ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i3p100-119

# Orquestração Instrumental de uma situação Matemática de aplicações das Integrais Duplas

# Instrumental Orchestration of a Mathematical situation of applications of Double Integrals

# Orquestación instrumental de una situación matemática de aplicaciones de integrales dobles

Francisco Eteval da Silva Feitosa [1]
Universidade Federal do Amazonas
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0913-3427
Roberta dos Santos Rodrigues [2]
Universidade Federal do Amazonas
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9903-7644

## Resumo

Este artigo tem por objetivo descrever e analisar uma orquestração instrumental que visou aplicar a integral dupla na determinação do centro de massa de uma lâmina de densidade variável e da carga elétrica em uma região dada. O estudo, de natureza qualitativa, envolveu alunos de licenciatura em matemática e de engenharia de uma universidade pública do Amazonas, e os dados foram coletados por observação das atividades em sala de aula e registrados por meio de gravação em vídeo e de um questionário em formulário eletrônico. O quadro teórico é composto da Teoria da Orquestração Instrumental de Luc Trouche e da Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau. Os resultados mostram, dentre outras coisas, que as etapas de ação, formulação, validação e institucionalização quando usadas no modo de execução da orquestração instrumental são importantes elementos das situações didáticas e que através delas, os processos de ensino e aprendizagem contribuem para a construção do conhecimento.

***Palavras-chave:*** Orquestração instrumental, Cálculo de várias variáveis, Integral dupla.

[1] sfeitosa@ufam.edu.br
[2] roberta10rodrigues@gmail.com

## Abstract

This paper aims to describe and analyze an instrumental orchestration which aimed to apply the double integral in determining the center of mass of a variable density blade and the electrical charge in a given region. The study, qualitative in nature, involved undergraduate mathematics and engineering students of a public university in Amazonas, and the data were collected by observation of classroom activities and recorded through video recording and an electronic form questionnaire. The theoretical framework is composed of Luc Trouche's Theory of Instrumental Orchestration and Guy Brousseau's Theory of Didactic Situations. The results show, among other things, that the stages of action, formulation, validation, and institutionalization when used in the instrumental orchestration performance mode are important elements of didactic situations and that, through them, the teaching and learning processes contribute to the construction of knowledge.



***Keywords:*** Instrumental orchestration, Multivariable calculus, Double integral.



## Resumen

Este artículo tiene como objetivo describir y analizar una orquestación instrumental que pretendía aplicar la integral doble en la determinación del centro de masa de una hoja de densidad variable y la carga eléctrica en una región determinada. El estudio, de carácter cualitativo, involucró a estudiantes de pregrado de matemáticas e ingeniería de una universidad pública de Amazonas, y los datos fueron recogidos mediante la observación de las actividades en el aula y registrados a través de la grabación de vídeo y un cuestionario en formato electrónico. El marco teórico está compuesto por la Teoría de la Orquestación Instrumental de Luc Trouche y la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau. Los resultados muestran, entre otras cosas, que las etapas de acción, formulación, validación e institucionalización cuando se utilizan en el modo de ejecución de la orquestación instrumental son elementos importantes de las situaciones didácticas y que, a través de ellas, los procesos de enseñanza y aprendizaje contribuyen a la construcción del conocimiento.

***Palabras clave***: Orquestación instrumental, Cálculo de múltiples variables, Integral doble

**Résumé**

Cet article a pour but de décrire et d'analyser une orchestration instrumentale visant à appliquer la Double Intégrale dans la détermination du centre de masse d'une lame de densité variable et de la charge électrique dans une région donnée. L'étude, de nature qualitative, a impliqué des étudiants de premier cycle en mathématiques et en ingénierie d'une université publique d'Amazonas, et les données ont été collectées par l'observation des activités en classe et par un enregistrement vidéo et un questionnaire sous forme électronique. Le cadre théorique est composé de la théorie de l'orchestration instrumentale et de la théorie des situations didactiques. Les résultats montrent, entre autres, que les étapes d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation lorsqu'elles sont utilisées dans le mode d'exécution de l'orchestration instrumentale sont des éléments importants des situations didactiques et qu'à travers elles, les processus d'enseignement et d'apprentissage contribuent à la construction des connaissances.

