

Autenticidade em Atividades de Modelagem Matemática: em busca de um *design*

Authenticity in Mathematical Modeling Activities: looking for a design

Autenticidad en Actividades de Modelación Matemática: en busca de un diseño

L'authenticité dans les activités de modélisation mathématique : à la recherche d'une conception

Lourdes Maria Werle de Almeida¹
Universidade Estadual de Londrina (UEL)
<https://orcid.org/0000-0001-8952-1176>

Letícia Barcaro Celeste Omodei²
Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR)
<https://orcid.org/0000-0003-2023-7606>

Resumo

Este artigo apresenta uma investigação sobre a autenticidade em atividades de modelagem matemática, mediada pela questão: Como caracterizar a autenticidade em atividades de modelagem matemática? A investigação desta questão tem como objetivo estruturar um *design* para a autenticidade em atividades de modelagem. A pesquisa inclui duas partes. Inicialmente, estrutura-se um *design* a partir de um quadro teórico relativo a essa temática na área de modelagem matemática, integrando seis atributos que qualificam a autenticidade nessas atividades, podendo conferir a elas maior ou menor nível de autenticidade. A segunda parte consiste em uma pesquisa empírica em que estudantes desenvolvem atividades de modelagem cuja autenticidade é analisada em relação aos atributos. A investigação se caracteriza como pesquisa qualitativa, associando movimentos analíticos por meio dos quais se dá a articulação entre teoria e informações a respeito da autenticidade, usando critérios interpretativos de análise. O *design* estruturado é inovador em relação ao que a literatura já reconhece quanto à identificação da autenticidade em atividades de modelagem matemática. A análise da atividade

¹ lourdes@uel.br

² leticia.celeste@unespar.edu.br

de modelagem realizada indica que o *design* oferece uma maneira eficaz de inferir sobre a autenticidade, apontando que atividades de modelagem autênticas devem ser pautadas em uma realidade extraescolar, ao mesmo tempo em que atendem a anseios de uma realidade escolar.

Palavras-chave: Educação Matemática, Modelagem Matemática, Autenticidade, Atributos.

Abstract

This article presents an investigation about authenticity in mathematical modeling activities that is mediated by the question: How to characterize authenticity in mathematical modeling activities? The investigation of this question aims to structure a design for authenticity in modeling activities. The survey includes two parts. Initially, a design is structured from a theoretical framework regarding this theme in the area of Mathematical Modeling and integrates six attributes that qualify the authenticity in these activities, being able to give them a greater or lesser level of authenticity depending on their identification in the activity. The second part consists of an empirical research in which students develop modeling activities whose authenticity is analyzed in relation to the attributes. The investigation is characterized as qualitative research, associating analytical movements through which the articulation between theory and information about authenticity takes place, using interpretative analysis criteria. Structured design is innovative in relation to what the literature already recognizes regarding the identification of authenticity in mathematical modeling activities. The analysis of the modeling activity carried out indicates that design offers an effective way of inferring authenticity, pointing out that authentic modeling activities must be guided by an extra-school reality while meeting the desires of a school reality.

Keywords: Mathematical modeling, Authenticity, Mathematical education, Attributes.

Resumen

Este artículo presenta una investigación sobre la autenticidad en las actividades de modelado matemático que está mediada por la pregunta: ¿Cómo caracterizar la autenticidad en las actividades de modelado matemático? La investigación de esta pregunta tiene como objetivo estructurar un diseño para la autenticidad en las actividades de modelado. La encuesta incluye dos partes. Inicialmente se estructura un diseño a partir de un marco teórico respecto a esta temática en el área de Modelado Matemático e integra seis atributos que califican la autenticidad en estas actividades, pudiendo otorgarles un mayor o menor nivel de autenticidad dependiendo de su identificación en la actividad. La segunda parte consiste en una investigación empírica en la que los estudiantes desarrollan actividades de modelado cuya autenticidad se analiza en relación a los atributos. La investigación se caracteriza como investigación cualitativa, asociando movimientos analíticos a través de los cuales se produce la articulación entre teoría e información sobre la autenticidad, utilizando criterios interpretativos de análisis. El diseño estructurado es innovador en relación a lo que la literatura ya reconoce respecto a la identificación de la autenticidad en las actividades de modelado matemático. El análisis de la actividad de modelado realizado indica que el diseño ofrece una forma efectiva de inferir la autenticidad, señalando que las actividades de modelado auténticas deben estar guiadas por una realidad extraescolar al mismo tiempo que satisfacen los deseos de una realidad escolar.

Palabras clave: Modelación Matemática, Autenticidad, Educación Matemática, Atributos.

Résumé

Cet article présente une enquête sur l'authenticité dans les activités de modélisation mathématique, qui s'appuie sur la question suivante : comment caractériser l'authenticité dans les activités de modélisation mathématique ? L'étude de cette question vise à structurer une conception de l'authenticité dans les activités de modélisation. La recherche comprend deux parties. Dans un premier temps, une conception est structurée à partir d'un cadre théorique

concernant cette question dans le domaine de la modélisation mathématique et intègre six attributs qui qualifient l'authenticité dans ces activités, et peuvent leur conférer un niveau d'authenticité plus ou moins élevé. La deuxième partie consiste en une recherche empirique dans laquelle les étudiants développent des activités de modélisation dont l'authenticité est analysée par rapport aux attributs. L'enquête est caractérisée comme une recherche qualitative, associant des mouvements analytiques à travers lesquels se produit l'articulation entre la théorie et les informations concernant l'authenticité, en utilisant des critères d'analyse interprétative. La conception structurée est innovante par rapport à ce que la littérature reconnaît déjà concernant l'identification de l'authenticité dans les activités de modélisation mathématique. L'analyse de l'activité de modélisation réalisée indique que la conception offre un moyen efficace de déduire l'authenticité, en soulignant que les activités de modélisation authentiques doivent être ancrées dans une réalité extra-scolaire tout en répondant aux désirs d'une réalité scolaire.

Mots clés : Enseignement des mathématiques, Modélisation mathématique, Authenticité, Attributs.

Autenticidade em Atividades de Modelagem Matemática: em busca de um *design*

As discussões relativas à inclusão da modelagem matemática nas aulas de matemática têm crescido nas últimas décadas e especificidades desse tipo de atividades têm sido apontadas (Almeida, 2018; Blum, 2015; Brito & Almeida, 2021; Spooner, 2017; Borromeo Ferri, 2018).

Perante o desafio de incluir nas aulas aplicações da matemática, a modelagem matemática é apontada como possibilidade de contrapor as atividades reconhecidas como *word-problems*, que, conforme sugerem Pollak (1969) e Vos (2018), são aplicações da matemática mas, em geral, incluem informações e dados relativos a contextos que não, necessariamente, atendem às características de uma situação passível de ocorrer na realidade. Henry Pollak, particularmente, já em 1969 ponderava que a superação de limites desses tipos de problemas poderia ser enfrentada pela definição de problemas na sala de aula cuja resolução fosse mediada pela construção de modelos matemáticos.

Mais recentemente, pesquisas têm apontado que possíveis lacunas dos *word-problems* resolvidos pelos estudantes podem ser desafiadas com a introdução de situações autênticas com as quais eles se deparam na vida e que são estudadas em atividades de modelagem matemática (Gueudet, Bosch, Kwon & Verschaffel, 2017; Kaiser, 2017; Vos, 2018; Verschaffel, Schukajlow, Star & Van Dooren, 2020).

O que merece atenção neste cenário refere-se à autenticidade nas atividades de modelagem. Aserções sobre o que é autenticidade e como ela pode ser incluída e caracterizada em atividades de modelagem têm sido foco em estudos no campo da Modelagem Matemática na Educação Matemática (Galbraith, 2007; 2013; 2015, Palm, 2007; 2009; Kaiser & Schwarz, 2010, Vos, 2011; 2015; 2018; Carreira & Baioa, 2018).

Entretanto, conforme revisão sistemática realizada por Martins, Omodei e Almeida (2017), embora o tema tenha recebido atenção de pesquisadores da área, ainda há poucos indicativos de como a autenticidade pode ser caracterizada em atividades de modelagem

matemática desenvolvidas pelos estudantes. Além disso, Niss (1992) aponta que a autenticidade é relativa, de modo que uma atividade pode ser autêntica para uns e não para outros e essa prerrogativa tem sido mencionada em pesquisas referentes à temática.

Considerando esse estado a respeito das discussões sobre autenticidade, no presente artigo, nos propomos a discuti-la a partir da questão: *Como caracterizar a autenticidade em atividades de modelagem matemática?* A investigação desta questão tem como objetivo estruturar um *design*³ para a autenticidade em atividades de modelagem e está estruturada em duas partes. Inicialmente, a partir de um quadro teórico relativo à modelagem matemática, construímos um conjunto de atributos que nos leva a configurar um *design* para a autenticidade em atividades desse tipo. Na segunda parte realizamos uma pesquisa empírica em que estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática desenvolvem atividades de modelagem cuja autenticidade é analisada considerando os atributos e seus níveis.

