

Análise de Práticas Efetivas de Alunos em Geometria Espacial Mediada por Descrições Prévia de Técnicas de Representação de Sólidos Geométricos em Ambiente Papel/Lápis

Analysis of Effective Practices of Students in Spatial Geometry Mediated by Previous Descriptions of Techniques for the Representation of Geometric Solids in a Paper/Pencil Environment

Análisis de prácticas efectivas de estudiantes en geometría espacial mediado por descripciones previas de técnicas de la representación de sólidos geométricos en un ambiente papel/lápiz

Analyse des pratiques effectives des élèves en géométrie spatiale médiées par des descriptions préalables des techniques de représentation des solides géométriques dans un environnement papier/crayon

Márcio Silveira Ramos¹

Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)

<https://orcid.org/0000-0002-9122-2383>

Afonso Henriques²

Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)

<http://orcid.org/0000-0002-8783-6008>

Elisângela Silva Farias³

Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)

<https://orcid.org/0000-0002-4052-2351>

Resumo

Neste artigo, temos como objetivo analisar as práticas efetivas de alunos do 2º ano do Ensino Médio quando realizam tarefas sobre a representação de sólidos geométricos no ambiente papel/lápis, a partir da manipulação de modelos de Projetos de Construção de Objetos Concretos (PCOC) “que se leem peceocê”, obtidos por prototipagem rápida na impressora 3D. Para tanto, nos apropriamos da Análise Institucional e Sequência Didática como metodologia de pesquisa. Mergulhamos os estudos no quadro teórico constituído pela Teoria Antropológica do Didático, com ênfase na sua abordagem praxeológica, para fornecer-nos elementos de análise das técnicas e discursos tecnológico-teóricos, em Geometria Espacial, mobilizados pelos alunos nas suas práticas efetivas. Os resultados obtidos

¹ marcio_collins@hotmail.com

² henry@uesc.br

³ esfarias@uesc.br

revelam que os alunos conseguem representar os sólidos considerados no ambiente papel/lápis, mas não indicam e nem descrevem as técnicas que utilizam nas referidas representações durante a realização das suas práticas efetivas. Este é, portanto, um problema da instituição de referência, em particular o 2º ano do Ensino Médio, que não fornece uma formação aos alunos envolvendo as referidas indicações e descrições, conforme procedemos no desenvolvimento da nossa análise a priori em torno dos PCOC que trabalhamos com estes alunos.

Palavras-chave: Sólidos geométricos, Geometria espacial, Praxeologia.

Abstract

In this article we aim to analyze the effective practices of students in the 2nd grade of high school when they perform tasks on the representation of geometric solids in the paper/pencil environment, based on the manipulation of Concrete Object Construction Project (PCOC) models, obtained by rapid prototyping on the 3D printer. For that, we appropriated the Institutional Analysis and Didactic Sequence as a research methodology. We immerse our studies in the theoretical framework constituted by the Anthropology Theory of Didactics, with emphasis on its praxeological approach, to provide us with elements of analysis of the techno-theoretical techniques and speeches in Spatial Geometry, mobilized by the students in their effective practices. The results reveal that students can represent the solids considered in the paper/pencil environment but do not indicate or describe the techniques they use in the referred representations during their effective practices. Therefore, this is a problem of the reference institution, particularly the 2nd grade of high school, which does not provide training to students involving the indications and descriptions, as we proceeded in developing our a priori analysis around the PCOCs that we worked on with these students.

Keywords: Geometric solids, Spatial geometry, Praxeology.

Resumen

En este artículo tenemos como objetivo analizar las prácticas efectivas de estudiantes del 2º año de bachillerato, al realizar tareas sobre la representación de sólidos geométricos en el ambiente papel/lápiz, a partir de la manipulación de modelos de Proyectos de Construcción de Objetos Concretos (PCOC),

obtenido por prototipado rápido en la impresora 3D. Para ello, utilizamos como metodología de investigación el Análisis Institucional y la Secuencia Didáctica. Como referencial teórico, nos apoyamos en la Teoría Antropológica de la Didáctica, con énfasis en su enfoque praxeológico, para brindarnos elementos de análisis de las técnicas y discursos tecnológico-teóricos en Geometría Espacial, movilizados por los estudiantes durante el ejercicio efectivo de sus prácticas. Los resultados revelan que los estudiantes son capaces de representar los sólidos considerados en el ambiente papel/lápiz, pero no indican ni describen las técnicas que utilizan en estas representaciones durante la realización de sus prácticas efectivas. Se trata, por tanto, de un problema de la institución de referencia, en particular del 2º año de bachillerato, que no ofrece formación a los estudiantes involucrando las indicaciones y descripciones antes mencionadas, tal como realizamos en el desarrollo de nuestro análisis a priori en torno a los PCOC que trabajamos con estos estudiantes.

Palabras clave: Sólidos geométricos, Geometría espacial, Praxeología.

Résumé

Dans cet article, nous visons à analyser les pratiques effectives d'élèves de 2ème année de lycée, lorsqu'ils réalisent des tâches concernant la représentation de solides géométriques dans l'environnement papier/crayon, à partir de la manipulation de modèles " lisibles " de Projets de Construction d'Objets Concrets (PCOC), obtenus par prototypage rapide en imprimante 3D. Pour ce faire, nous nous sommes approprié l'Analyse institutionnelle & Séquence didactique comme méthodologie de recherche. Nous immergeons les études dans le cadre théorique constitué par la Théorie Anthropologique de la Didactique, en mettant l'accent sur son approche praxéologique, pour nous fournir des éléments d'analyse des techniques et discours technologique-théoriques, en Géométrie de l'Espace, mobilisés par les étudiants dans leurs pratiques effectives. Les résultats obtenus révèlent que les élèves sont capables de représenter les solides considérés dans l'environnement papier/crayon, mais n'indiquent ni ne décrivent les techniques qu'ils utilisent dans ces représentations lors de la réalisation de leurs pratiques

effectives. Il s'agit donc d'un problème de l'institution de référence, en particulier la 2^{ème} année de lycée, qui ne fournit pas une formation aux étudiants impliquant les indications et les descriptions référencées, comme nous avons procédé dans le développement de notre analyse a priori autour du PCOC que nous avons travaillé avec ces étudiants.

Mots clés : Solides géométriques, Géométrie spatiale, Praxéologie.

Análise de Práticas Efetivas de alunos em Geometria Espacial mediada por descrições prévias de técnicas de representação de Sólidos Geométricos em ambiente papel/lápis

A elaboração do presente artigo se deu em virtude de uma pesquisa de Mestrado concluída pelo primeiro autor, no Programa de Pós-Graduação da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), sobre Sólidos Geométricos enquanto objetos de estudos propostos no ensino da Geometria Espacial nas Instituições de Educação Básica (IEB).

Como é sabido, a Geometria Espacial é um dos ramos de estudos matemáticos imprescindíveis na formação de humanos. Os seus objetos de estudo estão, frequentemente, representados de diversas formas em muitas “coisas” que nos cercam, assim como em diferentes atividades humanas que realizamos no nosso dia-a-dia. De fato, basta observarmos ao nosso redor para percebermos as diversas formas geométricas que nos cingem, seja no espaço uni e bidimensional, seja no espaço tridimensional. Para sermos mais específicos podemos, por exemplo, citar: as linhas que separam os azulejos em casa e em diferentes locais públicos; os copos e as taças que utilizamos para beber certos líquidos; as casas ou edifícios que habitamos; as caixas de sapatos ou de outros produtos que utilizamos; as artes e arquiteturas evidenciadas com diferentes formas geométricas; entre outros objetos palpáveis a “mão livre” que lembram conceitos geométricos.

Paradoxalmente, apesar da organização praxeológica dominante nas instituições de ensino sobre a Geometria, em particular a Geometria Espacial, doravante também denominada GEOESPAÇO, se constituir de diferentes conceitos de objetos cujos ostensivos correspondentes que são notáveis ao nosso redor, constata-se que o seu processo ensino-aprendizagem é apontado como sendo um dos principais problemas enfrentados pelos Professores no ensino e pelos alunos na aprendizagem. Esse diagnóstico não é recente, pois, na década de 90, por exemplo, Pavanello, já revelava que muitos Professores de Matemática se sentiam despreparados para trabalhar com a Geometria em sala de aula. A autora foi ainda mais além, e estabeleceu uma discussão que ela identificou por “*Abandono da Geometria*” que repercutiu nos diversos trabalhos de pesquisas em

Educação Matemática sobre o ensino da Geometria em geral. Naquela década Pavanello (1993, p.7)

sustentava que:

O gradual abandono do ensino de geometria, verificado nestas últimas décadas, no Brasil, é um fato que tem preocupado bastante os educadores matemáticos brasileiros e que, embora reflita uma tendência geral, é mais evidente nas escolas públicas, principalmente após a promulgação da Lei 5692/71. A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos Professores de Matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a Geometria deixassem de incluí-la, em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservaram o final do ano letivo para a sua abordagem em sala de aula – talvez numa tentativa, ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão.

Apesar de se observar algumas mudanças no que diz respeito às organizações praxeológicas de conteúdos nos livros de Matemática nas IEB, nos quais os objetos geométricos aparecem intercalados em diversas páginas, e não apenas no final do livro, essa preocupação apontada por Pavanello na referida década de 90, ainda repercute nos dias atuais, em vários cenários de muitas escolas brasileiras, sobretudo nas escolas públicas. Essa repercussão mostra que existem ainda muitos desafios a serem enfrentados pelos Professores de Matemática, no que diz respeito ao ensino de Geometria, em particular a GEOESPAÇO.