**Mots clés** : Orchestration instrumentale, Calcul de plusieurs variables, Intégrale double

## Orquestração Instrumental de uma situação Matemática de aplicações das Integrais Duplas

A partir de um levantamento bibliográfico, Vieira e Neto (2011) observaram que há uma aparente escassez, no Brasil, de trabalhos relativos ao ensino de Cálculo de Várias Variáveis - CVV e buscam em seu trabalho apresentar uma contribuição sobre os processos envolvidos no que eles denominaram de transição interna do Cálculo de uma variável – CUV para o CVV.

A transição do CUV para o CVV, envolve mudanças nem sempre naturais. Alguns elementos (conceito, teorema, etc.) presentes no CUV em determinadas circunstâncias preservam sua relação e/ou sentido no CVV. A esses elementos, Vieira e Neto (2011) chamam de elementos de transição. Entretanto, existem elementos presentes apenas no CUV ou somente no CVV, chamados de elementos de ruptura (Vieira & Neto, 2011) e, segundo Vieira e Neto (2011) dificultam a transição do estudante no contato com ambos os conteúdos.

Já é possível identificarmos no Brasil, mesmo que timidamente, estudos (Alves, 2012; 2012; 2013) que buscam compreender, investigar e descrever a transição interna do CUV para o CVV. Se faz necessário, nesses estudos, integrar teoria e prática no campo da educação matemática para que haja efeitos desta área na evolução da aprendizagem da matemática, especificamente, no ensino e aprendizagem de Cálculo (Igliori & Almeida 2017; Robert & Speer, 2001).

Desse modo, este estudo visa a descrever e analisar uma orquestração instrumental com foco em aplicações da Integral Dupla. Apoiamo-nos nos quadros teóricos da Teoria da Orquestração instrumental de Luc Trouche e da Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau. Inicialmente apresentamos os pressupostos básicos dessas duas teorias. Em seguida apresentamos os elementos que compõem a configuração didática da orquestração instrumental que foi desenvolvida seguida dos resultados e discussões.

## As Orquestrações Instrumentais

Para Bellemain e Trouche (2016) a abordagem instrumental da didática (Rabardel, 1995; Guin e Trouche, 2002) é um modelo simplificado e destacam três principais fragilidades: pouco desenvolvimento de análises relativas ao sistema de instrumentos que todo aluno desenvolve ao longo de sua atividade de estudo da matemática; os processos de instrumentalização são capturados, na maior parte do tempo, superficialmente; pouco reconhecimento do papel do professor e da sua responsabilidade no apoio às gêneses instrumentais dos estudantes. Isso levou ao desenvolvimento de outro conceito, o de orquestração instrumental.

Buscando criar meios para o professor integrar artefatos para executar situações matemáticas na sala de aula, Bellemain e Trouche (2016) comparam a sala de aula a uma orquestra e propõem uma reflexão sobre o papel do professor, não como um participante dessa orquestra, mas como seu maestro, responsável por um conjunto de tarefas:

> Analisar o currículo para definir os objetivos didáticos e as situações matemáticas que serão executadas para alcançar tais objetivos; analisar o potencial dessas situações matemáticas para tirar melhor proveito dos artefatos; analisar o potencial, as limitações e os *affordances* dos artefatos para tirar melhor proveito das situações matemáticas; analisar o nível de desenvolvimento dos instrumentos dos estudantes. (Bellemain & Trouche, 2016, p.111).

Além disso, o professor deve pensar na gestão didática dos artefatos presentes na sala de aula e se questionar sobre como mobilizá-los, como combinar as fases do trabalho individual e coletivo, como antecipar, facilitar e gerar as conjecturas emergentes na sala de aula. A esse amplo conjunto de atribuições Trouche (2005) chama de orquestrações instrumentais, assim definido:

> Uma orquestração instrumental é o arranjo sistemático e intencional dos elementos (artefatos e seres humanos) de um ambiente, realizado por um agente (professor) no intuito de efetivar uma situação dada e, em geral, guiar os aprendizes nas gêneses instrumentais e na evolução e equilíbrio dos seus sistemas de instrumentos. É sistemático porque como método, desenvolve-se numa ordem definida e com um foco determinado, podendo ser entendido com um arranjo integrado a um sistema; é

> intencional porque uma orquestração não descreve um arranjo existente (sempre existe um), mas aponta para a necessidade de um pensamento a priori desse arranjo. (Trouche, 2005, p.126)

As investigações fundamentadas nesta teoria buscam compreender como as escolhas e arranjos, realizados pelo professor de matemática, em um ambiente rico em tecnologia, os ajudam a conduzir os estudantes ao conhecimento matemático. As etapas da orquestração (Drijvers et al., 2010) são: a configuração didática, o modo de exploração e o desempenho didático.

