ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p156-193

Análise do Conhecimento Matemático para o Ensino em um Estudo de Aula: Um Caminho para Produzir Tarefas de Aprendizagem Profissional

Analysis of Mathematical Knowledge for Teaching in a Lesson Study: A Path to Producing Professional Learning Tasks

Análisis del conocimiento matemático para la enseñanza en un estudio de clase: un camino para producir tareas de aprendizaje professional

Analyse des connaissances mathématiques pour l'enseignement dans une étude de classe : une voie pour produire des tâches d'apprentissage professionnel

Silmara Ribeiro Rodrigues[1]
Escola Rui Barbosa
https://orcid.org/0000-0002-6107-2812

Henrique Rizek Elias [2]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
https://orcid.org/0000-0002-9660-7303

André Luis Trevisan [3]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
https://orcid.org/0000-0001-8732-1912

Resumo

Esta pesquisa possui dois objetivos: (i) analisar o conhecimento matemático para o ensino mobilizado por uma professora quando participa de um ciclo de Estudo de Aula; e (ii) apresentar o processo de construção de uma Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP), elaborada a partir de amostras autênticas da prática obtidas dos dados produzidos durante um ciclo do Estudo de Aula. Fundamentadas na tabela teórica do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT), as análises foram realizadas a partir de dados produzidos no contexto de uma formação continuada de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim, com base nos subdomínios do MKT, as análises consideram dados produzidos em cada momento de um ciclo de Estudo de Aula: planejamento coletivo de uma

[1] silrodrigues_@hotmail.com
[2] henriqueelias@utfpr.edu.br
[3] andrelt@utfpr.edu.br

aula, desenvolvimento dessa aula por uma professora, Maria, em sua turma de 5º ano do Ensino Fundamental e reflexão dessa aula. Após essa análise, elaboramos uma TAP, cujo objetivo é promover discussões matemáticas e didático-pedagógicas com vistas a mobilizar subdomínios do MKT para o ensino dos números racionais nos anos iniciais. Os resultados indicam que o Estudo de Aula, uma abordagem para a formação de professores estreitamente relacionada com a prática, oportuniza momentos para o desenvolvimento/refinamento do MKT, conforme verificado a partir dos subdomínios mobilizados pela professora Maria. Esta pesquisa também sugere um caminho para se produzir uma TAP, utilizando amostras autênticas da prática a partir dos três momentos do ciclo do Estudo de Aula, inclusive o momento de reflexão da aula feita pelos professores enquanto trabalham colaborativamente.

Palavras-chave: Ensino de matemática, Conhecimento matemático para o ensino, Estudo de aula, Tarefas de aprendizagem profissional, Anos iniciais do ensino fundamental.

Abstract

This research has two objectives: (i) to analyze the mathematical knowledge for teaching mobilized by a teacher when she participates in a Lesson Study cycle; and (ii) present the process of constructing a Professional Learning Task (PLT), developed from authentic samples of practice obtained from data produced during a Lesson Study cycle. Based on the theoretical framework of Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), the analyses were carried out from data produced in the context of continuing education for teachers who teach Mathematics in Elementary School. Thus, based on the MKT subdomains, the analyses consider data produced at each moment of a Lesson Study cycle: collective planning of a class, development of this class by a teacher, Maria, in her 5th grade class of Elementary School, and reflection of this class. After this analysis, we elaborated a PLT whose objective is to promote mathematical and didactic-pedagogical discussions to mobilize subdomains of the MKT for the teaching of rational numbers in the early years. The results indicate that the Lesson Study, an approach to teacher education closely related to practice, provides opportunities for the development/refinement of the MKT, as verified from the subdomains mobilized by teacher Maria. This research also suggests a way to produce a PLT, using authentic samples of practice from the three moments of the Lesson Study cycle, including the moment of reflection of the class made by teachers while working collaboratively.

Keywords: Teaching mathematics, Mathematical knowledge for teaching, Lesson study, Professional learning Tasks, Elementary school.

Resumen

Esta investigación tiene dos objetivos: (i) analizar los conocimientos matemáticos para la enseñanza movilizados por una docente cuando participa en un ciclo de Estudio de clases; y (ii) presentar el proceso de construcción de una Tarea de Aprendizaje Profesional (TAP), elaborado a partir de muestras auténticas de práctica obtenidas a partir de datos producidos durante un ciclo de Estudio de clases. Con base en el marco teórico del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), los análisis se realizaron a partir de datos producidos en el contexto de la educación continua para docentes que enseñan Matemática en la escuela primaria. Así, con base en los subdominios MKT, los análisis consideran datos producidos en cada momento de un ciclo de Estudio de Clases: planificación colectiva de una clase, desarrollo de esta clase por parte de una maestra, María, en su clase de 5 ° grado de Primaria y reflejo de esto. clase. Luego de este análisis, se elaboró un TAP, cuyo objetivo es promover discusiones matemáticas y didáctico-pedagógicas con miras a movilizar subdominios del MKT para la enseñanza de números racionales en la escuela primaria. Los resultados indican que el Estudio de Clases, un enfoque de la formación docente estrechamente relacionado con la práctica, brinda oportunidades para el desarrollo/perfeccionamiento del MKT, como se verifica a partir de los subdominios movilizados por la maestra María. Esta investigación también sugiere una forma de producir un TAP, utilizando muestras auténticas de la práctica de los tres momentos del ciclo de Estudio de Clases, incluido el momento de reflexión de la clase realizado por los docentes mientras se trabaja de forma colaborativa.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas, Conocimientos matemáticos para la enseñanza, Estudio de clases, Tareas de aprendizaje profesional, Escuela primaria.

Résumé

Cette recherche a dex objectifs : (i) analyser les connaissances mathématiques pour l'enseignement mobilisées par un enseignant lorsqu'il participe à un cycle d'étude de leçons ; et (ii) présenter le processus de construction d'une tâche d'apprentissage professionnel (TAP), élaborée à partir d'échantillons authentiques de pratique obtenus à partir des données produites pendant un cycle d'étude de leçons. Basées sur le cadre théorique des connaissances mathématiques pour l'enseignement (MKT), les analyses ont été effectuées à partir de données produites dans le contexte d'une formation continue des enseignants qui enseignent les mathématiques dans les premières années de l'enseignement primaire. Ainsi, sur la base des sous-domaines de MKT, les analyses considèrent les données produites à chaque moment d'un cycle d'étude de leçons : planification collective d'une leçon, développement de cette leçon par une enseignante, Maria, dans sa classe de 5ème année et réflexion sur cette leçon. Après cette analyse, nous avons élaboré un TAP, qui vise à promouvoir les discussions mathématiques et didactiques-pédagogiques afin de mobiliser les sous-domaines du MKT pour enseigner les nombres rationnels dans les premières années. Les résultats indiquent que l'étude de classe, une approche pour la formation des enseignants étroitement liée à la pratique, fournit des opportunités pour le développement/affinement du MKT, comme vérifié à partir des sous-domaines mobilisés par l'enseignante Maria. Cette recherche suggère également une manière de produire un TAP, en utilisant des échantillons authentiques de pratiques provenant des trois moments du cycle de l'étude de classe, y compris le moment de la réflexion sur la leçon faite par les enseignants tout en travaillant en collaboration.

Mots clés : Enseignement des mathématiques, Connaissances mathématiques pour l'enseignement, Etude de leçons, Tâches d'apprentissage professionnel, Premières années de l'enseignement primaire.

A presente pesquisa se alinha a diversas outras (Cochran-Smith & Lytle, 1999; Ball & Cohen, 1999, Pimenta & Lima, 2005, Moreira & David, 2010) que reconhecem e valorizam o conhecimento construído por professores em suas práticas. Cochran-Smith e Lytle (1999), por exemplo, rejeitam a ideia de que o conhecimento prático, quando comparado ao conhecimento formal produzido nas universidades, seja considerado um conhecimento de baixo *status*, limitado pelo cotidiano, por situações locais e, portanto, trivial. As autoras se distanciam da ideia de que o conhecimento necessário para a prática docente deva ser produzido por pesquisadores, muitas vezes, distantes das práticas de sala de aula nas escolas, isto é, rejeitam a concepção de que esse conhecimento deva ser gerado de "fora para dentro" das escolas, o que implicaria assumir que os professores não participam desse processo de construção.

Se, por um lado, o conhecimento necessário para o ensino não deve ser tomado como algo de "fora para dentro", por outro, a construção desse conhecimento também não se dá exclusivamente na prática docente. Como alternativa, Cochran-Smith e Lytle (1999) apresentam a noção de *investigação como postura* (*inquiry as stance*, no original em inglês), que assume o conhecimento que os professores precisam para ensinar como sendo aquele "gerado quando eles consideram suas próprias práticas como objeto de investigação intencional, considerando as teorias produzidas por outros como aportes ou referências que ajudam a problematizar, interpretar e compreender a prática de ensinar" (Fiorentini & Crecci, 2016, p. 512).

Moreira e David (2010, p. 20) aproximam-se dessas ideias quando apresentam a noção de *matemática escolar* como sendo o

> conjunto de saberes "validados", associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática. Com essa formulação, a Matemática Escolar inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de Matemática em sua ação pedagógica em sala de aula da escola, quanto resultados de

> pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos etc.

Na esteira dessas pesquisas, assumimos que o conhecimento matemático necessário para o professor exercer sua atividade de ensinar Matemática nas escolas seja desenvolvido/refinado na estreita relação entre teoria e prática.