No campo da Educação Matemática as pesquisas não cessarão, devido da importância que a Geometria exerce na formação dos recursos humanos. Isso significa, ainda que, todos nós estando na mesma batalha, podemos contribuir da melhor forma possível no progresso das ações de Professores de Matemática no ensino e de alunos na aprendizagem da Geometria.

Ora, autores como Vidaletti (2009), Paraizo (2012), Nascimento (2013) e Ramos (2018) revelam, por meio de suas pesquisas de Mestrado, que boa parte dos problemas enfrentados pelos alunos na aprendizagem da GEOESPAÇO, estão relacionados também, além da falta de incentivos, com dificuldades que os alunos têm de compreender os conceitos relacionados a construção de Sólidos Geométricos.

Nós acreditamos que as referidas dificuldades também estão relacionadas com à ausência,

nas organizações de GEOESPAÇO propostas nos Livros Didáticos (LD), de um ensino explícito de técnicas necessárias na representação de objetos geométricos. Além disso, o termo “construção de sólidos” preconizado no ensino pode ser conflituoso, como veremos mais adiante. Pois, sabemos que na GEOESPAÇO, além dos conceitos rudimentares de ternos de pontos, posições relativas de retas e de planos no espaço, predominam, posteriormente na sua organização, o conceito de sólidos que se decompõem em dois grupos:

- *poliedros.*
- *corpos redondos.*

Segundo Henriques (2019),

Um **Corpo redondo**, em Geometria Espacial, é um sólido de revolução, cuja as secções transversas delimitadas por traços, são regiões circulares. Um **Poliedro**, em Geometria espacial, é um sólido delimitado por crivos de superfícies planas. (Op. Cit. p. 207).

O conceito de crivo que aparece na segunda definição é um dos resultados de pesquisa do doutorado de Henriques (2006), que ainda é pouco conhecido ou mesmo desconhecido no ensino em geral. Para Henriques (2019, p. 11) “*Crivo-Geométrico é uma conservação ou escolha de parte(s) de uma curva ou de uma superfície, necessária(s) na representação do objeto matemático correspondente no registro gráfico*”. O autor reforça que “um segmento, por exemplo, é parte ou crivo de uma reta, ao passo que os discos ou círculos e os polígonos, são crivos de superfícies planas”. Nós acrescentamos, com base na citação acima que “um cilindro truncado, por exemplo, também é um corpo redondo delimitado por três crivos, sendo um de superfície cilíndrica, e dois “que são as suas bases” de superfícies planas distintas e paralelas entre si”.

Esses conceitos apontados por Henriques permitiram-nos refletir profundamente sobre os termos “construção de sólidos” e “representação de sólidos”. O primeiro é usual no ensino, ao passo que o segundo não o é. Mas, será que o Professor ou o aluno, de fato, constrói sólidos em sala de aula, no ambiente *papel/lápis* ou representa-os mobilizando crivos? Ora, sabemos, conceitualmente, que um sólido é um objeto tridimensional denso. Para POHL (1994, p. 178):

A melhor maneira de aprender a visualizar o espaço tridimensional é construindo objetos que mostrem os conceitos espaciais. Construindo poliedros os alunos têm oportunidades de observar e utilizar muitas relações espaciais. Recursos visuais interessantes também estimulam o pensamento criativo dos alunos.

Pohl ao se referir do termo construção de objetos que “mostrem” os conceitos especiais, não especifica o ambiente de trabalho, e muito menos as técnicas necessárias para a referida construção. Henriques (2019), no entanto, destaca dois ambientes de aprendizagem na Educação: papel/lápis e computacional, que ele define como segue:

Um *ambiente papel/lápis* é um espaço usual de estudo constituído por ferramentas como: papel, lápis, caneta, borracha etc. O quadro, o piloto ou giz também se enquadram nesse ambiente. Um *ambiente computacional* é um espaço virtual de estudo constituído de ferramentas como: o computador, o *software*, a *internet*, a calculadora, e de um modo geral as tecnologias digitais. (Henriques, 2019, p. 26).

Assim, em conformidade com os termos “construção de sólidos” e “representação de sólidos”, podemos conjecturar que o primeiro toma o seu status construtivo quando se deseja aprender a visualização referida por Pohl, no ambiente papel/lápis, mobilizando técnicas específicas, tais como a técnica de papietagem que se apoia sobre diferentes materiais manipuláveis, e a técnica de moldagem, a exemplo de utilização de sabão, entre outros materiais moldáveis, capazes de permitirem o aluno mobilizar o conceito de sólidos geométricos com propriedades. Ao passo que a “representação de sólidos”, nesse ambiente papel/lápis, deve ativar o conceito de Crivo-Geométrico para compor ou ilustrar o contorno o sólido.

No tocante aos recursos visuais interessantes no olhar de Pohl, além das diversas possibilidades existentes para a Educação, refletimos sobre os recursos acessíveis em ambientes computacionais, citando o caso específico de PCOC, materializados na impressora 3D a partir de técnicas de “modelagem paramétricas” e gestão de códigos em stl. Esses modelos são resultados de trabalhos recentes realizados pelos pesquisadores do Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional (GPEMAC) no âmbito do Laboratório de Visualização Matemática (L@VIM) da UESC. No desenvolvimento desses modelos, tanto para a “construção de

sólidos” quanto para a “representação”, é necessária a mobilização de técnicas específicas e suas descrições em cada caso, durante o desenvolvimento das práticas efetivas dos alunos em sala de aula.

Com base nessa problemática que acabamos de apresentar, e considerando o nosso interesse para a Educação Matemática com um olhar no ensino da GEOESPAÇO na Educação Básica, nos colocamos o seguinte questionamento que buscamos responder nesse artigo:

Quais são as práticas efetivas desenvolvidas pelos alunos do 2^o ano do Ensino Médio na realização de tarefas sobre a representação de sólidos geométricos no ambiente papel/lápis, a partir da manipulação de modelos de PCOC obtidos por prototipagem rápida na impressora 3D?

Sublinhamos que o nosso foco foi observar as técnicas utilizadas e descritas pelos alunos na língua materna, com base em discursos tecnológico-teóricos da Geometria Espacial. Assim, visando responder esse questionamento, traçamos o seguinte objetivo geral:

Analisar as práticas efetivas de alunos do 2^o ano do Ensino Médio quando realizam tarefas sobre a representação de sólidos geométricos no ambiente papel/lápis, a partir da manipulação de modelos de PCOC obtidos por prototipagem rápida na impressora 3D.

Na aplicação da pesquisa da Dissertação origem deste artigo, disponibilizamos diferentes modelos de PCOC aos alunos organizados em grupo. As análises que realizamos visando atender esse objetivo, bem como responder o nosso questionamento, foram conduzidas com base no quadro teórico constituído pela Teoria Antropológica do Didático (TAD) proposta por Chevallard (1992) e de Registros de Representação Semiótica de Duval (1993), seguindo a metodologia de Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD) proposta por Henriques (2016) em oito etapas. Nesse artigo restringimo-nos, porém, na primeira teoria e em algumas etapas da citada metodologia que resumimos, sucessivamente, a seguir.

Quadro Teórico

Começamos esta parte apresentando a seguinte definição como ponto de reflexão, concordando assim com Henriques (2019):

Um quadro teórico é o referencial teórico de base de uma pesquisa, escolhido pelo pesquisador em função da sua problemática, constituído, pelo menos, por uma teoria capaz de fornecer ferramentas de análise aos estudos que pretende desenvolver. Henriques (2019, p. 37)

Assim, conforme já assinalamos, escolhemos, para esse artigo, o quadro constituído pela TAD com foco na GEOESPAÇO como objeto do saber, e nas suas relações institucionais. Referindo-se a TAD, Henriques (2019) nos lembra que:

Esta teoria, desenvolvida por Chevallard (1992), inscreve-se no prolongamento da teoria da transposição didática. Ela considera os objetos matemáticos, não como existentes em si, mas como entidades que emergem de sistemas de práticas que existem em dadas instituições. Estes sistemas, ou praxeologias, são descritos em termos de tarefas específicas daquele objeto, das técnicas que permitem resolvê-las e através dos discursos que servem para explicar e justificar as técnicas. Henriques (2019, p. 50)

Nessa perspectiva, Chevallard (2009) apresenta quatro noções fundamentais dessa teoria: objeto, relação pessoal, pessoa e instituição. Segundo Chevallard (2009):

Objeto é qualquer entidade, tangível ou intangível, que existe para, pelo menos, um indivíduo. Tudo é objeto, inclusive as pessoas. Um conjunto de sete [elementos], o número sete, a noção de pai, assim como de um jovem em passeio com uma criança, ou ainda a ideia de perseverança (coragem, virtude, etc.), o conceito matemático de derivada, e o símbolo ∂ , etc., são objetos. Em particular, qualquer trabalho, isto é, qualquer produto intencional da atividade humana, é um objeto. Chevallard (2009, p. 1).

Denotando um objeto por O e um indivíduo por X, Chevallard, explica a segunda noção como segue:

A *Relação pessoal* de um indivíduo X com um objeto O é o sistema ou o conjunto de todas as interações que X pode estabelecer com o objeto O, tais como, manipular, utilizar, falar sobre ou sonhar com ele, etc. Denotamos este sistema por $R(X, O)$. (Definição extraída em Henriques (2019, p. 52)).

