

Abordagem Instrumental e aplicações

Instrumental Approach and Applications

Enfoque instrumental y aplicaciones

Afonso Henriques¹

Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)

Id ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8783-6008>

Resumo

Este artigo tem como objetivo trazer contribuições acerca da utilização da Abordagem Instrumental, de Pierre Rabardel, como quadro teórico eficaz no desenvolvimento de trabalhos de pesquisadores que se interessam pela análise de ferramentas tecnológicas e suas potencialidades que interveem na relação do sujeito (pesquisador, Professor² e/ou estudante), com os objetos de saberes por mediação destas ferramentas, visando a aprendizagem matemática. Nas aplicações, damos atenção especial às ferramentas tecnológicas digitais, elegendo o *software GeoGebra* como *ambiente computacional* de aprendizagem, observando os elementos teóricos desta abordagem em duas dimensões, que definimos como *pesquisa interna* e *pesquisa externa*. Propomos, por conseguinte, uma extensão do modelo de *Situações de Atividades Instrumentais* (SAI) em três dimensões, provocando uma reflexão sobre o papel do Professor ou do pesquisador nas relações primitivas deste modelo na *pesquisa externa*, durante a aplicação em sala de aula. Esperamos que as nossas contribuições/reflexões encontrem um espaço significativo no desenvolvimento de pesquisas educacionais, especialmente em ciências e matemática, utilizando a Abordagem Instrumental de Rabardel.

Palavras-chave: *Instrumento*, Modelo SAI estendido, Pesquisa interna, Pesquisa externa, Tecnologias digitais; Matemática.

¹ E-mail: henry@uesc.br

² O autor defende que o termo Professor será e deveria sempre ser escrito com a letra P Maiúscula, pois este é um profissional que merece e deve ser respeitados como os outros. O simples gesto de aplicar essa letra, engrandece também a sua personalidade. (Henriques, 2019, p. 19)

Abstract

This article aims to bring contributions about the use of Pierre Rabardel's Instrumental Approach, as an effective theoretical framework in the development of studies by researchers who are interested in the analysis of technological tools and their potentialities that intervene in the subject's relationship (researcher, Professor³ and/or student), with the objects of knowledge through the mediation of these tools, aiming at mathematical learning. In the applications, we give special attention to digital technological tools, choosing the GeoGebra software as a computational learning environment, observing the theoretical elements of this approach in two dimensions, which we define as internal research and external research. We therefore propose an extension of the Instrumental Activity Situations (IAS) model in three dimensions, motivating a reflection on the role of the Professor or researcher in the primitive relations of this model in external research, during its application in the classroom. We hope that our contributions/reflections find a significant space in the development of educational research, especially in science and mathematics using Rabardel's Instrumental Approach

Keywords: Instrument, Extended IAS model, Internal research, External research, Digital technologies; Mathematics.

Resumen

Este artículo tiene como objetivo aportar contribuciones sobre el uso del Enfoque Instrumental, de Pierre Rabardel, como marco teórico efectivo en el desarrollo de trabajos de investigadores interesados en el análisis de las herramientas tecnológicas y sus potencialidades que intervienen en la relación del sujeto (investigador, Profesor⁴ y/o estudiante), con los objetos de conocimiento a través de la mediación de estas herramientas, objetivando el aprendizaje

³ The author argues that the term Professor will and should always be written with the capital letter P, as this is a professional who deserves and should be respected like the others. The simple gesture of applying this letter also enhances his/her personality. (Henriques, 2019, p. 19)

⁴ El autor sostiene que el término Profesor se escribirá y debe escribirse siempre con la letra P mayúscula, ya que se trata de un profesional que merece y debe ser respetado como los demás. El simple gesto de aplicar esta letra también realza su personalidad (Henriques, 2019, pág.19).

matemático. En las aplicaciones, prestamos especial atención a las herramientas tecnológicas digitales, eligiendo el software GeoGebra como ambiente computacional de aprendizaje, observando los elementos teóricos de este enfoque en dos dimensiones que definimos como investigación interna e investigación externa. Proponemos, por tanto, una extensión del modelo de Situaciones de Actividad Instrumental (SAI) en tres dimensiones, provocando una reflexión sobre el papel del Profesor o del investigador en las relaciones primitivas de este modelo en la investigación externa, durante su aplicación en el aula. Esperamos que nuestros aportes/reflexiones encuentren un espacio significativo en el desarrollo de la investigación educativa, especialmente en ciencias y matemáticas utilizando el Enfoque Instrumental de Rabardel.

Palabras clave: Instrumento, Modelo SAI extendido, Investigación interna, Investigación externa, Tecnologías digitales, Matemáticas.