A literatura científica (Cochran-Smith & Lytle, 1999; Boavida & Ponte, 2002; Fiorentini & Crecci, 2013) tem indicado que uma maneira de se explorar tal conhecimento matemático, visando promover o desenvolvimento profissional docente, é envolver os professores em trabalhos colaborativos, e uma forma de realizar esse tipo de trabalho é por meio da abordagem do Estudo de Aula (Bezerra & Morelatti, 2020; Curi & Martins, 2018; Ponte et al., 2014; Ponte et al., 2016).

A partir desses referenciais, assumimos que o Estudo de Aula tem potencial para promover o desenvolvimento profissional docente, especialmente no que diz respeito ao Conhecimento Matemático para o Ensino (Ball, Thames & Phelps, 2008) de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Com base nisso, apresentamos[4] o primeiro objetivo deste artigo: *analisar o Conhecimento Matemático para o Ensino mobilizado por uma professora quando participa de um ciclo de Estudo de Aula*. Utilizamos o Tabela teórico do Conhecimento Matemático para o Ensino, proposto por Ball, Thames e Phelps (2008), para analisar um evento crítico (Powell, Francisco & Maher, 2004) ocorrido durante: (i) o planejamento de uma aula realizado por um grupo de professores, (ii) o desenvolvimento dessa aula por uma professora integrante do grupo e (iii) a reflexão/análise individual e coletiva da aula.

[4] Esta pesquisa é um recorte da pesquisa de mestrado da primeira autora. Foram feitos refinamentos e aprofundamentos nas análises e nas conclusões para este artigo.

Em seguida, a partir das análises empreendidas, descrevemos o processo de elaboração de uma Tarefa de Aprendizagem Profissional – TAP (Smith, 2001). De acordo com Ribeiro, Aguiar e Trevisan (2020, p. 55),

> as TAP são tarefas elaboradas com a finalidade de propiciar aprendizagens aos professores em uma situação específica (Ball & Cohen, 1999) e são caracterizadas, dentre outros aspectos, pelo uso de registros de prática (Ball, Ben-Peretz & Cohen, 2014), tais como, protocolos de resoluções de estudantes, recortes de propostas curriculares, e planos de ensino. Ao combinar tais recursos na elaboração das TAP, diferentes autores destacam a importância de se levar em conta que tais tarefas se constituem em ferramentas poderosas para que se leve, para o contexto da formação de professores, aspectos da prática da sala de aula como integrantes destas TAP (Smith, 2001).

Considerando que as TAP podem ser aliadas na proposta de se levar aspectos da prática docente para formações (iniciais ou continuada) de professores, o segundo objetivo deste artigo é: *apresentar o processo de construção de uma TAP elaborada a partir de amostras autênticas da prática obtidas dos dados produzidos durante o ciclo do Estudo de Aula analisado*.

Referencial teórico

Desenvolvimento profissional

De acordo com Fiorentini (2008), o desenvolvimento profissional pode ser entendido "[...] como um processo contínuo que tem início antes de ingressar na licenciatura, estende-se ao longo de toda sua vida profissional e acontece nos múltiplos espaços e momentos da vida de cada um, envolvendo aspectos pessoais, familiares, institucionais e socioculturais" (Fiorentini, 2008, *apud* Fiorentini & Crecci, 2013).

Como afirmam Saraiva e Ponte (2003), o desenvolvimento profissional sempre envolve alguma aprendizagem e, consequentemente, alguma mudança. A aprendizagem ocorre quando o professor "[...] adquire a capacidade de ver, ouvir e fazer coisas que não fazia antes" (Saraiva & Ponte, 2003, p. 4). No entanto, alertam os autores, a mudança só acontece se o professor estiver disposto a mudar.

Ninguém muda ninguém, ou seja, a mudança vem, em grande parte, de dentro de cada um. Para que ela ocorra, tem de ser desejada pela própria pessoa. No caso do professor, é necessário que este esteja disposto a correr os riscos inerentes às inovações educacionais e a enfrentar a insegurança das novas abordagens (Saraiva & Ponte, 2003, p. 4).

Fiorentini e Crecci (2013), a partir de uma meta-análise de estudos brasileiros sobre desenvolvimento profissional realizada por Passos et al. (2006), destacam que é possível pensar em pelo menos três diferentes práticas consideradas catalisadoras de desenvolvimento profissional: as práticas reflexivas, as práticas colaborativas e as práticas investigativas. Dentre elas, destacamos as práticas colaborativas como uma estratégia potencial para lidar com a complexidade da profissão docente, promovendo o trabalho em uma relação de ajuda mútua, visando a objetivos comuns. De acordo com Ponte (2004, p. 39),

> [...] num trabalho de colaboração, a existência de objetivos comuns fortes não é incompatível com o prosseguimento de objetivos individuais próprios por cada um dos intervenientes. Conseguir a articulação entre esses dois tipos de objetivos não é fácil, mas é uma condição fundamental para o êxito do trabalho.

O trabalho em grupos colaborativos contribui para a troca de experiências e as interações entre seus integrantes (Boavida & Ponte, 2002). Durante todo o processo em grupos colaborativos, é possível que os participantes experimentem diversas aprendizagens, aprofundem seus conhecimentos e competências e desenvolvam-se profissionalmente em vários aspectos. Segundo Ball e Cohen (1999), grupos colaborativos oferecem oportunidades aos professores que ensinam Matemática de avaliar suas práticas e refletir sobre outras, produzindo, assim, uma nova construção de aprendizagem dos conteúdos que ensinam e dos alunos para os quais ensinam.

Uma das estratégias para trabalhar em colaboração é por meio do Estudo de Aula, uma abordagem para a formação de professores que teve origem no Japão e que tem sido difundida em outros países, como Estados Unidos, Portugal e, mais recentemente, Brasil. Como Bezerra e Morelatti (2020, p. 75) colocam, o Estudo de Aula é "um processo formativo que leva os professores a refletirem, por meio de um trabalho eminentemente colaborativo entre os pares, sobre a sua prática, tendo como foco a aprendizagem do aluno".

De acordo com Ponte et al. (2016, p. 896), no Estudo de Aula, os

> [...] professores trabalham em conjunto, procurando identificar dificuldades dos alunos, e preparam em detalhe uma aula que depois observam e analisam em profundidade. No fundo, realizam uma pequena investigação sobre a sua própria prática profissional, em contexto colaborativo, informada pelas orientações curriculares e pelos resultados da investigação relevante.

Assim, a partir de trabalhos como Ponte et al. (2014) e Ponte et al. (2016), assumimos que um ciclo de Estudo de Aula é composto por: (i) planejamento de uma aula; (ii) desenvolvimento e observação da aula; (iii) análise e reflexão da aula; e (iv) sessões de seguimento[5].

Segundo Curi e Martins (2018, p. 488),

> [...] a Lesson Study envolve um trabalho de pesquisa sobre o aprendizado, a formação de professores, o contexto no qual o ensino e aprendizagem ocorrem, o conteúdo a ser ensinado, a didática e sobre o currículo proposto e praticado. Envolve ainda o princípio de formação de professores baseado na pesquisa, na reflexão, na colaboração e na participação efetiva, possibilitando a eles a apropriação de indicações curriculares e a construção de um repertório teórico-metodológico consistente, que contribui para o aprimoramento do ensino e aprendizagem da matemática.

Conhecimento Matemática para o Ensino

Com base nos trabalhos de Shulman (1986, 1987), diversos pesquisadores da área de Educação Matemática têm se debruçado a compreender e caracterizar o conhecimento matemático que é específico para o trabalho docente. Diferentes Tabelas teóricos foram e estão sendo desenvolvidos. Especificamente, neste artigo, destacamos um Tabela teórico bastante difundido no Brasil e em outros países: o Conhecimento Matemático para o Ensino, *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), de Ball, Thames e Phelps (2008).

[5] Segundo Bezerra e Morelatti (2020, p. 76), a sessão de seguimento "é quando, caso necessário, a aula é/ou pode ser realizada novamente por outro professor ou pelo mesmo em outra turma e, dessa forma, se repete o ciclo de discussão, observação e reflexão, buscando o aprimoramento da aula até que o grupo a considere satisfatória".

Segundo os autores, Conhecimento Matemático para o Ensino envolve os conhecimentos matemáticos necessários para que o professor possa exercer seu papel de ensinar matemática, tratando-se de um Tabela teórico baseado na prática docente, a partir das demandas matemáticas para o ensino, sendo, portanto, entendido como "[...] o conhecimento matemático necessário para levar adiante o trabalho de ensinar matemática" (p. 395, tradução nossa). Ball, Thames e Phelps (2008) organizam o MKT em seis subdomínio, três deles associadas ao Conhecimento Específico do Conteúdo, *Content Knowledge* (CK), e outros três ao Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) (Figura 1).