Entendemos, portanto, que é a relação pessoal que forma uma pessoa ao longo da sua história em função dos conhecimentos acumulados mediante as interações estabelecidas com diferentes objetos de saberes, pois, para a terceira noção, o autor explica que “uma pessoa é o conjunto de todas as relações pessoais $R(X,O)$ existentes para X com os objetos O, num dado instante da sua história”, além disso, sustenta-se que um objeto O só existe para um indivíduo X se houver uma relação desse indivíduo com o objeto O. Existindo essa relação, diz-se que ela é “não vazia”, ou seja, $R(X,O) \neq \emptyset$.

A quarta noção fundamental, a instituição (I) é um dispositivo social "total" constituído, no mínimo, com uma parte intrínseca (microinstituição). Henriques (2006) esquematiza essas relações conforme mostrado na Figura 1, envolvendo as quatro noções fundamentais ou primitivos da TAD.

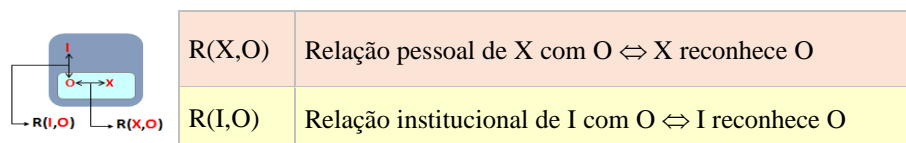


Figura 1:

Relações entre os elementos primitivos da TAD na teoria (Henriques (2006, p. 14))

Identificando a GEOESPAÇO como objeto O do saber, e X um aluno (A) do 2º ano do Ensino Médio (EM), sendo este a Instituição I, podemos reproduzir o esquema da Figura 1 conforme mostrado na Figura 2.

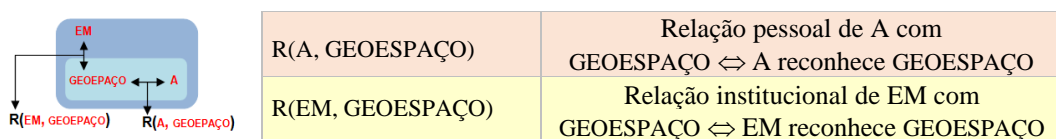


Figura 2:

Relações entre os elementos primitivos da TAD na prática (Reprodução própria dos autores)

Na Dissertação trabalhamos com ambas as relações. Nesse artigo, porém, restringimo-nos na primeira, a partir das organizações praxeológicas dominantes de GEOESPAÇO na segunda relação. Pois, segundo Chevallard, toda ação humana institucional pode ser analisada mediante o modelo praxeológico composto de quatro noções: Tarefas t de algum tipo T; Técnica τ ; Tecnologia θ ; e Teoria Θ . As quatro noções “permitem modelar as práticas sociais em geral e, em particular, a atividade matemática” (ALMOULOU, 2007, p. 114).

Conceituando as quatro noções Chevallard (1999, p. 2-5) explica:

[...] uma tarefa (e o tipo de tarefa) são expressas por um verbo no infinitivo: limpar a sala, desenvolver uma dada expressão literal, dividir um inteiro por outro, cumprimentar um vizinho, ler um manual, subir uma escada, integrar a função $f(x) = x \ln x$, no intervalo $[1, 2]$, etc. [...] a noção de tarefa ou, melhor, do tipo de tarefas, supõe um objeto relativamente preciso. Subir uma escada é um tipo de tarefa, mas subir

simplesmente não o é. Da mesma forma, calcular o valor funcional de uma função em um ponto é um tipo de tarefa, mas calcular, simplesmente, é o que será chamado de gênero de tarefas, que requer um determinativo. [...] Técnica - Seja T um tipo de tarefas [...] dado. Uma praxeologia relativa a T requer, portanto, uma maneira de realizar tarefas $t \in T$, essa maneira, denotada por τ , é aqui denominada técnica (do grego *tekhnê*, saber fazer). Assim, essa praxeologia constitui um bloco denotado por $[T/\tau]$, chamado bloco prático-técnica e que será identificado por saber-fazer de tarefas de algum tipo T. Entende-se por tecnologia, indicada por θ , um discurso racional, o *logos*, sobre a técnica, o *tekhnê*. Discurso cujo objetivo é justificar "racionalmente" a técnica, para garantir que esta permite realizar as tarefas do tipo T. [...] A teoria, por sua vez, no seu discurso tecnológico, contém afirmações, mais ou menos explícitas, nas quais pode-se questionar a razão de ser. Chega-se, portanto, a um nível mais elevado de justificativa-explicação-produção, o da teoria, denotada por Θ , que ocupa em relação a tecnologia, o papel que este último tem em relação a técnica. (Tradução nossa).

Entendemos, portanto, que a técnica consiste em uma maneira ou forma de realizar um determinado tipo de tarefa. Assim, a dupla $[T/\tau]$ caracteriza o saber-fazer. Enquanto que a tecnologia e a teoria compõem o discurso tecnológico-teórico que justifica a técnica, tornando compreensível o saber-fazer. As quatro noções constituem, portanto, uma organização praxeológica completa que (Ramos, Junior, Henriques, 2018) esquematizam conforme mostrado na Figura 3.

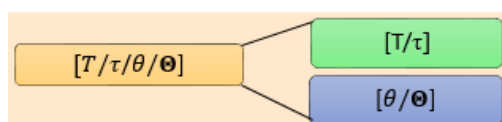


Figura 3:

Organização e decomposição do modelo praxeológico em dois blocos. (Ramos, Junior, Henriques, 2018, p.5)

Esta decomposição pode justificar as dificuldades dos alunos em explicar o estado da técnica, no sentido de que quando o Professor de Matemática, por exemplo, ensina um dado conteúdo (teoria), eles solicitam que o Professor apresente um exemplo (elemento do bloco prático). A partir do exemplo, muitos são capazes de fazer outros. Mas, quando são solicitados para explicar, a maioria não sabe, pois esse saber é do bloco *logos*. Na fase experimental da nossa pesquisa, procuramos analisar as técnicas τ , mobilizadas pelos alunos quando realizam tarefas de GEOESPAÇO no bloco $[T/\tau]$, utilizando os modelos de PCOC. Daí o questionamento apresentado anteriormente.

Ora, Almouloud (2013a, p. 2) afirma que “toda prática institucional pode ser analisada sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas bem delineadas”. Além disso, “na realização de uma tarefa é imprescindível a mobilização e aplicação de, ao menos, uma determinada técnica, justificada por uma tecnologia imersa na teoria na qual a referida tarefa foi elaborada” (Ramos, Junior, Henriques, 2018, p. 5). Daí surge ainda o questionamento: as técnicas são objetos de estudos explícitos nas instituições do Ensino Médio? Para buscarmos respostas aos nossos questionamentos nos apropriamos, além desse referencial teórico, da metodologia que resumimos a seguir.

Metodologia

Conforme já revelamos anteriormente, adotamos a metodologia da Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD), proposta por Henriques (2016), baseada na TAD de Chevallard (1999) e na Engenharia Didática de Artigue (1988). Assim, quatro noções sustentam essa metodologia definidas como segue:

A Análise Institucional é um estudo realizado em torno de elementos institucionais a partir de inquietações/questões levantadas pelo pesquisador no contexto institucional correspondente. Henriques, Nagamine A. Nagamine C. (2012, p. 1268).

A Sequência Didática é um esquema experimental formado por situações, problemas ou tarefas, realizadas com um determinado fim, desenvolvido por sessões de aplicação a partir de um estudo preliminar [análise institucional] em torno de um objeto do saber. Henriques (2016, p. 4).

A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise sequencial de atividades de ensino (Artigue, 1988, 1988 apud Henriques, 1999, p. 32).

Refletindo sobre essas noções Henriques (2016) elaborou a metodologia de AI&SD organizada em oito etapas amplamente descritas no seu artigo, e resumidas em um quadro que reproduzimos conforme mostrado na Tabela 1. As oito etapas são agrupadas em duas fases (cf. Tabela 1), desenvolvidas em dois momentos que o autor denomina *Pesquisa Interna*⁴, responsável pelas

⁴ Pesquisa Interna é uma sondagem realizada pelo pesquisador individualmente ou por grupo de pesquisadores, sem intervenção de sujeitos externos. É o momento pelo qual o pesquisador procura compreender melhor o seu objeto de estudo. [...]. Henriques (2016, p. 5).

seis primeiras etapas e *Pesquisa Externa*⁵, pelas duas últimas.

Tabela 1:

Etapas do percurso metodológico da AI&SD

Fonte: Henriques (2016, p. 68).

Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD)	
Fase I: Definições e Análises Preliminares	
1ª Etapa	Tomada de decisões iniciais
	Definição do tema/assunto da pesquisa. Apresentação da problemática e/ou de questões da pesquisa em torno do tema/assunto (objeto do saber de referência). Definição dos objetivos gerais e específicos, bem como do referencial ou quadro teórico de base da pesquisa.
2ª Etapa	Identificação de Instituições
	Identificação de uma instituição que seja de: Referência, Aplicação, ou Referência e Aplicação.
3ª Etapa	Escolha de elementos institucionais
	Identificação e escolha dos elementos institucionais que se pretende analisar, eventualmente acrescidos de outros, com olhar no objeto de estudo ou do ensino visado, sem perda de vista das etapas precedentes.
4ª Etapa	Estudo e apresentação da análise institucional de referência
	Estudo de cada um dos elementos institucionais escolhidos na 3ª Etapa e apresentação de análises correspondentes com base nas definições dispostas na 1ª Etapa. Apresentação de considerações e reflexão sobre a implementação de possíveis propostas, soluções ou contribuições em torno da problemática nas instituições envolvidas na 2ª Etapa.
Fase II: Organização, análises e Aplicação de uma Sequência Didática.	
5ª Etapa	Estudo e apresentação da análise institucional de referência
	Organização de uma SD contendo ao menos uma sessão de aplicação de um dispositivo experimental constituído de tipo de tarefas propostas na praxeologia dos objetos de estudo envolvidos na pesquisa, analisados na 4ª etapa.
6ª Etapa	Análise a priori
	Realização de análises preliminares referentes aos conhecimentos que se pretende investigar sobre o objeto em jogo, com referências na sua praxeologia.
7ª Etapa	Aplicação da sequência
	Negociação com os elementos da instituição de aplicação, descrição das condições e realização do experimento (aplicação) propriamente dito.
8ª Etapa	Análise a posteriori e validação.
	Realização da análise das práticas efetivas dos sujeitos envolvidos na pesquisa e validação.
AI&SD	

Seguindo essa metodologia, definimos na 1ª Etapa, o tema de pesquisa, descrevemos a nossa problemática em torno desse tema, gerando assim as nossas questões e o objetivo geral da pesquisa, bem como o quadro teórico de base deste artigo. Na 2ª etapa, escolhemos o 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual do Município de Vitória da Conquista, Bahia como instituição de referência e aplicação. Na 3ª Etapa, analisamos os elementos institucionais que apresentamos a Tabela 2.

⁵ Pesquisa Externa é uma sondagem realizada pelo pesquisador ou por grupo de pesquisadores envolvendo sujeitos externos como público alvo. É o momento pelo qual o pesquisador aplica os estudos realizados na Pesquisa Interna [...]. Henriques (2016, p. 5).

Tabela 2:

Elementos Institucionais escolhidos para análise na Dissertação (Dados da pesquisa)

nº	ELEMENTOS INSTITUCIONAIS ESCOLHIDOS PARA ANÁLISE
1	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM);
2	Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM).
3	Projeto Político Pedagógico (PPP) da Instituição de referência considerada na 2ª Etapa.
4	Livro Didático (LD).
5	PCOC que serão utilizados na nossa pesquisa, os quais estão disponíveis no L@VIM.
6	Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Nesse artigo, nós restringimos no sexto elemento, considerando dois dos cinco modelos de PCOC utilizados na Dissertação de Ramos (2018) na elaboração, organização e aplicação da Sequência didática (SD), os quais identificou por PCOC nº 1, PCOC nº 2, PCOC nº 3, PCOC nº 4 e PCOC nº 5, conforme mostrado na Figura 4, como recursos didáticos para analisar, além das práticas efetivas, como esses recursos poderiam auxiliar os alunos na realização das tarefas propostas no SD.

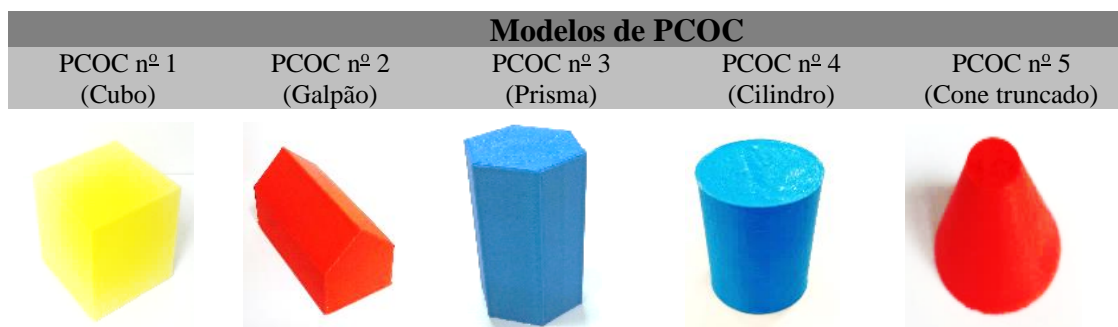


Figura 4:

Visualização dos modelos de PCOC utilizados por Ramos (2018) (Acervo do L@VIM da UESC)

Na 4ª Etapa foi realizada a análise de todos os elementos institucionais escolhidos na 3ª Etapa. A partir dessa análise, Ramos (2018) elaborou uma SD na 5ª Etapa, contendo um Dispositivo Experimental (DE), constituído por cinco tarefas. Na 6ª Etapa, realizou e apresentou uma análise *a priori* da SD, com base na praxeologia de GEOESPAÇO dominante na instituição de referência e aplicação identificada na 2ª Etapa. Na 7ª Etapa, sendo a primeira da Pesquisa Externa, foi apresentada a pesquisa e estabelecida uma negociação com os elementos da Instituição de referência (Diretor, Coordenador, Professores e alunos) sobre as condições da aplicação da SD. Na 8ª Etapa, sendo a

última, foi realizada a análise *a posteriori* e validação da SD sobre as produções dos alunos envolvidos na aplicação da SD em confronto com a análise *a priori*. Dentre os cinco modelos utilizados por Ramos (2018), apresentamos nesse artigo a análise *a priori*, aplicação e a análise *a posteriori*, referentes aos dois primeiros modelos (cf. Figura 4).

Análise a Priori

Uma análise *a priori* pode ser concebida a partir da organização de um conjunto finito de tarefas que constituem um Dispositivo Experimental (DE), elaboradas com base no objeto matemático de referência da pesquisa, visando apresentar no texto, as análises matemáticas e didáticas correspondentes, levando em consideração as competências e habilidades que se pretende alcançar no estudo do referido objeto matemático. Para Henriques (2016, p.10),

A análise *a priori* se constitui como uma das etapas importantíssimas e desafiadoras da pesquisa, no âmbito da Engenharia Didática, na medida em que exige do pesquisador apresentar explicitamente, na sua redação, que seja de um TCC, de uma Dissertação, de uma Tese etc., os conhecimentos que se pretende investigar, com referências na praxeologia correspondente.

Neste sentido, corroborando com Ramos (2018) quando sublinha que:

A análise *a priori* nos possibilita estudar as condições e o controle dos objetos matemáticos, bem como revelar as técnicas de realização matemática das tarefas propostas no Dispositivo Experimental, evidenciando os objetivos, as variáveis didáticas, os resultados esperados, as estratégias de resolução, os pré-requisitos, as competências esperadas para os sujeitos da pesquisa. Ramos (2018, p. 192)

De acordo com Brousseau (1997b, p. 3), “as variáveis didáticas são, entre as variáveis cognitivas, aquelas que podem ser definidas pelo Professor”. Para (Chaachoua, e Bessot, 2019, p. 235) “a noção de variável aparece, sobretudo, como ferramenta metodológica em um processo de modelação, associada à análise *a priori* de uma situação particular ou fundamental”.

Além disso, encontramos em Henriques (2019), que:

Uma Variável didática é um conhecimento/elemento próprio do objeto do saber/tarefa em jogo, que assume valores. Esta, assumindo diferentes valores escolhidos pelo sujeito, modifica a situação e, conseqüentemente, as estratégias ou técnicas de realização. Henriques (2019, p. 60).

Almouloud (2016), por sua vez, sublinha que:

Uma variável didática pode ser compreendida como uma variável cognitiva que pode ser modificada pelo Professor, e que afeta a hierarquia das estratégias de resolução (pelo custo, validade, complexidade). Dito de outra forma, uma variável didática de um problema ou situação é uma variável cujos valores podem ser alterados pelo Professor e cujas modificações podem provocar sensivelmente o comportamento dos alunos em termos de aprendizagem, assim como provocar procedimentos ou tipos de resposta distintos. Almouloud (2016, p.16).

Referindo-se também a variável, Chaachoua (2018) nos ensina que:

Se considerarmos o gerador do tipo de tarefa $G_{Teq} = [Resolver, \text{uma equação algébrica; } V1, V2]$, onde $V1$: o grau da equação, e $V2$: a natureza dos coeficientes. Então a variável $V1$ pode assumir os valores: 1, menor ou igual a 2, maior que 2. A variável $V2$ pode assumir os valores: números naturais, inteiros relativos, racionais, reais (Chaachoua, 2018, p. 12).

Entendemos, portanto, que as variáveis didáticas são conhecimentos importantes na apresentação de uma análise *a priori*, e podem assumir, entre outros valores, os que são valores numéricos. Com efeito, visando analisar, posteriormente, as práticas efetivas dos alunos que participaram da pesquisa, apresentamos neste artigo a análise *a priori* de uma das tarefas (t) propostas no DE da referida Dissertação de Mestrado. O enunciado dessa tarefa é utilizado na representação de todos os PCOC indicados na Figura 1, no ambiente *papel/lápis*, que estavam à disposição dos alunos. As tarefas propostas são precedidas pela seguinte instrução:

Instrução para os alunos	Observar cuidadosamente o modelo PCOC que está em suas mãos, obtido por materialização na impressora 3D. Utilizar, se necessário, um instrumento de medida apropriado para realizar cada tarefa proposta neste Dispositivo Experimental.
--------------------------	--

As duas primeiras tarefas, sendo as únicas que analisamos neste artigo, para os dois primeiros PCOC indicados na Figura 4, foram elaboradas com os seguintes enunciados:

t1)	Representar, o modelo PCOC que está em suas mãos, na folha de respostas, considerando uma escala qualquer, respeitando, porém, as medidas dos elementos geométricos que você pode extrair do modelo.
t2)	Explicitar, descrevendo cada técnica que utilizou, explicando, assim a maneira como realizou a tarefa.