Résumé

Cet article vise à apporter des contributions sur l'utilisation de l'Approche Instrumentale de Pierre Rabardel, comme cadre théorique efficace, dans le développement du travail des chercheurs qui s'intéressent à l'analyse des outils technologiques et de leurs potentialités qui interviennent dans la relation du sujet (chercheur, enseignant et / ou étudiant), avec les objets de connaissance à travers la médiation de ces outils, visant l'apprentissage mathématique. Dans les applications, nous accordons une attention particulière aux outils technologiques numériques, en choisissant le logiciel GeoGebra comme environnement d'apprentissage computationnel, en observant les éléments théoriques de cette approche dans deux dimensions que nous définissons comme recherche interne et recherche externe. Nous proposons, donc, une extension du modèle des Situations d'Activité Instrumentale (SAI) en trois dimensions, provoquant une réflexion sur le rôle de l'Enseignant ou du chercheur dans les relations primitives de ce modèle dans la recherche externe, pendant l'application en classe. Nous

espérons que nos contributions/réflexions trouveront un espace significatif dans le développement de la recherche en éducation, notamment en sciences et en mathématiques en utilisant l'approche instrumentale de Rabardel.

Mots clés : Instrument , Modèle SAI étendu , Recherche interne , Recherche externe , Technologies numériques , Mathématiques.

Abordagem Instrumental e aplicações

Não é comum, mas pedimos licença para introduzir este artigo externando as nossas condolências pela partida precoce do nosso querido e criador/pioneiro da Abordagem Instrumental, *Pierre Rabardel* (c.f. Figura 1), no dia 29 de setembro de 2021. Ele será sempre lembrado por todos nós que somos os seus discípulos em função das sementes de pensamentos científicos que ele deixou para toda a comunidade acadêmica/científica, em especial, da Didática das Ciências e Matemática.



Figura 1.

Pierre Rabardel (1945 – 2021)

A Abordagem Instrumental, doravante também denotada por ABIN, proposta por *Rabardel* (1995) é procedente de trabalhos em ergonomia cognitiva, e refere-se à aprendizagem da utilização/integração/aplicação de ferramentas tecnológicas ou qualquer outro recurso que se apresenta como *instrumento* na pesquisa, no ensino e na aprendizagem. Trata-se de uma abordagem que tem sido muito utilizada por diversos pesquisadores no desenvolvimento de suas pesquisas no mundo inteiro. No ano de 2002 por exemplo, *Dominique Guin* e *Luc Trouche* organizaram uma obra⁵ que reuniu diversas pesquisas sobre o tema, cada uma com foco na utilização e transformação de uma ferramenta tecnológica em *instrumento* de trabalho matemático. Ao longo dos anos, no Brasil, a ABIN, vem ocupando um espaço significativo, não apenas no âmbito de pesquisas acadêmicas, mas também no

⁵ Intitulada: *Calculatrices symboliques – transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique.*

contexto do trabalho do Professor em sala de aula. Neste artigo, damos atenção especial tanto ao trabalho do pesquisador quanto ao do Professor utilizando esta abordagem. Com efeito, organizamos este artigo em quatro partes. Na primeira apresentamos algumas definições preliminares que não são necessariamente nascidas dentro da ABIN, mas que julgamos imperativas na compreensão do artigo. Na segunda, nos debruçamos na apresentação dos elementos teóricos próprios da ABIN em sua essência, intercalada com exemplos de utilização, sempre que possível. Trazemos uma extensão do modelo de *Situações de Atividades Instrumentais* (SAI), estudado nesta parte, em três dimensões, provocando uma reflexão sobre o papel do Professor ou do pesquisador nas relações primitivas deste modelo na *pesquisa externa*. Na terceira, trazemos uma aplicação da ABIN no que diz respeito a análise de um *instrumento* e as suas potencialidades em torno do objeto de estudo matemático visado, elegendo o *GeoGebra* na sua posição instrumental na *pesquisa interna*. Na quarta parte situamos a ABIN na dimensão externa, trazendo uma aplicação e análise de práticas de estudantes sobre Sistemas de Equações Lineares, como objeto de estudo, e validação de soluções em *ambiente computacional GeoGebra*. Essa organização serve de fio condutor para trazer as nossas contribuições capazes de auxiliar pesquisadores debutantes na análise e utilização de ferramentas tecnológicas, com base na nossa experiência, utilizando a Abordagem Instrumental.

Definições preliminares

A integração de ferramentas tecnológicas na pesquisa, no ensino, na extensão, e de um modo geral, na Educação, gira em torno dos objetos de saberes institucionais visados. Suponhamos que estes objetos sejam matemáticos cujo o interesse institucional seja a potencialização do processo de aquisição de conhecimentos de alunos/estudantes por mediação de ferramentas tecnológicas, conforme é usualmente preconizado nos projetos pedagógicos curriculares. Com essa suposição, é possível a emergência de questionamentos de reflexão do

tipo apresentado na Tabela 1:

Tabela 1.

Possíveis questões de reflexão antes de integrar uma ferramenta tecnológica no ensino, em particular, da Matemática (Produção do autor)

[Q1]	Quais são ou qual é o objeto do saber ou conhecimento matemático considerar?
[Q2]	Por que é este objeto?
[Q3]	Qual é a instituição em que este objeto é colocado em jogo/ensinado?
[Q4]	Qual é a ferramenta ou ferramentas tecnológicas a considerar?
[Q5]	Qual é o público alvo da formação?