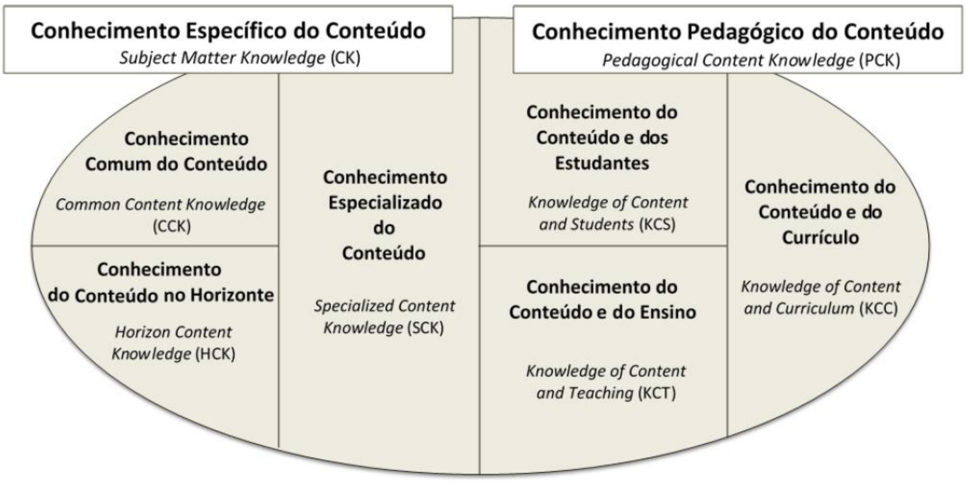

Figura 1.

Subdomínios do MKT (Elias, 2017, p. 32, adaptado de Ball, Thames e Phelps, 2008)

No âmbito do CK, o Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) é aquele que engloba os conceitos comumente aprendidos em cursos de ciências exatas e que não é restrito ao ensino, podendo ser usado em outras situações. O Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), por sua vez, não tem outro fim a não ser o ensino. O SCK é particularmente relevante para o professor, uma vez que, conforme apontam Ball, Thames & Phelps (2008), o trabalho docente envolve especificidades como "Apresentar ideias matemáticas, respondendo a estudantes os 'porquês'; [...] avaliar e adaptar o conteúdo matemático de livros didáticos; modificar tarefas fáceis ou difíceis e avaliar as necessidades dos alunos; dar ou avaliar explicações matemáticas [...]” (Ball, Thames & Phelps, 2008, p. 400, tradução nossa). Já o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK) está mais relacionado à maneira como um determinado conteúdo matemático está distribuído ao longo da grade curricular. Trata-se de um olhar longitudinal a respeito do conteúdo.

Quanto ao PCK, o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS), trata-se do conhecimento que combina saber sobre os estudantes e saber sobre a Matemática. Os professores devem antecipar as dificuldades que seus alunos podem encontrar ao lidar com determinado conteúdo, ter familiaridade com os erros comuns e saber a razão disso. O Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT) é a combinação do conhecimento da Matemática e o conhecimento de como ensinar o conteúdo. Esse conhecimento permite ao professor planejar uma abordagem e uma sequência de ensino que seja eficiente para evitar ou superar determinadas dificuldades de aprendizagem que são recorrentes. Por fim, o Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC) refere-se à maneira como a Matemática está organizada ao longo do currículo, e está relacionado a conhecer ordens usuais no tratamento dos temas matemáticos apresentados em livros didáticos e em documentos curriculares.

Portanto, sendo o Estudo de Aula uma abordagem para a formação de professores estreitamente conectada com a prática docente, assumimos que um trabalho nessa perspectiva possibilita a mobilização e a manifestação, por parte dos envolvidos no processo formativo, dos subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (Ball, Thames & Phelps, 2008). Foi, então, com essa fundamentação teórica que desenvolvemos a primeira etapa desta pesquisa, o processo formativo descrito na próxima seção.

Metodologia

A produção dos dados da pesquisa ocorreu no ano de 2019 durante um projeto[6] de formação continuada em Matemática destinado a professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental desenvolvido nas dependências da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – *campus* Londrina. Tal processo formativo ocorreu de abril a novembro de 2019, sendo realizados oito encontros presenciais, um por mês, de 4 horas cada. Entre um encontro presencial e outro, aconteceram atividades não presenciais, totalizando uma carga horária de 60 horas ao longo do ano.

O objetivo do processo formativo era contribuir para o desenvolvimento profissional das professoras participantes a partir das demandas de suas práticas, fazendo uso do Estudo de Aula (Ponte et al., 2014; Ponte et al., 2016) como uma abordagem de trabalho colaborativo, estreitamente conectada à prática docente. Durante os oito encontros, foram realizados dois ciclos de Estudo de Aula, envolvendo o planejamento coletivo de uma aula, o desenvolvimento desta aula na turma de uma das professoras e a reflexão (individual e coletiva) desta aula. Nesta pesquisa, usamos dados produzidos no primeiro ciclo de Estudo de Aula, realizado durante os três primeiros encontros do processo formativo (de abril a junho de 2019).

Naquele momento, o grupo contava com a participação de 14 professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental em diferentes escolas do município de Londrina, duas professoras e mestrandas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT - UTFPR *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina) – uma delas, primeira autora deste artigo, e dois professores formadores (segundo e terceiro autores).

Os dois primeiros encontros do processo formativo foram destinados, basicamente, aos estudos e planejamento coletivo de uma aula cujo tema matemático era números racionais na

[6] Trata-se de um Projeto de Extensão desenvolvido na UTFPR de Londrina durante os anos de 2018 e 2019, cujo título era *Formação Continuada em Matemática para docentes dos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Os dados analisados neste artigo são referentes ao ano de 2019.

forma fracionária. Após o segundo encontro, uma das professoras, aqui chamada pelo nome fictício de Maria, desenvolveu a aula planejada com sua turma de 5º ano do Ensino Fundamental. Já o terceiro encontro foi destinado à reflexão coletiva da aula desenvolvida por Maria. O Tabela 1 resume as ações e objetivos de cada etapa do processo formativo até o terceiro encontro, incluindo os momentos de atividades não presenciais.

Tabela 1.

Ações e objetivos até o terceiro encontro presencial do processo formativo

	Ações	**Objetivos**
Não presencial	Estudos prévios a respeito do Estudo de Aula. Foram sugeridos, pelos professores formadores, materiais de consulta e levantadas algumas questões sobre a abordagem do Estudo de Aula para serem respondidas no primeiro encontro presencial.	Primeiro contato (caso não tivessem) com a abordagem do Estudo de Aula.
Primeiro encontro presencial. Dia 04/04/2019	Apresentação dos integrantes.	Conhecer os integrantes, os nomes das escolas em que trabalham e as turmas em que atuam.
	Estudo de uma aula planejada na formação continuada proposta pelos professores formadores em 2018 e desenvolvida por uma professora participante naquele ano.	Oferecer às professoras uma experiência com a abordagem do Estudo de Aula a partir de trechos da aula desenvolvida em 2018.
		Discutir uma tarefa matemática, intitulada "*Tarefa dos Canudos*", desenvolvida na aula estudada, cujo objetivo foi introduzir a necessidade do uso do número racional na forma fracionária pelo seu significado de medida.
Não presencial	Estudos prévios a respeito do Estudo de Aula: vídeo[7] e trechos do artigo Ponte et al. (2016).	Aprofundar o conhecimento a respeito do Estudo de Aula.
	Tarefas matemáticas envolvendo diferentes significados de número racional na forma fracionária, retiradas de Campos, Magina e Nunes (2006).	Levantar reflexões sobre significados de número racional na forma fracionária para além de parte-todo, como as ideias de quociente, razão e medida (Kieren, 1976, 1980).
Segundo encontro presencial. Dia 02/05/2019	A partir das tarefas matemáticas deixadas para o momento não presencial, apresentação e discussão dos diferentes significados de número racional na forma fracionária.	Discutir os diferentes significados, bem como as ideias de comparação e equivalência de frações. Antecipar resoluções de estudantes ao resolver as tarefas matemáticas e promover

[7] II Congresso Internacional Envolvimento dos Alunos na Escola - João Pedro da Ponte (versão compacta). Link para acesso: https://www.youtube.com/watch?v=NcsXG0npRLc&t=3s. Último acesso em: 15 de setembro de 2021.

		formas de abordar dificuldades que estudantes podem apresentar.
Desenvolvimento da aula. Dia 14/05/2019	Gravação da aula desenvolvida pela professora Maria.	Realização da aula desenvolvida a partir da "*Tarefa dos Canudos*", planejada coletivamente.
Não presencial	Reflexão individual, após a aula, realizada pela professora regente.	Proporcionar à professora um momento de reflexão sobre a aula, revisitando seu planejamento, comparando-o com o desenvolvimento da aula e pensando nas aulas futuras.
	Tarefas matemáticas que permitem desenvolver práticas de Ensino Exploratório (Canavarro, 2011) com diferentes significados de frações.	Levantar reflexões sobre o planejamento de aulas na perspectiva do Ensino Exploratório.
Terceiro encontro presencial. Dia 06/06/2019	Estudo da aula desenvolvida pela professora.	Analisar a aula desenvolvida por uma das professoras do grupo, proporcionando reflexões a respeito da aprendizagem dos alunos referente à introdução das frações por meio do significado de medida.

Como pode ser observado no Tabela 1, no primeiro encontro foi realizado o estudo de uma aula, realizada por outro grupo de professoras no ano de 2018, pautada na chamada *Tarefa dos Canudos*. Tal tarefa matemática escolhida e modificada pelo grupo de professoras do ano 2019 para ser utilizada na aula desenvolvida pela professora Maria em sua turma de 5º ano. A tarefa utilizada por Maria, cujo objetivo era introduzir a necessidade do uso do número racional na forma fracionária pelo seu significado de medida, está apresentada no Tabela 2.

Tabela 2.