Considerando-se, portanto, o modelo PCOC apresentado na Figura 5.



Figura 5:

Modelo PCOC nº 1 representante de um Cubo

Fonte: Acervo do L@VIM da UESC

O objetivo da t1 é compreender como os alunos do 2º ano do Ensino Médio procedem na representação de objetos geométricos, no ambiente *papel/lápis*, a partir da observação de um modelo PCOC obtido por prototipagem rápida na impressora 3D, mobilizando os seus conhecimentos inerentes, adquirido ou não na instituição de referência. Favorecer a observação, a manipulação do modelo, à mão livre, medir e comparar métricas, utilizando as ferramentas necessárias na mobilização das técnicas de construção e controle de escalas. A t2 objetiva “ouvir” dos alunos, por escrito, a maneira como fazem, isto é, as técnicas que utilizam na representação de objetos geométricos.

No desenvolvimento da análise *a priori* consideramos os PCOC nº 1 e nº 2 (cf. Figura 4).

Assim, observando o PCOC nº 1 devemos, inicialmente, conceber que se trata de um modelo representando um objeto geométrico denominado cubo. A partir daí, deve-se extrair as medidas das arestas do modelo por comparação, utilizando uma régua graduada. Procedendo desta forma vê-se que as arestas deste modelo medem 5 cm (centímetro) de comprimento; 5 cm de largura e 5 cm de altura. Assim, para representar o modelo PCOC nº1 na folha de respostas, espera-se, ao menos a utilização das nove técnicas (τ), apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3:

Técnicas necessárias na representação do PCOC nº1 no ambiente papel/lápis

Fonte: Dados da pesquisa

$\tau 1$ ▶	Marcar um ponto qualquer, convenientemente, na folha de resposta, que podemos identificar por A.
$\tau 2$ ▶	Representar três crivos de retas concorrentes no ponto A, e perpendiculares entre si, utilizando uma régua graduada, um esquadro e uma caneta ou um lápis.
$\tau 3$ ▶	Utilizar, novamente a régua graduada para marcar 5 cm em cada reta, a partir do ponto A, no mesmo octante, obtendo assim os pontos que identificamos por A', B e D.

$\tau 4$ ►	Identificar os segmentos AB, AD e AA' como três das arestas (referentes ao comprimento, largura e altura) do PCOC nº1.
$\tau 5$ ►	Traçar um crivo de reta paralela a AB passando no ponto D, e outro crivo de reta paralela ao AD passando no ponto B, obtendo o ponto de interseção dessas duas retas, o qual identificamos por C. A partir dessa técnica, define-se a fronteira ou contorno da face ABCD do PCOC nº1.
$\tau 6$ ►	Traçar um crivo da reta paralela ao AA' passando no ponto D, e outro crivo da reta paralela a AD passando no ponto A', obtendo um ponto de interseção dessas duas retas, o qual identificamos por D'. Com base nessa técnica, define-se a fronteira ou contorno da face AA'D'D do PCOC nº1.
$\tau 7$ ►	Traçar um crivo da reta paralela, a aresta AA' passando no ponto B e um crivo da reta paralela a aresta AB passando em A', obtendo, assim o ponto de interseção que identificamos por B'. Com aplicação dessa técnica, obtém-se a face A'B'BA do PCOC nº1.
$\tau 8$ ►	Traçar um crivo da reta paralela à aresta BB' passando no ponto C, e um crivo da reta paralela a aresta BC passando no ponto B', obtendo assim, o ponto de interseção que identificamos por C'. Com aplicação dessa técnica, obtém-se a face BB'C'C do PCOC nº1.
$\tau 9$ ►	Traçar o segmento de extremidades C' e D'. Com base nessa construção, pode-se definir as faces que identificamos por CC'D'D e A'B'C'D' do PCOC nº1.

A utilização conveniente das nove técnicas resulta na produção apresentada na Figura 6, contendo, passo-a-passo, um procedimento que pode ser utilizado pelos alunos na representação da figura geométrica denominada Cubo em Geometria Espacial, a partir da manipulação do modelo PCOC nº1 e as ferramentas de construção no ambiente papel/lápis.

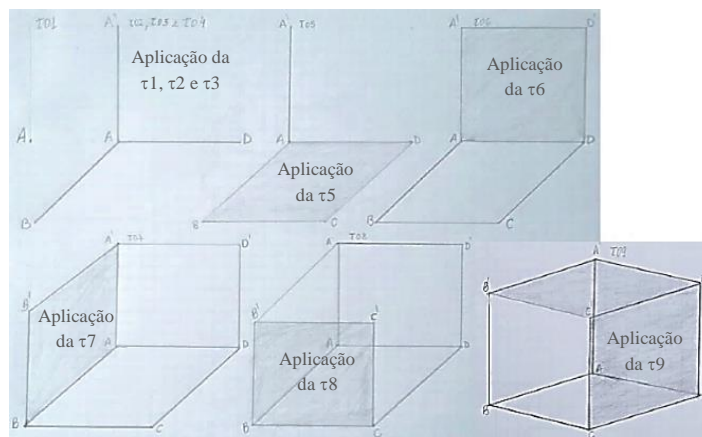


Figura 6:

Representação do Cubo, passo-a-passo, no ambiente papel/lápis a partir do modelo PCOC nº1 utilizando as nove técnicas apresentadas na Tabela 3

Fonte: Nossa produção

Vale sublinharmos que, o resultado assim obtido no ambiente *papel/lápis*, aplicando as nove técnicas, não consiste exatamente no cubo enquanto sólido, e muito menos nas suas faces, e sim nas suas arestas ou quadrados que delimitam as referidas faces. Estas faces por sua vez,

delimitam o sólido (cubo). De fato, o cubo enquanto objeto geométrico denso pode ser descrito pelo texto que o define, ou seja:

Um *cubo* é um objeto geométrico ou modelo matemático constituído pelo conjunto de todos os pontos dos segmentos de extremidades contidas em duas regiões quadradas (faces), contidas em dois planos paralelos distintos, separados, entre si, a uma distância igual a medida dos lados (arestas) das referidas regiões quadradas, sendo que uma das duas regiões é obtida pela translação ortogonal da outra. (Nossa definição, inédita).

Logo, salvo os moldes de materiais manipuláveis, a mão livre, como isopor, sabão, madeira, etc., a construção de um cubo, e dos demais sólidos geométricos, utilizando as técnicas do ambiente papel/lápis, é conceitual. Assim, deve-se levar os alunos a compreensão dos conceitos geométricos inerentes. Com efeito, a explicitação de técnicas de construção dos desenhos ou esboços representantes dos objetos geométricos no ambiente papel/lápis, é uma metodologia conveniente no ensino e na aprendizagem da Geometria Espacial.

Além disso, essa análise desmitifica o conceito equivocado de “planificação de sólidos geométricos” utilizado por muitos Professores de Matemática. Basta pesquisarmos por “planificação de sólidos geométricos” na literatura para constar a difusão equivocada do conceito de planificação. Pois, como lhe sublinha HENRIQUES (2021, p. 129), “não se pode planificar um sólido, e sim, os crivos das superfícies que o delimitam”. O autor discute e mostra a planificação possível de crivos de um paralelepípedo, conforme indicado na Figura 7.

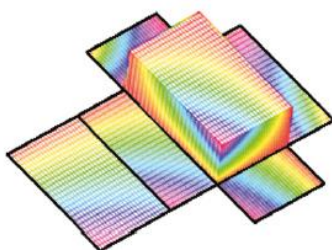


Figura 7:

Planificação das faces do paralelepípedo sobre o plano xy (Henriques, 2021, p. 129).

No âmbito praxeológico, a tecnologia que justifica o conjunto de técnicas descritas no Quadro 4, consiste nos conceitos e concepção de Sólidos Geométricos, tendo como teoria o conjunto de discursos racionais que constituem o modelo praxeológico dominante da Geometria Espacial, bem

como as noções de figuras planas, na instituição de referência. Assim, a tarefa constitui uma organização Praxeológica completa $[T/\tau, \theta, \Theta]$.

Variáveis Didáticas: com base nas definições apresentadas anteriormente, podemos considerar “um PCOC”, como uma variável didática. Pois, a escolha do PCOC nº1 como valor desta variável, modifica as técnicas de realização/construção em relação ao PCOC nº2 ou qualquer PCOC diferente do PCOC nº1. Além disso, o discurso tecnológico e teórico que descreve o objeto geométrico representado por cada modelo PCOC, também modifica de um para outro. Logo um PCOC é uma variável didática.

Resultados esperados: A tarefa t1 pode aparentar ser simples, mas é eficaz, pois exige a mobilização de uma quantidade significativa de técnicas para a sua realização. Salvo a prática de explicitação e descrição das técnicas de representação de sólidos, requerida na t2, por não ser uma prática usual no 2º ano do Ensino Médio, espera-se que os alunos não apresentem muita dificuldade na realização da t1.