Quadro teórico

Modelagem Matemática na Educação Matemática

A modelagem matemática está associada à identificação e resolução, por meio da matemática, de problemas cuja origem, em geral, não está no âmbito da matemática, de modo que, trata-se de uma atividade que tem como característica essencial a transição entre a realidade e a matemática.

Diferentes autores apresentam entendimentos para a modelagem. Bassanezi (2002), considera que a modelagem matemática pode ser entendida como “[...] a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do seu contexto de origem” (Bassanezi, 2002, p. 16).

³ Não encontramos na língua brasileira (português) uma boa tradução para a palavra *design*. Em inglês, *design* refere-se a uma estrutura ou uma forma de algo esboçado como um conjunto de características ou um plano de ação.

Pollak e Garfunkel (2013, p. 9), sugerem que “em uma atividade de modelagem matemática, a matemática pura perde parte de sua soberania” no sentido de que as características do problema da realidade e a matemática precisam ser interligadas e as especificidades de cada uma precisam ser compartilhadas. Assim, na argumentação desses autores, “se o resultado não fizer sentido em termos da situação original no mundo real, o estudante não terá enfrentado a realidade na sua atividade de modelagem matemática” (Pollak & Garfunkel, 2013, p. 9).

A modelagem matemática, viabilizando uma interlocução entre realidade e matemática na sala de aula, inclui um conjunto de ações e procedimentos dos estudantes. Assim, Almeida, Silva e Vertuan (2014) se referem à modelagem como uma alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem da matemática. Segundo esses autores, aspectos relevantes em uma atividade de modelagem residem nas iniciativas e nas ações dos estudantes, na dinâmica estabelecida pelo professor e pelos estudantes para lidar com a situação bem como nas condições de que estes dispõem para investigar a situação da realidade. Portanto, na sala de aula podem se constituir distintas práticas de modelagem matemática considerando interesses do professor e especificidades da situação investigada.

À dinâmica de uma atividade de modelagem associa-se um ciclo de modelagem. Em Almeida, Silva e Vertuan (2014), este ciclo inclui cinco fases: Inteiração, Matematização, Resolução, Interpretação de Resultados, Validação.

A inteiração consiste na busca de informações sobre a situação da realidade, realizando a coleta de dados e a identificação de uma problemática que pode ser investigada nesta situação (Almeida & Vertuan, 2014). Integrar à atividade de modelagem a definição de um problema para além de sua resolução é, segundo Kaiser e Schwarz (2010), a parte mais desafiadora da modelagem matemática e que, em geral, é negligenciada em aulas de matemática.

A matematização é a fase na qual acontece a formulação de hipóteses, a seleção de variáveis e simplificações necessárias para a resolução do problema, de modo que acontece a transição da linguagem natural para a linguagem matemática. Cifuentes e Negrelli (2012, p. 798) consideram que essa é uma “fase essencial na descrição epistemológica do processo de modelagem, servindo, inclusive, para diferenciá-lo de outros processos como a resolução de problemas, por exemplo”.

A fase em que se constrói um modelo matemático, por meio do qual se determina uma solução para o problema, consiste na resolução. Maaß (2010, p. 287) afirma que “um modelo é uma representação simplificada da realidade; tem uma intenção específica e leva em consideração alguns aspectos da realidade”. Em consonância com essa caracterização, Almeida e Vertuan (2014, p. 2) defendem que o modelo matemático se traduz por “um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, que é expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, em geral, não matemático”. Os resultados matemáticos obtidos nessa fase, apesar de importantes, não são suficientes para concluir a modelagem matemática de uma situação da realidade. Para Borromeo Ferri (2018, p. 17):

Geralmente, os estudantes param o processo de modelagem com seus resultados matemáticos, porque é isso que eles fazem ao resolver outras tarefas matemáticas. Mas a Modelagem Matemática é diferente. Se a realidade do resultado matemático não é questionada pelos estudantes, então a Modelagem Matemática não faz sentido.

Por fim, a fase em que se dá a avaliação dos resultados é denominada de validação. Nesta fase, para além da avaliação dos resultados do ponto de vista matemático, eles também precisam ser validados relativamente à sua adequação para a resposta do problema investigado de tal forma que “o aluno se depara com a necessidade de comparação e distinção de ideias, generalização de fatos, articulação de conhecimentos de diferentes áreas” (Almeida & Vertuan, 2014, p. 7).

Embora se reconheçam estas fases e uma estrutura cíclica para atividades de modelagem, não há um percurso linear por essas fases. Ao invés disso, estabelece-se um movimento de idas e vindas, conferindo às atividades uma dinâmica e um refinamento iterativo do modelo e da solução (Almeida, Silva & Vertuan, 2016).

A caracterização dessas fases sinaliza, por um lado, o desafio que pode ser para estudantes (e para professores) envolver-se com atividades desse tipo ao invés de valer-se de práticas de sala de aula em que aquilo que não diz respeito à matemática não é considerado na proposição de um problema, conforme sugere D'Ambrosio (1994).

A possibilidade de abordar situações da realidade por meio de atividades de modelagem têm instigado professores e pesquisadores a considerar que se trata de uma possibilidade de incluir aspectos autênticos nas atividades escolares (Vos, 2018). Assim, atividades de modelagem matemática viriam para superar a falta de autenticidade muitas vezes identificada nos reconhecidos *word-problems* (Vos, 2018). Mas, no que consiste essa autenticidade? Como incluí-las nas aulas?

Sobre autenticidade em atividades de modelagem matemática

De acordo com o Michaelis Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa, o termo *autenticidade* consiste na “natureza, propriedade ou condição do que é autêntico”. Autêntico, do Latim *authenticus*, significa válido, verdadeiro, genuíno. Já do Grego *authentikos*, o autêntico está em oposição ao que é uma imitação de outro, refere-se ao que realmente vem daquele a quem o atribuímos.

No dicionário filosófico, por sua vez, autenticidade refere-se ao que é o mais profundo, em contraposição ao mais superficial; ao que dura contra o que é momentâneo, ao que cresceu e se desenvolveu com a própria pessoa contra o que a pessoa acolheu de outro ou imitou (Abbagnano, 2007).

As definições dos dicionários remetem a uma caracterização de autenticidade como algo que é original, em oposição a ser uma cópia. No âmbito educacional, sem se distanciar da ideia de trazer para a sala de aula a originalidade de situações externas a ela, a autenticidade precisa ser relativizada e avaliada em cada contexto, conforme pontua Vos (2018). Segundo essa autora, deliberar sobre a autenticidade por meio de um julgamento específico ou por uma interpretação pessoal é inadequado para caracterizá-la em ambientes de aprendizagem e contextos escolares. Para Vos (2018, p. 4), é adequado que “uma comunidade de várias pessoas (estudantes, professores, pesquisadores, partes interessadas de fora da escola) concorde na caracterização de algo como autêntico ou não autêntico”. Assim, a autora se refere à autenticidade como uma construção social utilizando-se de bases da arqueologia, de modo que suas ponderações remetem à autenticidade como parte de um ritual da constituição de uma verdade.

Mas, como caracterizar a autenticidade em atividades de modelagem matemática de modo que uma comunidade possa aceitar as evidências? Em que medida uma atividade de modelagem matemática pode ser autêntica? Em que aspectos?

Uma revisão realizada por Martins, Omodei e Almeida (2017) e dirigida aos dois principais eventos científicos da área de Modelagem Matemática (ICTMA (International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications) e CNMEM (Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática)), aponta que o termo *autenticidade* e o termo *autêntico* ainda são pouco usados na literatura da área e, quando os relatos de pesquisa ou de práticas de modelagem o usam, não há um rigor relativamente a como a característica *autenticidade* é analisada nas atividades. Além disso, a exploração de como a autenticidade pode ser caracterizada em atividades de modelagem se concentra em poucos autores que, no decorrer de suas pesquisas, abordam o tema em atividades desse tipo.

Há indicações na literatura de que atividades de modelagem matemática podem ser autênticas em alguns aspectos e não em outros (Vos, 2015; 2018; Galbraith, 2013; 2015). Para Vos (2015), por exemplo, algo é autêntico se tiver uma origem verdadeira e não tiver sido copiado (ou forjado). A autora defende que a definição de autenticidade usada na Educação Matemática deve estar alinhada ao significado da palavra no dicionário, de não ser uma cópia, uma vez que “o objeto (tarefa, situação, atividade) que se pretende que seja autêntico, se origina de uma realidade fora da escola. O designer de tarefas usa a realidade extraescolar para organizar uma tarefa para a escola” (Vos, 2011, p. 718).