A Tarefa dos Canudos

- Utilizando apenas um canudo, escolha um objeto da sala e escreva sua medida. - O canudo coube sempre inteiro no objeto escolhido ou vocês utilizaram uma parte também? - Se o canudo coube sempre inteiro, escolha outro objeto e dê a sua medida. - Essa parte que você utilizou na medida é metade do canudo? É maior que a metade? Ou é menor que a metade? - Quantas vezes essa parte cabe no canudo? - Como vocês representariam essa parte?

A dinâmica adotada em todos os encontros do grupo era a mesma: em um primeiro momento, as professoras e mestrandas eram divididas em pequenos grupos para discutirem as tarefas matemáticas propostas e, em um segundo momento, o debate era ampliado para o grande grupo (plenária), dando espaço e voz a todos os envolvidos. Tais discussões (nos pequenos e no grande grupo) eram gravadas em áudio e vídeo. No caso da aula desenvolvida pela professora Maria, um dos professores formadores, aqui chamado de professor formador 2, acompanhou a aula e cuidou das gravações.

Para este artigo, delimitamos nossas análises a um fato específico que envolveu o uso do sistema monetário para se trabalhar com números racionais. Tal fato ocorreu em três momentos, utilizados na organização da análise: (i) no primeiro encontro presencial, (ii) no desenvolvimento da aula pela professora Maria e (iii) no terceiro encontro presencial. A escolha por apresentar e analisar esse fato específico se justifica por se tratar de um "evento crítico" (Powell, Francisco & Maher, 2004). Segundo Powell, Francisco e Maher (2004, p. 22), um "evento é crítico em sua relação a uma questão particular perseguida pela pesquisa". Em nosso caso, entendemos que o evento crítico selecionado é elucidativo no que diz respeito à manifestação/mobilização de subdomínios do MKT pela professora Maria, nosso foco da pesquisa, e percorreu todo o ciclo do Estudo de Aula: planejamento, desenvolvimento e reflexão.

Assim, de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), a pesquisa analisa as gravações em áudio e vídeo que registraram o primeiro e o terceiro encontros, bem como gravações feitas durante a aula desenvolvida por Maria e a reflexão que a professora fez logo após a aula[8]. As gravações foram transcritas e os diálogos foram submetidos a procedimentos analíticos, com base nos subdomínios do MKT de Ball, Thames e Phelps (2008).

[8] Após a aula desenvolvida pela professora, os professores formadores enviaram a ela, por *e-mail*, um roteiro com oito perguntas para nortear sua reflexão individual pós-aula. Maria poderia falar da maneira como quisesse, não precisaria ficar presa às perguntas. A sugestão feita pelos formadores era que essa reflexão fosse enviada por áudio

Os nomes que aparecem nas análises são todos fictícios, visando preservar o anonimato das participantes. Para fins de organização, cada fala do diálogo apresentado nas análises possui um código composto por uma letra e um número. A letra P indica que o trecho do diálogo foi retirado do primeiro encontro (planejamento da aula). A letra A significa que o trecho foi retirado do desenvolvimento da aula da professora Maria. A letra T significa que o trecho foi retirado do terceiro encontro (reflexão coletiva da aula). A letra R indica que o trecho foi retirado da reflexão individual feita após a aula. O número indica a sequência dentro de um mesmo diálogo.

Na próxima seção, apresentamos as análises organizadas em três partes: primeiro encontro presencial, o desenvolvimento da aula pela professora Maria e o terceiro encontro presencial.

Análises

Primeiro encontro presencial

Começamos as análises com um pequeno trecho de um diálogo que ocorreu no primeiro encontro presencial, quando as professoras discutiam em plenária com os professores formadores algumas maneiras de promover a representação do meio ($1/2$), último item da *Tarefa dos Canudos* (Tabela 2).

> (P1) Professor Formador 1: *Qual é o registro que você, enquanto professora, esperaria?*
> (P2) Ana: *Acho que por desenho, a priori, e não com número...*
> (P3) Professor Formador 1: *Por que não com número?*
> (P4) Ana: *Apesar de que no ano passado, no 4º ano, eu já tinha aluno que já sabia a representação de 1/2, a fração*.
> (P5) Sônia: *Por isso que eu gosto de fazer um levantamento do conhecimento prévio do que eles trazem de casa, porque eles têm a vivência deles.*

de *WhatsApp* a um deles. Na noite daquele mesmo dia, a professora Maria enviou a reflexão individual sobre a aula realizada.

(P6) Professor Formador 1: *Então espera aí, se aquele aluno eventualmente vem e fala “ah, é assim que escreve”, é porque alguém já apresentou isso pra eles antes.*

(P7) Ana: *Isso. Ele já viu, talvez, por uma receita da mãe, ele ajudou a mãe a fazer uma receita e sabe que isso é meio.*

(P8) Maria: *É! Ou, se não, o sistema monetário pode contribuir, porque entre 0 e 1, que é onde ela quer chegar, eu posso pensar nos cinquenta centavos que é o 0,5.*

(P9) Ana: *Mas eles têm dificuldades com o sistema monetário! Eles têm mais dificuldades com o sistema monetário do que com fração.*

(P10) *Mariana: É, eles não pensam isso!*

Em P1, o Professor Formador 1 faz a pergunta às professoras sobre o que esperar dos alunos como um registro para o “meio”, buscando identificar maneiras que acreditavam ser suficientes para a promoção do registro, favorecendo a compreensão da existência de números entre zero e um. As professoras comentaram (P5, P7 e P8) que a vivência dos alunos poderia ajudar na promoção desse conhecimento. Duas das professoras (P9 e P10), porém, discordaram da colocação da professora Maria, feita em P8, por acreditarem que dificilmente um aluno faria analogia com o sistema monetário.

É possível, portanto, notar uma divergência de ideias (característica de um trabalho colaborativo) e a manifestação de subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino pela professora Maria, na medida em que percebe que o sistema monetário pode favorecer a explicação da existência de número entre zero e um.

Desenvolvimento da aula pela professora Maria

Passamos agora para trechos de diálogos que ocorreram durante a aula desenvolvida por Maria com sua turma do 5º ano, enquanto dialogavam a respeito da *Tarefa dos Canudos*. A aula já caminhava para o final, todos os itens da *Tarefa dos Canudos* já haviam sido realizados e discutidos com os alunos e o objetivo, naquele instante, era apresentar a representação de um número fracionário. Para isso, Maria convidou os alunos a pensarem junto com ela.

(A1) Maria*: Quem consegue me ajudar a representar esse meio?*

(A2) Karina: *Um inteiro e a metade de um*.

(A3) Maria: *A gente já conversou sobre meio e metade. Metade são as partes, ou seja, quantas metades tenho aqui?* [mostrando uma parte do canudo dobrado].

(A4) Turma toda: *Uma*.

(A5) Maria: *Se a gente tivesse que escrever um e meio ou um e metade, como a gente poderia escrever isso com números? Esse canudinho aqui, vocês me disseram que ele representa um inteiro* [a professora desenhou no Tabela um segmento de reta]. *A gente sai de onde? Qual o primeiro número?*

(A6) Fábio: *Zero*.

(A7) Maria: *Qual o próximo número depois do zero?*

(A8) Turma toda: *Um*.

(A9) Maria: *Olha só! Esse canudinho, se eu fosse expressar numericamente, quanto ele vale? Vale zero ou um?*

(A10) Turma toda: *Um*.

(A11) Maria: *Se esse canudo aqui é um, e vocês percebem que a metade é assim* [dobrou o canudo], *onde que eu represento nessa reta o meio?*

(A12) Turma toda: *No meio*.

Enquanto falava, a professora desenhava na lousa um segmento de reta, que começava no zero e ia até o um (A5), convidando os alunos a ajudá-la a representar o meio (1/2), fazendo um risco na metade do segmento de reta. A professora desejava comparar o canudo com o segmento de reta desenhado na lousa e, com isso, fazê-los perceber a existência de números entre zero e um. Como era de esperar, os estudantes consideraram que o próximo número depois do zero (A7) seria o um (A8). É exatamente essa compreensão que a professora desejava ampliar, indicando a existência de números entre o zero e o um.

(A13) Maria: *Vocês me disseram que se eu tivesse que representar a metade teria que fazer um risco bem no meio. Porque um canudo inteiro é um, e metade ficaria no meio, certo? Bom, se aqui é zero e se aqui é um, como que eu posso colocar nesse risco aqui no meio? Será que existe algum número que dá para colocar aqui?* [a professora está apontando para o risco no meio do segmento de reta que tem, em uma extremidade, o zero e, na outra, o um].

(A14) Aline: *Não*.

[...]

(A15) Karina: *Ou dava pra colocar: o um ali, o três lá e colocava o dois no meio*.

(A16) Cézar: *Zero, um, dois*.

As respostas dos alunos Karina e Cézar indicam que estavam pensando com base no conjunto dos números naturais. Quando Aline responde que não há como colocar um número entre o zero e o um, também parece estar considerando os números naturais, que provavelmente já conhece. Em A15, Karina sugere que, em vez de colocar o zero e o um nas extremidades do segmento de reta, daria para colocar o um e o três nas extremidades, pois, assim, seria possível admitir um número entre eles, o número dois. Maria não deu continuidade aos comentários de Karina e Cézar, mas convidou os alunos a pensarem na possibilidade de existir ou não números entre zero e um.

