ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p582-610

O uso de Representações Auxiliares na Aprendizagem Matemática: Um Olhar Semiocognitivo segundo Raymond Duval

The use of Auxiliary Representations in Mathematics Learning: A Semiocognitive Look according to Raymond Duval

El uso de representaciones auxiliares en el aprendizaje de las matemáticas: una mirada semiocognitiva según Raymond Duval

L'utilisation des représentations auxiliaires dans l'apprentissage des mathématiques : une vision sémiocognitive selon Raymond Duval

Méricles Thadeu Moretti[1]
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC-SC)
Doutor em Didática da Matemática – Universidade de Estrasburgo
Pós-doutor - Universidade de Lisboa
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

Lucilene Dal Medico Baerle[2]
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC-SC)
Doutoranda em Educação Científica e Tecnológica - PPGECT (UFSC-SC)
https://orcid.org/0000-0003-1076-0613

Resumo

Neste estudo, procurou-se analisar o uso de representações auxiliares no ensino de matemática sob o ponto de vista da teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. Essa análise tomou como parâmetro principal a comparação semiocognitiva entre as representações didáticas criadas e a representação principal que caracteriza o objeto matemático em estudo. Observou-se a relevância dessas representações criadas como um meio para melhor conhecer os sistemas semióticos usados, pois podem oportunizar a discriminação de unidades significantes por meio da operação de tratamento. Tal discriminação tem importância fundamental, por possibilitar a coordenação da operação de conversão entre os sistemas semióticos envolvidos.

[1] mthmoretti@gmail.com

[2] lucilene.baerle@ifc.edu.br

***Palavras-chave**:* Representações auxiliares, Aprendizagem matemática, Aprendizagem semiocognitiva.

Abstract

In this study, we sought to analyze the use of auxiliary representations in mathematics teaching from the point of view of Raymond Duval's semiocognitive theory of mathematical learning. This analysis took as the main parameter the semiocognitive comparison between the didactic representations created and the main representation that characterizes the mathematical object under study. We observed the relevance of these representations created to better understand the semiotic systems used because they can enable the differentiation of meaningful units through treatment operation. Such differentiation is paramount for allowing the coordination of the conversion operation between the semiotic systems involved.

***Keywords**:* Auxiliary Representations , Mathematics learning, Semiocognitive learning.

Resumen

En este estudio se analizó el uso de representaciones auxiliares en la enseñanza de las matemáticas desde el punto de vista de la teoría semicognitiva del aprendizaje de las matemáticas de Raymond Duval. Este análisis tomó como parámetro principal la comparación semiocognitiva entre las representaciones didácticas creadas y la representación principal que caracteriza el objeto matemático en estudio. Se observó la relevancia de estas representaciones creadas como medio para comprender mejor los sistemas semióticos utilizados, ya que pueden permitir la discriminación de unidades significativas mediante la operación de tratamiento. Esta discriminación tiene una importancia fundamental para permitir la coordinación de la operación de conversión entre los sistemas semióticos implicados.

Palabras clave: Representaciones auxiliares, Aprendizaje matemático, Aprendizaje semicognitivo.

Résumé

Dans cette étude, l'utilisation de représentations auxiliaires dans l'enseignement des mathématiques a été analysée du point de vue de la théorie sémiocognitive de l'apprentissage des mathématiques de Raymond Duval. Cette analyse a pris comme paramètre principal la comparaison sémiocognitive entre les représentations didactiques créées et la représentation principale, qui caractérise l'objet mathématique étudié. On a observé la pertinence de ces représentations créées comme un moyen de mieux comprendre les systèmes sémiotiques utilisés, car elles peuvent permettre la discrimination d'unités significatives à travers l'opération de traitement. Cette discrimination a une importance fondamentale pour permettre la coordination de l'opération de conversion entre les systèmes sémiotiques impliqués.

Mots clés : Représentations auxiliaires, Apprentissage mathématique, Apprentissage sémiocognitif.

Duval (1995, 1996, 2012) apresenta dois tipos principais de operações semiocognitivas que comandam a sua teoria de aprendizagem matemática: o tratamento, que é uma operação intrarregistro, e a conversão, que é operada entre registros. Essas duas operações estão na base de um método cognitivo de aprendizagem matemática e de análise da produção dos alunos:

> PRINCÍPIO
> No que diz respeito a significância, *a discriminação das unidades significantes* de uma representação (e, portanto, a possibilidade de apreensão do que ela representa) depende de *um campo de variações possíveis*.
> REGRA FUNDAMENTAL
> É *levando, simultaneamente em conta dois registros de representação,* e não cada um isoladamente, que se pode analisar o funcionamento cognitivo de diferentes atividades matemáticas. (Duval, 1996, p. 373 – grifo do autor)

O Princípio e Regra Fundamental colocam as operações de tratamento e conversão reféns do que Duval (1996, p. 373) chama de **discriminação das unidades significantes** e, esse papel de discriminação é exercido mais fortemente pela operação de tratamento: cada sistema semiótico tem as suas regras próprias de formação e de tratamento que permitem que essa discriminação possa ser revelada e que, em seguida, também será fundamental para a operação coordenada de conversão entre registros:

> É importante, portanto, que a formação de representações semióticas repeitem as regras próprias do sistema empregado, não somente por razões de comunicação, mas para tornar possível a utilização dos meios de tratamente que oferece o sistema semiótico empregado. Assim, melhor do que falar de regras de produção, preferimos falar de **regras de conformidade**. (Duval, 1995, p. 37 – grifo do autor)

As regras de conformidade definem um sistema semiótico e são essencialmente: **1.** a determinação (estrita ou aberta de unidades elementares, como símbolos, vocabuláro e outros); **2.** combinações admissíveis de unidades elementares; **3.** condições para que uma produção de ordem superior seja uma produção pertinente e completa (Duval, 1995, pp. 37-38). Compreender o sistema semiótica em uso é parte integrante e importante da aprendizagem matemática, pois revelam as unidades significantes que permitem a coordenação de registros quando da operação de conversão. Vejamos um exemplo simples de um problema aditivo:

> João tem 5 bolinhas de gude e joga duas partidas. Na primeira partida ele ganha 6 e na segunda perde 2.
> Questão 1: o que ocorreu nas duas partidas?
> R. João saiu ganhando (6 – 2) 4 bolinhas.
> Questão 2: quantas bolinhas tem João depois das duas partidas?
> João tem agora (5 + 6 – 2) 9 bolinhas. (Referência dos autores)

Para montar cada expressão e poder responder à cada questão, será necessário perceber no enunciado do problema as unidades significantes que irão aparecer nas expressões numéricas: na primeira questão, não tem importância o fato de João ter 5 bolinhas (apenas precisaria ter uma bolinha ao menos para poder começar a jogar), mas sim, que ele ganhou 6 na primeira partida e perdeu 2 na segunda partida. Já na Questão 2, a quantidade de bolinha que João possuía, antes de começarem as partidas, é uma unidade significativa importante para a montagem da expressão matemática e, com isso, dar resposta à questão.