Reconhecidamente referidas na literatura acerca da autenticidade em atividades de modelagem matemática estão argumentações de Peter Galbraith. Esse autor julga importante a caracterização das palavras *autêntico* e *autenticidade*, tanto na literatura de modelagem matemática quanto nos documentos curriculares. Em Galbraith (2013) e em Galbraith (2015), o autor propõe que a autenticidade em uma atividade de modelagem na sala de aula seja analisada levando em consideração quatro dimensões: a autenticidade de conteúdo, autenticidade do processo, autenticidade da situação e a autenticidade do produto.

Para este autor, se o problema envolver conexões com o mundo real e os estudantes possuírem conhecimentos matemáticos suficientes para apresentar uma resolução viável, a autenticidade de conteúdo é conferida. Em relação a essa dimensão, Galbraith (2013) divide os problemas em dois gêneros: problemas reais direcionados (problemas definidos com um objetivo específico) e problemas de vida (o contexto é real, mas há liberdade na escolha do problema). O autor destaca que neste caso “o reconhecimento das questões culturais e sociais e a importância dos valores pessoais são fatores centrais” (Galbraith, 2013, p. 33). A autenticidade de conteúdo, portanto, se centra na definição daquilo que vai ser investigado na atividade de modelagem matemática.

A autenticidade do processo “refere-se à condução de um processo de modelagem que resulta em soluções que são defensáveis e robustas em termos dos resultados buscados”. (Galbraith, 2013, p. 33). Com relação a esta dimensão, o autor defende a importância de se ter um processo (como o indicado em um ciclo de modelagem, por exemplo) para desenvolver a atividade de modelagem matemática.

A autenticidade da situação tem como característica essencial o fato de que a resolução do problema é conduzida por exigências da modelagem matemática de uma situação da realidade, em oposição ao que acontece em outras práticas de ensino. “Isso significa que as escolhas educacionais pedagógicas (e outras) serão decididas pelas necessidades da resolução do problema e não o contrário” (Galbraith, 2015, p. 344). Nesta dimensão, o autor defende que a modelagem pode “desafiar algumas normas, pressupostos e estereótipos – matemáticos, situacionais e pedagógicos” (Galbraith, 2013, p. 35). Nesse sentido, Galbraith (2013, p. 34) pondera que “a modelagem como resolução de problemas do mundo real nunca vai ser incluída em sua totalidade em sistemas educacionais que valorizam apenas o conteúdo matemático curricular prescrito”.

A análise dos resultados matemáticos (direcionada à verificação dos procedimentos matemáticos e de como se ajustam ao problema do mundo real) se refere à autenticidade do produto. Avaliar a autenticidade do produto envolve perguntar o quão bem um resultado obtido pela modelagem atende a questão proposta considerando o tempo disponível e os dados usados para o desenvolvimento da atividade (Galbraith, 2013).

De acordo com Vos (2011), para analisar a autenticidade em uma atividade é necessário haver uma caracterização clara e não contraditória do que é autenticidade; determinar se uma atividade é autêntica por completo ou se são considerados autênticos apenas alguns aspectos, pois, para a autora, “na educação, não oferecemos tarefas totalmente autênticas, porque

queremos permitir que os estudantes cometam erros. Nas situações da realidade, há reponsabilidades que não permitem cometer erros” (Vos, 2018, p. 6).

Para ilustrar sua ideia relativa a essa responsabilidade, Vos (2011) associa um simulador de voo com um ambiente de aprendizagem. De fato, aparentemente um simulador de voo é autêntico, entretanto, como não há um voo, o piloto no simulador não tem responsabilidades como as que teria o piloto ao pilotar em um voo real. Assim, emerge a reflexão

Se aspectos essenciais da situação forem descartados por causa dos fins educacionais, ainda podemos falar de atividades autênticas ou de um ambiente de aprendizagem autêntico? Quais são os aspectos essenciais da situação original que precisam ser incorporados e o que pode ser excluído sem perder a qualificação da autenticidade? O exemplo do simulador de voo sugere que não considerar um voo autêntico não desmerece o valor da situação como um ambiente de aprendizagem: mesmo excluindo a responsabilidade do piloto sobre o avião e sobre as vidas, ainda se constitui um ambiente seguro para aprender a pilotar um avião (Vos, 2011, p. 719).

Considerando esse entendimento, Vos (2011) sugere que a simulação da realidade não é característica de uma atividade totalmente autêntica. Para a autora, na simulação “o objeto (uma tarefa / um ambiente) é uma cópia que simula a realidade de forma fidedigna. O objeto não se origina da realidade, mas foi projetado para espelhar a realidade” (Vos, 2011, p. 717).

Entretanto, atividades de modelagem matemática de situações da realidade, ajudam a “refletir sobre o que está acontecendo no mundo real, além de ser uma adaptação da realidade sob condições controladas, uma busca pela semelhança com a realidade e uma maneira de verificar como a prática funciona na realidade” (Carreira & Baioa, 2018, p. 203).

Levando em consideração esta discussão relativamente à autenticidade em atividades de modelagem matemática e, com a intenção de discutir como podemos inferir autenticidade às atividades de modelagem desenvolvidas em contextos educacionais, definimos um conjunto de atributos para a caracterização da autenticidade nessas atividades.

Aspectos metodológicos

A investigação realizada pode ser caracterizada como pesquisa qualitativa. As metodologias frequentes nesta modalidade de pesquisa valem-se de métodos de investigação que se associam a movimentos analíticos por meio dos quais o investigador procura, para além da articulação entre teoria e informações a respeito de um determinado fenômeno, valorizar critérios interpretativos de análise (Bryman (2012)). No caso do presente artigo, o fenômeno sobre o qual se dirige a investigação é a autenticidade em atividades de modelagem matemática.

Os procedimentos da pesquisa incluem duas partes. Primeiramente, nosso olhar para a autenticidade em atividades de modelagem matemática dirige-se à caracterização de atributos dessas atividades que agregam a elas aspectos autênticos. Para essa caracterização não se parte de um entendimento particular e *a priori* do que é autenticidade, mas é considerada uma revisão⁴ sobre compreensões de autenticidade em atividades de modelagem bem como em argumentações que, embora não incluam o termo *autenticidade*, referem-se a aspectos considerados pelos seus autores como essenciais a uma atividade de modelagem matemática. Cada atributo é construído considerando especificidades de atividades de modelagem que, quando conjuntamente incorporadas à atividade de modelagem na sala de aula, caracterizam um *design* para atividades de modelagem relativamente à autenticidade.

Na sequência, é realizada uma pesquisa empírica para investigar a autenticidade em atividades de modelagem matemática mediante os atributos construídos. Com essa finalidade, atividades de modelagem são desenvolvidas com nove estudantes do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática e que formaram três grupos. A professora da disciplina é uma das autoras do presente artigo. Os dados⁵ foram coletados no decorrer do desenvolvimento das atividades por meio de gravações em áudio e vídeo. Além disso, relatórios das atividades entregues pelos estudantes também fornecem

⁴ Usamos as revisões sistemáticas de Martins, Omodei e Almeida (2017) e de Martins e Almeida, (2021).

⁵ Os nove alunos assinaram um termo de consentimento, autorizando o uso dos dados da gravação e do relatório.

dados que são usados na análise. Considerando a extensão possível para o texto, incluímos no artigo uma dessas atividades⁶. O processo analítico dos dados da pesquisa empírica segue encaminhamentos de uma pesquisa qualitativa e interpretativa (Garnica, 2004) visando identificar de que modo a atividade atende aos atributos para conferir autenticidade às atividades de modelagem matemática.

A seguir detalhamos a construção dos seis atributos bem como a sua identificação em uma atividade de modelagem desenvolvida.

A estruturação de um *design* para a autenticidade em atividades de modelagem

Para deliberar sobre a autenticidade em atividades de modelagem matemática e estruturar um *design* indicativo de como atividades desse tipo podem ser realizadas na sala de aula de modo a serem autênticas, levamos em consideração o que a literatura vem apresentando sobre modelagem matemática e sobre autenticidade nessas atividades. Particularmente, consideramos aspectos que, do ponto de vista de que a autenticidade requer que se mantenha, em alguma medida, a originalidade da situação a ser investigada, são relevantes (Vos, 2011, 2015, 2018; Galbraith, 2007, 2013, 2015; Palm, 2007, 2009).

Neste sentido, um primeiro aspecto diz respeito às indicações de Vos (2018) de que atividades de modelagem matemática devem superar a falta de autenticidade identificada nos reconhecidos *word-problems*. Ou seja, atividades de modelagem na sala de aula devem ter uma caracterização que as diferencia desse tipo de problemas.