Pré-requisitos e Competências: Para os alunos realizarem a t1, eles devem ter conhecimentos dos conceitos de figuras planas e espaciais, saber mobilizar as representações correspondentes no espaço tridimensional, desenvolver as competências sobre propriedades geométricas, em especial os conceitos de: pontos de interseção, paralelismo de retas e de planos.

Passamos a seguir, à apresentação da análise a priori das mesmas tarefas, t1 e t2, que retomamos anteriormente, considerando, porém, o modelo do PCOC nº 2 apresentado na Figura 8.

t1)	Representar, o modelo PCOC que está em suas mãos, na folha de respostas, considerando uma escala qualquer, respeitando, porém, as medidas dos elementos geométricos que você pode extrair do modelo.
t2	Explicitar, descrevendo cada técnica que utilizou, explicando, assim a maneira como realizou a tarefa.



Figura 8:

Modelo PCOC n° 2 representante de um Galpão (Acervo do L@VIM da UESC)

Apesar dos dois modelos considerados modificarem o valor da variável didática “PCOC”, ambos têm o mesmo objetivo. Assim, de modo análogo as estratégias utilizadas na análise referente ao PCOC n° 1, devemos, inicialmente, extrair as medidas das arestas do PCOC n° 2 por comparação.

Mas, diferente de PCOC n° 1 que tem 12 arestas de medidas iguais, o PCOC n° 2 reúne 15 arestas, organizadas em quatro grupos {2}, {4}, {4} e {5}. Cada grupo contém elementos (arestas) que têm a mesma medida. Assim, além da altura do galpão, é suficiente obter-se as medidas de quatro arestas do PCOC n° 2, sendo uma aresta de cada um dos quatro grupos.

Utilizando a régua graduada, identificamos que o referido sólido apresenta 4 cm {em 2 arestas da base}, 3 cm de altura {em 4 arestas laterais}, 3 cm {em 4 arestas do teto}, 8 cm {em 5 arestas} e 5 cm de altura máxima do PCOC a partir da base retangular. Para representar esse modelo na folha de respostas, consideramos as onze técnicas descritas na Tabela 4:

Tabela 4:

Técnicas necessárias na representação do PCOC n° 2 no ambiente papel/lápis (Dados da pesquisa)

$\tau 1 \blacktriangleright$	Marcar um ponto qualquer, convenientemente, na folha de resposta, que podemos identificar por A.
$\tau 2 \blacktriangleright$	Representar três crivos de retas concorrentes no ponto A, e perpendiculares entre si, sendo uma vertical e duas horizontais, utilizando uma régua graduada, um esquadro e uma caneta ou um lápis.
$\tau 3 \blacktriangleright$	Utilizar a régua graduada para marcar 3cm na reta vertical, 4cm na reta horizontal e 8cm na outra horizontal, a partir do ponto A, no mesmo octante, obtendo os pontos que denotamos por A', B e D.
$\tau 4 \blacktriangleright$	Identificar os segmentos AB, AD e AA' como três das arestas, (referentes ao comprimento, largura e altura) do PCOC n° 2.
$\tau 5 \blacktriangleright$	Traçar um crivo de reta paralela a AB passando no ponto D, e outro crivo de reta paralela a AD passando no ponto B, obtendo o ponto de interseção dessas duas retas, o qual identificamos por C. Aplicando esta técnica, obtém-se a face ABCD, sendo a base do PCOC n° 2.
$\tau 6 \blacktriangleright$	Traçar crivo de retas paralelas ao segmento AA' passando nos pontos B, C e D.
$\tau 7 \blacktriangleright$	Utilizar a régua ou compasso para transferir a medida do segmento AA' sobre as retas construídas com aplicação de $\tau 6$ a partir dos B, C e D para marcar os pontos B', C' e D' no mesmo subespaço, em relação a base, que contém o ponto A'.

$\tau 8$	Marcar o ponto médio P do segmento AD e o ponto médio Q do segmento BC.
$\tau 9$	Aplicar a técnica $\tau 6$ para os pontos P e Q.
$\tau 10$	Utilizar a régua para transferir a medida da altura máxima do PCOC sobre as retas obtidas com aplicação da $\tau 9$ obtendo assim, os pontos E e F.
$\tau 11$	Utilizar a régua para traçar os segmentos/arestas BA', A'E, ED', C'D', C'F, B'F e FE.

A utilização conveniente das onze técnicas resulta no desenho apresentado na Figura 9 como representante da figura geométrica denominada prisma de base hexagonal ($BB'FC'C$) irregular ou galpão (quando vista como esboço de uma casa sem portas), e materializada na impressora 3D, obtendo-se o modelo de PCOC nº2 com as dimensões mobilizadas na especificação das onze técnicas.

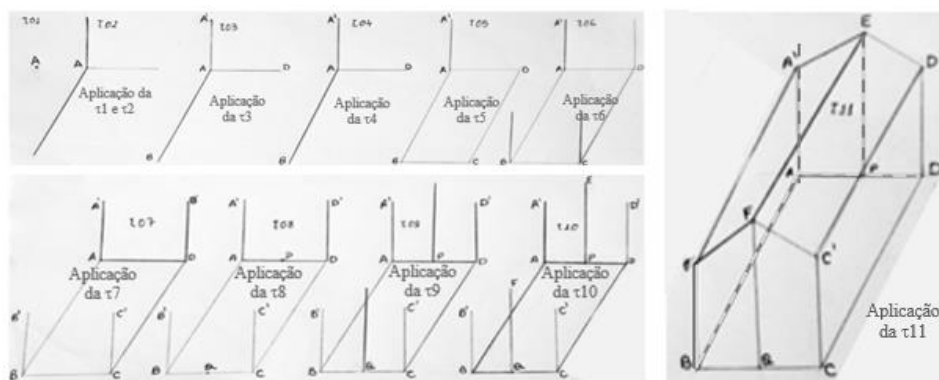


Figura 9:

Resultado da representação do PCOC nº 2 no ambiente papel/lápis utilizando as nove técnicas de realização (Produção nossa)

A tecnologia que justifica esse conjunto de técnicas consiste nos conceitos de Sólidos Geométricos, em particular de figuras planas e retas, tendo como teoria a GEOESPAÇO. Assim, essa tarefa constitui uma organização Praxeológica completa.

Variáveis Didáticas: Aqui também destacamos a “um PCOC” como variável didática, nas mesmas razões justificadas na análise do PCOC nº 1, pois quando este assume outro valor, ou seja, outro modelo, modifica a situação. A “base do modelo” também é uma variável didática, uma vez que a escolha de uma base diferente modifica as estratégias de técnicas de construção.

Resultados esperados: A representação do PCOC nº 2 é muito mais complexa do que a do PCOC nº 1, e exige a mobilização de mais técnicas e estratégia de manuseio das ferramentas de

construção. Todavia, salvo a prática de explicitação das técnicas de construção, requeridas na t2, que não é usual em sala de aula, espera-se que os alunos do 2º ano do Ensino Médio não apresentem grandes dificuldades na realização dessa tarefa. O manuseio do próprio PCOC poderá ajudar os alunos, principalmente, no controle do tratamento das informações inerentes.

Pré-requisitos e Competências. Para os alunos realizarem essa sub tarefa, eles devem ter como pré-requisitos os conhecimentos de conceitos de figuras planas e espaciais, bem como da representação correspondente no espaço tridimensional. Com efeito, eles devem mobilizar as suas competências sobre propriedades geométricas, em particular, os conceitos de interseção de retas, de paralelismo, de ortogonalidade de retas e de planos. Saber identificar convenientemente os vértices das faces (crivos de superfícies planas) que delimitam o galpão.

A seguir apresentamos sucintamente a aplicação e análise *a posteriori* realizadas na pesquisa de Ramos (2018), restringindo-nos, porém, nas práticas desenvolvidas pelos alunos sobre a representação dos dois PCOC que acabamos de analisar, utilizando o ambiente *papel/lápis*.

Aplicação da Pesquisa

Sendo uma das atividades da pesquisa externa, a Sequência Didática (SD) organizada na Dissertação de Ramos (2018), foi aplicada a uma turma de 16 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual no Município de Vitória da Conquista, Bahia, após a negociação estabelecida entre os pesquisadores e os elementos dessa instituição mencionados anteriormente.

Antes de iniciarmos a aplicação, organizamos a turma em cinco grupos, sendo os quatro primeiros de três alunos cada e o quinto com quatro. Cada grupo recebeu um dos modelos PCOC referidos anteriormente, e o enunciado do Dispositivo Experimental (DE) que compõe a SD, conforme esquematizado na Figura 10.

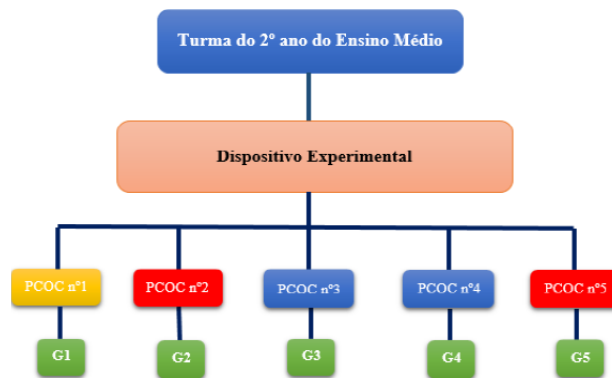


Figura 10:

Esquema organizacional da turma na pesquisa externa. (Ramos, 2018, p. 241)

Sublinhamos que o DE da SD foi organizado com cinco tarefas, aplicadas em um período de 2 horas e 30 minutos, constituindo, portanto, o período de coleta de dados referentes as práticas efetivas dos alunos que analisaremos a seguir considerando a escolha que fizemos para este artigo.