De uma forma geral, a configuração didática consiste na organização da sala de aula, na gestão do tempo, na escolha dos recursos e das tecnologias e nas situações matemáticas envolvidas. Essas configurações do ambiente e dos artefatos escolhidos devem ser bem planejadas antes de sua execução durante a aula, considerando a dificuldade para modificá-las (Drijvers et al. 2010).

O desempenho didático é uma etapa introduzida por Drijves et al. (2010), que trata das decisões que o educador terá que tomar diante de situações inesperadas, sejam elas referentes às tecnologias ou às situações matemáticas. Além disso, nessa etapa, busca-se verificar a viabilidade e o sucesso das escolhas do professor ou do aluno nesse processo.

O modo de exploração diz respeito à participação de cada sujeito nesse processo, seja ele professor ou estudante. Esta é uma etapa que segundo Trouche (2005) consiste nas estratégias de gestão aplicadas, sejam quanto à situação problema ou quanto à gestão dos artefatos. Para uma configuração proposta, existem vários modos possíveis de execução desta.

Quando o professor pensa uma orquestração instrumental, fundamentalmente, ele busca criar condições suficientes para que o aluno se aproprie de conteúdos matemáticos específicos. Dessa forma, uma orquestração instrumental é um meio, no qual o professor, aluno e conhecimento matemático (e recursos) interagem e isso nos conecta à outra teoria na qual nos apoiamos neste estudo, a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau.

## Teoria das Situações Didáticas

A teoria das situações didáticas (TSD) foi desenvolvida na França por Guy Brousseau (1986) e trata de maneiras de apresentação, a estudantes, do conteúdo matemático, estando ancorada na busca das condições necessárias à efetivação da aprendizagem. A TSD representa uma referência para o processo de aprendizagem matemática em sala de aula abrangendo professor, aluno e conhecimento matemático. O papel do professor nesse contexto é criar condições suficientes para que o aluno se aproprie do conteúdo matemático, e isso acontece no que Brousseau (1996) denominou de milieu, ou meio, que deve ser modelado, de modo a ser autônomo e antagônico ao sujeito.

> Diz-se autônomo porque o aluno deve se conduzir a partir das situações propostas pelo professor. Diz-se antagônico porque deve haver certo equilíbrio entre o que se propõe e a capacidade de o aluno se conduzir em meio à atividade, ou seja, a atividade proposta deve ser dosada: não deve ser difícil a ponto de o aluno não conseguir avançar; não deve ser fácil a ponto de o aluno não se sentir motivado. (Silva et al., 2015, p. 19953).

Brousseau (1996) conceitua situação como sendo um modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina certo conhecimento. Esse pesquisador caracteriza no seio da TSD duas situações principais: situação didática e situação adidática.

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo momento, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes. (Brousseau, 1986, p. 8)

> Uma situação adidática caracteriza-se essencialmente pelo fato de representar determinados momentos do processo de aprendizagem nos quais o aluno trabalha de maneira independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto do professor relativamente ao conteúdo matemático em jogo. (Freitas, 2012, p.84)

Podemos dizer que uma situação adidática é definida por uma situação-problema pensada, organizada e escolhida pelo professor, visando a provocar no aluno as adaptações desejadas para a aquisição do saber, até que este possa ser aplicado fora do contexto educativo, e ausente de qualquer indicação intencional (Brousseau, 2008). A maneira como essa situação-problema é colocada ao aluno é chamada de devolução, na qual o professor dá ao aluno uma parte da responsabilidade pela aprendizagem e visa a "provocar uma interação suficientemente rica e que permita ao aluno desenvolvimento autônomo" (Almouloud, 2007, pp. 35).

Para descrever as relações do aluno com os diversos níveis de funcionalidade que o saber possui, Brousseau desenvolveu uma classificação das diferentes fases das situações didáticas analisando as principais atividades específicas da aprendizagem matemática. Entretanto, Freitas (2012, p.95) atenta para o fato que "é necessário observar que essas categorias de situações se entrelaçam fortemente umas às outras". Essas fases são: situação de ação, situação de formulação, situação de validação e situação de institucionalização.