Outro aspecto leva em consideração ponderações de Almeida (2018), de Bassanezzi (2002) e de Meyer (2020), entre outros, de que na introdução de atividades de modelagem nas aulas: a) a matemática a ser usada pode não ser previamente escolhida ou definida, em vez disso, ela pode emergir do problema e de suas especificidades; b) diferentes percepções de uma

⁶ A atividade foi escolhida considerando a qualidade e a quantidade das informações obtidas pela gravação das aulas bem como no relatório entregue pelos alunos.

situação da realidade e diferentes critérios para o que constitui uma solução aceitável podem surgir em quase todas as situações.

Também levamos em consideração que simplificações são requeridas para a situação a ser investigada, de modo que, o que se estuda na sala de aula passa a ser uma situação idealizada (Cifuentes e Negrelli, 2012; Almeida e Vertuan, 2014; Bassanezi, 2002; Stillman, Brown e Geiger, 2015).

Finalmente, atividades de modelagem matemática na sala de aula são centradas no aluno de modo que o papel do professor passa a ser de orientador, de colaborador bem como aquele que valida os procedimentos dos alunos e sistematiza conteúdos (Almeida, Silva e Vertuan, 2016; Barbosa, 2001; Blum, 2015; Borromeo Ferri, 2018).

A articulação desses aspectos nos levou a estruturar seis atributos que quando observados em atividades de modelagem podem conferir autenticidade a essas atividades. Apresentamos a seguir a construção de cada um dos seis atributos.

1) A modelagem matemática surgiu no campo da Matemática Aplicada com o objetivo de dar explicações matemáticas (muitas vezes tidas como exatas) para situações da realidade. Neste campo, a modelagem matemática “é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la” (Bassanezi, 2002, p. 17). Não há, entretanto, nem prescrição e nem limitação relativamente ao conteúdo matemático que deve ser usado para fomentar este entendimento da realidade.

No âmbito da Educação Matemática, motivos educacionais e pedagógicos da sala de aula se aliam ao desenvolvimento das atividades de modelagem pelos estudantes. Embora a introdução de atividades de modelagem nas aulas possa se dar segundo diferentes perspectivas, como sugerem Kaiser e Sriraman (2006), “na Educação Matemática, essa mesma concepção de modelagem (sugerida por Bassanezzi (2002)), é mantida em sua essência, passando por

adaptações em função das necessidades pedagógicas de cada nível de ensino em que é abordada” (Cifuentes & Negrelli, 2012 p. 796).

Visando agrupar as diferentes perspectivas para o uso da modelagem matemática na sala de aula, Galbraith (2015) sugere que a inclusão da modelagem matemática pode ter dois enfoques: modelagem como conteúdo, no qual o objetivo da atividade está no desenvolvimento da capacidade para abordar problemas da realidade e avaliar a qualidade das soluções desenvolvidas; modelagem como veículo, no qual os problemas do mundo real são usados para motivar e colaborar para o desenvolvimento de conteúdo matemático específico, ou seja, os problemas são selecionados para atender necessidades da matemática curricular.

Estudos e pesquisas na área de Modelagem Matemática sinalizam que utilizar-se da modelagem matemática como veículo gera bons resultados de aprendizagem. Porém, podemos ponderar que neste enfoque perde-se em termos de qualificação da autenticidade, pois a atividade tem em si, além da resolução de um problema cotidiano, muitas vezes simplificado, o objetivo de ensinar um conteúdo matemático particular e não outro.

A partir dessas reflexões, definimos o atributo 1 para caracterizar a autenticidade em atividades de modelagem: *A matemática usada na atividade de modelagem matemática emerge das necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.*

2) Além de técnicas e conceitos matemáticos, a modelagem matemática envolve um pensar matematicamente, interpretar, fazer escolhas, tomar certas atitudes a partir da intuição (Cifuentes & Negrelli, 2012). Nesse sentido, segundo Almeida e Vertuan (2014) a caracterização da atividade reside muito mais nas iniciativas, ações e procedimentos realizados pelo professor e pelos estudantes do que em limitações de tempo e de espaço de realização da atividade.

Em sua estrutura que especifica como analisar a autenticidade de uma atividade, Palm (2009) traz o aspecto *estratégias de resolução*. Para esse autor deve haver correspondência

entre as estratégias acessíveis aos estudantes e o modo como as pessoas resolvem o problema na vida real fora da escola. Assim, para inferir autenticidade à atividade de modelagem matemática relativamente a este aspecto, definimos o atributo 2: *Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário.*

3) A introdução da modelagem matemática na sala de aula vem permeada por discussões que se centram na relação entre realidade e matemática. Neste sentido, “a modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos de que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade” (Bassanezi, 2002, p. 24). Para se referir às aproximações entre realidade e matemática, Stillman, Brown e Geiger (2015) afirmam que, em uma atividade de modelagem, a partir de suposições, da identificação de elementos tidos como essenciais e de simplificações, um problema ideal é formulado relativamente à situação real. Estes autores se referem a estes procedimentos como idealização da situação, de modo que o problema resolvido já não é exatamente aquele identificado na realidade, apesar de ter surgido da realidade.

Nesse sentido, Cifuentes e Negrelli (2012) discutem a modelagem matemática do ponto de vista epistemológico e também apresentam uma diferenciação entre a realidade inicial (realidade empírica) e a realidade em que o problema da atividade de modelagem matemática é tratado. Para esses autores, no momento intermediário entre a realidade inicial e o modelo construído ocorre a problematização em que se dá a elaboração de hipóteses e de aproximações simplificadoras, constituindo o que os autores caracterizam como pseudorealidade. Neste momento, o modelador situa

[...] o problema em um outro plano que já não é o da realidade da qual se tratou inicialmente. A problematização pressupõe uma seleção de elementos daquela realidade inicial, os dados, passíveis de serem captados pela percepção e intuição do

indivíduo, mas que, por tal motivo, supõe uma interpretação (Cifuentes & Negrelli, 2012, pp. 799-800).

É possível perceber que há um esforço na literatura em mostrar que as simplificações e hipóteses são intrínsecas às atividades de modelagem matemática, porém, quanto menos simplificada a situação-problema, mais próxima da realidade ela estará (Carreira, Baioa, & Almeida, 2020). Para Palm (2009), as informações usadas devem ser reais, com dados iguais ou muito próximos aos da situação real. Segundo Kaiser (2007), para garantir a autenticidade da atividade, devem ser realizadas poucas simplificações. Carreira e Baioa (2018) argumentam que devem ser usadas somente aquelas simplificações indispensáveis para a resolução do problema na sala de aula.

As argumentações relativas à importância de preservar as características da situação quando se faz modelagem matemática nos levam a definir o atributo 3 para conferir autenticidade à atividade de modelagem matemática: *As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.*

4) Almeida e Vertuan (2015, p. 24) deliberam que “a incorporação das atividades de modelagem deve levar em consideração as especificidades do contexto educacional dando atenção aos professores, aos estudantes e a própria estrutura escolar”. Essas especificidades, todavia, não podem se sobressair frente às necessidades da atividade. De fato, conforme sugere, Galbraith (2013; 2015), a autenticidade de uma atividade também está relacionada ao fato de que “os requisitos da situação da realidade em atividades de modelagem matemática devem possuir mais autoridade do que as crenças ou práticas de ensino tradicionais, caso essas comprometam o objetivo da atividade” (Galbraith, 2013, p. 35). Já Strobel, Wang, Weber e Dyehouse (2013, p. 151) sugerem que “é difícil acreditar que os interesses dos sistemas escolares desapareçam para dar espaço a uma versão purista à autenticidade”. Alinhado com esses entendimentos, está o atributo 4 que definimos para caracterizar a autenticidade: *No*

desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.

5) De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2016), a familiarização dos estudantes com o desenvolvimento de atividade de modelagem matemática pode acontecer, gradativamente, em três momentos. Em atividades do primeiro momento a situação-problema, sugerida pelo professor, contém as informações necessárias e os estudantes desenvolvem as etapas da modelagem, acompanhados pelo professor. De forma mais independente, em atividades do segundo momento, os estudantes complementam a coleta de informações sugerida pelo professor, definem as variáveis, formulam hipóteses, obtêm e validam o modelo. Já em atividades de terceiro momento, os próprios estudantes escolhem a situação-problema que desejam modelar e, de forma mais independente e autônoma, tomam as decisões nas diferentes fases do desenvolvimento da atividade de modelagem.

Com relação às diferentes possibilidades de organização curricular da modelagem, mas não abordando a familiarização dos estudantes com atividades de modelagem matemática, Barbosa (2001) caracteriza três casos. No caso 1, a situação-problema é definida pelo professor e os estudantes devem resolver o problema com os dados apresentados. No caso 2, os estudantes fazem a coleta das informações necessárias para a resolução do problema. Já no caso 3, os estudantes ficam responsáveis pela coleta de dados, simplificação, formulação e resolução do problema. Desse modo, a participação do professor em todos os casos é importante, porém, “no caso 1, por exemplo, a presença do professor, já que ele fica responsável pela formulação da situação-problema, é mais forte do que no caso 3, onde isso é compartilhado com os estudantes (Barbosa, 2001, p. 9).