(A17) Maria: *Pessoal quem acha que existem números entre o zero e um?* [Silêncio]. *A pergunta é: Existem números entre zero e um? [...] Atenção, levanta a mão quem acha que não existem números entre o zero e o um. Pode levantar! Tem que escolher uma das duas opções.* [Alguns alunos levantam a mão.] *Abaixa. Quem acha que tem números entre o zero e o um?*

(A18) Gustavo: *É de moeda? É de reais? Se for de reais...*

(A19) Karina: *Tem*.

(A20) Gustavo: *Tem*.

(A21) Maria: *Se for de reais tem?*

(A22) Gustavo: *Tem*.

(A23) Maria: *Então, o Gustavo está dando um exemplo que se for em reais tem. Dá um exemplo, Gustavo. O que você quer dizer com isso?*

(A24) Gustavo: *Porque tia, olha ali, a metade de um real [...] é cinquenta centavos.*

(A25) Maria: *Hummm e agora? E se fosse...*

(A26) Turma toda: [Nesse momento, muitos falam ao mesmo tempo.]

(A27) Maria: *Olha! O Luiz falou que a metade de cinquenta centavos é vinte e cinco.*

(A28) Karina: *É*.

(A29) Maria: *E agora?* [A professora faz sinal para que Gustavo se levante e vá até ao Tabela pra registrar o número.] *Se esse um fosse um real, o que é que seria aqui,* *Gustavo?* [A professora mostrou o intervalo entre zero e um.] *Quer anotar? Como é que a gente anota cinquenta centavos?*

(A30) Gustavo: *Zero vírgula cinquenta* [Gustavo registra no Tabela.]

(A31) Maria: *Zero vírgula cinquenta. Esse todo mundo conhece, né? Ok, Gustavo, pode sentar.* [Nesse momento, Gustavo aponta para o intervalo da reta entre 0 e 0,50 e diz baixinho: "*Aqui é vinte e cinco centavos*". E volta para o seu lugar]

(A32) Maria: *Pessoal, vocês concordam com isso aqui?*

(A33) Turma toda: *Sim*.

A relação com o sistema monetário não ocorreu "ao acaso". A professora já havia trabalhado o sistema monetário com a turma, e, durante a aula, alguns alunos já haviam trazido essa discussão para definir o que seria a metade. Por exemplo, foi falado que a metade de 5 reais era R$ 2,50 e que a metade de 3 reais era R$ 1,50. No entanto, no contexto do diálogo transcrito, a professora queria abordar a representação do meio (1/2) e sua localização entre o zero e o um. Nesse caso, a professora evidencia seu Conhecimento do Conteúdo e do Estudante, na medida em que antecipar uma possível forma de lidar de seus alunos. Do mesmo modo, ao permitir que o aluno use o exemplo da representação monetária para explicar que existem números entre zero e um, a professora Maria mobiliza o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, pois valoriza as diferentes formas de representar um número racional, como podemos confirmar na sequência dos diálogos, em A23 e A24. Ficou claro também que, ao localizar o número (A31), Gustavo saberia localizar o 0,25 centavos se a professora tivesse perguntado, pois, antes de voltar a se sentar, ele aponta para o intervalo entre 0 e 0,50 e diz baixinho: "*Aqui é vinte e cinco centavos*". É possível ver essa ação de Gustavo na Figura 2.

Figura 2.

O aluno Gustavo, após localizar 0,50 na reta numérica, aponta a posição do 0,25

Depois que Gustavo aponta, no segmento de reta desenhado na lousa, os cinquenta centavos e registra o número 0,5, Maria busca trabalhar a ideia da metade, já conhecida dos alunos, para chegar à representação do meio.

(A32) Maria: *Pessoal, vocês concordam com isso aqui?*

(A33) Turma toda: *Sim*.

(A34) Maria: *Sim? Olha só...Agora pouco a Aline me falou que a metade de 10 é 5. O que isso tem a ver?*

(A35) Karina: *Porque é metade. Se você tem 10 reais e sua mãe pede pra dar metade para o seu irmão, você vai ficar com 5 reais.*

(A36) Maria: *Agora, ouçam o que eu vou falar, eu tenho aqui uma medida e aqui tenho outra*. [A professora aponta para o zero e, depois, para um no segmento de reta]. *Aqui eu tenho quantos inteiros?*

(A37) Turma toda: *Um*!

(A38) Maria: *Um inteiro. Zero para o um, tenho um só. Quando eu faço uma marcação no meio e quero saber a metade, eu divido esse 1 em quantas partes?*

(A39) Luiz e André: *Duas*.

(A40) Maria: *Não é? Vocês não me disseram que quando eu quero uma parte eu divido ao meio? Em quantas partes? O que acontece se eu pegar 1 e dividir em 2 partes?* [nesse momento a professora escreveu no Tabela o algoritmo da divisão 1 por 2].

(A41) Priscila: *Vai ficar com 50 centavos se for em reais.*

(A42) Maria: *Ah, vai ficar 0,50. É possível dividir 1 para 2?*

(A43) Karina: *Se for dinheiro.*

(A44) Maria: *Se não for dinheiro não tem jeito?*

(A45) Priscila: *Se for comida também dá.*

(A46) Maria: *Esses dias eu perguntei pra vocês quando sobra a última bolacha do pacote e você tem que dividir com seu irmão, você fala que não dá? O que você faz? Pessoal olha só, é possível dividir 1 para 2?*

(A47) Turma toda: *Não!*

(A48) Maria: *Olha só! Um dá pra dividir pra dois? A resposta é: não inteiro! Mas, se eu cortar, dividir... Olha só o que acontece, nós vamos aprender daqui uns dias a dividir esse um por dois. Quando a gente divide um por dois, significa que alguém vai ganhar um inteiro?* [Nesse momento, a professora foi até a lousa e colocou um zero no quociente e uma vírgula, porque um não vai dar um inteiro].

(A49) Karina: *Não, sempre a metade.*

Em A38 e A40, Maria associa a ideia de meio à divisão de 1 por 2. Nesse momento, entendemos que a professora mobiliza o Conhecimento Especializado do Conteúdo, pois está transitando entre o número $1/2$ e o processo de divisão de 1 por 2 para tentar levar os alunos a compreenderem.

Em A42, Maria levanta uma questão fundamental: É possível dividir um para dois? É comum alguns estudantes responderem que não (como ocorreu em A47), uma vez que ainda não aprenderam a realizar divisões com resto diferente de zero. No entanto, esse era o desafio de Maria, trabalhar o fato de que é possível usar uma representação para um número cujo significado é uma divisão indicada, isto é, Maria estava focando o significado de fração como quociente. Novamente, a professora mobiliza o Conhecimento Especializado do Conteúdo, pois está transitando entre o significado de $1/2$ como uma medida (o canudo e a localização do número no segmento de reta) e como uma divisão indicada (quociente). Em A48, a professora avança e conecta a discussão a outro tema de difícil compreensão: o algoritmo da divisão entre números naturais com o quociente decimal. Não era o objetivo da *Tarefa dos Canudo* trabalhar essa divisão, mas a professora optou por realizá-la na lousa (Figura 3), algo que pretendia trabalhar com os alunos somente dali alguns dias (A48). Por não ser o foco da aula, Maria não se aprofunda na explicação, coloca o "*zero vírgula*" enquanto pergunta: "*[...]alguém vai ganhar um inteiro?*", acrescenta o zero no dividendo, transforma o 1 em 10 décimos, conforme diálogo a seguir, e divide o 10 por 2, obtendo o resultando final 0,5.

(A50) Maria: *E se transformar esse um inteiro em dez partes?* [nesse momento a professora acrescenta um zero ao lado do um no dividendo para resolver a conta]. *Aí dá pra dividir?*

(A51) Karina: *Sim. Aí coloca o 10 lá e vai ficar 5*.

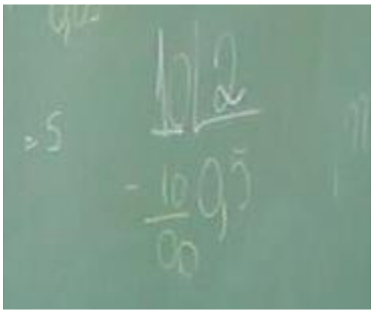

Figura 3.

Algoritmo da divisão 1 por 2, feito pela professora

A professora queria relacionar o 0,5 com o 1 dividido por 2, ou seja, ela queria conectar o tão comentado meio com o resultado da divisão de 1 por 2. A explicação da professora para o algoritmo da divisão foi rápida e superficial. Ela não tinha tempo para isso e não era o objetivo central da aula, mas foi a saída que encontrou para conectar as ideias de meio, metade e 1 dividido por 2 com as representações 0,5 e 1/2.

Após a professora escrever na lousa o 0,5 como resultado da divisão de 1 por 2, outra questão central surgiu e a personagem principal foi a aluna Yara. Vejamos o diálogo.