> Situação de ação: o aluno reflete e simula tentativas, ao eleger um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação, por intermédio da interação com o milieu, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema;
> Situação de formulação: ocorre troca de informação entre o aluno e o milieu, com a utilização de uma linguagem mais adequada, sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal, podendo ocorrer ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas; os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente, adequando-a às informações que devem comunicar;
> Situação de validação: os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações); as situações de devolução, ação, formulação e validação caracterizam a situação adidática, em que o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador.
> Situação de institucionalização: momento em que a institucionalização do saber é destinada a estabelecer convenções sociais e a intenção do professor é revelada. O professor, aí, retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização. É na institucionalização que o papel explícito do professor é manifestado: o objeto é claramente oferecido ao aluno. (Teixeira & Passos, 2013, p.164).

As três primeiras situações caracterizam uma situação adidática, em que o professor possibilita o aluno a explorar os caminhos da descoberta de seu próprio conhecimento, recusando-se "a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir" (Brousseau, 2008, pp. 35).

## Metodologia

Este trabalho possui uma abordagem qualitativa com delineamento de uma pesquisa-ação, que segundo a definição de Thiollent (2011, p. 20):

> É um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos do modo cooperativo ou participativo.

Participaram deste estudo 32 alunos de licenciatura em Matemática e de Engenharia de uma Universidade pública do Amazonas, e os dados foram coletados por observação das atividades em sala de aula e registrados por meio de gravação em vídeo e de um questionário em formulário eletrônico. Na Tabela 1 apresentamos os elementos que compõem a configuração didática da orquestração instrumental que foi desenvolvida.

Tabela 1.

*Configuração didática da orquestração instrumental (Elaborado pelos autores)*

| | |
|---|---|
| Objeto do conhecimento | Aplicações da Integral Dupla. |
| Gestão dos participantes | Momentos em trabalho individual e momentos em trabalho coletivo. |
| Objetivo de aprendizagem | Aplicar o conceito de integral dupla na determinação do centro de massa de uma lâmina de densidade variável e do momento de inércia de uma partícula. |
| Gestão dos recursos | Notebook, mesa digitalizadora, celular, papel e lápis, livros didáticos de Cálculo, situações problema, Geogebra, editores de texto e Google Meet. |
| Gestão do tempo | 1 encontro síncrono de 2h de duração. |

Na elaboração das situações realizamos uma ação descritiva e preditiva, no sentido de estabelecermos os possíveis comportamentos e resoluções dos alunos, de acordo com cada fase da TSD.

Quanto ao modo de execução, professor e alunos interagiram por 2h por meio do Google Meet. Na situação de devolução o professor apresentou duas situações-problema, uma de cada vez. Foi planejado que para cada situação, as etapas de ação, formulação, validação e institucionalização, fossem cumpridas em até 1h.

Na situação de ação, os alunos tinham 10 minutos para ler os problemas e identificar os dados, a pergunta e escrever uma estratégia de resolução. Ao final, os alunos precisavam enviar por meio de um formulário eletrônico suas respostas deste primeiro momento. Após este tempo, os alunos foram divididos em grupos em tinham 10 minutos para a etapa da formulação. Cada um desses grupos conversou em outro ambiente virtual. Alguns foram para outra sala no Google meet e outros discutiram por vídeo chamada por meio do WhatsApp. Em seguida, todos voltavam para a sala principal e um representante de cada grupo apresentava a estratégia aceita pelo grupo. Essa atividade tinha 10 minutos de duração e os alunos podiam fazer uso do Geogebra durante as discussões.

Para a situação de validação o tempo destinado foi de 15 minutos e os alunos tinham que trabalhar de forma individual. Podiam fazer uso do Geogebra e de lápis e papel. Ao final, enviavamm ao professor sua resposta final para a situação proposta. Por fim, a situação de institucionalização era realizada pelo professor em um tempo de 15 minutos.

Mostraremos a seguir as duas situações didáticas organizadas, com fins à experimentação, a partir das orientações nos momentos de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD.

## Situações Didáticas

Nessa seção, apresentamos situações-problema envolvendo aplicações da integral dupla na determinação da carga elétrica em certa região dada, e no cálculo do centro de massa de uma lâmina de densidade variável. Vale destacar que “para garantir, minimamente, o alcance desses objetivos, o pesquisador ou o construtor de situações-problema necessita escolher as variáveis didáticas que podem provocar as mudanças desejadas, no que diz respeito ao processo de ensino e de aprendizagem do objeto matemático em jogo” (ALMOULOUD, 2007, p. 174). Desse modo, dentre as variáveis microdidáticas (locais) que colocamos ênfase, indicaremos: os conteúdos envolvidos nas atividades propostas, os saberes requeridos para o uso da tecnologia.