A operação semiocognitiva que faz a passagem do enunciado à expressão matemática (e vice-versa) é a chamada de operação de conversão.

O desenvolvimento da matemática mostra uma grande variedade de sistemas semióticas criados e que hoje povoam diversos textos, mesmo fora do âmbito da matemática, em jornais e nas mais diversas mídias sociais. A Tabela a seguir revela toda essa variedade.

Tabela 1.

Tipos de Registros Semióticos Empregados no Desenvolvimento da Matemática (Duval, 2004, p. 52)

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS PLURIFUNCIONAIS (os tratamentos **não são algoritmizáveis**)	**Célula11** Língua natural: associações verbais (conceituais); descrição, definição, explicação; Raciocínio: argumento a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definição ou de teoremas	**Célula 12** Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações de formas nas dimensões 0, 1, 2, 3); Apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos; modelização de estruturas físicas (ex. cristais, moléculas ...)
REGISTROS MONOFUNCIONAIS (os tratamentos são principalmente **algoritmizáveis**)	**Célula 21** Sistema de escrita: - numérico (binária, decimal, fracionária...); - algébrico; - simbólico (línguas formais); Cálculo literal, algébrico, formal...	**Célula 22** Gráficos cartesianos (visualização de variações) mudanças de sistema de coordenadas; interpolação, extrapolação.

Em diversas situações de aprendizagem em matemática se fabricam "instrumentos pedagógicos" para contribuírem na compreensão matemática e na resolução de problemas. Muitos deles nada mais são do que representações auxiliares ou transitórias, particularmente exigidas em registros plurifuncionais (Células 11 e 12). Esses tipos, os plurifuncionais, são registros em que, de um modo geral, os tratamentos não podem ser transformados em algoritmos. Chamaremos de representação principal aquela em que a representação auxiliar foi construída como instrumento pedagógico. Um problema aditivo, por exemplo, proposto em linguagem natural, será o sistema a ser considerado como principal. Como veremos mais adiante, os esquemas que pretendem ajudar na resolução desse tipo de problema são as representações auxiliares.

Segundo Duval (1999, pp. 58-62) são 7 funções que uma representação auxiliar pode preencher:

1. - Aporte de Informações Complementares

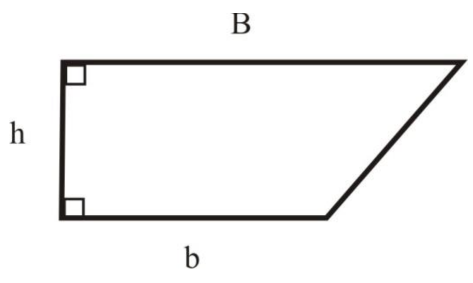
A representação auxiliar traz novas informações que não estão contidas na representação principal. Exemplo dessa situação são esquemas ou figuras que acompanham e complementam o enunciado de um problema.

2.- Interpretação Heurística – Tratamento Transitório

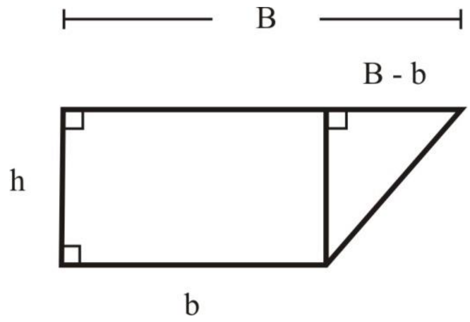
Nessa situação a representação auxiliar permite tratamentos visuais que contribuem para a escolha de um caminho na resolução de um dado problema.

Por exemplo: Deduzir a fórmula do cálculo da área de um trapézio reto sendo fornecido as medidas das bases (B e b) e da altura (h). (Moretti e Brandt, 2015, p. 607)

A representação auxiliar seguinte



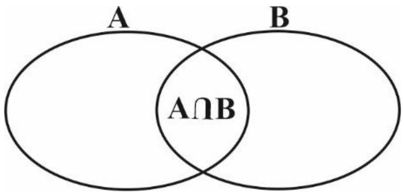
permite o procedimento



e a fórmula da área pode ser expressa: $A = bh + \frac{(B - b)\,h}{2} = \frac{(B + b)\,h}{2}$

3. - Interpretação Explicativa

A representação auxiliar apresenta, de uma outra maneira, as informações contidas de modo explícito ou implícito na representação principal. Por exemplo, quando definimos a intersecção de dois conjuntos A e B por $A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$ e podemos usar o Diagrama de Venn para dar uma interpretação explicativa para essa definição:



4. – Organização – Seleção de Elementos Pertinentes (informações pertinentes)

Essa função da representação auxiliar pode ocorrer quando a representação principal contém muitos dados e as informações pertinentes precisam ser discriminadas em relação a um tipo de tarefa.

5. - Exemplo

É uma função da representação auxiliar largamente utilizada no ensino de matemática em sala de aula e nos manuais escolares. Segundo Duval (1999, p. 58), "o conteúdo da representação principal corresponde a uma categorização de formas, propriedades ou de traços podendo ser reencontrados em diversos contextos múltiplos, a representação auxiliar apresenta a ocorrência em um desses contextos". Assim, 8 cm, 8 cm e 6 cm, que exemplificam as medidas de um triângulo isósceles, é um exemplo deste.

Da mesma forma que um exemplo explica um caso particular, a representação auxiliar do contraexemplo elucida um caso em que a conclusão é falsa. Apresentar o número 2 para contradizer a afirmativa de que "todos os números primos são ímpares" é um contraexemplo.

A representação auxiliar para o caso do não exemplo não verifica as hipóteses e nem as conclusões, mas pertence ao universo ou contexto em consideração. Assim, no universo ou no contexto das figuras planas convexas, temos os triângulos que possuem 3 lados e os não triângulos que possuem 4 ou mais lados: as figuras geométricas planas convexas com 4 ou mais lados são **Não Exemplos** para o triângulo.

Podemos ampliar o alcance nesse caso da classificação das funções das representações auxiliares de Duval (1999, pp. 58–62) de **Exemplo** para **Exemplo, Não Exemplo e Contraexemplo.**

6. - Ilustração

A representação principal pertence, em geral, ao registro da língua natural e, a representação auxiliar, a alguma imagem que tem uma certa semelhança com objetos da realidade.