Não nos debruçaremos a responder sistematicamente cada uma destas questões, todavia, para favorecer a compressão da proposta almejada neste artigo, consideremos o objeto matemático mencionado anteriormente, denominado Sistema de Equações Lineares [Q1], pela sua razão de ser que se justifica pelo espaço que ocupa em programas de formação de recursos humanos [Q2], nas Instituições de Ensino Superior (IES) [Q3], elegendo o *software GeoGebra* como ferramenta tecnológica [Q4], e envolvendo, por conseguinte, estudantes em formação [Q5] em cursos de Ciências Exatas e Tecnológicas em uma IES pública brasileira. Em termos metodológicos⁶, as quatro primeiras questões, encontram espaço de reflexão na *pesquisa interna*.

A *pesquisa interna* é uma sondagem realizada pelo pesquisador ou por um grupo de pesquisadores, sem intervenção de sujeitos externos. É o momento pelo qual o pesquisador procura compreender melhor o seu objeto de estudo. Ele conjectura, problematiza, formula hipóteses, questiona-se, define o quadro teórico, os objetivos, descreve o percurso metodológico da sua pesquisa, escolhe, analisa os elementos institucionais específicos e apresenta resultados parciais (HENRIQUES, 2018, p.450).

Ao passo que a quinta, na *pesquisa externa*:

A *pesquisa externa* é uma sondagem realizada pelo pesquisador ou por um grupo de pesquisadores envolvendo sujeitos externos como público alvo. É o momento pelo qual o pesquisador aplica os estudos desenvolvidos na *pesquisa interna*. Esta aplicação pode ou não envolver seres humanos. Por exemplo, a aplicação de uma sequência para o estudo de práticas efetivas de estudantes de uma instituição é uma *pesquisa externa* (HENRIQUES, 2018, p.450).

Nesta reflexão, não podemos negar que existe uma aliança forte entre o trabalho

⁶ Em conformidade com Análise Institucional & Sequência Didática, Henriques (2018), in Teoria Antropológica do Didático: Princípios e Fundamentos, *Almouloud*, Farias, Henriques (2018).

matemático desenvolvido com as técnicas usuais do *ambiente papel/lápis* e do *ambiente computacional* diante da integração de ferramentas tecnológicas na Educação, principalmente, quando se visa compreender as práticas institucionais desenvolvidas por alunos/estudantes utilizando essas tecnologias.

Um *ambiente papel/lápis* é um espaço usual de estudo constituído por Ferramentas como: papel, lápis, caneta, borracha etc. O quadro, o piloto ou giz também se enquadram nesse ambiente. Um *ambiente computacional* é o espaço virtual de estudo constituído de Ferramentas como: o computador, o *software*, a *internet*, a calculadora, Impressora 3D, etc. Disponível In⁷:

Entendemos, portanto, que a utilização de ferramentas tecnológicas pode modificar as técnicas de realização de tarefas visadas. Com efeito, dois conceitos são fundamentais nessa aliança, a saber: *transferência* e *implementação* de situações em um *ambiente computacional*. No primeiro não há modificação de técnicas de realização para chegar-se ao resultado esperado da situação, trata-se de uma mera reprodução da situação com o mesmo tratamento que um sujeito faria no *ambiente papel/lápis* (c.f. ilustração na Tabela 2 (primeira coluna)). No segundo, o acesso ao resultado esperado pode requer a utilização de um comando e a execução da instrução implementada pelo sujeito por mediação da ferramenta (c.f. ilustração na Tabela 2 (segunda coluna)).

Tabela 2.

Transferência x implementação de saberes / solução de tarefas em ambiente computacional
(Produção do autor)

Transferência	Implementação
Resolver o sistema de equações linear $S: \begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$ por escalonamento da matriz no <i>word</i>	Resolver o sistema de equações linear $S: \begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$ por escalonamento da matriz no <i>GeoGebra</i>
$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 16 \\ 3 & 2 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot L_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 8 \\ 3 & 2 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 3 \cdot L_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 8 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{2}{5} \cdot L_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - \frac{3}{2} \cdot L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$	$M = \{\{2, 3, 16\}, \{3, 2, 19\}\}$ “Executar com Enter” $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 16 \\ 3 & 2 & 19 \end{bmatrix}$ “Resultado da primeira ação” MatrizEscalonada(\$M) “Executar com Enter” $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ “Resultado da segunda ação”

Durante a *transferência* o sujeito passa pela aplicação de técnicas de escalonamento.

⁷ <https://sites.google.com/site/gpemac/Home>. Acessado em 22/10/2021.

Na *implementação*, tais técnicas são implícitas, provocando imediatamente, a emergência de um dos entraves de comandos, denominado "caixa preta". O conceito de entrave e de potencialidade de *instrumentos* serão definidos mais adiante em conformidade com os estudos apresentados na seção subsequente.