Situação Didática 1: Se uma carga elétrica está distribuída sobre uma região D e a densidade de carga (em unidades de carga por unidade de área) é dada por ⌠(x,y) em um ponto (x, y) em D, então a carga total Q é dada por

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA$$

Se uma carga elétrica está distribuída sobre o retângulo 0≤x≤5, 2≤y≤5, de modo que a densidade de carga em (x,y) é ⌠(x,y)=2x+4y (medida em coulombs por m²) determine a carga total no retângulo. Agora, se supormos que a carga elétrica está distribuída sobre o disco $x^2 + y^2 \leq 1$ , de modo que a densidade de carga em $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (medida em Coulombs por m²), de quanto será a carga total no disco?

Na situação de ação, o aluno deverá ser capaz de se apropriar do enunciado e dos seus conhecimentos prévios, pertinentes à situação, visualizando e reconhecendo os dados, a pergunta do problema e uma estratégia de resolução, sem formalismo, que possam ser aplicadas à questão. Almeja-se, portanto, que o aluno perceba que a equação da carga elétrica é um dado comum às duas partes do problema enquanto que, o retângulo 0≤x≤5, 2≤y≤5 e a densidade de carga ⌠(x,y)=2x+4y são dados da primeira parte e, o disco $x^2 + y^2 \leq 1$ e a densidade de carga em (x,y) $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ são dados da segunda parte. A pergunta é a mesma para as duas partes da situação: determinar a carga elétrica total na região dada.

Na situação de formulação, os alunos debaterão sobre as estratégias a utilizarem para chegar à solução do problema. A partir de então, eles deverão reconhecer as regiões de integração, representando-as graficamente com ou sem o auxílio do Geogebra. No primeiro caso é esperada que o aluno percebesse que, como a região é um retângulo, a integral será dada por integrais iteradas.

$$Q = \int_2^5 \int_0^5 (2x + 4y)\, dxdy \ ou\ Q = \int_0^5 \int_2^5 (2x + 4y) dydx$$

No segundo caso, é esperado que os alunos percebam a necessidade do uso das coordenadas polares (r,⌊), visto que a região é um círculo. Quanto aos intervalos de variação de r e de ⌊, os alunos deverão concluir que $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Da relação $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e da substituição $x = r cos\theta$ e $y = r sen\theta$, deverão concluir que a carga elétrica nesse caso será dada por:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr d\theta$$

Na situação de validação, "o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor" (Almouloud, 2007, pp. 39). Espera-se então que o aluno explicite a formalização do seu raciocínio. Tais explicitações podem vir acompanhadas de raciocínio incompleto ou de falsas teorias e os devidos ajustes serão feitos durante a situação de institucionalização (Brousseau, 2008). Portanto, os alunos devem enviar ao professor e apresentar aos demais suas asserções, independentes de corretas ou não.

Na situação de institucionalização, "o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos" (Almouloud, 2007, p. 40). Sendo assim, o professor apresentou a resolução completa da situação proposta, sendo mantendo o diálogo com os alunos, de modo que eles participem ativamente da construção da solução proposta pelo professor e compare com que foi desenvolvida por ele e pelos demais colegas.

Situação didática 2: As coordenadas $\left(\underline{x}, \underline{y}\right)$ do centro de massa de uma lâmina ocupando uma região D e tendo como função densidade $\rho(x,y)$ são:

$$\underline{x} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x,y)dA \ e \ \underline{y} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x,y)dA$$

onde a massa m é dada por

$$m = \iint_D \rho(x,y)dA$$

Determine o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices (0,0), (2,1) e (0,3), se a função densidade for $\rho(x,y) = x + y$. Agora, suponha que a lâmina ocupa a parte do disco $x^2+y^2 \leq 1$ no primeiro quadrante, qual será o centro de massa sabendo que a densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo x?

Na situação de ação, almeja-se que o aluno perceba que as equações das coordenadas do centro de massa e da massa são informações que serão usadas nas duas partes da situação. A Tabela 2 resume os dados e a pergunta das duas partes da situação proposta.

Tabela 2.