Nesse sentido, consideramos que a atuação do estudante nas atividades de modelagem matemática pode ser mais dependente ou menos dependente do professor, de acordo com a familiaridade que o estudante tem com esse tipo de atividade e com a configuração da atividade.

Segundo Borromeo Ferri (2018, p. 87), “o professor precisa reconhecer e observar se um estudante está progredindo enquanto soluciona um problema da vida real e precisa decidir se a intervenção é necessária ou não”. A autora defende que os estudantes devem obter a resolução por conta própria, na medida do possível, sendo apoiados apenas quando necessário.

A partir dessas ponderações, definimos o atributo 5 para conferir autenticidade a atividades de modelagem matemática: *Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda.*

6) Para além de características das ações relativas ao desenvolvimento de atividades de modelagem, a autenticidade também está associada aos resultados obtidos nessas atividades. Neste sentido, Strobel, et al. (2013, p. 151) referem-se à autenticidade de impacto ao definir problemas autênticos como aqueles cujo principal objetivo e fonte de existência é “uma necessidade, uma prática, uma tarefa, uma busca e um anseio que vão para além dos objetivos escolares e educacionais”. Com a finalidade de conferir autenticidade a uma atividade de modelagem matemática relativamente ao alcance dos resultados definimos o atributo 6: *Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula.*

Esses seis atributos podem indicar um *design* para a autenticidade em atividades de modelagem matemática. Os indícios da identificação desses atributos podem conferir às atividades maior ou menor nível de autenticidade. Para capturar a intensidade dos indícios de cada atributo, definimos três níveis assim caracterizados: valor 0 quando a atividade não atende ao atributo; valor 1 quando atende parcialmente ao atributo; valor 2 quando a atividade atende integralmente ao atributo de autenticidade. Isso nos permite inferir que à atividade de modelagem matemática podemos atribuir um nível de autenticidade em consonância com suas características em relação a esses atributos. Para mensurar a autenticidade das atividades usamos uma escala em que atribuímos valor à identificação de aspectos autênticos. Em cada

atividade de modelagem, a pontuação mínima é 0 (quando não atende a atributo algum) e a pontuação máxima é 12 (quando atende a todos os atributos integralmente). Assim, consideramos níveis crescentes de autenticidade: o nível 1 inclui a pontuação de 0 a 3; o nível 2 a pontuação entre 4 e 8; o nível 3 inclui a pontuação entre 9 e 12.

A pesquisa empírica

A atividade de modelagem desenvolvida pelos estudantes e incluída no presente artigo tem como temática *Conectando a Cidade: Wi-Fi Livre no Centro da Cidade*. Os nomes (fictícios) dos estudantes do grupo que desenvolveu essa atividade são Eduardo, Maria e Roberto.

O tema da atividade surgiu a partir da leitura de uma reportagem publicada no *site* da prefeitura municipal da cidade indicando a intenção de reformar algumas praças e instalar sistemas de *wi-fi* gratuito. Os estudantes procuraram por informações: pesquisaram como deveria funcionar um sistema de *internet wi-fi*, fizeram a cotação dos custos de equipamentos necessários (o custo de um *modem* é R\$345,00, de um repetidor é R\$347,00 e o valor mensal da *internet* de uma determinada empresa no plano fibra óptica 150Mb é de R\$199,90) e utilizaram um mapa do centro comercial da cidade, conforme indica a Figura 1.



Figura 1.
Informações utilizadas pelos estudantes (Arquivos da pesquisa)

Com base nestas informações os estudantes consideraram que: o alcance de um *modem* é uma área circular com raio de 100 metros; o repetidor tem alcance em uma região que pode ser descrita como um setor circular de raio 50 metros; a um *modem* podem ser ligados até quatro repetidores de acordo com o alcance máximo de cada dispositivo. A hipótese definida para a abordagem é de que a quantidade de equipamentos e sua disposição na cidade não são fixas, mas devem prover um bom sinal de *internet* na região a ser atendida.

Considerando que roteadores e repetidores serão instalados apenas nas ruas da região central, a intenção é construir no mapa uma possível distribuição dos equipamentos para otimizar o alcance do sinal. Desse modo, o problema formulado pelos estudantes é: como distribuir a instalação dos equipamentos no centro da cidade para que alcancem área de interesse da prefeitura? Qual será o custo por metro quadrado desse sistema de *internet*?

A matematização da situação se iniciou com uma abordagem geométrica que inclui a construção de círculos e setores circulares sobre o mapa da região central da cidade para fazer uma possível distribuição dos equipamentos usando as informações: o alcance de um *modem* é

uma região circular (raio de 100m) e de cada repetidor um setor circular (raio de 50m); a cada *modem* podem se conectar quatro repetidores. Para a construção foi usada a escala indicada no mapa da cidade. Em seu relatório, os estudantes explicam essa matematização geométrica conforme indica a Figura 2 e simulam a distribuição dos equipamentos conforme sugere a Figura 3.

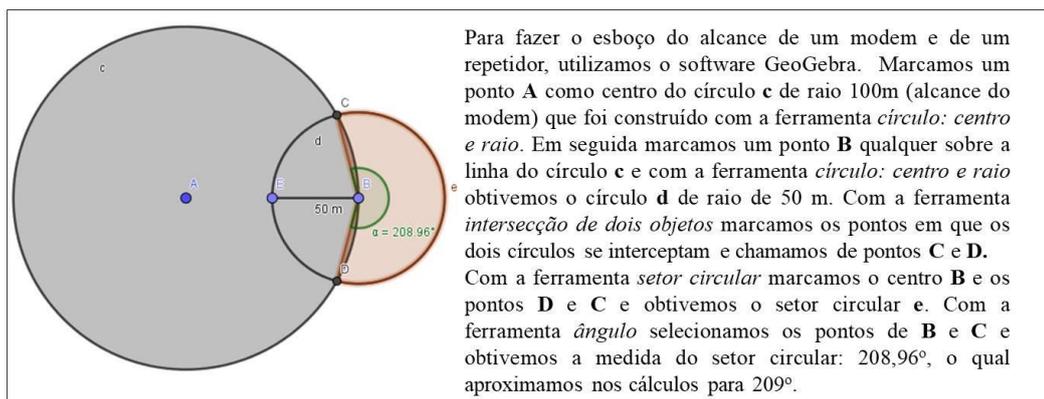


Figura 2.

Matematização realizada pelos estudantes (Arquivos da pesquisa)

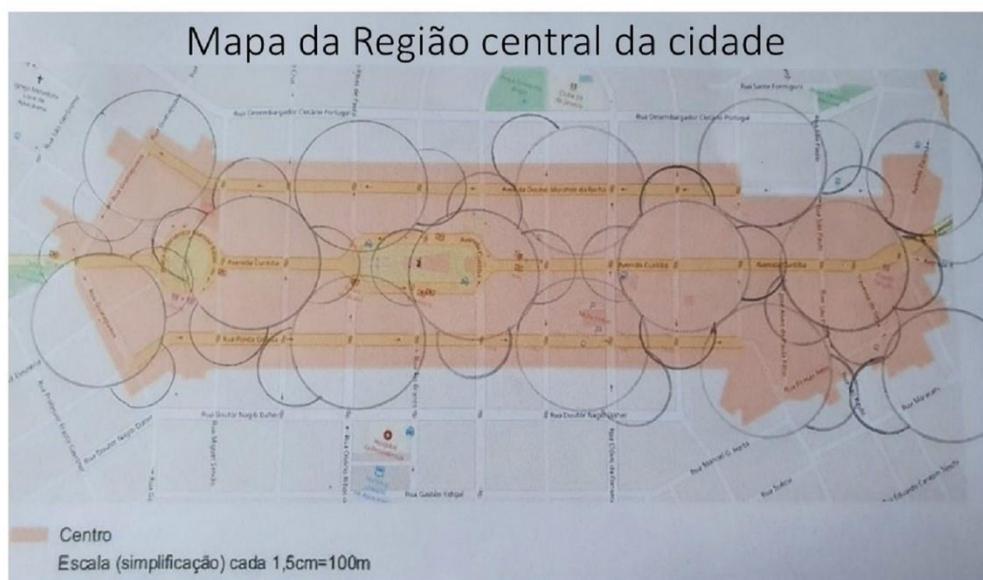


Figura 3.

Distribuição dos equipamentos (Arquivos da pesquisa)

Os círculos correspondem aos *modems* (14) e os setores circulares correspondem aos repetidores (28) nas representações dessa figura. Existem sobreposições de áreas de alcance de sinal de *internet* e áreas que não estão cobertas por sinal algum. Desse modo, uma simplificação

realizada pelos estudantes consiste em desconsiderar essas sobreposições, o que resulta em uma área de cobertura maior que a área real.