(A52) Maria: *Pessoal, como é que a gente chama esse 0,5, alguém sabe?*

(A53) Priscila: *Cinco centavos.*

(A54) Maria: *Cinco centavos?*

(A55) Yara: *Dá para falar zero vírgula cinco, porque se fosse centavos, ia ter outro zero na frente do cinco, então não é centavos.*

(A56) Maria: *Olha! A Yara falou que se fosse cinco centavos, ia ser assim ó ia ter outro zero diante do 5* [e escreveu no Tabela 0,05]. *Se só tem esse 5 depois da vírgula, ele se parece com quanto?*

(A57) Karina: *Com 50.*

(A58) Maria: *Pressupõe outro zero aqui, né? Ok.* [mostrando um zero depois cinco]. *Não tem a ver com que a Aline falou? Ela tinha falado que a metade de 10 é 5. Será que de alguma forma ela acertou?*

(A59) Toda turma: *Sim!*

(A60) Maria: *O Gustavo, quando colocou 0,50, se eu apagar esse zero vai mudar alguma coisa?* [A professora apagou o zero que o aluno Gustavo havia colocado para localizar os 50 centavos no segmento de reta.] *Parece que sim, mas não. Olha o zero vírgula cinco aqui.*

A discussão levantada por Yara é relevante. Há um salto entre falar em 50 centavos ou R$ 0,50 e o número 0,50 ou 0,5. Esse salto pode gerar dúvidas entre os alunos, e o professor formador leva essa discussão para a reflexão coletiva após a aula, no terceiro encontro.

Terceiro encontro presencial

No início do trecho abaixo, o professor formador 2 e as professoras estão discutindo sobre o fato de Gustavo ter apontado para o segmento reta e localizado o 0,25 (conforme Figura 2 e excerto A31).

(T1) Professor Formador 2: [...] *É interessante porque, assim, uma coisa é pensar que 25 centavos é metade de 50 outra coisa é localizar na reta.*

(T2) Sônia: *Foi um outro menino que falou 25 centavos?*

(T3) Professor Formador 2: *Isso, um outro menino que falou que é 25, e aí você falou: olha, fulano falou 25. Mas, esse aí, esse daí* [Gustavo] *eu achei interessante porque ele apontou na reta.*

(T4) Maria: *É! E o outro lá, a metade de 50 centavos é 25 centavos, ele falou.*

(T5) Professor Formador 2: *Essa é uma ideia interessante, mas, pra mim, matematicamente, mais interessante é ele saber localizar na reta.*

Quando, em T5, o Professor Formador 2 considera que o mais interessante, matematicamente, é que o aluno Gustavo tenha localizado o número no segmento de reta, talvez ele estivesse se referindo ao fato de que 50 é um número maior do que 1, mas, no contexto em que estavam trabalhando, tratava-se de 50 centavos[9] (e não o número abstrato 50) que pode também ser representado por 0,50 real. Essa passagem não é simples de ser compreendida, logo, do ponto de vista do conhecimento matemático do professor, foi importante problematizá-la. Os professores então, a partir da ação do formador, continuam o debate, voltando-se para o comentário feito por Yara.

> (T6) Professor Formador 2: *Essa questão do 0,5 pra mim ela tem um ponto.* [...] *Não é tão simples pensar que 0,5 e 0,50 são a mesma coisa.* [...] *Para mim, mais importante do que isso é se os alunos forem fazer uma relação com os 50 centavos, eu não sei se muda pra eles o fato de tirar o zero*.
>
> (T7) Professoras: *Com certeza muda*.
>
> (T8) Professor Formador 2: *Tem um momento que a aluna fala: "é cinco centavos", na hora que você* [Maria] *faz a divisão lá do 1 por 2 e deu 0,5, uma aluna falou que é cinco centavos. Aí você fala "é cinco centavos?" e alguém fala "é cinquenta centavos".*
>
> (T9) Maria: *Ela* [Yara] *fala que tinha que ter um zero a mais na frente do cinco pra ser cinco.*
>
> (T10) Professor Formador 2: *Chega um momento que a aluna fala assim: não é centavos porque tinha que ter um zero na frente do cinco. Aí a Maria foi lá escreveu isso: 0,05* [para ser centavos]. *Eu interpretei diferente a fala da menina, quando ela fala que tem que ter um zero na frente do cinco, eu não sei na frente do que ela está falando. Se o zero que ela está falando fosse aqui ó* [foi no Tabela e apontou o dedo esquerdo para a vírgula e com o direito fez um zero depois do 5] *aí ela estaria entendendo que aquela divisão de 1 por 2 daria 50 centavos. Só que, como ela não colocou o zero, eu tenho a impressão que ela não associou esse 0,5 com 50 centavos. Porque 0,5 pra ela é uma coisa e 50 centavos é outra*.
>
> (T11) Fabiana: *0,5 seria metade e 0,50 seria 50 centavos.*

[9] Para mais detalhes sobre esse tema, ver Muniz, Batista & Silva (2008).

(T12) Professor Formador 2: *Então, pra mim, ali, mora uma dificuldade da relação entre 50 centavos com 0,5 ou o 0,50. A dificuldade da relação do sistema monetário com o número abstrato. Eu não estou dizendo que não serve o sistema monetário, muito pelo contrário, ele serve muito bem. Só que cuidado para não achar que a compreensão está bem feita, e às vezes ela não está. Depois você vê, a reação da menina não é clara se é aquilo lá que você escreveu na lousa.*

(T13) Maria: *É, eu tinha que ter pedido pra ela escrever na lousa. Na minha cabeça tá tão claro, você ouve o aluno, às vezes ele quis dizer isso e não é.*

Em A55, a aluna Yara parece indicar essa complexidade sugerida pelo professor formador (T6, T10 e T12). Para ela, o número é zero vírgula cinco, mas, se fosse no contexto do sistema monetário (centavos), deveria haver outro zero na frente do cinco. Não é possível ter certeza o que Yara estava querendo dizer, mas temos duas hipóteses: a primeira é a mesma que Maria apresentou em A56, quando considera que o "*outro zero na frente do cinco*" seria entre o cinco e a vírgula, ficando 0,05 real; a segunda é que o "*outro zero na frente do cinco*" seria do lado direito do cinco, ficando 0,50 real. Acreditamos que essa segunda seja a mais provável e, nesse caso, Yara está buscando estabelecer uma relação entre o número 0,50 e o 50 centavos. Para uma criança que está começando a aprender, não é simples compreender que 0,5 é o mesmo que 0,50.

Em A60, Maria tenta explicar que não há diferença entre 0,50 e 0,5, quando diz que "*Parece que sim, mas não*". Entendemos que uma explicação desse tipo merece mais tempo, coisa que a professora não tinha naquele momento. No entanto, interpretamos que a professora mobiliza o Conhecimento Especializado do Conteúdo ao associar os cinco centavos à representação 0,05, na tentativa de compreender o pensamento manifestado por Yara. Além disso, mesmo que no momento da aula a professora não tenha pensado na interpretação mencionada pelo Professor Formador 2, entendemos que a sua participação no diálogo (T1 a

T13) se configurou em uma possibilidade para refinar seu Conhecimento Especializado do Conteúdo, consequência do trabalho colaborativo promovido pelo Estudo de Aula.

Por fim, após a explicação de que o 0,5 (meio) é o resultado da divisão de 1 por 2, a representação na forma fracionária foi feita por uma aluna no Tabela (Figura 4), sem grandes dificuldades, pois, provavelmente, esta aluna já tinha visto aquela escrita antes.

Figura 4.

A representação fracionária do meio feita por uma aluna

Consideramos que a professora atingiu seu objetivo pretendido para a aula. Maria comenta isso em uma reflexão individual realizada logo após esse encontro, por meio de uma mensagem de áudio enviada aos formadores, em que valoriza as diversas possibilidades que a *Tarefa dos Canudos* permitiu. Aceitar o desafio de introduzir o conteúdo fração de uma forma diferente da que estava acostumada (usando o significado parte-todo), como os livros didáticos apresentam, foi mais um desafio que a professora se propôs a aceitar nesse ciclo de Estudo de Aula.

> (R1) Maria: *A aula de hoje, fez um registro na memória deles, causou algo né? Foi uma atividade diferenciada. [...] Uma coisa que eu sempre procuro fazer é sempre retomar os conteúdos e então isso daí vai dar gancho para eu poder dar continuidade e assim em muitas situações né, e a reta numérica, essa questão dos números que existem entre o 0 e 1, é a fração, os decimais, até medida de comprimento, tudo isso depois dá para voltar e fazer uma ponte com a aula. Então, eu tô assim bem realizada de ter feito e eu espero que as nossas colegas também se envolvam e apliquem porque*

é um ganho, é um dia que você faz uma atividade dessa, mas que tem retorno e eu acredito que os meus alunos vão conseguir pensar um pouco mais além.

A Tarefa de Aprendizagem Profissional

Iniciamos descrevendo os procedimentos metodológicos para a elaboração da TAP. A TAP destina-se a quem deseja oferecer uma formação (inicial ou continuada) para professores que ensinam Matemática nos anos iniciais, e seu objetivo é promover discussões matemáticas e didático-pedagógicas com vistas a mobilizar subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino de números racionais nos anos iniciais.

De acordo com Smith (2001), as TAP são elaboradas a partir de *amostras autênticas da prática*, isto é, materiais obtidos de situações reais que envolvem o trabalho docente, tais como: tarefas matemáticas utilizadas por professores, diálogos entre estudantes e professor em sala de aula, protocolos de resolução de estudantes, planejamentos de aula feito pelo professor. Esses materiais possuem potencial para auxiliar os professores a desenvolverem compreensões a respeito de um conteúdo específico, questões pedagógicas ou, ainda, conhecimentos sobre a aprendizagem dos estudantes (Smith, 2001).