*Dados e pergunta da Situação Didática 2 (Elaborado pelos autores)*

| | **Parte 1** | **Parte 2** |
|---|---|---|
| Dados | $\underline{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dA$ e $\underline{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dA$<br>$m = \iint_D \rho(x,y)dA$ | |
| | Lâmina triangular com vértices (0,0), (2,1) e (0,3).<br>$\rho(x,y) = x + y$ | Lâmina ocupa a parte do disco $x^2+y^2 \leq 1$ no primeiro quadrante.<br>A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo x. |
| Pergunta | Determinar o centro de massa da uma lâmina | |

Na situação de formulação, os alunos debaterão sobre as estratégias a utilizarem para chegar à solução do problema. Assim como na situação 1, deverão reconhecer as regiões de integração, representá-las graficamente com ou sem o auxílio do Geogebra. No primeiro caso é esperado que os alunos percebam que devem obter as equações das retas que passam por A e B e por B e C. Em seguida, observar que a melhor opção de integração é iniciar integrando com respeito à y, pois, caso contrário, recairão em duas integrais duplas.

$$m = \int_0^2 \int_{x/2}^{3-x} (x+y)\, dydx$$

$$m = \int_0^1 \int_0^{2y} (x+y)\, dxdy + \int_1^3 \int_0^{3-y} (x+y)\, dxdy$$

Na segunda parte desta situação, temos alguns fatores capazes de se tornarem obstáculos para os alunos. Inicialmente deve-se perceber que a região de integração será o quarto de círculo localizado no primeiro quadrante. Ademais, diferentemente da primeira parte, a função densidade não é dada de forma explícita, sendo, portanto, necessário obter uma representação algébrica para essa função (Tabela 3). Realizar a conversão da expressão em língua natural "a densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo x" para sua representação no registro algébrico é um ponto chave do problema ao mesmo tempo em que deve ser um obstáculo para alguns alunos.

Tabela 3.

*Etapas da conversão da expressão em língua natural "a densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo x" para sua representação no registro algébrico (Elaborado pelos autores)*

| Representação em língua natural | a densidade em qualquer ponto | é proporcional | à distância do ponto ao eixo x |
|---|---|---|---|
| Representação algébrica | $\rho(x,y)$ | $= k \cdot$ | $\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2} = y$ |

Espera-se que os alunos percebam que as integrais que fornecem tanto as coordenadas do centro de massa quanto a massa, deverão estar em coordenadas polares. Neste caso, o raio r deverá variar de 0 a 1 enquanto o ângulo θ, de 0 a π/2. Para se chegar a estes intervalos a representação gráfica tem um papel importante e pode ser obtida com o auxílio do Geogebra. Na Tabela 4 temos as integrais as quais os alunos deverão obter nas duas partes da situação 2.

Tabela 4.

*Integrais das partes 1 e 2 da situação didática 2 (Elaborado pelos autores)*

| **Parte 1** | **Parte 2** |
|---|---|
| $m = \int_0^2 \int_{x/2}^{3-x} (x+y)\, dydx$ | $m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 kr^2 sen\theta\, drd\theta$ |
| $\underline{x} = \frac{1}{m} \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} x(x+y)\, dydx$ | $\underline{x} = \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 kr^3 sen\theta cos\theta\, drd\theta$ |
| $\underline{y} = \frac{1}{m} \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} y(x+y)\, dydx$ | $\underline{y} = \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 kr^2 sen^2\theta\, drd\theta$ |

Na situação de validação, espera-se então que o aluno explicite a formalização do seu raciocínio mesmo com de raciocínio incompleto ou de falsas teorias. Os devidos ajustes serão feitos durante a situação de institucionalização. Portanto, os alunos deveriam enviar ao professor e apresentar aos demais suas asserções, independentes de corretas ou não.

Na situação de institucionalização, "o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos" (Almouloud, 2007, p. 40). Sendo assim, o professor apresentou a resolução completa da situação proposta, sendo mantido o diálogo com os alunos, de modo que eles participassem ativamente da construção da solução proposta pelo professor e comparassem com a que foi desenvolvida por ele e pelos demais colegas.