Na Figura 4 apresentamos os registros dos estudantes relativos aos cálculos realizados para determinar a área de alcance de um *modem wi-fi* bem como a área de alcance do repetidor na área total de abrangência do sistema de *internet* usando a escala definida no mapa (1,5cm = 100m). Estes cálculos decorrem da abordagem geométrica que viabilizou determinar a quantidade necessária de *modems* e repetidores para cobrir a região com sinal de internet.

<p>Área A_m de alcance circular de 1 <i>modem wi-fi</i> de raio de 100m</p> $A_m = \pi \cdot r^2$ $A_m = \pi \cdot (100)^2 \rightarrow A_m = 10000\pi$ $A_m \cong 31415,93 \text{ m}^2$		<p>Área total de alcance de 14 modems (A_{mt})</p> $A_{mt} = 31\,417,93 \times 14$ $A_{mt} \cong 439\,851,02 \text{ m}^2$							
<p>Área de alcance de 1 repetidor: área A_s de um setor circular de raio 50 m e ângulo 209°</p> <table border="0"> <thead> <tr> <th>Ângulo Central</th> <th>Área</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>360°</td> <td>$\pi \cdot 50^2$</td> </tr> <tr> <td>209°</td> <td>A_s</td> </tr> </tbody> </table> $\frac{360^\circ}{209^\circ} = \frac{\pi \cdot 2500}{A_s}$ $A_s \cong 4559,67 \text{ m}^2$		Ângulo Central	Área	360°	$\pi \cdot 50^2$	209°	A_s	<p>Área total de alcance de 28 repetidores (A_{st})</p> $A_{st} = 4\,559,67 \times 28$ $A_{st} \cong 127\,679,76 \text{ m}^2$	
Ângulo Central	Área								
360°	$\pi \cdot 50^2$								
209°	A_s								
		<p>Área total de alcance de internet <i>wi-fi</i></p> $A_{Total} = A_{mt} + A_{st}$ $A_{Total} = 439\,851,02 + 127\,679,76$ $A_{Total} \cong 567\,521,78 \text{ m}^2$							

Figura 4.

Cálculo da área de abrangência (Arquivos da pesquisa)

A partir dessas quantidades de equipamentos, as despesas para prover a área com internet *wi-fi* seriam de R\$17344,60, conforme indicam os registros dos estudantes na Tabela 1.

Tabela 1.
Custo do sistema de internet (Arquivos da pesquisa)

Produto	Valor unitário (em reais)	Quantidade	Valor Final (em reais)
<i>Modem</i>	345	14	4830
<i>Internet</i>	199,90	14	2798,60
Repetidor	347	28	9716
Custo total			17344,60

A apresentação desses resultados pelo grupo para os demais estudantes da disciplina gerou discussões relativas à necessidade de considerar no planejamento das despesas uma mensalidade de *internet* para cada *modem*. A estudante Maria argumentou considerando as informações e os estudos do grupo realizados na fase de inteiração, conforme sugere transcrição a seguir.

Maria: Cada *modem* fica responsável por transmitir os dados de apenas um plano de *internet*. Por isso, como são necessários 14 *modems*, são cobrados também 14 planos de *internet*.

Os interesses dos estudantes também se voltaram para a possibilidade de determinar o custo do sistema de *wi-fi* por metro quadrado daquela região e construir um modelo matemático que, com estes preços de equipamentos e planos de *internet*, viabiliza estimar gastos com instalação de *wi-fi* em outras regiões da cidade. Na Figura 5 constam os registros do relatório dos estudantes relativamente a estes procedimentos.

Calculando o Custo por metro quadrado:	Generalizando para outras regiões da cidade – modelo matemático
$Custo_{m^2} = \frac{Custo_{Total}}{A_{Total}}$	$Custo_{m^2} = \frac{x \cdot (Custo Modem + Plano Internet) + y \cdot Custo Repetidor}{x \cdot A_m + y \cdot A_s}$
$Custo_{m^2} = \frac{17344,60}{567521,78}$	$Custo_{R\$/m^2} = \frac{x \cdot (345,00 + 199,90) + y \cdot 347,00}{(31415,93)x + (4559,67)y}$
$Custo_{m^2} \text{ R\$}0,03/m^2$	x : quantidade de modems y : quantidade de repetidores A_m : área circular de alcance de um modem A_s : área do setor circular

Figura 5.
 Construção de um modelo matemático (Arquivos da pesquisa)

Análise da atividade: a identificação de um nível de autenticidade

Nesta atividade de modelagem a temática surgiu de interesses e curiosidades dos próprios estudantes, conforme sugere um trecho do relatório entregue por eles.

A prefeitura da cidade lançou em agosto de 2017 o programa “Praça Viva” com o objetivo de reestruturar e revitalizar algumas praças na cidade. Esse projeto previa a instalação de *Internet* sem fio gratuita. (...) Consideramos que, atualmente, a população possui a necessidade de estar conectada à *internet* usando smartphone ou computador portátil, seja para bate papo com amigos, seja para trabalho ou estudo (Relatório dos estudantes).

Na sua resolução, os estudantes usaram a informação de que “o alcance de um *modem* é uma área circular com raio de 100 metros e o repetidor tem uma área parecida com um setor circular de raio 50 metros” (Relatório dos estudantes). Essas informações lhes possibilitaram visualizar uma estratégia geométrica de resolução, fazendo o desenho de círculos e setores circulares sobre o mapa do centro da cidade, conforme indicam em seu relatório: “vamos fazer um desenho desses círculos na região do mapa” (Relatório dos estudantes referindo-se à representação da Figura 3).

Isto indica que não havia uma matemática pré-definida a ser usada, mas esta emergiu em consonância com o que os estudantes planejaram fazer para a matematização dessa situação. Com base nessa análise, podemos afirmar que o atributo 1 para conferir autenticidade (A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu exclusivamente das necessidades da abordagem matemática da situação) é atendido integralmente nessa atividade.

No que se refere ao atributo 2 (Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas ou empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário), os estudantes realizaram, inicialmente, uma matematização geométrica (Figura 3). A construção de círculos e setores circulares bem como a determinação do ângulo interno desses setores foi realizada com o uso do *software GeoGebra* (Figura 2). A cobertura da área de interesse com o sinal de *wi-fi* foi visualizada nesta representação geométrica e o cálculo das áreas dos círculos e setores circulares foi realizado de forma algébrica (Figura 4). Neste sentido, os estudantes experimentaram diferentes estratégias e ferramentas. Entretanto, uma análise parcial, visando comparar a somas das áreas dos círculos e setores com a área de interesse para a cobertura pelo sinal de *internet*, não foi realizada. Eles usaram apenas a visualização geométrica para aceitar essa cobertura, limitando o uso do modelo algébrico para a determinação do custo por metro

quadrado (Figura 5). Assim, inferimos que, relativamente ao atributo 2 a autenticidade é parcial, sendo mensurada com o valor 1.

Com relação à hipótese e às simplificações realizadas para resolver o problema, elas possibilitaram aos estudantes construir uma configuração para a distribuição dos *modens* e repetidores de modo a cobrir toda a região a ser atendida pelo serviço de *internet* (Figura 2 e Figura 3). Assim, se em Kaiser (2007) e em Wedelin e Adawi (2015) é apontado que problemas autênticos não podem ser demasiadamente simplificados, mas devem se tornar acessíveis para os fins educacionais, podemos inferir que as simplificações relativas às medidas dos ângulos não comprometeram a autenticidade da atividade. Entretanto, os estudantes não esclarecem como sobreposições de áreas atendidas pelos *modens* e repetidores seriam consideradas. Ou seja, não informaram como as sobreposições, indicadas na Figura 3, seriam consideradas e as ignoraram. Essa simplificação pode ter influência sobre o número necessário de equipamentos bem como sobre os gastos com as instalações determinados pelos estudantes. Assim, em sintonia com as assertivas de Palm (2009) e de Kaiser (2007), relativas às simplificações que podem ser aceitas, podemos inferir que a atividade atende parcialmente o atributo 3 (As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade).

Os estudantes tinham a intenção de, na disciplina de Modelagem Matemática, desenvolver atividades de modelagem que posteriormente, na disciplina de Estágio pudessem ser desenvolvidas também pelos estudantes do Ensino Médio. Assim, estruturar uma resolução que envolve cobrir a área de interesse com regiões circulares e calcular a área dessas regiões foi satisfatório para esses estudantes. De fato, na transcrição da gravação da aula é possível observar essa opção dos estudantes ao justificarem suas escolhas em conversa com a professora:

Professora: Então vocês irão usar os círculos que construíram (referindo-se à representação da Figura 3) e calcular essas áreas? Poderiam usar teoria de grafos para localizar os círculos, não é?