7. - Material – Substituto do Objeto

É uma função das representações auxiliares que difere bastante das funções anteriores: "não é mais na base de certas correspondências entre os elementos e seus conteúdos informacionais respectivos que a representação auxiliar serve à representação principal, mas pelo intermediário das operações materiais ou mentais que permite efetuar." O material dourado é um exemplo de uso na compreensão do sistema de numeração.

O uso das representações auxiliares numa perspectiva semiocognitiva não é assim tão evidente, necessita que três questões possam ser pensadas antes mesmo do seu uso:

> (1) Quais representações? Quais são aquelas que devem funcionar melhor e (porque)por que funcionam melhor?
>
> (2) **Com o que elas se articulam?**
>
> (3) Como introduzi-las?
>
> Em geral são colocadas as questões (1) e (3), mas dificilmente a questão (2), a mais importante, quando estamos tratando de representações auxiliares. (Duval, 2005b, p. 85-grifo do autor)

Analisemos a seguir, algumas situações encontradas no ensino de matemática, tendo em vista essas questões apontadas nessa citação e, segundo as funções que uma representação auxiliar permite preencher.

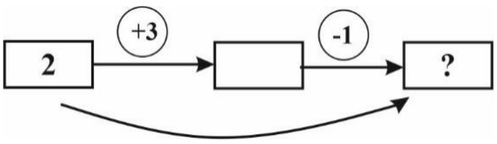
Situação 1. Resolução de Problemas Formulados em Língua Natural.

Exemplos clássicos dessa situação são os problemas aditivos de Durant e Vergnaud (1976) que empregam, em sua formualação, os registros das células 11 e 21 do Quadro 1. São problemas que exigem a conversão entre língua natural e linguagem algébrica. As representações auxiliares que serão mostradas têm principalmente as funções de **Interpretação Heurística e de Organização.**

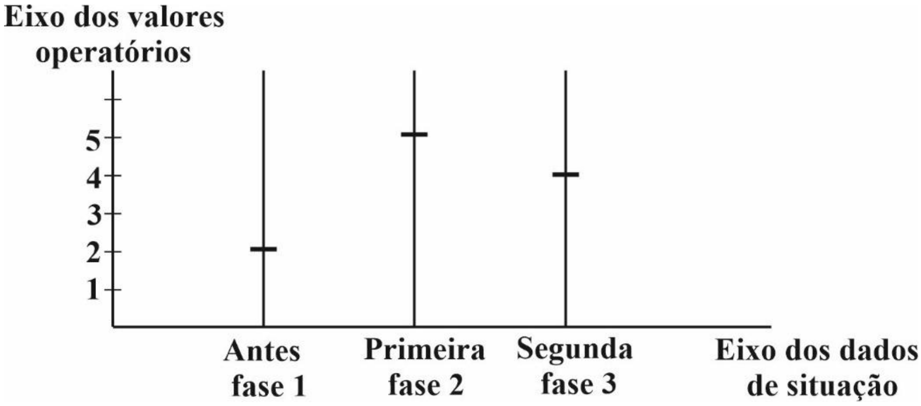
Em Durant e Vergnaud (1976) são apresentadas as estruturas dos problemas aditivos em que a flecha indica o sentido da transformação (T) de um estado (E) a outro, o círculo marca os números relativos e o retângulo marca os números naturais. Consideremos o problema a seguir:

> **Problema**: Pedro tem 2 bolinhas de gude. Ele joga duas partidas. Na primeira ele ganha 3 bolinhas. Na segunda ele perde 1 bolinha. Quantas bolinhas ele tem após as duas partidas? (Durant e Vergnaud, 1976, p. 29)

Para esse Problema, obtemos o esquema seguinte, segundo Durant e Vergnaud (1976):



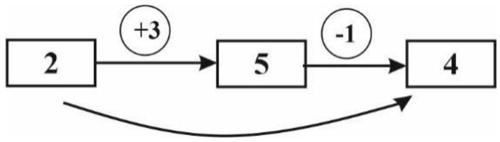
Para o mesmo Problema 1, Damm (1992, p. 58) apresenta o seguinte esquema:



Nesse esquema, os valores intermediários das fases 2 e 3 são calculados. Damm (1992), argumenta que:

> Este tipo de representação permite, ao mesmo tempo que se leve em conta todos os dados pertinentes e de organizá-los de tal maneira que a passagem do texto ao tratamento aritmético se opera naturalmente. (Damm, 1992, pp. 58-59)

No esquema de Durant e Vergnaud (1976), com os cálculos intermediários apresentados, ficaria do seguinte modo:



Para esse Problema aditivo, que possui congruência semântica, os dois esquemas como representações auxiliares parecem não diferir muito um do outro em termos organizacionais: o esquema de Durant e Vergnaud (1976) também carrega todos os dados diretamente quando apresentado com os valores intermediários calculados, diferentemente em Damm (1992) que de forma proposital os cálculos intermediários não são efetuados e os valores originais não estão explícitos. Assim, a leitura desses valores precisa ser operada no eixo vertical como no caso do valor “+3” que não aparece, mas pode ser encontrado pela diferença entre 5 e 2 no eixo vertical. No entanto, é importante ressaltar que as unidades significantes da representação em língua natural estão presentes nos dois esquemas, mas os eixos no esquema de Damm (1992) separam a dupla descrição heterogênea do problema, uma que evoca uma situação familiar e a outra que descreve um tratamento aritmético ou algébrico. Essa apresentação heurística da dupla descrição contribui de forma decisiva para a resolução do problema. Desse modo, conforme salienta Duval (2005a, p. 32): “Para compreender os problemas aditivos, a associação desses dois fatores é o ponto estratégico decisivo e uma representação deve permitir que alunos tenham consciência disso”.

A representação principal nessa situação é o problema aditivo em língua natural, a representação auxiliar corresponde aos esquemas de Durant e Vergnaud (1976) ou de Damm (1992) com as funções principais de **Interpretação Heurística e de Organização** - seleção de elementos pertinentes (informações pertinentes). A função de **Interpretação Heurística** para a representação auxiliar se revela importante para o caso do esquema de Damm (1992) em que os dois aspectos relacionados ao problema aditivo são levados em conta: a situação familiar apresentada no problema (as partidas de bolinhas de gude) e a que explicita uma operação aritmética (ganhou, perdeu etc.).

Situação 2: Representações Auxiliares em Operações de Tratamento e Conversão.

As representaçõe auxiliares podem também ocorrer em registros monofuncionais e com a operação semiocognitiva de conversão, como é o caso dos dois procedimentos apresentados na resolução da inequação a seguir. Veremos ainda que é possível usar a conversão em algum momento da operação semiocognitiva de tratamento.

Resolver a inequação $\frac{(x-1)(x-2)}{(-x-3)} > 0$.