A Abordagem Instrumental: elementos teóricos

Conforme foi assinalado anteriormente, esta abordagem é procedente de trabalhos em ergonomia cognitiva, e refere-se à aprendizagem da utilização/integração/aplicação de ferramentas tecnológicas ou qualquer outro recurso que se apresenta como *instrumento* na pesquisa, no ensino e na aprendizagem de objetos de saberes. O ponto de partida da ABIN consiste na ideia de que uma *ferramenta*, também entendida nesta abordagem como *artefato*, não é automaticamente um *instrumento* eficaz e prático. Uma chave de fenda (Figura 2 (a)), por exemplo, é um objeto ou *ferramenta* sem significado, salvo quando se tem algo apropriado para apertar ou afrouxar, transformando-o assim em um *instrumento* útil.



Figura 2.

Exemplos de artefatos ou ferramentas (Dados da pesquisa)

Algumas ferramentas são mais apropriadas do que outras, dependendo do tipo de utilização a que se propõe. Uma pá, por exemplo, é muito mais adequada à tarefa de “transportar areia” do que uma colher (Figura 2 (b)), salvo, neste último caso, se o volume de areia necessário for muito pequeno. Essa ideia se aplica também para outros objetos que se apresentam como ferramentas, tais como o computador e um *software* (Figura 2 (c)). Para que uma *ferramenta* em geral ou o *software* em particular se torne um *instrumento* útil para o sujeito, é necessária a mobilização das características do *artefato* em conformidade com as

atividades cognitivas do sujeito. Essa reflexão se inscreve em um processo complexo que Rabardel denomina *gênese instrumental*: processo de aprendizagem no qual uma *ferramenta* ou *artefato* torna-se, progressivamente, um *instrumento*. Segundo DRIJVERS (2002, p. 219) “o sujeito deve, contudo, desenvolver competências para identificar as situações ou tarefas para as quais um dado *instrumento* é adaptado e em seguida executá-las por meio desse *instrumento*”. Muitos pesquisadores em Didática das Ciências e Matemática têm se dedicado à esta Abordagem, a citar: Verillon (1996), Trouche (2002), Henriques (2006), Abar e Alencar (2013), Bittar (2017), Ramos (2018), entre outros. Na obra de Guin e Trouche (2002) citada mais acima, por exemplo, Trouche, sublinha que:

Os trabalhos recentes em ergonomia cognitiva oferecem elementos teóricos que permitem compreender melhor os processos de apropriação de calculadoras complexas. Rabardel (1995), no que se refere à formação em geral e ao ensino em particular, propôs uma nova abordagem que por essencial, distingue uma ferramenta tecnológica (o *artefato*) que é dado ao sujeito, de um *instrumento*, que é construído pelo sujeito. Esta construção ou *gênese instrumental* é um processo complexo aliado às características do *artefato* (suas potencialidades e suas limitações), e às atividades do sujeito (seus conhecimentos, suas experiências anteriores e suas habilidades) (op. cit. p. 195).

A Figura 3 traz um exemplo de apropriação e construção de *instrumento* notável em muitas mulheres em um contexto social, em que a utilização do lápis para prender cabelo é uma construção do sujeito não prevista pelo promotor do *artefato* (lápis).

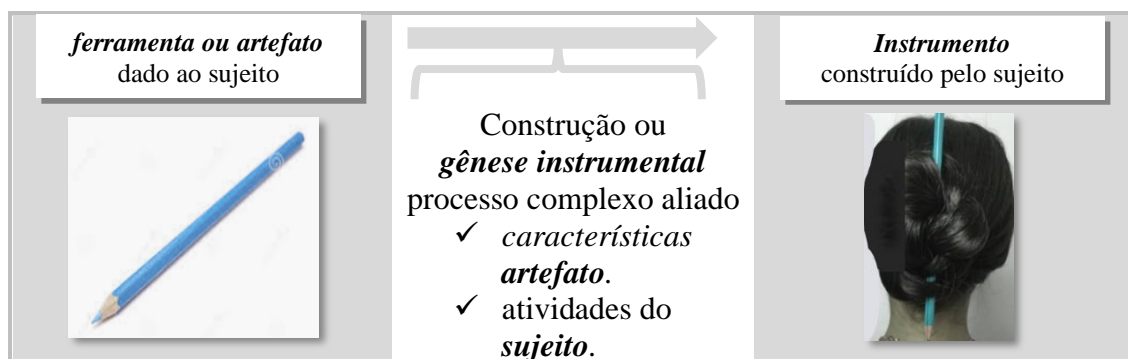


Figura 3.

Transformação do lápis em um instrumento útil por uma mulher (Dados da pesquisa).

Entende-se, portanto, que o *instrumento* não deve ser considerado como algo dado, fornecido, ao contrário, ele é construído pelo sujeito visando atender as suas necessidades. A

transformação de *artefatos* em *instrumentos* aparece como resultado de processos complexos que colocam, simultaneamente em jogo os três polos apresentados na Figura 4:

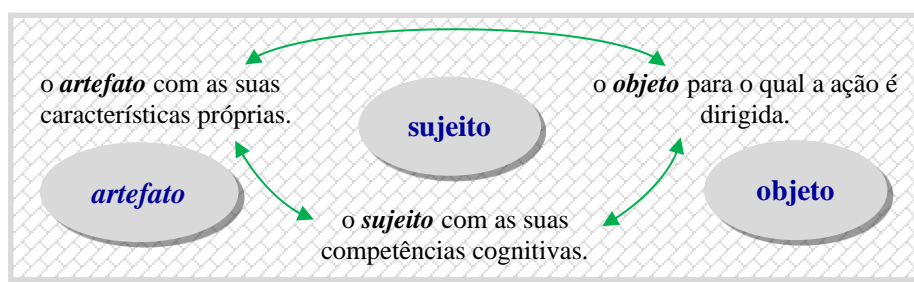


Figura 4.