Smith (2001) comenta que essas *amostras autênticas da prática* não são auto-organizadas, mas fornecem a matéria-prima em torno da qual uma TAP pode ser concebida. Isso significa que as *amostras autênticas da prática* precisam ser organizadas de acordo com determinado objetivo a fim de se tornarem TAP e fazerem parte de um currículo para a formação de professores. Para a autora, uma maneira de delinear uma TAP é considerar o conjunto de ações que comumente envolve o trabalho docente. Em nosso caso, esse conjunto de ações envolve dados produzidos em duas etapas do ciclo de Estudo de Aulas: o desenvolvimento de uma aula e a análise/reflexão coletiva dessa aula.

Com base no que foi proposto por Smith (2001), selecionamos e organizamos *amostras autênticas da prática* produzidas ao longo do evento crítico analisado e elaboramos perguntas para promover discussões e reflexões entre professores em formação que estejam fazendo uso da TAP proposta. A TAP organizada por meio das amostras autênticas emerge das reflexões dos autores da pesquisa a partir da análise dos dados. Para as escolhas das *amostras autênticas da prática*, demos preferência aos trechos de diálogo (entre as professoras e professores formadores no grupo, entre a professora e os estudantes durante a aula desenvolvida) que permitiram a manifestação de subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (Ball, Thames & Phelps, 2008) pela professora Maria e que têm potencial para que professores em processos de formação inicial e continuada mobilizem esses e outros subdomínios. A TAP é apresentada em cinco partes, apresentadas nos Tabelas 3 a 7.

Tabela 3.

TAP – Parte 1:explicação e apresentação

Aqui TAP aqui apresentada foi construída com diálogos *autênticos de sala de aula*, ocorrido no dia 14/05/2019 (conforme Tabela 1) durante o desenvolvimento da aula planejada coletivamente, e diálogo ocorrido na reflexão coletiva sobre a aula realizada por professores em um processo formativo. A professora regente buscava, em sua turma do 5º ano do Ensino Fundamental, introduzir a necessidade das frações e sua representação por meio do significado de medida (Kieren, 1976, 1980), solicitando aos alunos usarem um canudo para medirem objetos da sala de aula. Os trechos de diálogos utilizados para construir essa TAP aconteceram já no final da aula, quando a professora tentava sintetizar as discussões feitas pelos alunos em pequenos grupos e apresentar a notação usual de frações. Assim, fazendo uso dos diálogos de sala de aula e das reflexões coletivas dos professores após a aula, a TAP visa gerar aprendizagens a respeito do uso de situações do cotidiano (o sistema monetário) no ensino da Matemática e, em particular, no ensino dos números racionais.

Tabela 4.

TAP – Parte 2: o diálogo entre a professora Maria e seus alunos

Em sua turma de 5º ano do Ensino Fundamental, uma professora, aqui chamada de Maria, queria trabalhar com seus alunos a necessidade da criação de números entre 0 e 1 partindo

de ideias fundamentais como metade, a metade da metade e a terça parte, conduzindo-os às formas de representar frações usuais, como 1/2, 1/4 e 1/3. Em um determinado momento da aula, a professora Maria indaga seus alunos, que parecem aceitar a ideia da existência de números entre 0 e 1, mas isso estaria atrelado ao sistema monetário. Vejamos o diálogo ocorrido em sala de aula:

> **Profa. Maria**: *Quem acha que existem números entre o 0 e o 1? Pensem um pouquinho. A pergunta é: Existem números entre 0 e o 1? Atenção: levante a mão quem acha que não existem números entre 0 e 1.* [Alguns alunos levantam a mão]. *Abaixem as mãos. Quem acha que têm números entre o 0 e o 1?*
>
> **Aluno Gustavo**: *É de reais? É de reais? Porque se for de reais...* [o aluno levanta a mão, indicando que, se for "de reais", concorda que existem números entre 0 e 1].
>
> **Profa. Maria**: *Se for em reais tem? Então, o Gustavo está dando um exemplo, se for de reais tem. Dá um exemplo, Gustavo.*
>
> **Aluno Gustavo**: *Porque, olha... a metade de um real é cinquenta centavos.*
>
> **Profa. Maria**: *e agora?* [questionando o restante da turma]
>
> [Muitos alunos falam ao mesmo]
>
> **Profa. Maria**: *Olha! O Luiz está falando que a metade de 50 centavos é 25.*

Nesse momento, Gustavo balança a cabeça na vertical e diz "Acertou", concordando com a resposta de Luiz. A professora chama Gustavo para ir à lousa. Apontando para um segmento de reta que fez na lousa, com o número 0 em uma ponta e o número 1 na outra, a professora pergunta:

> **Profa. Maria**: *Se esse 1 fosse 1 real, o que seria aqui, Gustavo?*
>
> **Aluno Gustavo**: *Cinquenta centavos.*
>
> **Profa. Maria**: *Quer anotar? Como a gente anota cinquenta centavos?*
>
> **Aluno Gustavo**: *zero vírgula cinquenta.*
>
> **Profa. Maria**: *zero vírgula cinquenta.*

Gustavo registra na lousa o número 0,50 entre o 0 e o 1, como mostra a Figura 5.

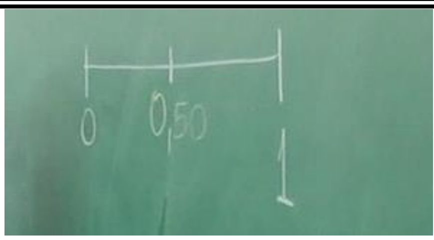

Figura 5.

Representação de cinquenta centavos feita pelo aluno Gustavo

Após Gustavo sentar-se em seu lugar, a professora continua.

Profa. Maria: *Vocês concordam com isso?*

Alunos: *Sim.*

[...]

Profa. Maria: *Quando eu faço uma marcação aqui no meio* [a professora reforça o traço do 0,50 na Figura 5], *quando eu quero saber a metade, eu divido em quantas partes?*

Alunos: *É... em duas?*

Profa. Maria: *Não é? Vocês não me disseram que quando eu quero a metade eu divido ao meio? O que acontece se eu pegar 1 e dividir em duas partes?* [Na lousa, a professora monta a divisão de 1 por 2 na chave].

Aluna Priscila: *Vai ficar cinquenta centavos, se for em reais*.

Profa. Maria: *Vai ficar cinquenta centavos! É possível dividir 1 para 2?*

Priscila e outros alunos: *Não!*

Aluna Letícia: *Sim!*

Aluna Karina: [Sim] *se for em dinheiro! Se for em dinheiro*.

Profa. Maria: *Se não for em dinheiro, não tem jeito?*

Aluna Priscila: *Se for comida também dá.*

Profa. Maria: *Ah, se for comida também dá! [...] Então, olha só, 1 dá para dividir por 2? A resposta é: não inteiro, mas se eu cortar, dividir...*

Tabela 5.

TAP – Parte 3: questões para discussão no grupo de formação

Com base no diálogo apresentado no Tabela 4, discuta com seu grupo as seguintes questões: **a)** Como vocês avaliam a resposta do aluno Gustavo, que reconhece a existência de números entre 0 e 1, mas associa essa existência ao contexto do sistema monetário? **b)** Vocês acreditam que a fala "*a metade de um real é cinquenta centavos*" feita por Gustavo é adequada para as ideias matemáticas que a professora Maria quer ensinar? Comentem. **c)** Vocês acreditam que a forma de registrar os cinquenta centavos fazendo "*zero vírgula cinquenta*", como mostra a Figura 5, é apropriada para a aprendizagem matemática dos alunos? Essa compreensão pode acarretar erros futuros? Se sim, de que tipo? **d)** Na sequência da aula, a professora Maria escreve na lousa o número 0,5 e pergunta: "*Como a gente chama esse 'zero vírgula cinco', alguém sabe*?". Na expectativa de algum aluno responder "*meio*", a professora se surpreende com a resposta de uma aluna: "*cinco centavos*". Ao que outra aluna comenta: "*É 'zero vírgula cinco', porque se fosse centavos, ia ter outro zero na frente do cinco, então não é centavos*". Interpretem esses comentários, tentando compreender a forma como essas duas alunas estavam pensando.

Tabela 6.

TAP – Parte 4: o diálogo entre a professora Maria e outros professores

Em um momento posterior à aula desenvolvida pela professora Maria, ela se reuniu com um grupo de professores para debater sobre a situação que enfrentou com seus alunos. Os professores assistem a trechos da gravação da aula da professora Maria e discutem sobre o desenvolvimento da aula. O diálogo a seguir foi transcrito dessa discussão entre Maria e outros professores. **Prof. João**: *Chega um momento que a aluna fala assim: não é centavos porque tinha que ter um zero na frente do cinco. Aí a Maria foi lá escreveu isso: 0,05* [para ser centavos]. *Eu interpretei diferente a fala da menina, quando ela fala que tem que ter um zero na frente do cinco, eu não sei na frente do que ela está falando. Se o zero que ela está falando fosse aqui ó* [foi no Tabela e apontou o dedo esquerdo para a vírgula e com o direito fez um zero depois do 5] *aí ela estaria entendendo*

que aquela divisão de 1 por 2 daria 50 centavos. Só que, como ela não colocou o zero, eu tenho a impressão que ela não associou esse 0,5 com 50 centavos. Porque 0,5 pra ela é uma coisa e 50 centavos é outra.