## Resultados e Discussões

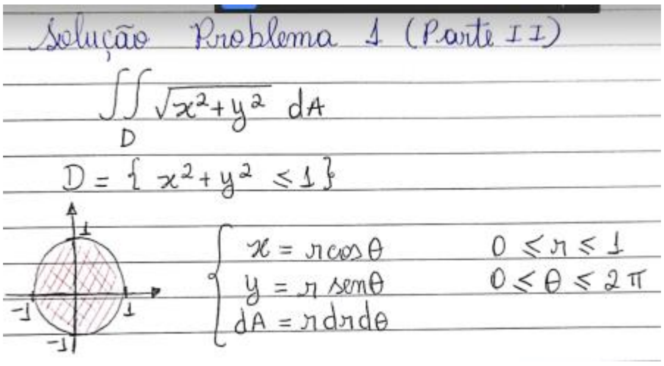
Analisemos primeiro o desempenho dos alunos na situação didática 1. Em relação ao primeiro caso, a porcentagem dos que conseguiram identificar os dados, explicitar a pergunta do problema e esboçar uma estratégia de resolução, foi a mesma, 90,6%.

Já no segundo caso, 78,1% conseguiram identificar os dados, 84,3% explicitaram a pergunta, e uma estratégia de resolução foi apresentada por 71,8%, sendo que esse último percentual aumentou para 78,1% após a discussão em grupo.

Representar algebricamente as regiões de integração e convertê-las para a representação geométrica foi realizada por somente 9,3% dos alunos no primeiro caso e 6,2% no segundo caso. Na Figura 1 vemos a solução de um dos alunos que representou a região de integração algebricamente e mesmo assim. A maioria, 71,8% no primeiro caso e 53,1% no segundo caso, apenas representou algebricamente, não realizando a conversão para o registro geométrico. Na etapa de validação, no primeiro caso, 81,2% explicitou a formalização de seu raciocínio e apresentou a resposta corretamente, enquanto que para o segundo caso esse percentual caiu para 59,3%.

Tabela 4.

*Representação geométrica da região de integração (Dados da pesquisa)*




Em relação à situação didática 2, 61,3% identificaram os dados no caso 1 e 29% no caso 2. A pergunta do problema foi explicitada por 93,5% e 77,2% dos alunos no caso 1 e no caso 2, respectivamente. Para o caso 1, 74,2% apresentou uma estratégia de resolução, enquanto que para o caso 2 esse percentual caiu para 48,4%.

Após a situação de formulação em que houve a troca de ideias entre os membros de cada grupo, o percentual de quem apresentou uma estratégia de resolução aumenta para 93,5% no caso 1 e 77,4% no caso 2.

Estes dados demonstram a dificuldade dos alunos em resolver situações que envolvam integrais duplas em coordenadas polares. Outro fato percebido foi a importância da discussão em grupo para a elaboração de estratégias de resolução das situações. A contribuição desse momento também foi percebida em um questionário aplicado, por meio eletrônico, ao final da atividade com objetivo de investigar a percepção dos alunos em relação à metodologia aplicada na atividade, às situações propostas e ao momento em que houve a discussão em grupo.

A maior dificuldade apontada por 75% dos alunos na realização da atividade foi montar a integral do problema, seguida de resolver a integral (46,9%). Após a discussão com os colegas de grupo, 53,1% permaneceram com sua estratégia inicial. Em relação à discussão e troca de ideias com seus colegas de grupo, 90,6% concordam totalmente ou concordam que isso ajudou para a resolução do problema. Isso corrobora com o fato do número de alunos que conseguiram apresentar uma estratégia de resolução aumentar após a discussão em grupo.

Quanto a usar o Geogebra durante a resolução do problema, 71,9% afirmou não ter usado e, dos que fizeram uso, 90,5% classificou como muito importante ou importante esse recurso. Isso pode ter sido a causa de poucos terem realizado a transformação das regiões de integração para sua representação gráfica.

Na situação de formulação, 59,4% afirmou que seu grupo se reuniu por chamada de vídeo pelo Google Meet, seguido de 18,8% que se comunicaram via mensagem de texto pelo Whatsapp e 15,6% por chamada de vídeo pelo Whatsapp. Durante a resolução dos problemas, 46,9% afirmaram ter recorrido às anotações do caderno e 37,5% afirmou não ter consultado nenhum material, fez o que lembrava.

Para 53,1% dos alunos, o tempo destinado para a realização da atividade não foi suficiente. Quando perguntados sobre seu nível de interesse pelo trabalho em grupo, 59,4% afirmou ter sido muito interesse e 28,1% ter ficado razoavelmente interessado. Quanto a entender exatamente o que o grupo deveria fazer, 78,1% afirmaram que sabia exatamente o que fazer. Na opinião de 50% dos alunos, se as situações propostas tivessem sido realizadas de forma individual, seu desempenho teria sido pior (34,4%) ou muito pior (15,6%).