Polos que intervêm na transformação de artefatos em instrumentos (Produção do autor)

Os três polos apresentados na Figura 4, condicionados pelo ambiente de aprendizagem no qual estão inseridos, levaram Rabardel (1995) a considerar um *instrumento* como uma entidade mista formada por dois componentes: um *artefato* (material ou simbólico) produzido pelo sujeito ou por outros com um ou vários esquema(s) de utilização associado(s), resultante(s) de uma construção própria do sujeito, autônomo ou de uma apropriação de esquemas sociais de utilização, estes já formados externamente a ele (op. cit., p. 117). O autor apresenta os esquemas em três categorias:

- ✓ **Esquemas de utilização:** correspondentes às atividades relativas à gestão das características e propriedades específicas do *artefato* (Ibidem, 2014, p. 91)⁸.

Por exemplo: [1]. Localizar um *software* no computador ou pela *internet*, como o caso do *GeoGebra online* (c.f. Figura 5(a)), identificar ferramentas ou comandos do *software* (c.f. Figura 5(b)), compreender as potencialidades de uma *ferramenta* ou comando deste *software* no primeiro contato do sujeito com a *ferramenta*. [2] Aprendizagem inicial do movimento necessário para regular a posição apropriada do volume do som em um veículo (c.f. Figura 5(c)). [3] Aprender a ativar ou a desativar o *bluetooth* no celular.

⁸ Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462>, submetido em julho de 2014.

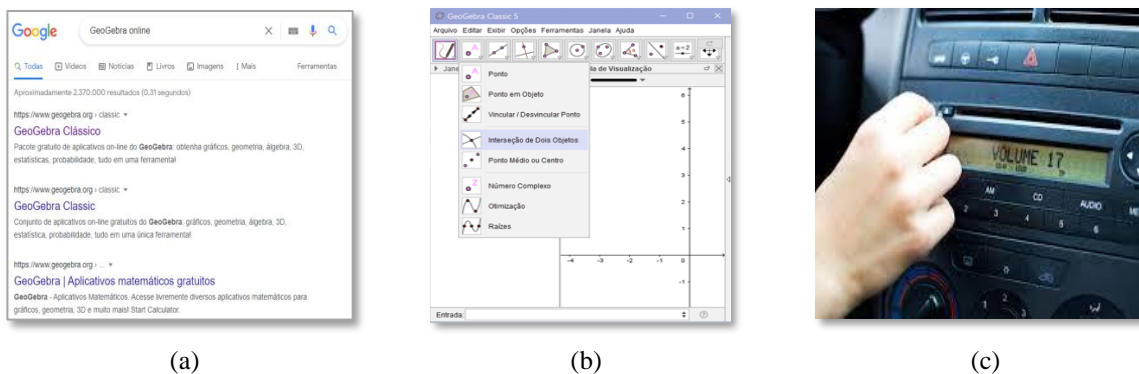


Figura 5.

Esquemas de uso de ferramenta, GeoGebra online, volume de som de veículo (Dados da pesquisa).

- ✓ **Esquemas de ação instrumental** - correspondentes às atividades para as quais o *artefato* é um meio de realização. (*Ibidem*, 2014, p. 91).

Exemplo de aplicação: Utilizar o *software GeoGebra* para: [t1] construir dois segmentos dados quatro pontos distintos A, B, C e D não colineares, nessa ordem (c.f. Figura 6(a)). [t2] marcar um ponto sobre o segmento AB (c.f. Figura 6(b)). [t3] Obter a interseção I dos segmentos AB e CD (c.f. Figura 6(c)). [4] Animar o ponto P e observar o que acontece. [t5] Animar o ponto I e observar o que acontece. [t6] Justificar as suas observações no próprio ambiente *GeoGebra* utilizando a ferramenta “ABCTexto”. Assim, analisando a potencialidade de cada ferramenta deste *software* que permite realizar cada uma destas tarefas, o sujeito está situado nessa categoria de *esquemas de ação instrumental*.