Eduardo: Ah, professora, a gente pensa em fazer essa atividade no estágio e aí tem que ser conteúdo que dá pra fazer com esses alunos, né.

Roberto: Mas a gente usou o *GeoGebra* também!

Assim, embora fizessem uso também do *software GeoGebra* para construir suas representações, os estudantes não investigaram a possibilidade de usar algum outro conteúdo, como exemplo teoria de grafos, para determinar uma solução. Assim, a matemática (re)aprendida por eles nesta atividade é aquela que teriam que ensinar nas aulas de estágio: cálculo de área de círculo e de setor circular. Portanto, podemos inferir que escolhas pedagógicas como planejar a atividade de modelagem matemática com vistas ao estágio, podem ter influenciado os procedimentos dos estudantes o que nos faz considerar que o atributo 4 para inferir autenticidade (No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade) foi parcialmente atendido.

Para o desenvolvimento da atividade coube aos estudantes escolher uma temática, coletar dados bem como definir e resolver o problema proposto. Eles tinham, portanto, autonomia para tomar as decisões que lhes parecessem adequadas e buscar na professora orientações ou validações para seus procedimentos, em consonância com o que sugere Barbosa (2001) ao caracterizar a participação do professor nas atividades de modelagem. Além disso, estes estudantes já tinham experiências anteriores com a modelagem, uma vez que as atividades na disciplina foram inseridas considerando os momentos de familiarização sugeridos por Almeida, Silva e Vertuan (2016). Assim, conforme aponta Borromeo Ferri (2018), os estudantes devem obter a resolução por conta própria, na medida do possível, sendo apoiados apenas quando necessário. Neste sentido, podemos inferir que houve equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevaleceu a segunda, o que

indica que o atributo 5 (Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda) foi integralmente atendido na atividade.

No que se refere ao atributo 6 (Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula), há indícios, nos procedimentos dos estudantes de que nessa atividade as discussões se estenderam para além da sala de aula. De fato, a escolha dessa temática se deu a partir de uma reportagem do *site* da prefeitura da cidade de modo que a situação tinha relação com a vida das pessoas fora da sala de aula. Por outro lado, a análise da resposta obtida levou os estudantes a sugerir que ações como a realizada nessa atividade poderiam ser usadas nos processos de licitação para a prestação de serviços em órgãos públicos. A transcrição da fala do aluno Roberto na apresentação da atividade ilustra esta ideia:

Roberto: Como o objetivo era encontrar a melhor distribuição dos equipamentos de *internet* para proporcionar a maior cobertura com o menor custo, esse trabalho poderia ser comparado ao realizado por empresas que participam de uma licitação, neste caso, para implantar a *internet wi-fi* no centro da cidade.

Não houve, entretanto, alguma interlocução com agentes externos à sala de aula, como por exemplo, algum setor da prefeitura ou alguma prestadora de serviço de *internet* na cidade, para a discussão dos resultados. Assim, podemos ponderar que este atributo foi parcialmente atendido na atividade.

Na Tabela 2 apresentamos uma síntese da análise de como nessa atividade de modelagem pode ser caracterizada a autenticidade usando os atributos construídos no presente artigo. Embora em alguns aspectos o desenvolvimento da atividade como conduzido pelos estudantes não atenda integralmente aos atributos definidos, à atividade se confere um nível intermediário de autenticidade.

Tabela 2.

Autenticidade na atividade de modelagem matemática (construído pelos autores)

Atributo de autenticidade	Valor	Descrição
---------------------------	-------	-----------

A matemática usada na atividade de modelagem emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação.	2	O conteúdo matemático não foi pré-definido para essa atividade. A resolução se deu a partir das informações obtidas e da matematização. Somente depois de conhecer o funcionamento de um sistema de <i>internet wi-fi</i> é que os estudantes pensaram em desenhar círculos sobre o mapa, de acordo com o alcance dos <i>modems</i> e repetidores de sinal.
Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário.	1	Pelos dados coletados, não é possível inferir que foram utilizadas diferentes estratégias para a resolução do problema. Apenas a construção de círculos (no <i>GeoGebra</i> e com lápis e papel) sobre o mapa para obter a cobertura da <i>internet wi-fi</i> . Os procedimentos algébricos referem-se ao cálculo de áreas das regiões definidas geometricamente.
As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.	1	Algumas simplificações e hipóteses foram necessárias: a quantidade necessária de equipamentos e como eles estão dispostos é variável; o alcance do sinal de <i>internet</i> se dá em uma região circular. A partir disso, construíram no mapa uma possível distribuição dos equipamentos. Os estudantes não descontaram as áreas sobrepostas por dois alcances de sinal, o que resultou em uma área de alcance maior do que a área real.
No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.	1	Os estudantes escolheram a situação de forma espontânea. Entretanto, nos encaminhamentos para a matematização da situação e resolução do problema procuraram vínculos com atividades futuras nas disciplinas de estágio curricular em que atividades de modelagem matemática que seriam desenvolvidas com estudantes do ensino médio.
Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda.	2	Os estudantes definiram o problema bem como os encaminhamentos que dariam a sua resolução. A professora atuou como colaboradora quando solicitada e como aquela que validou procedimentos e encaminhamentos dos estudantes.
Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula.	1	As discussões extramatemáticas promovidas nesta atividade são relevantes, seja na definição do problema, seja na análise da solução. Entretanto, não houve interlocução dos estudantes com a comunidade, seja da prefeitura, seja de empresa prestadora de serviço de <i>internet</i> , para confirmar ou validar a resposta obtida.
8	Nível 2 de autenticidade	

O nível intermediário de autenticidade identificado para esta atividade decorre das circunstâncias em que esta temática foi investigada na sala de aula, podendo este nível se alterar em função de outras influências pedagógicas ou de outras interações com o contexto social.

Considerando as ponderações de Niss (1992) de que a autenticidade é relativa, os atributos definidos e a análise de sua ocorrência na atividade de modelagem vêm ratificar que a autenticidade tem relação com os sujeitos, no nosso caso com os estudantes do grupo. De

fato, as circunstâncias, os estudantes e as condições sob as quais desenvolveram a atividade é que nos permitem mensurar a autenticidade considerando esse grupo de estudantes bem como o caráter letivo da modelagem matemática nesta atividade.

As simplificações e abstrações realizadas, ao mesmo tempo em que poderiam caracterizar o que Cifuentes e Negreli (2012) denominam de pseudorealidade, permitiu aos estudantes determinar uma possível distribuição de *modems* e repetidores numa região da cidade para prover à população um bom sinal de *internet*. Entretanto, o grupo não fez uma validação de seus resultados perante uma comunidade fora do contexto escolar, o que poderia, ao fomentar a autenticidade da atividade, promover em maior escala o conhecimento dos estudantes sobre esta situação.

Por outro lado, aspectos da autenticidade nessa atividade de modelagem remetem ao que Carreira e Baioa (2018) e Vos (2018), por exemplo, sugerem de que a autenticidade se vincula com a atividade profissional dos estudantes ou com outras disciplinas de um currículo. Neste caso, os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática não desenvolveram a atividade independentemente de suas práticas na sala de aula na disciplina de Estágio Curricular.

Neste sentido, o que a pesquisa empírica revela é que nem sempre ao se fazer modelagem matemática é possível ensinar ou aprender um conteúdo matemático novo, mas a atividade pode ampliar a rede de usos do que o estudante já sabe. Esse aspecto está em consonância com o que sugerem Strobel, et al. (2013) de que em atividades autênticas na sala de aula o principal objetivo não é ensinar ou fornecer uma situação de aprendizado, mas fazer emergir uma necessidade, uma prática, uma busca e um anseio que vão para além dos objetivos escolares e educacionais. Como esses autores ponderam, é difícil acreditar que as condições da sala de aula desapareçam para dar espaço a uma versão purista de autenticidade à situação estudada por meio da modelagem matemática.

Entretanto, a oportunidade de introduzir na sala de aula situações da realidade e discutir os resultados é fundamental para o desafio de fazer a matemática da necessidade, como pontua Meyer (2020).

Considerações finais

A pesquisa referida no presente artigo foi motivada por argumentações relativas à importância de introduzir atividades autênticas nas aulas de matemática. Considerando, particularmente, atividades de modelagem matemática, nos propomos a investigar a questão: Como caracterizar a autenticidade em atividades de modelagem matemática?

Assim, primeiramente, fundamentados em um quadro teórico, construímos seis atributos que podem ser usados para caracterizar a autenticidade em atividades de modelagem matemática. Na pesquisa de Galbraith (2013) o autor caracterizou quatro dimensões em que se pode olhar para a autenticidade, na presente pesquisa construímos atributos que, abrangendo estas dimensões, podem indicar evidências de autenticidade em atividades de modelagem.