## Conclusão

Este estudo teve por objetivo descrever e analisar uma orquestração instrumental que visou aplicar a Integral Dupla na determinação do centro de massa de uma lâmina de densidade variável e da carga elétrica em uma determinada região. Apoiados nas teorias da orquestração instrumental e da teoria das situações didáticas, buscamos compreender como as escolhas e arranjos realizados para tratar das situações didáticas propostas, tendo como suporte um ambiente rico em tecnologia, ajudaram a conduzir os alunos ao conhecimento matemático.

Foram propostas duas situações didáticas, cada uma envolvendo dois casos: um com integrais duplas em coordenadas retangulares e outro com integrais duplas em coordenadas polares. Ficou evidenciada a dificuldade dos alunos em tratar de situações que envolvam integrais duplas em coordenadas polares. Além disso, a maior dificuldade apontada pelos alunos na realização das atividades foi montar a integral do problema e resolvê-la.

Creditamos essas dificuldades ao fato de a maioria dos alunos optarem por não fazer uso do recurso Geogebra para representar algebricamente as regiões de integração e convertê-las para a representação geométrica, o que facilita a determinação dos intervalos de integração assim como a escolha da ordem de integração mais adequada.

O momento da discussão entre os alunos durante a situação adidática da formulação, se mostrou importante para a elaboração e reelaboração de estratégias de resolução das situações propostas. De fato, o trabalho em grupo foi um fator que contou com a aprovação da grande maioria dos alunos.

Quanto aos recursos utilizados, destacamos o uso do Google Meet e do Whatsapp que proporcionaram aos alunos um ambiente de aprendizagem, fundamental na situação adidática da formulação. Quanto ao Geogebra, este foi pouco utilizado e o motivo apontado pelos alunos foi o fato de a maioria usar o celular para assistir às aulas e o uso desse software torna-se complicado. Isso é um ponto da orquestração que precisa ser melhorado para estudos futuros.

Percebemos que usar as situações de ação, formulação, validação e institucionalização, previstas na TSD, no modo de execução da orquestração instrumental, propiciou um ambiente de aprendizagem no qual os alunos participaram ativamente e estavam sempre estimulados a tentar superar, por seu próprio esforço e também com a colaboração de seus pares, certas passagens que conduzem o raciocínio na direção de sua aprendizagem.

**Referências**


Almouloud, S. Ag. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Editora UFPR, Paraná. Brasil.

Alves, F. R. V. (2012). Uma Engenharia Didática para o ensino do Cálculo –o caso da identificação dos pontos extremantes de uma função. In: Anais do X Conferência Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires, 13-24.

Alves, F. R. V. (2012). Uma sequência de ensino para a aplicação do teste da Hessiana. In: Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.

Alves, F. R. V. (2013). Transição interna do Cálculo: uma discussão do uso do GeoGebra no contexto do Cálculo a várias variáveis. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo*, *1*(2), 5–19.

Bellemain, F., & Trouche, L. (2016). Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. In *I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática*.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue)*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1996). Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In. BRUN, J. *Didáctica das matemáticas. Lisboa: Horizontes Pedagógicos*.

Brousseau, G. (2008). Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. Ática.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., Gravmeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75 (2), pp. 213-234.

Freitas, J. L. M. D. (2012). Teoria das situações didáticas. In. MACHADO, SDA et al. Educação Matemática: Uma (nova) introdução. 3ª ed, Educ, São Paulo, 76-111.

Guin, D., & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of intrumental orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(5), 204-211.

Igliori, S. B. C., & Almeida, M. V. (2017). Material para o ensino de cálculo diferencial: continuidade e diferenciabilidade. *VIDYA*, *37*(2), 383-396.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains (p. 239). Armand Colin.

Robert, A., & Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of calculus/elementary analysis. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 283-299). Springer, Dordrecht.

Silva, N. A., Ferreira, M. V. V., Tozetti, K. D. (2015). Um estudo sobre a situação didática de Guy Brousseau. In *XII Congresso Nacional de Educação* (Vol. 12).

Teixeira, P. J. M., & Passos, C. C. M. (2013). Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. *Zetetike*, *21*(1), 155-168.

Thiollent, M. (2011). Metodologia da pesquisa-ação. 18. ed. São Paulo: Cortez.

Trouche, L. (2005). Construction et conduit des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(1), pp. 91-138.

Vieira, F. R., & Neto, H. B. (2011). Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *13*(3), 597-626.