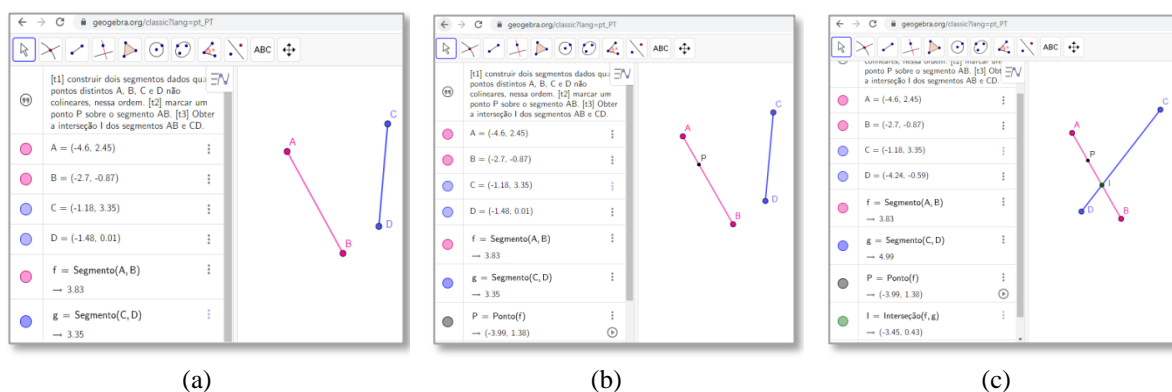


Figura 6.

Esquemas da ação instrumental com GeoGebra online (Produção do autor).

Os esquemas construídos nesta aplicação corroboram com os princípios da Geometria Dinâmica definidos como: *objetos independentes* (tais como os pontos A, B, C e D) que podem ser movidos livremente pelo sujeito na nela, e pelos *objetos dependentes* (tal como o ponto I que não pode ser movido, ao menos que se movimentem os objetos que o definem).

- ✓ **Esquemas de atividades coletivas instrumentais** – correspondentes à utilização simultânea ou conjunta de um *instrumento* em um contexto de atividades compartilhadas ou coletivas. (*Ibidem*, 2014, p. 92).

Exemplo de aplicação: [1] a utilização coletiva do *Google Docs*, em que o sujeito, no seu próprio navegador, pode criar e editar textos sem utilizar outro *software* específico, de modo que várias pessoas possam trabalhar simultaneamente, e cada mudança realizada é salva de forma automática com acesso de todos os usuários compartilhados em tempo real (c.f. Figura 7). [2] Diálogo compartilhado em um grupo de redes sociais (c.f. Figura 7), em que todos os usuários cadastrados no grupo interagem simultaneamente sobre o mesmo assunto em tempo real.

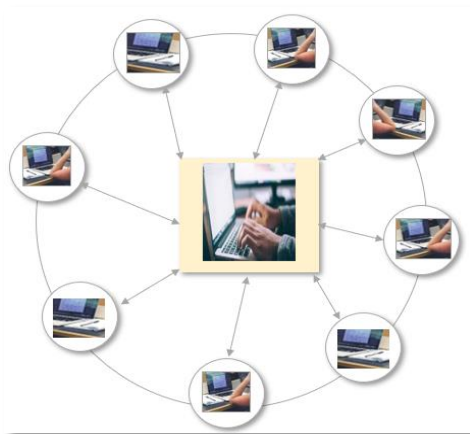


Figura 7.

Ilustração de um esquema de atividade coletiva instrumental mediante o compartilhamento de um diálogo em um grupo em redes sociais (Produção do autor).

Em Didática das Ciências e Matemática é de interesse comum a realização de análises de práticas realizadas mediante a utilização de recursos tecnológicos. Nesta perspectiva, Rabardel (1995) e Verillon (1996) propõem o modelo denominado *Situações de Atividades Instrumentais* (SAI) apresentado na Figura 8, que favorece a reflexão e direcionamentos sobre as referidas análises, tornando explícitas as possíveis relações existentes entre os componentes

dos três polos vistos mais acima (c.f. Figura 4), centrado na relação do *sujeito* com o *objeto* do saber por mediação do *instrumento* construído ou em processo de construção em uma *gênese instrumental*.

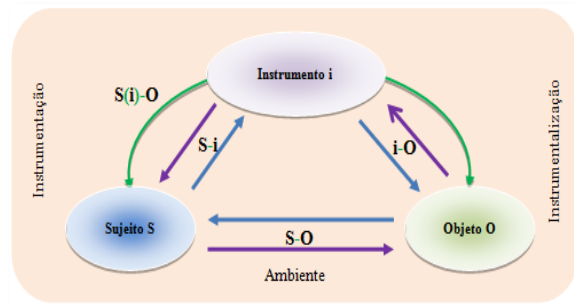


Figura 8.

O modelo SAI na perspectiva teórica (Adaptado de Rabardel, 1995. p. 53).

Quatro relações interativas são notáveis, explicitamente, neste modelo, a saber:

- ✓ [1] a interação usual entre o *sujeito* e *objeto* representada por [S-O], que podemos considerar como a relação emergente mediante a utilização direta das técnicas tradicionais do *ambiente papel/lápis* no acesso a um dado objeto O do saber institucional, munido de uma organização praxeológica.
- ✓ [2] A interação entre o *sujeito* e o *instrumento* denotada por [S-i], orientada à constituição de esquemas de utilização, sendo coberta pela dimensão de *instrumentação* da *gênese instrumental*. Nessa dimensão o sujeito adapta o seu problema ou tarefa aos recursos do *artefato*.
- ✓ [3] A interação entre o *instrumento* e *objeto* representada por [i-O], coberta pela dimensão de *instrumentalização* da *gênese instrumental*. O *sujeito* atribui ao *instrumento* uma possibilidade de agir sobre o objeto O em jogo, e constrói as propriedades funcionais que permitem a realização desta possibilidade de ação.
- ✓ [4] A interação entre o *sujeito* e *objeto*, por mediação do *instrumento* [S(i)-O].