– Procedimento 1

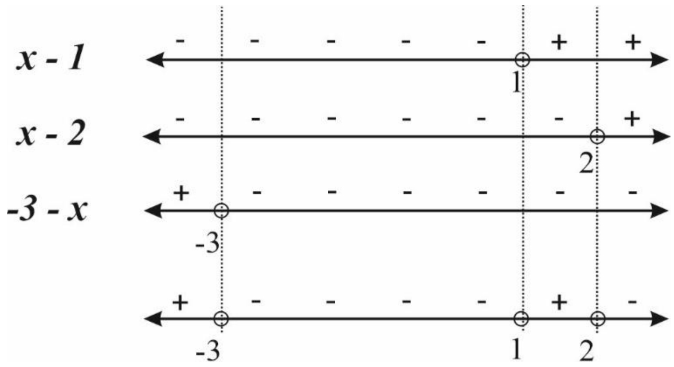
	Passo 1		Passo 2		Passo 3
$\frac{+.+}{+} > 0$	*x – 1 > 0 e x – 2 > 0 e -x - 3 > 0*	$\Rightarrow$	*x > 1 e x > 2 e x < - 3*	$\Rightarrow$	*Ø*
ou	*Ou*		*ou*		*ou*
$\frac{+.-}{-} > 0$	*x – 1 > 0 e x – 2 < 0 e -x - 3 < 0*	$\Rightarrow$	*x > 1 e x < 2 e x > - 3*	$\Rightarrow$	*(1, 2)*
ou	*Ou*		*ou*		*ou*
$\frac{-.+}{-} > 0$	*x – 1 < 0 e x – 2 > 0 e -x - 3 < 0*	$\Rightarrow$	*x < 1 e x > 2 e x > - 3*	$\Rightarrow$	*Ø*

ou	*Ou*		*ou*		*ou*
$\frac{- \cdot -}{+} > 0$	$x - 1 < 0$ *e* $x - 2 < 0$ *e* $-x - 3 > 0$	$\Rightarrow$	$x < 1$ *e* $x < 2$ *e* $x < -3$	$\Rightarrow$	$(-\infty, -3)$

A solução da inequação será: $(-\infty, -3) \cup (1, 2)$.

No Procedimento, a seguir, os sinais das expressões $x - 1$, $x - 2$ e $- x - 3$ para $x \neq -3$ são representados na reta real.

– Procedimento 2



A reta real apresentada mais abaixo recolhe os sinais da multiplicação e divisão das expressões e a solução pode ser expressa: $(-\infty, -3) \cup (1, 2)$, conforme exige a inequação proposta.

Considerando as três questões mencionadas em citação anterior de Duval (2005b, p. 85), a análise dos Procedimentos 1 e 2, mostra que:

– a representação auxiliar, no Procedimento 2, articula-se com o estudo de funções, o caso da discussão dos sinais das funções polinomiais do primeiro grau, enquanto que no Procedimento 1 a resolução envolve intersecção e união de conjuntos numéricos comandados pelos conectores lógicos "*e*" e "*ou*";

– no Procedimentos 2 é mais fácil conferir cada passo intermediário na busca da solução final, uma vez que cada elemento significativo do problema fica evidenciado na representação auxiliar da reta real;

– muito pouco mudaria no Procedimento 2 se tivéssemos a inequação ≤ 0 e < 0 para essas mesmas expressões. Já no procedimento 1 é como começar tudo de novo.

– no Procedimento 2, a representação auxiliar não ficaria mais complexa se a inequação tivesse mais um monômio, como por exemplo $\frac{(x-1)(x-2)}{(-x-3)(x+1)} > 0$. Neste caso, somente os sinais de $x + 1$ para $x \neq -1$ apareceriam em mais uma reta real no esquema apresentado. Diferente do Procedimeto 1 em que outras quatro linhas irão aparecer em um jogo combinatório de sinais com mais quatro termos perfazendo oito no total: no quesito da Organização como uma das funções da representação auxiliar, o Procedimento 2 é muito mais eficiente.

No Procedimento 2, podemos observar que a operação semiocogntiva de conversão ocorre quando cada elemento significante da equação, cada monômio, tem os seus sinais transformados em sinais na reta real. Já, as operações de tratamentos ocontecem quando da busca conveniente dos sinais das expressões (onde se anula, é positiva ou negativa) e na discussão dos sinais possíveis que cumprem o que é exigido na inequação. No caso da Procedimento 1, os tratamentos acontecem dentro das representações da Célula 21 (Quadro 1), mas podem ocorrer conversão na passagem do Passo 2 para Passo 3 usando, por exemplo, para o caso:

$$x > 1 \text{ e } x > 2 \text{ e } x < -3$$

e a disposição na reta real para concluir que a intersecção é vazia.

A representação principal, tem como referência a resolução de uma inequação envolvendo monômios, enquadra-se na Célula 21 (Tabela 1). A solução, apresentado pelo Procedimento 1, mantém-se exclusivamente nas representações da célula 21 (Tabela 1), exceto, eventualmente, se for usado a reta real, conforme mostrado anteriormente na passagem do Passo 2 para o Passo 3 da resolução, nesse caso, representações da célula 22 também podem ser usadas. Já o Procedimento 2 tem, em sua fundamentação, representações das células 21 e 22, caracterizando de forma bastante explícita, a operação semiocognitiva de conversão no uso da reta real para apresentar os sinais dos monômios.

As representações do Procedimento 2 se enquadram nas funções de **Interpretação Heurística** e **Organização** – Seleção de Elementos Pertinentes (informações pertinentes).

Situação 3: uso da contrapositiva e do complementar.

O uso da versão contrapositiva de um teorema, afirmações ou definições, em sala de aula, pode se tornar um recurso pedagógico importante, porém é pouco comum no ensino de matemática.

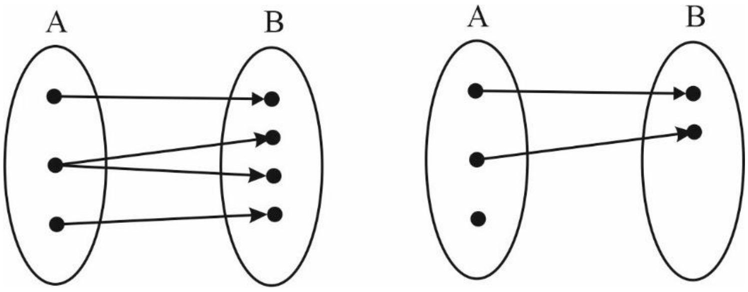
Se, em um teorema, h representa a hipótese (ou as hipóteses) e c a conclusão, $h \rightarrow c$ é a versão direta desse teorema que é equivalente, do ponto de vista lógico/matemático, à versão contrapositiva $\sim c \rightarrow \sim h$, ou seja, "dizer" que $h \rightarrow c$ é o "mesmo que dizer" $\sim c \rightarrow \sim h$, já que possuem os mesmos valores lógicos.