Análise a Posteriori e Validação

Para realizarmos a análise a posteriori e validação da pesquisa, optamos pela elaboração de critérios que julgamos importantes nessa etapa da pesquisa externa, os quais nos permitiram obter um controle melhor na observação e análise das práticas efetivas dos alunos no cumprimento das tarefas propostas, utilizando os modelos de PCOC disponibilizados durante a aplicação da pesquisa. Cada critério foi identificado por C_i , em que i indica um índice de referência de cada critério C .

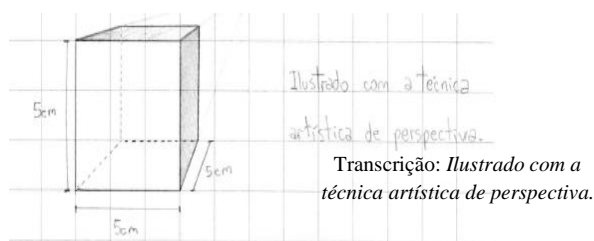
Restringindo-nos aos PCOC nº 1 e o PCOC nº 2, estabelecemos, inicialmente, os critérios apresentados na Tabela 5 referentes ao primeiro modelo, com base nos objetivos apresentados anteriormente durante a análise a priori.

Tabela 5:

Critérios de análises das práticas efetivas dos alunos sobre o PCOC nº 1 (Nossa Produção)

C_1	Os alunos conseguem representar o PCOC nº 1 na folha de respostas, explicitando as técnicas de construção no ambiente <i>papel/lápis</i> , similares ou iguais daquelas apresentadas na análise <i>a priori</i> .
C_2	Os alunos conseguem representar o PCOC nº 1 na folha de respostas, mas não descrevem, explicitamente, as técnicas do ambiente <i>papel/lápis</i> que utilizaram na realização da tarefa.
C_3	Os alunos não conseguem representar o PCOC nº 1 na folha de respostas.
C_4	Os alunos indicam, apenas, algumas técnicas de construção no ambiente <i>papel/lápis</i> , necessárias para a representação do PCOC nº 1 na folha de respostas.
C_5	Os alunos não conseguem representar o PCOC nº 1 na folha de respostas e não indicam técnica alguma que permita a representação do PCOC no ambiente <i>papel/lápis</i> .

A leitura e análise das práticas efetivas dos alunos que compuseram o grupo G_1 , nos permitem inferir que este grupo conseguiu realizar a representação do PCOC nº1, que lhes foi atribuído, mas não descreve técnica alguma do ambiente *papel/lápis* que utilizou para fornecer a representação do referido modelo neste ambiente. Contudo, indica uma técnica, enquadrando-se, portanto, no segundo (C_2) e no quarto critério (C_4) apresentados no Quadro 2. Para ilustrarmos essa observação, apresentamos, na Figura 11 (a), um recorte do manuscrito produzido por G_1 revelando a sua prática efetiva. Na Figura 11 (b), ilustra-se o PCOC disponibilizado aos alunos durante a experimentação. Como se pode observar, neste recorte, o grupo menciona uma determinada origem de técnicas, que denomina de “*artística de perspectiva*”, sem evidenciar os elementos que compõem a referida técnica.



(a) Recorte do manuscrito de G_1 .



(b) PCOC, produto da impressora 3D, disponibilizado aos alunos

Figura 11:

Representação do PCOC nº 1, na folha de respostas, pelos alunos (Dados da pesquisa)

Sublinhamos ainda que, quando os alunos revelam a técnica que denominam “*artística de perspectiva*”, para representarem o PCOC na folha de resposta, acreditamos que eles estão se referindo à técnica designada “*perspectiva linear*”, termo proveniente da matemática euclidiana. Segundo Brasil (2006, p. 38):

Pela perspectiva linear, o artista representa um objeto tridimensional projetando-o sobre um plano a partir de um ponto – o ponto de fuga, que se encontra sobre o eixo óptico ou de visão, uma linha de horizonte imaginária. Todas as linhas de projeção da pintura convergem para esse ponto, que, embora possa não estar representado, tem relevante presença na estrutura da obra.

Assim, podemos conjecturar que os alunos apenas revelam o emprego da referida

técnica sem, contudo, explicar os passos ou elementos que favorecem a sua utilização durante a representação do PCOC na folha de resposta, mobilizando os signos e regras de conformidades do registro gráfico. É notório que os alunos não têm a prática de indicar ou explicitar as técnicas de construções geométricas no ambiente *papel/lápis* que permitiram realizar a representação do sólido. Essa ausência pode ser justificada pela sobrevivência do modelo praxeológico dominante na instituição de referência, 2º ano do Ensino Médio, que não fornece a formação aos alunos com a prática de identificação explícita e descrição das referidas técnicas. Em outras palavras, essas dificuldades apresentadas pelos alunos do G_1 podem estar associadas aos três fatores seguintes:

- A maioria dos autores de Livros Didáticos (LD) não apresenta as técnicas utilizadas na representação dos sólidos, no registro gráfico, que aparecem nesses LD;
- O Professor de Matemática em sala de aula, que em muitos casos, trabalha na leitura e reprodução do LD, não tem iniciativas próprias no ensino visando a descrição de técnicas necessárias na representação de objetos geométricos no espaço tridimensional utilizando o ambiente *papel/lápis*;
- Boa parte de Professores não incentiva os seus alunos a mobilizarem o discurso tecnológico-teórico do bloco *logos* de Geometria Plana e de Geometria Espacial, capazes de favorecerem a descrição, passo a passo, dos procedimentos necessários na representação dos objetos geométricos no espaço tridimensional.

Inferimos, contudo, que apesar do grupo não ter fornecido, passo a passo, as técnicas que utilizou na representação do modelo de PCOC nº 1 que estava em suas mãos, este modelo deve ter servido como recurso didático auxiliar na prática efetiva desse grupo durante a realização da subtarefa em questão. Além disso, a manipulação do modelo PCOC nº 1, à mão livre, certamente, lhes auxiliou na referida representação, uma vez que os alunos compreendiam que o PCOC nº 1 é delimitado por crivos de seis superfícies planas, o que é comprovado pelo resultado apresentado na Figura 11.

Podemos ainda entender que a manipulação, à mão livre, do modelo de PCOC nº 1, pelos alunos, foi um fator determinante na consolidação da relação [X, O] destes alunos com o sólido (objeto O) do saber em jogo. Essa relação é verificada quando os alunos conseguiram

visualizar os crivos de superfícies planas que delimitam o modelo de PCOC nº 1, e fornecer a sua representação na folha de resposta, conforme se pode observar no recorte do manuscrito de suas práticas efetivas, apresentado na Figura 11.

A seguir, apresentaremos a análise *a posteriori*, considerando, porém, o PCOC nº 2.

De forma análoga às escolhas feitas para análise de práticas efetivas dos alunos sobre o PCOC nº 1, e em conformidade com os objetivos apresentados anteriormente durante a análise *a priori* sobre o PCOC nº 2, estabelecemos os critérios que apresentamos na Tabela 6 para essa análise.

Tabela 6:

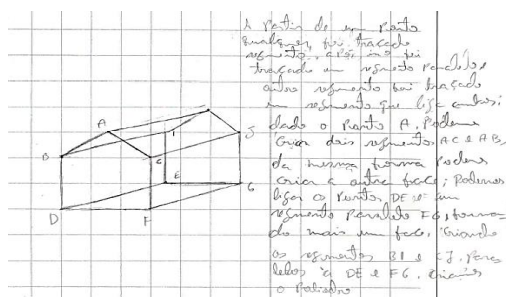
Critérios de análise das práticas efetivas dos alunos sobre o PCOC nº 2

Fonte: Nossa Produção

C ₁	Os alunos conseguem representar o PCOC nº 2 na folha de respostas, descrevendo as técnicas de construção no ambiente <i>papel/lápis</i> , similares ou iguais daquelas apresentadas na análise <i>a priori</i> .
C ₂	Os alunos conseguem representar o PCOC nº 2 na folha de respostas, mas não descrevem, explicitamente, as técnicas do ambiente <i>papel/lápis</i> que utilizaram na realização da tarefa.
C ₃	Os alunos não conseguem representar o PCOC nº 2 na folha de respostas.
C ₄	Os alunos indicam, apenas, algumas técnicas de construção no ambiente <i>papel/lápis</i> , necessárias para a representação do PCOC nº 2 na folha de respostas.
C ₅	Os alunos não conseguem representar o PCOC nº 2 na folha de respostas e não indicam técnica alguma que permita a representação do PCOC no ambiente <i>papel/lápis</i> .

Ainda de modo análogo a análise da t1 sobre o PCOC nº 1, para realizar esta tarefa com o PCOC nº 2 em mãos, é exigida dos alunos a mobilização de conhecimentos da Geometria Plana e da Geometria Espacial intrínsecos a esse PCOC.

A partir da leitura das práticas efetivas dos alunos, em particular, os que formaram o G_2 , notamos que este grupo forneceu, corretamente, a representação do PCOC nº 2 na folha de respostas, enquadrando-se no segundo critério (C₂). Além disso, esse grupo se enquadra também no critério (C₄), na medida em que indica, mesmo timidamente, ou com dificuldade, algumas técnicas que utilizou para representar este modelo no ambiente *papel/lápis*, conforme se pode observar na Figura 12(a) acompanhada com o modelo PCOC (Figura 12 (b)) disponibilizado durante a aplicação da SD.