As diferentes considerações de alguns pesquisadores da área, como por exemplo, Vos (2011; 2018), Galbraith (2011; 2013; 2018), Palm (2009), Strobel, et al. (2013), relativamente a características de atividades de modelagem, bem como as ponderações de Borromeo Ferri (2018) relativamente à autonomia dos estudantes e a assertiva de Carreira e Baioa (2018, p. 203) de que “[...] há sempre uma dose de ficção no que é desenvolvido em sala de aula, mesmo que seja baseado em eventos reais”, nos levaram a caracterizar para cada atributo três níveis de intensidade valorados por zero, um ou dois, considerando evidências ou indícios de sua ocorrência nos procedimentos dos estudantes.

A estruturação desses atributos e seus respectivos níveis constitui um possível *design* para a autenticidade em atividades de modelagem matemática. Ou seja, a identificação dos atributos definidos e seus níveis em atividades de modelagem desenvolvidas na sala de aula, confere a essas atividades um nível de autenticidade. Neste sentido, o *design* pode dar suporte

para professores e pesquisadores no planejamento de aulas com atividades de modelagem matemática autênticas.

A pesquisa empírica em que atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas, ilustrada neste artigo por meio de uma atividade, possibilitou obter indicativos do nível de autenticidade das atividades desenvolvidas pelos estudantes. No processo analítico em relação à autenticidade na atividade de modelagem não ignoramos que é preciso considerar que à modelagem matemática na sala de aula sempre se associa um caráter letivo, que não é independente da prática pedagógica, para além de um caráter social, em que, por um lado, se tem interesse em estudar a situação da realidade com as suas especificidades e, por outro, estar atento à repercussão que os resultados obtidos na modelagem exercem sobre a situação.

Como sugerem Pollak e Garfunkel (2013), é preciso evitar que a modelagem matemática se torne uma roupagem mais sofisticada dos *word-problems*. Assim, investir no desenvolvimento de atividades de modelagem que atendam a atributos de autenticidade, como os definidos neste artigo, pode ser uma possibilidade de incluir problemas autênticos e resolvê-los de forma criativa e pertinente em cada nível de escolaridade.

Na expectativa de, por meio do *design* estruturado para a autenticidade em atividades de modelagem matemática na sala de aula apontar para a importância da observação dos atributos definidos, nos alinhamos com a argumentação de Vos (2011) de que a estruturação de atividades para a sala de aula pode ser pautada em uma realidade extraescolar ao mesmo tempo em que atende a anseios de uma realidade escolar.

Pesquisas futuras podem analisar a autenticidade de atividades de modelagem matemática desenvolvidas por estudantes de cursos em que a modelagem matemática tem uma finalidade mais pragmática, como em um curso de Engenharia, por exemplo, visando caracterizar como neste contexto problemas autênticos são viabilizados por atividades de

modelagem matemática e como sua autenticidade pode ser inferida usando os atributos aqui definidos.

Referências

- Abbagnano, N. (2007). *Dicionário de Filosofia*. 5ª. Edição Revisada e Ampliada. Martins Fontes.
- Almeida, L. M. W. (2018). Considerations on the use of mathematics in modeling activities. *ZDM*, 50(1), 19-30.
- Almeida, L. M. W., Silva, K. A. P. & Vertuan, R. E. (2016) *Modelagem Matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto.
- Almeida, L. M. W. & Silva, K. A. P. (2015). Práticas de Professores com Modelagem Matemática: Algumas Configurações. *Educação Matemática em Revista*, 46, 06-15.
- Almeida, L. M. W. & Vertuan, R. E. (2014) Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: L. M. W. Almeida & K. A. P. Silva (Eds). *Modelagem Matemática em Foco* (p. 1-21). Editora Ciência Moderna Ltda.
- Barbosa, J. C. (2001). Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. *BOLEMA*, 14(15), 5-23.
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Editora Contexto.
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. In: *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 73-96). Springer, Cham.
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer International Publishing.
- Borromeo Ferri, R & Blum, W. (2010). Mathematical modeling in teacher education—experiences from a modelling seminar. In *Proceedings of the VI Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 2046-2055).
- Brito, D. D. S., & Almeida, L. M. W. D. (2021). Práticas de modelagem matemática e dimensões da aprendizagem da geometria. *Actualidades Investigativas en Educación*, 21(1), 169-198.
- Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4th ed). Oxford University Press.
- Carreira, S., & Baioa, A. M. (2018). Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: On the student's sense of credibility. *ZDM*, 50(1), 201-215.
- Carreira, S., Baioa, A. M., & de Almeida, L. M. W. (2020). Mathematical models and meanings by school and university students in a modelling task. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (17), 67-83.
- Cifuentes, J. C., & Negrelli, L. G. (2012). Uma Interpretação Epistemológica do Processo de Modelagem Matemática: implicações para a matemática. *BOLEMA*. 26(43), 791-815.
- D'Ambrosio, U. (1994). On environmental mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 94(6), 171-174.

- Galbraith, P. (2007). Authenticity and goals—overview. In: Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (Eds.). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (Vol. 10). Springer Science & Business Media. (pp. 181-184)
- Galbraith, P. (2013). From conference to community: An ICTMA journey—The Ken Houston inaugural lecture. In: *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice*. G. Kaiser; G. A. Stillmann; W. Blum; J. P. Brown eds).(pp. 27-45). Springer Netherlands.
- Galbraith, P. (2015). Modelling, education, and the epistemic fallacy. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 339–350). Springer.
- Garnica, A. V. M. (2004). História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Autêntica.
- Gueudet, G., Bosch, M., Kwon, O. N., & Verschaffel, L. (2017). Transitions in mathematics education: The panel debate. In: *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 101-117). Springer.
- Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S. Khan (Eds) *Mathematical modelling: Education, engineering and economics (ICTMA 12)*, pp.110-119.
- Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 51-76.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302-310.
- Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(2), 285-311.
- Martins, B. O. M., Omodei, L. B. C & Almeida, L. M. W. (2017) A autenticidade em atividades de modelagem matemática. *Anais da X CNMEM – Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática – Modelagem matemática na Educação Matemática brasileira: história, atualidades e projeções* (p. 1-15). Universidade Estadual de Maringá.
- Martins, B. O.; Almeida, L. M. W. (2021) Modelagem matemática: dos entendimentos às finalidades. *Vidya*, 41 (1), 113-128.
- Meyer, J. F. A (2020) Modelagem Matemática: O desafio de se ‘fazer’ a Matemática da necessidade. *Com a Palavra o Professor*, 5(11), 140-149. <https://doi.org/10.23864/cpp.v5i11.559>
- Michaelis, M. (2015). *Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa*. Melhoramentos.
- Niss, M. (1992). O papel das aplicações e da modelação na Matemática escolar. *Educação e matemática*, (23), 1-2.
- Palm, T. (2007). Features and impact of the authenticity of applied mathematical school tasks. In: W. Blum et al. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education*. (pp. 201-208). Springer.
- Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. In: L. Verschaffel et al. *Words and Worlds*. (pp. 1-19). Brill Sense.

- Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics?. *Educational studies in mathematics*, 2 (2/3) 393-404.
- Pollak, H., & Garfunkel, S. (2013). A view of mathematical modeling in mathematics education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 1 (6-12) <https://doi.org/10.7916/jmetc.v0i0.658>
- Spooner, K. (2017). Authentic mathematical modelling experiences of Upper Secondary School: A case study. In: G. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (eds) *Mathematical Modelling and Applications: Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Springer (pp. 627-637).
- Strobel, J., Wang, J., Weber, N. R., & Dyehouse, M. (2013). The role of authenticity in design-based learning environments: The case of engineering education. *Computers & Education*, 64, 143-152.
- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM*, 52(1), 1-16.
- Vos, P. (2011). What is ‘authentic’ in the teaching and learning of mathematical modelling? ? In: G. Kaiser; W. Blum; R. Borromeo Ferri & G. Stillman. (Eds). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA 14*, Springer, 713-722.
- Vos, P. (2015). Authenticity in extra-curricular mathematics activities: Researching authenticity as a social construct. In G. A. Stillman; W. Blum & M. S. Biembengut. (Eds) *Mathematical Modelling in Education Research and Practice - Cultural, Social and Cognitive Influences*. Springer, pp. 105-113.
- Vos, P. (2018). “How Real People Really Need Mathematics in the Real World”—Authenticity in Mathematics Education. *Education Sciences*, 8(4), 195.
- Vosgerau, D. S. A. R. & Romanowski, J. P. (2014) Estudos de revisão: implicações conceituais e metodológicas. *Revista de Diálogo Educacional*, (14)41, 165-189.
- Wedelin, D., & Adawi, T. (2015). Applied mathematical problem solving: Principles for designing small realistic problems. In: G. A. Stillman; W. Blum & M. S. Biembengut. (Eds) *Mathematical Modelling in Education Research and Practice - Cultural, Social and Cognitive Influences*. Springer (pp. 417-427).