Consideremos aqui a versão direta de um teorema, que é a mais usual, como sendo a representação principal e a versão contrapositva, a representação auxiliar. As versões $h \rightarrow c$ e $\sim c \rightarrow \sim h$ possuem a mesma referência, no entanto o que dizer em termos compreensão do alcance do teorema e da congruência semântica sobre essas duas versões? Veremos, a seguir, alguns exemplos que discutem essa questão.

Definição de Função

Dizemos que f é uma função de A em B, conjuntos não vazios, se cada elemento em A está relacionado a u*m* único elemento em B. Assim, além de termos A e B não vazios, duas condições devem ser observadas: 1ª – cada elemento de A está relacionado com um único elemento em B; e 2ª – todo elemento de A participa da relação. Por se tratar de uma definição, o que se tem é uma dupla implicação do tipo $h \leftrightarrow c$.

No discurso em sala de aula, o professor muitas vezes usa a contrapositiva para trabalhar a definição de função do seguinte modo: para que uma relação de A em B seja função – sendo A e B conjuntos não vazios, **não pode ocorrer** ao menos um dos dois casos típicos seguintes:



caso contrário, a relação não é função.

De fato o que acontece nessa apresentação é o uso da contrapositiva: se f é uma relação entre dois conjunto não vazios A e B, f não é função:

– se algum elemento em A estiver relacionado com mais de um elemento em B

ou

– se há em A algum elemento que não se relaciona com algum elemento em B.

Caso ocorra (1) e (2) ou apenas um dos dois, f é uma relação que não é função. Esse é o discurso de professores conforme se pode confirmar:

> Para definir uma função, o professor seleciona no conjunto de todas as relações possíveis, aquelas que não são funções. Dizendo: *"(...) quando sair duas flechas de um mesmo elemento de A ou quando algum elemento de A não tiver flecha não é função. O resto todo é função. Basta vocês gravarem esses dois "contraexemplos" para identificar quando é função ou não."*[3]. Ele quer dizer que, excluindo todos os exemplos de não função, o que resta é o conjunto das relações que são funções. Neste caso, são usados exemplos do que não nos interessa, que são os exemplos que não são funções para determinar uma função. (Franco, 2008, p. 13 – grifo da autora)

Como observa Franco (2008), o que o professor verbaliza em sala de aula não são contraexemplos, mas a contrapositiva. Esse fato aparece ainda em outras situações que são estudadas por essa autora em sua dissertação de mestrado.

[3] Aula 11, MTM – A, professor 2. Sistema de Ensino Energia: Material Didático Gravado em CD-ROM do*: MTM A, aulas 8-20.* Ensino Médio. Curso: Terceirão, Brusque, 2006.

Em muitas situações é mais conveniente encontrar aquilo que não é, para se ter o que é. O que está por traz disso, também, é a ideia do complementar. No universo das relações, temos as que são funções e as que não são funções. Esses fatos permitem que se discrimine o que é função e o que não é e, com isso, poder fazer as escolhas que caracterizam cada uma delas. Essa possibilidade é garantida pela ideia do complementar e da versão contrapositiva. No caso do discurso apresentada na citação anterior, o mais efetivo foi mostrar o que não é função para caracterizar o que é função.

Em relação ao complementar, há situações em que há uma terceira possibilidade ou até mesmo mais do que três possibilidades. Um número inteiro é par ou ímpar, não existe uma terceira possibilidade. Mas para o caso de uma função real, ela pode ser par, ímpar, nem par nem ímpar e pode ser par e ímpar ao mesmo tempo (é o caso função real f(x) = 0). Esse é um cuidado que se deve ter quando do uso da contrapositiva, como no exemplo da definição de uma função real par: para $x1$ qualquer do domínio a função real f:

(Versão direta): se f é par, então $f(x1) = f(-x1)$

(Versão contrapositiva): se $f(x1) \neq f(-x1)$, então f não é par.

Aqui, dizer que f não é par não significa dizer que f seja ímpar.

– Função Injetora

Esse assunto é tratado quando há interesse em definir as funções inversas. A definição direta e a contrapositiva, nesse caso, permitem dois tipos de tratamentos na busca da confirmação da injetividade da função. Considere f uma função real e $x1$, $x2$ dois elementos quaisquer do seu domínio. Uma função f é dita injetora nos seguintes casos:

(Definição 1) $x1 \neq x2 \rightarrow f(x1) \neq f(x2)$

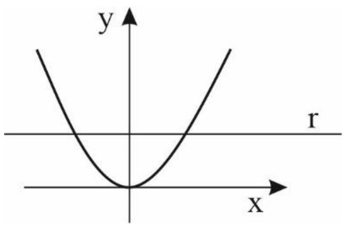
(Definição 2) $f(x1) = f(x2) \rightarrow x1 = x2$

A Definição 1 é a mais comum por conta das informações que rapidamente podemos construir, de forma equivalente, a frase seguinte: “dois números quaisquer distintos do domínio da função geram imagens distintas”. A Definição 2 é a versão contrapositiva de Definição 1, ela “diz a mesma coisa”, do ponto de vista lógico/matemática, que a Definição 1. Porém, não será muito fácil construir uma frase simples em língua natural como fizemos no caso da Definição 1: Frege (1978, pp. 6-86) diria que as Definições 1 e 2 têm a mesma referência, mas não o mesmo sentido.

Para provar que a função $f(x) = x^2$ no domínio dos reais não é injetora, podemos usar a Definição 1 e para isso basta exibir apenas um caso para se chegar de fato a essa conclusão:

$x1 = 2$ e $x2 = -2$, o que dá, $f(x1) = f(x2) = 4$

Essa situação é ilustrada por uma representação cartesiana que mostra que a reta r horizontal intercepta a função em dois pontos:



Agora, para provar que uma dada função é injetora, é preciso que aconteça para quaisquer dois elementos do domínio da função. Assim, para o caso da função real $y = ln(x)$ utilizemos a Definição 2 para provar que ela é injetora:

$$ln(x1) = ln(x2) \rightarrow e^{ln(x1)} = e^{ln(x2)} \rightarrow x1 = x2$$

Nesta caso da função que é injetora não é conveniente mostrar um gráfico com retas horizontais em que cada uma delas corta o gráfico da função em um único ponto, uma vez que o que se vê é apenas uma parte do gráfico da função e não se pode saber se vai acontecer o mesmo com qualquer reta paralela. No caso da função real $f(x) = x^2$ basta exibir uma única reta horizontal que a intercepta o gráfico dessa função em dois pontos, enquanto que no caso da função real $y = ln(x)$ qualquer reta paralela é que deve interceptar em um único ponto e isso não pode ser visualizado.