Profa. Fabiana: *0,5 seria metade e 0,50 seria 50 centavos.*

Prof. João: *Então, pra mim, ali, mora uma dificuldade da relação entre 50 centavos com 0,5 ou o 0,50. A dificuldade da relação do sistema monetário com o número abstrato. Eu não estou dizendo que não serve o sistema monetário, muito pelo contrário, ele serve muito bem. Só que cuidado para não achar que a compreensão está bem feita, e às vezes ela não está. Depois você vê, a reação da menina não é clara se é aquilo lá que você escreveu na lousa.*

Profa. Maria: *É, eu tinha que ter pedido pra ela escrever na lousa. Na minha cabeça tá tão claro, você ouve o aluno, às vezes ele quis dizer isso e não é.*

Tabela 7.

TAP – Parte 5: questões para discussão no grupo de formação

e) Como seu grupo avalia, no que diz respeito à aprendizagem dos números decimais, essa relação entre o número abstrato 0,50 e o valor 50 centavos mencionada pelo professor João?

f) Como vocês analisam a interação entre os professores nesse diálogo e a última fala da professora Maria? Vocês acreditam que a discussão coletiva com os demais professores contribuiu para o conhecimento matemático da professora? Comente.

g) No material elaborado por Muniz, Batista & Silva (2008, p. 30), os autores consideram que

> O sistema monetário brasileiro é um espaço privilegiado para o estudo de números decimais. O manuseio de moedas e cédulas, a vivência com valores são procedimentos fundamentais para o desenvolvimento das habilidades relativas ao trabalho com decimais e devem começar desde a alfabetização.

Com seu grupo, analise e discuta a seção “Sistema Monetário Brasileiro” do material (da página 30 até a 35). Como vocês avaliam a proposta do uso sociocultural de números com vírgulas no Sistema Monetário Brasileiro?

Entendemos que essa TAP (apresentada nos Tabelas 3 a 7) tem potencial para desenvolver/refinar o Conhecimento Matemático para o Ensino de números racionais, especialmente no que diz respeito ao Conhecimento Especializado do Conteúdo (no que diz respeito à representação de números racionais na forma decimal), ao Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (em termos da relação entre as representações 0,5 e 0,50 com o Sistema Monetário Brasileiro) e ao Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (a partir da discussão da resposta e do registro do aluno Gustavo), conforme mostraram as análises na seção anterior. Destacamos que, além do uso de registros da prática letiva autêntica da professora Maria, como preconizado por Ball e Cohen (1999) e Smith (2001), e discutido no trabalho de Ribeiro, Aguiar e Trevisan (2020), essa TAP incorporou também registros do próprio processo formativo, evidenciando seu potencial para retroalimentação do Estudo de Aula. Também, a incorporação na TAP, da indicação de estudo de um trabalho científico (Muniz, Batista & Silva, 2008), como um caminho para sistematizar e fundamentar as discussões na etapa de reflexão da aula, evitando-se que se esvaziem ou se restrinjam às percepções individuais dos professores envolvidos.

Considerações finais

Nesta pesquisa, tivemos dois objetivos: (i) analisar o conhecimento matemático para o ensino mobilizado por uma professora quando participa de um ciclo de Estudo de Aula; e (ii) apresentar o processo de construção de uma TAP elaborada a partir de *amostras autênticas da prática* obtidas dos dados produzidos durante o ciclo do Estudo de Aula analisado.

Com relação ao primeiro objetivo, percebemos, como a literatura científica já antecipava, que o Estudo de Aula (Bezerra & Morelatti, 2020; Curi & Martins, 2018; Ponte et al., 2014; Ponte et al., 2016), enquanto uma abordagem para a formação de professores estreitamente relacionada com a prática (Cochran-Smith & Lytle, 1999; Smith, 2001), oportuniza momentos para o desenvolvimento/refinamento do conhecimento matemático para o ensino (Ball, Thames & Phelps, 2008), conforme verificamos a partir dos subdomínios do MKT mobilizados pela professora Maria. Consideramos que esse resultado de nossa pesquisa reforça o que a literatura sobre desenvolvimento profissional docente já apresenta (Passos et al., 2006; Fiorentini & Crecci, 2013).

Consideramos que a maior contribuição deste artigo para a Educação Matemática enquanto área do conhecimento encontra-se no segundo objetivo da pesquisa. Ao apresentar o processo de elaboração de uma TAP (Smith, 2001; Ribeiro, Aguiar & Trevisan, 2020), desenvolvida após cuidadoso processo analítico de um ciclo de Estudo de Aula realizado em um grupo de trabalho colaborativo, apresentamos à comunidade uma maneira de produzir um artefato para formação de professores, com potencial para trazer aspectos da prática para dentro de processos formativos. Uma característica inovadora desta TAP é que uma sua primeira versão já havia sido utilizada no terceiro encontro do processo formativo (sendo, inclusive, disparadora da discussão apresentada no diálogo de T1 a T13), sendo que a versão apresentada nos Tabelas 3 a 7 é uma reformulação acrescida de trechos de diálogos da reflexão coletiva (de T10 a T13). Dessa maneira, a TAP traz *amostras autênticas da prática*, como sugere Smith (2001), mas, considerando que o momento de discussão/reflexão entre professores enquanto trabalham colaborativamente (Ball & Cohen, 1999; Boavida & Ponte, 2002; Ponte, 2004) também pode ser tomada como um momento de produção de conhecimento matemático (Cochran-Smith & Lytle, 1999; Boavida & Ponte, 2002; Fiorentini & Crecci, 2013) e, portanto, pode ser levada para debates em processos formativos.

Na introdução desta pesquisa, mencionamos as noções de *investigação como postura*, de Cochran-Smith e Lytle (1999), e de *matemática escolar*, de Moreira e David (2010). A TAP aqui proposta é entendida por nós como um dos caminhos possíveis para se pôr em ação essas noções, trazendo aspectos da prática docente para dialogar com produções acadêmicas a respeito do tema.

Referências

Ball, D. L. & Cohen, D. (1999). Developing practice, developing practitioners: toward a practice – based theory of professional education. In: G. Sykes, L. Darling–Hammond (Eds.). *Theaching as the learning profession: handbook of poliey and practice* (pp. 3-32). San Francisco: Jossey Bass.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, n.59, 389-407.

Bezerra, R. C. & Morelatti, M. R. M. (2020). Aprendizagens de Professores que Ensinam Matemática no contexto da Lesson Study. *Hipátia*, 5(1), 72-85.

Boavida, M. & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In: GTI (Org), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação* – Uma Introdução à Teoria e aos Métodos. Porto/PT: Porto Editora LDA.

Campos, T. M. M., Magina, S. & Nunes, T. (2006). O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 125-136.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Cochran-Smith, M. & Lytle, S. L. (1999). Relationships of knowledge and practice: teacher learning in communities. *Review of Research in Education*, London: Sage, 24, 249-305.

Curi, E. & Martins, P. B. (2018) Contribuições e desafios de um projeto de pesquisa que envolve grupos colaborativos e a metodologia Lesson Study. *R. bras. Ens. Ci. Tecnol*., 11 (2), 478-497.

Elias, H. R. (2017). *Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática*. [Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina]. http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000213550

Fiorentini, D. & Crecci, V. (2013). Desenvolvimento Profissional Docente: Um Termo Guarda-Chuva ou um novo sentido à formação? *Formação Docente*, 5(8), 11-23.

Fiorentini, D. & Crecci, V. (2016). Interlocuções com Marilyn Cochran-Smith sobre aprendizagem e pesquisa do professor em comunidades investigativas. *Revista Brasileira de Educação,* 21(65), 505-524.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.) *Number and measurement*: papers from a research workshop (pp. 101-144). Columbus, Ohio: Eric/Smeac.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct – its elements and mechanisms. In: T. Kieren (Ed.) *Recent Research on Number Learning* (pp. 125-150). Columbus: Eric/Smeac.

Moreira, P. C. & David, M. M. M. S. (2010). *A formação matemática do professor*: Licenciatura e prática docente. Belo Horizonte: Autêntica.

Muniz, C. A., Batista, C. O. & Silva, E. B. (2008). *Módulo IV: Matemática e Cultura: Decimais, Medidas e Sistema Monetário*. Brasília: Universidade de Brasília.

Passos, C. L. B., et al. (2006). Desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática: uma meta-análise de estudos brasileiros. *Quadrante*, 15(1-2), 193-219.

Pimenta, S. G. & Lima, M. S. L. (2005). Estágio e docência: diferentes concepções. *Revista Poíesis*, 3(3-4), 5-24.

Ponte, J. P. (2004). Pesquisar para compreender e transformar a própria prática. *Educar em Revista*, 24, 37-66.

Ponte, J. P., et al. (2014). Os estudos de aula como processo colaborativo e reflexivo de desenvolvimento profissional. In J. Sousa & I. Cevallos (Eds.), *A formação, os saberes e os desafios do professor que ensina Matemática* (pp. 61-82). Curitiba: Editora CRV.

Ponte, J. P., et al. (2016). O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática. *Bolema*, 30(56), 868 - 891.

Powell, A. B., Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2004). Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento das Idéias Matemáticas e do Raciocínio de Estudantes. *Bolema*, 17(21), 81-140.

Ribeiro, A. J.; Aguiar, M.; Trevisan, A. L. (2020). Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores ao discutir coletivamente uma aula sobre padrões e regularidades. *Quadrante*, 29(1), 52-73.

Saraiva, M. & Ponte, J. P. (2003). O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante*, 12(2), 25-52.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Smith, M. S. (2001) *Practice-Basead Professional Development for Teachers of Mathematics*. Reston, Virgínia: National Council of Teachers of Mathematics.