(a) Reprodução do grupo.



(b) PCOC, produto da impressora 3D, disponibilizado aos alunos.

Figura 12:

Representação do PCOC n° 2 na folha de respostas pelos alunos (Dados da pesquisa)

Para favorecermos a leitura, transcrevemos na Tabela 7, de uma linha e uma coluna, a descrição das técnicas utilizadas pelo referido grupo na tentativa de justificar a sua prática diante da representação do PCOC n° 2 na folha de respostas.

Tabela 7:

Transcrição da descrição das técnicas utilizadas pelos alunos na realização da t1

Fonte: Dados da pesquisa

A partir de um ponto qualquer, foi traçado segmento, após isso foi traçado um segmento paralelo e outro segmento foi traçado um segmento que liga ambos. Dado o ponto A, podemos criar dois segmentos AC e AB, da mesma forma podemos criar a outra face; podemos ligar os pontos DE e um segmento paralelo FG, formando mais uma face, criando os segmentos BI e CJ, paralelos à DE e FG, criamos o poliedro.

Observando a descrição fornecida pelos alunos é possível notar nos termos:

- “ponto qualquer”, “foi traçado segmento”, “segmento paralelos”, “podemos criar dois segmentos”, “criar a outra face”, “ligar os pontos”, “criamos o poliedro”.

a tentativa de indicação de técnicas tais como:

- “considerar um ponto qualquer”, “traçar segmentos que sejam crivos de retas perpendiculares entre si”, “criar dois segmentos”, “criar uma face do modelo”, “ligar dois pontos por um segmento”, “criar o poliedro”.

Todavia, eles apresentam dificuldades que se manifestaram na ausência da mobilização do discurso tecnológico-teórico necessário para indicarem, de forma eficiente e sequencial, as técnicas necessárias na representação do PCOC n° 2 na folha de respostas. Pois, seguindo a descrição fornecida pelo grupo, dificilmente se alcança a representação do modelo PCOC n° 2 na folha de resposta. Ou seja, os alunos conseguem reproduzir o modelo na folha de resposta, mas demonstram dificuldades para

externar as técnicas que utilizaram para alcançar o referido resultado notável na Figura 12 (a).

De modo análogo ao resultado apresentado na análise *a posteriori* de t1 para o PCOC nº 1, essas dificuldades podem ser justificadas pela sobrevivência do modelo praxeológico dominante na instituição de referência (2º ano do Ensino Médio) que não fornece essa formação para os alunos em Geometria Espacial, onde os alunos não são conduzidos a descrever o que fazem ou o que vão fazer durante a realização das suas práticas institucionais, restringindo-se em “fazer contas” ou “fazer desenhos” sem descrições que devem ser fundamentadas nos conhecimentos tecnológicos-teórico do bloco *logos* [Θ, θ] do objeto do saber em jogo.

Em outras palavras, a instituição de referência/aplicação não evidencia o processo de descrição de técnicas ou procedimentos, na língua materna, que os alunos devem colocar em prática na representação de objetos geométricos no registro gráfico. Ora, na nossa análise *a priori*, evidenciamos, ao menos onze técnicas ou procedimentos necessários para representar o PCOC nº 2 na folha de resposta. Uma vez ensinadas e seguidas, convenientemente, as onze técnicas, pelo aluno, este deve alcançar o resultado esperado, sendo, portanto, uma condição necessária na consolidação do saber em Geometria Espacial.

Insistimos em acreditar que os alunos envolvidos na pesquisa não têm conhecimentos das técnicas esperadas na representação de PCOC em ambiente *papel/lápis*, porque não são ensinadas e muito menos familiarizados com a apresentação das referidas descrições, na língua materna, durante a realização das atividades propostas em cada bloco práxis [τ, T] de objetos estudos em Matemática. Esperamos, portanto, que as nossas reflexões venham contribuir, não apenas nas práticas efetivas de alunos, mas principalmente no ensino da Geometria Espacial em todas as instituições de ensino.

Considerações Finais

Como sublinhado anteriormente, objetivamos, com este artigo, analisar as práticas efetivas de alunos do 2º ano do Ensino Médio na realização de tarefas sobre a representação de sólidos geométricos no ambiente *papel/lápis*, a partir da manipulação, a mão livre, de modelos de PCOC obtidos por

prototipagem rápida na impressora 3D que compõem o acervo de Laboratório de Visualização Matemática (L@VIM) da UESC.

O nosso foco, foi observar as técnicas (enquanto maneira de “fazer” no contexto praxeológico) utilizadas e descritas pelos alunos na língua materna, justificadas pelos discursos tecnológicos-teórico da Geometria Espacial. Com efeito, mergulhamos a pesquisa no quadro teórico constituído pela Teoria Antropológica do Didático, restringindo-nos, porém, na sua vertente designada *Abordagem Praxeológica*, para responder o seguinte questionamento: Quais são as técnicas utilizadas e descritas pelos alunos do 2º ano do Ensino Médio na representação de Sólidos Geométricos? Para isso, seguindo a metodologia de *Análise Institucional & Sequência Didática (AI&SD)* organizada em oito etapas, desenvolvidas em dois momentos denominados Pesquisa Interna e Pesquisa externa. Nessa última, restringimo-nos na aplicação e na análise *a posteriori* de uma das tarefas sobre representações de sólidos no ambiente *papel/lápis* indicando e descrevendo as técnicas utilizadas, a partir da manipulação de um PCOC. Tais tarefas são partes do Dispositivo Experimental da Sequência Didática organizada pelo Ramos (2018). Os resultados obtidos revelam que os alunos conseguem representar os sólidos considerados no ambiente *papel/lápis*, mas não conseguem explicitar e descrever as técnicas que utilizam nas referidas representações durante o desenvolvimento das suas práticas efetivas.

A ausência desse conhecimento pode ser justificada pela sobrevivência do modelo praxeológico dominante de Geometria Espacial na instituição de referência, em particular o 2º ano do Ensino Médio, que não fornece uma formação aos alunos que envolva as referidas descrições na língua materna. Assim, esperamos que a indicação e descrições de técnicas desenvolvidas na nossa análise *a priori* em torno dos PCOC que trabalhamos com estes alunos, encontrem espaço nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria Espacial no Ensino Médio.

Referências

- Almouloud, S. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. Editora da Universidade Federal de Paraná.
- Almouloud, S. A. (2013a). *Organizações praxeológicas sobre função exponencial: uma abordagem do livro didático*. VII CIBEM. Montevideo, Uruguay.

- Almouloud, S. A. (2016). *Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos*. Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT), V.1, n.2.
- Artigue, M. (1988). *Ingénierie Didactique. Recherches em Didactique des Mathématiques*, v.9, n. 3, pp. 281 – 308.
- Brasil. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio (volume 2): Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Secretaria de Educação Básica (Departamento de políticas de Ensino Médio) – Brasília: MEC, SEB.
- Brousseau, G. (1997b) *La théorie des situations didactiques: le cours de Montréal*. http://www.math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf.
- Chaachoua, A. (2018). T4TEL Un cadre de reference Didactique pour La Conception des EIAH - *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM*.
- Chaachoua, A., Bessot, A. (2019). La notion de variable dans le modèle praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa, Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.21, n.4, pp. 234-247*.
- Chevallard, Y. (1992). *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 12, n. 1, p. 73-112.
- Chevallard, Y. (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de la didáctica*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19, nº 2, pp.221-266.
- Chevallard, Y. (2009). *La TAD face au professeur de mathématiques*, UMR ADEF, Toulouse, le 29 avril.
- Duval R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. IREM de Strasbourg, v. 5, p. 35-65.
- Henriques, A. (2021). *Introdução ao Maple enquanto sistema de computação algébrica & gestão de códigos para impressora 3D*. Editus.
- Henriques, A. (2019). *Saberes Universitários e as suas relações na Educação Básica - Uma análise institucional em torno do Cálculo Diferencial e Integral e das Geometrias*. Via Litterarum. Ibicaraí, Bahia. Editora.
- Henriques, A. (2016). *Análise Institucional & Sequência Didática como Metodologia de Pesquisa*, Anais do I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática (LADIMA) 01-06 de novembro, Bonito, MS. <http://grupoddm.pro.br/wp-content/uploads/2020/05/HENRIQUES.pdf>.
- Nascimento, J. B. S. (2013). *O Estudo de Geometria Espacial por meio da Construção de Sólidos com materiais Alternativos*, 125 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário Univates.
- Pavanello, R. M. (1993). *O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências*. *Revista ZETetiké*. v. 1, n. 1.
- Paraizo, R. F. (2012). *Ensino de geometria espacial com utilização de vídeos e manipulação de materiais concretos - um estudo no ensino médio*, 196 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora.
- Pohl, V. (1994). *Visualizando o espaço tridimensional pela construção de poliedros*. In: Lindquist, M. M.; Shulte, A. P. (org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. Tradução: Domingues, H.

H. São Paulo: Atual.

Ramos, S. M. (2018) *Aplicação de Modelos de PCOC na Aprendizagem da Geometria Espacial no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz.

Vidaletti, V. B. B. (2009). *Ensino e Aprendizagem da Geometria Espacial a partir da manipulação de Sólido*, 109 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante no Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário Univates.