Nesse assunto, a ideia do complementar também é utilizada uma vez que uma função é ou não é injetora, não existe uma terceira possibilidade.

Continuidade e Derivabilidade

Os livros de cálculo diferencial e integral se esmeram para deixar bem claro que é equivocada a concepção de que se a função é contínua em um ponto, então ela é, também, derivável nesse ponto. Para convencimento de que isso nem sempre é verdade, é usado muitas vezes a função $y = ||x||$ em $x0 = 0$ como contraexemplo, uma vez que, y é contínua $x0 = 0$, no entanto não possui derivada em $x0 = 0$.

O teorema que relaciona derivabilidade e continuidade é dado por: se f é uma função derivável em $x0$, então f é contínua em $x0$.

A versão contrapositiva desse teorema se torna: se f é uma função que não é contínua em $x0$, então f não é derivável em $x0$.

A motivação para o uso da representação contrapositiva se baseia no erro frequente dos alunos, em muitas situações, de que ao se ter $h \rightarrow c$ vale, também, $c \rightarrow h$. O que se pode observar é que hipótese de continuidade em $x0$ não faz parte tanto da versão direta quanto da versão contrapositiva e, com isso, deixa bastante claro o alcance do teorema. Usar o teorema na forma direta e na forma contrapositiva significa usar duas representações com a mesma referência e que podem ser lidos da esquerda para a direita. Isso parece ser pouco, mas no teste tratado por Legrand (1983), que comentaremos a seguir, pareceu ser decisivo no número de acertos a um teste que consistia de quatro questões aplicadas a uma população de 288 alunos des classes equivalentes a alunos do Ensino Fundamental II no Brasil:

> Uma reunião de cosmonautas do mundo inteiro aconteceu em Paris. Todos os cosmonautas americanos vestiam camisa vermelha. (Legrand 1983, pp 61-67)

Com base nessas afirmações, as quatro questões propostas e as respostas dos 288 alunos estão apresentadas na tabela a seguir.

Tabela 2.

Questões Propostas e Respostas dos 288 Alunos (Legrand, 1983, pp 61-67)

Questões	**Respostas de 288 alunos (%)**	
1. No aeroporto se vê alguém que veste uma camisa vermelha. É ele um cosmonauta americano?	Sim	30,6
	Não	5,2
	Não se pode saber	64,2*
2. Ao lado dele tem alguém que usa uma camisa branca. É ele um cosmonauta americano?	Sim	3,8
	Não	82,6*
	Não se pode saber	13,6
3. O alto-falante anuncia a chegada de um cosmonauta russo. Está ele usando uma camisa vermelha?	Sim	6,3
	Não	52,4
	Não se pode saber	41,3*
4. No saguão se vê um cosmonauta americano de manto. Está ele usando uma camisa vermelha?	Sim	55,9*
	Não	3,5
	Não se pode saber	40,6

* referem-se à resposta correta.

A formulação proposta por Legrand (1983) pode ser reescrita com o uso da versão direta e da contrapositiva, da seguinte maneira:

Seja *x* uma pessoa.

(Versão direta): se *x* é um cosmonauta americano, então *x* usa camisa vermelha.

(Versão contra positiva): se *x* é um cosmonauta que não usa camisa vermelha, então *x* não é americano. (Legrand, 1983, p. 61)

A Questão 2 que é a mais acertada (82,6%), diz “se alguém usa camisa branca, ele é um cosmonauta americano?” encontra na versão direta um apoio semanticamente congruente para a boa resposta uma vez que todo cosmonauta americano deve usar obrigatoriamente camisa vermelha.

A Questão 4 encontra apoio, também, na formulação da Versão direta, mas o índice de acerto cai para 55,9%. Nessa Questão, não se pode ver materialmente a cor da camisa do cosmonauta americano, apesar de que está assegurado, na formulação do problema, que a cor da camisa de qualquer cosmonauta americano é vermelha. Mas, assim mesmo, 44,1% dos alunos respondem “Não” (3,5%) ou “Não se pode saber” (40, 6%). Sobre isso, Legrand apresenta a seguinte análise:

> A introdução do manto evidencia uma das grandes dificuldades maiores do raciocínio abstrato, dificuldade que é exacerbada em geometria: o que se vê tem precedência sobre todas as informações anexas (hipóteses intermediárias, contraexemplos etc.). (Legrand, 1983, p. 67)

A Questão 3, a menos acertada de todas, não encontra na formulação direta e nem na contrapositiva esse apoio, pois a condição imposta nessa questão (se x é um cosmonauta Russo) não faz parte da hipótese tanto da versão direta quanto da contrapositiva. Isso também acontece em relação à Questão 1 (No aeroporto se vê alguém que veste uma camisa vermelha. É ele um cosmonauta americano?).

Em relação à Questão 3 (e Questão 1 também) cuja resposta correta é “Não se pode saber”, Legrand relaciona o baixo índice de acerto a uma característica do Contato Didático:

> A boa resposta nesta questão "não se pode saber" é para um aluno uma resposta ou uma confissão de que ele não sabe? Em virtude mesmo do contrato implícito da classe: o professor sabe tudo! e ele sempre nos propõe questões cujas respostas ele conhece e que um bom aluno deve sempre poder responder. (Legrand, 1983, p. 64)

– Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é bicondicional, da mesma forma que uma definição como no caso da definição de função como tratamos anteriormente. Ele pode ser formulado da seguinte maneira:

> Seja T um triângulo de lados com medidas $a \geq b \geq c$.
> $a^2 = b^2 + c^2$ se, e somente se, T é um triângulo retângulo. (Referência dos autores)

Esse teorema comporta as seguintes informações:

Versões diretas	Versões contra positivas
Se $a^2 = b^2 + c^2$, então T é um triângulo retângulo	Se T não é um triângulo retângulo, então $a^2 \neq b^2 + c^2$
Se T é um triângulo retângulo, então $a^2 = b^2 + c^2$	Se $a^2 \neq b^2 + c^2$, então T não é um triângulo retângulo

Diversas informações, não muito evidentes, aparecem quando o teorema bicondicional é distrinchado e acompanhado da contrapositiva e podem contribuir na compreensão teórica e na resolução de problemas, como por exemplo, o problema seguinte:

> Discutir a existência de um triângulo retângulo que tenha:
>
> a) os três lados com a mesma medida;
>
> b) apenas dois lados com a mesma medida;
>
> c) todos os lados com medidas diferentes. (Referência dos autores)

Lembrando novamente Frege (1978, p. 61-86) de que as representações (formas direta e contrapositiva) possuem a mesma referência, mas não o sentido, e isso pode garantir compreensões que se completam e procedimentos distintos na resolução de problemas.