O sistema que constitui essas interações é, por sua vez, imerso em um ambiente constituído pelo conjunto das condições que intervêm nas atividades instrumentais.

Utilizando este modelo na pesquisa de referência deste artigo, dizemos que O é o objeto matemático, denominado Sistema de Equações Lineares (SEL). O sujeito S aparece em duas instâncias: na *pesquisa interna* (c.f. Figura 9(a)) onde ele é um pesquisador, e na *pesquisa*

externa (c.f. Figura 9(b)) este sujeito é um estudante da IES. O *instrumento* *i*, por sua vez, é o *software GeoGebra online*. Nesta perspectiva, afirma-se que a modelização de saberes por *instrumentação* e *instrumentalização*, permite descrever a forma pelo qual o *instrumento* influi na constituição da relação do sujeito com esse objeto [S-O]. Essa relação imersa nas dimensões (*instrumentação* e *instrumentalização*), passa a denotar-se por [S(i)-O], e deve aparecer em todas as situações instrumentais construídas com o *GeoGebra*. Por isso, o *instrumento* não pode ser considerado neutro em relação ao estudo de *SEL* utilizando o *GeoGebra* enquanto *artefato*. A relação que acabamos de estabelecer, utilizando o modelo SAI na pesquisa de referência deste artigo, estende-se para qualquer pesquisa imersa nesta perspectiva teórica de ABIN.

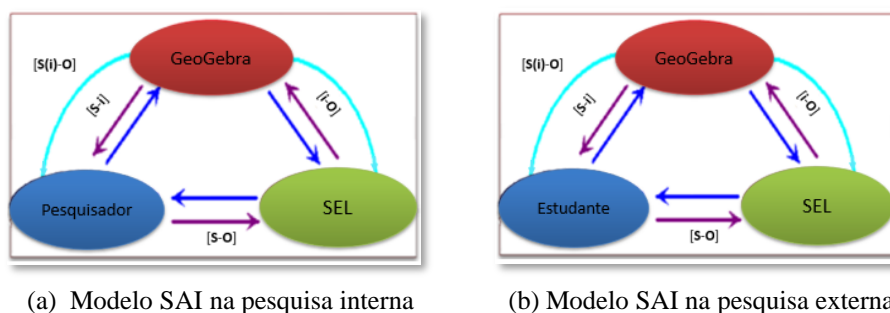


Figura 9.

O modelo SAI nas pesquisas interna e externa (Produção do autor).

Analisando os dois modelos apresentados na Figura 9, é possível conjecturar que no ensino, e conseqüentemente na *pesquisa externa*, o protagonista, ou seja, o sujeito é o aluno/estudante. Essa conjectura compartilhada nas discussões desenvolvidas no GPETAC⁹, e pela experiência de convivência de integrantes deste grupo, como a Professora R. L. Funato, com Professores(as), das escolas de Educação Básica no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), passamos a nos questionar sobre o papel do pesquisador ou do Professor nas relações previstas no modelo SAI em sala de aula. Esse questionamento nos levou a repensar sobre as relações estabelecidas, inicialmente, por *Rabardel* e *Verillon*, favorecendo

⁹ Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em *Ambiente Computacional*.

a extensão do modelo SAI no espaço tridimensional, utilizando um tetraedro, em que os três polos primitivos se conservam nos três vértices da base, e no quarto vértice, o Professor ou o pesquisador diante da atividade instrumental do aluno/estudante na *pesquisa externa*, conforme mostrado na Figura 10.

