Nova York, Academic Press.

TORRICELLI, E. (1644). *Opera geometrica*. Florença, Amatore Massa & Laurenzo di Landi.

WALLIS, J. (1693). *Johannis Wallis opera mathematica* (3 v.). Oxoniae, E Theatro Sheldoniano.

WEIERSTRASS, K. T. Z. (1854). Zur theorie der abelschen functionen. *Crelle's Journal*. Berlim.

______(1894-1927). *Mathematische werke von Karl Weierstrass*. Berlim, Mayer & Müller.

WHITEHEAD, A. N. e RUSSELL, B. (1910-1913). *Principia mathematica*. Cambridge, Cambridge University Press.

Recebido em jun./2006; aprovado em jun./2006.