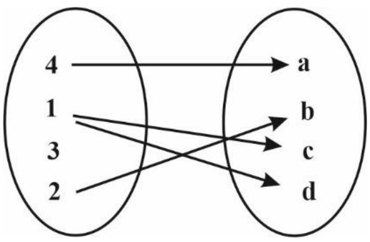
Todos os exemplos tratados na **Situação 3** se inserem no caso do uso de representações auxiliares com a função de **Interpretação Heurística,** porque podem sugerir diferentes procedimentos de resolução. Mas, devido a não congruência entre as versões direta e contrapositiva, podemos também conferir às representações auxiliares a função de **Interpretação explicativa,** que ajudam a compreender o alcance dos teoremas ou afirmações.

Situação 4: Representações Auxiliares de Interpretação Heurística, Explicativa e Complementar.

– Deslocamento Metacognitivo

O termo “deslocamento metacognitivo” foi usado por Brousseau (1986, pp. 43 – 44) para caracterizar um fenômeno do Contrato Didático em que o professor substitui um conteúdo matemático por criações metacognitivas e dá, como exemplo, os conhecidos Diagrama de Venn, que podem ser trabalhados no ensino das operações com conjuntos, definição de funções etc. São representações auxiliares usadas no ensino de matemática, mas o mais importante é responder na perspectiva de uma aprendizagem semiocognitiva, como apregoa Duval (2005b, p. 85), em uma citação apresentada anteriormente, à questâo de “**Com o que elas se articulam?**”, referindo-se às representações do objeto matemático e aquelas representações criadas para susbtitui-lo.

Um assunto abordado por algum dispositivo como é o caso, por exemplo, da definição de função em que o Diagrama de Venn substitui a própria definição, a questão sobre as representações com esse dispositivo se articulam com a noção do que seja função. Brousseau (1986) cita que experiências realizadas por uma equipe de pesquisa do IREM (Institut de Recherches et Enseignemant en Mathématique) da Universidade de Estrasburgo com alunos do ensino fundamental, mostraram que todos os alunos reconhecem em um representante de uma bijeção, mas o índice de acerto cai para 43% se pedir a eles que modifiquem apenas uma flecha de para que se torne uma bijeção.



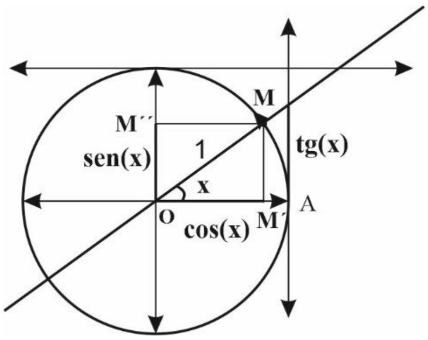
O diagrama de Venn funciona como uma representação auxiliar com a função de **Interpretação explicativa**. No entanto, podemos observar na situação em que a representação auxiliar se torna em si mesma objeto de ensino, quando a definição de função bijetora não é articulada com a representação auxiliar do Diagrama de Venn.

– **Ciclo trigonométrico**

Em alguns assuntos em matemática praticamente a criação de representações auxiliares e até mesmo complementares são obrigatórias. É o caso, por exemplo, das funções trigonométricas, também, chamada apropriadamente de funções circulares que lembram fortemente um dispositivo utilizado para compreendê-las em suas diversas propriedades.

Qual é a representação principal para o caso da funções trigonométricas, em particular, para o caso da função seno? Dizer que a função real y = sen (x) é a função seno? Isto diz muito pouco se não vier acompanhado de uma tabela de valores como havia antigamente as "tabelas de logaritmos e das funções circulares". O gráfico da função seno no plano cartesiano é a representação principal? Nessa situação até se torna difícil dizer qual é a representação principal, pois qualquer uma delas necessita que os seus valores possam ser obtidos ou por meio de uma tabela ou de uma calculadora científica em que os valores são simplesmente fornecidos.

No Ensino Médio, as funções circulares são praticamente todas tratadas no Círculo Trigonométrico:



O círculo trigonométrico é composto por um círculo de raio 1 (unidade de medida qualquer) e vários eixos orientados, conforme a figura mostra. A origem dos arcos está em A e os arcos medidos no sentido anti-horário é arbitrado positivo e no sentido horário é negativo. A partir da função seno (ou mais facilmente das funções seno e cosseno), todas as demais funções circulares podem estar ali representadas, basta utilizar a semelhança dos vários triângulos retângulos nessa figura.

O círculo trigonométrico dá suporte representacional para muitas propriedades e relações algébricas dessas funções, como é o caso da relação fundamental entre seno e cosseno $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$ que pode ser obtida a partir do Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo OMM´.

Em uma época em que não havia calculadoras e outros meios digitais, o estudo das funções circulares se dava através da analogia do Círculo Trigonométrico aliado à tabelas de valores dessas funções (ou régua de cálculo usadas no ensino superior). Em geral, essas tabelas forneciam os valores para o seno até 45º, uma vez que todas as funções poderiam ser obtidas a partir desses valores do seno. Alguns valores particulares das funções circulares podem ser determinados no círculo trigonométrico, como é o caso, por exemplo, para os ângulos 0, 30º, 45º, 60º, 90 etc.

Em relação à questão proposta por Duval (2005b, p. 85), citada anteriormente, de "Como que elas se articulam?" referindo-se às representações em jogo, o ciclo trigonométrico é um outro registro, em algumas situações, até mais congruente do que a representação da função no plano cartesiano. Em ambos os registros podemos perceber, para o caso da função seno, que: a imagem fica em [-1, 1]; a função é cíclica, ou seja, a cada volta no ciclo corresponde a um arco de 2π radianos e a função se repete; os valores extremos da função são percebidos em ambos os registros com a mesma visibilidade etc.

Ao considerarmos o círculo trigonométrico como a representação auxiliar em relação à representação principal no plano cartesiano, ele preenche as funções de **Aporte de Informações Complementares, de Interpretação Heurística e de Interpretação Explicativa.**

Mesmo que se tenha duas representações de um mesmo objeto matemático, um pode mostrar mais espontaneamente coisas que o outro não o faz. É o caso dos registros das funções no círculo trigonométrico em relação à representação no plano cartesiano. O Círculo Trigonométrico não só se articula com a representação cartesiana como a complementa em diversos aspectos. Por exemplo, é bem mais fácil perceber (até verificar) no Círculo Trigonométrico do que no plano cartesiano que vale a relação sen (90º - a) = cos (a) para os ângulos $0^o \leq a \leq 90^o$.

Conclusões

A operação semiocognitiva de conversão, em termos de aprendizagem matemática, exige que se conheça os sistemas em que ela opera para que haja a possibilidade de coordenação. Para tanto, será necessário implementar operações de tratamento que evidenciam, em cada registro, os elementos significantes pertinentes. A forma contrapositiva de um teorema é um tratamento no interior de um registro que se pode efetuar e que mostra faces diferentes de um mesmo objeto. No caso do teorema da continuidade e derivabilidade, um teorema do tipo $h \rightarrow c$, o sentido inverso $c \rightarrow h$, não é um teorema válido, mas vale a contrapositiva $\sim c \rightarrow \sim h$ que nada mais é do que uma nova representação referencialmente equivalente de $h \rightarrow c$. Os teoremas em suas formas direta e contrapositiva são referencialmente equivalentes, mas não são congruentes, são representações obtidas por tratamento com base em propriedades da álgebra das proposições: a frase representada por $h \rightarrow c$ gera a frase equivalente $\sim c \rightarrow \sim h$, bastante distinta e que promove novas informações e conhecimentos. Essas variações não só permitem uma melhor compreensão dos teoremas e das definições, mas podem apontar caminhos na resolução de problemas, conforme mostramos nos casos das funções injetoras e do Teorema de Pitágoras. Isso lembra as frases "A referência de ´Estrela da tarde´ e ´Estrela da manhã´ são a mesma, mas não o sentido." (Frege, 1978, p. 62). Além disso, os teoremas em suas formas direta e contrapositiva vão de encontro a um tipo de leitura, que é a habitual e que se processa da esquerda para a direita. A experiência de Legrand (1983) sobre o encontro dos cosmonautos em Paris mostrou isso, de que se fizer parte de uma frase em sua forma direta, mais acertadas foram as respostas dos 288 alunos interrogados, se bem que nessa mesma situação, há outros aspectos que podem interferir nas repostas como foi o fato comentado por Legrand (1983, p. 67), com a introdução do manto que esconde a camisa usada pelo astronauta americano e que dificulta a resposta correta. Isso pode dizer que o baixo índice de acerto nem sempre está relacionado apenas à não congruência semântica, outros fatores podem interferir como parece ser o caso nessa situação.

As representações para destacar as estruturas dos problemas aditivos de Durant e Vergnaud (1986) podem servir como ajuda em suas resoluções? É uma questão que cabe ser pesquisada uma vez que é preciso verificar até que ponto as unidades significantes presentes nessas estruturas e que representam os elementos significantes pertinentes do enunciado são suficientes e contribuem para a resolução. Os problemas aditivos permitem observações que vão além da resolução ou compreensão, são encontrados nas mais diversas situações que articulam sistemas semióticos distintos:

> Os encontramos na compreensão e resolução de outros problemas de aplicação do conhecimento numérico mais complexo. E lá tocamos nos processos mais globais da formação do espírito: articular sistemas de representação diferentes para se tornar capaz de mudar de registro de representação e assim poder resover problemas. (Duval, 2005a, p. 38)

O deslocamento metacognitivo, que ocorre em atividades de ensino de matemática em que um objeto matemático é substituído por uma outra representação, mereceu de Brousseau (1986) um alerta no sentido de que o uso desse método de ensino não se afaste do objeto pelo qual o ensino se propõe. Mais ainda, que não se afaste tanto que o mesmo nem possa ser reconhecido como foi o caso citado por Brousseau (1986), que já mencionamos anteriormente, da enquete promovida por uma equipe do IREM de Estraburgo, em que o ensino da função função bijetora fora substituído pelo uso exclusivo do Diagrama de Venn.

A esse autor podemos incluir Chevallard (2005, p. 49) que se refere às analogias criadas para o ensino da matemática como “criações de objetos” como parte integrante da existência da

Transposição Didática, mas sugere uma maneira de encarar esse problema com o *princípio da vigilância epistemológica* que o didata deve observar sempre:

> A dúvida sistemática a este respeito (Trata-se, efetivamente, do objeto cujo ensino se projetava?) é o sinal e a condição da *ruptura epistemológica* que permite ao didata se ver livre das evidências e da transparência do universo de ensino de que vive como professor (ou, pelo menos, como aluno que tenha sido). Questionamentos sistemáticos que o afastam da *ilusão de transparência.* (Chevallard, 2005, p. 49 – grifo do autor)

As criações didáticas não podem se afastar do objeto de ensino e, além disso, numa perspectiva semiocognitiva de aprendizagem matemática, segundo Duval (1995), precisam ainda destacar as unidades significantes pertinentes para que possam ser associadas em ambos os sistemas semióticos tratados e, deste modo, a conversão possa ser pensada de forma coordenada.

Enfim, não foi pretenção nossa ser exaustivos na apresentação de situações com repreentações auxiliares, mas mostrar a variedade e destacar o papel fundamental que elas podem representar na aprendizagem matemática nas mais diversas atividades de ensino.

Referências

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,7(2), 33-115.

Chevallard, Y. (2005). *La transposition didáctica: del saber sabio ao saber ensinado*. Trad. Claudia Gilman. Buenos Aires: Aique Grupo Editor S.A.

Durant, C. & Vergnaud, G. (1976). *Structures additives et complexité psychogénétique*. Revue française de pédagogie, v. 36.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1996).*« Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?»*. RDM, v. 16(3).

Duval, R. (1999). *Conversion et articulation des représentations analogiques.* Seminaires de Recherche, IUFM Nord Pas de Calais.

Duval, R. (2003). *Décrire, visualiser ou raisonner : quels "apprentissages premiers" de l'activité mathématique ? Annales de didactique et sciences cognitives.* v. 8. Strasbourg :

Duval, R. (2004). *Les problemas fundamentales en el aprendizaje matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Tradução de Myrian V. Restrepo. Cali: Universidade del Valle.

Duval, R. (2005a). *Linguaggio, simboli, immagini, schemi… In quale modo intervengono nella comprensione in matematica e altrove*? Bollettino dei docenti di matematica, n. 50.

Duval, R. (2005b). *Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques.* ACTES du XXXII e Colloque COPIRELEM. Strasbourg.

Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento do pensamento.* Trad. Méricles T. Moretti. Revemat, v. 7(2)

Franco, Patrícia L. (2008). *Estudo de formas de negação no ensino da matemática: ponto de encontro com os Registros de Representação Semiótica.* [Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina]. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/91633

Frege, G. (1978). Sobre o sentido e a referência. In: Alcorado, P. (org. e trad). *Lógica e filosofia da linguagem.* São Paulo, Cultrix?EDUSP.

Legrand, M. (1983). *Les Cosmonautes.* Petit x, n. 1.

Moretti, M. T & Brandt, C. F. (2015). *Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras.* Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 17, n. 2, (pp.597-616).