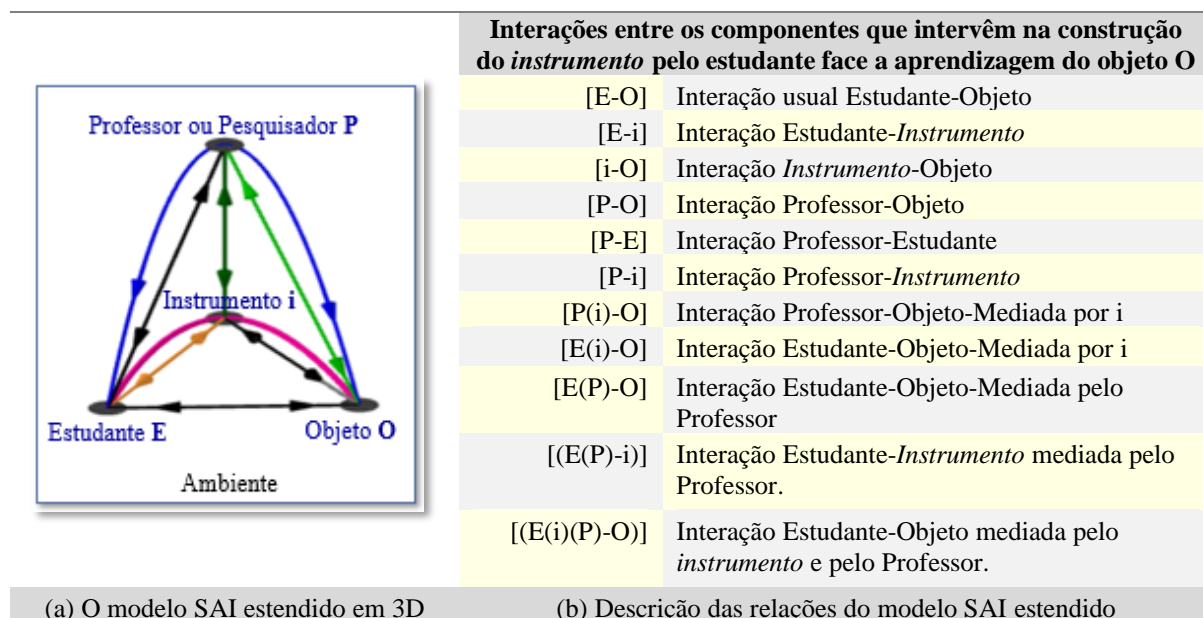


Figura 10.

O modelo SAI estendido em 3D nas Pesquisas Interna e Externa (Produção do autor)

Nestas relações, o Professor/pesquisador, praticamente, atua como observador do trabalho do estudante, eventualmente interagindo com limitações na relação [(E(i)(P)-O)]. Com efeito, analisar as práticas efetivas de estudantes com a intervenção do pesquisador ou Professor utilizando o modelo SAI estendido, é, portanto, uma atividade integralmente didática, em que se deve observar cuidadosamente todas as relações que emergem na construção do *instrumento* pelo estudante. Mas, até que ponto a presença do Professor/pesquisador intervém na relação do estudante com o objeto O por mediação do *instrumento* i? Não nos incumbimos em responder imediatamente esta questão, para entrarmos na seção seguinte na qual trazemos uma aplicação da ABIN no que diz respeito à análise de um *instrumento* e suas potencialidades em torno do objeto de estudo matemático visado neste artigo, Sistema de Equações Lineares, elegendo o *GeoGebra* como *artefato/instrumento* na *pesquisa interna*.

Análise de recursos de um ambiente computacional

Antes de utilizar qualquer *ambiente computacional* na pesquisa com um amparo na ABIN como quadro teórico¹⁰, é fundamental realizar a análise dos recursos, deste ambiente, úteis na realização de situações/tarefas envolvidas nessa pesquisa, considerando as duas dimensões (*instrumentação* e *instrumentalização*) da *gênese instrumental*, as técnicas instrumentais tais como descritas por *Lagrange* (2002) e os esquemas implementados nesse ambiente relativos às referidas tarefas. Essa análise deve ser apresentada explicitamente nos escritos/texto da pesquisa pela sua relevância na construção do *instrumento*. Essa reflexão remete à análise dos recursos disponíveis no *software* e as suas sintaxes, considerando o objeto O, pois elas seguramente intervêm na compleição dos esquemas e potencializam o processo de resolução de problemas/tarefas, ou seja, a construção do *instrumento* sobre O. Mas, o que é potencialidade?

A potencialidade é um conjunto de qualidades de um *artefato* (ferramenta ou comando, material concreto manipulável a mão livre, ...) associado aos conhecimentos de um *instrumento* capaz de permitir ao sujeito agir sobre um objeto do saber, visando solucionar problemas em torno deste objeto de maneira eficiente e, eventualmente dinâmica (Henriques, 2019, p. 46).

Por exemplo, na implementação da tarefa “escalonar a matriz M (c.f. Tabela 2)”, o comando “*MatrizEscalonada*” segundo a sintaxe “*MatrizEscalonada(\$M)*” revela uma potencialidade do *GeoGebra* sobre o objeto *Matriz Escalonada*. Em contrapartida, este comando revela também um entrave de comando.

Um entrave é um conhecimento característico de um *artefato* específico (ferramenta ou comando, material concreto manipulável a mão livre, ...) de um *instrumento* contendo informações acessíveis ou não pelo sujeito. Tais informações podem ser modificadas pelo sujeito de maneira a solucionar o seu problema (*Ibidem*, 2019, p. 47).

Conforme sublinhado anteriormente, denominamos o tipo de entrave revelado pelo comando “*MatrizEscalonada*” de “caixa preta”, no sentido de que o sujeito visualiza/obtem o

¹⁰ Entendemos por *quadro teórico* como o *referencial teórico* de base de uma pesquisa, escolhido pelo pesquisador em função da sua problemática, constituído, pelo menos, por uma teoria capaz de fornecer ferramentas de análise aos estudos que se pretende desenvolver. (HENRIQUES; SERÔDIO, 2013, p. 2, grifo do autor)

resultado esperado de forma imediata sem o conhecimento das etapas realizadas pelo *ambiente computacional (software)* para externar esse resultado. Mas, o entrave não significa limitação do *software*, uma vez que o sujeito pode reorganizar a tarefa na tentativa de “abrir” a “caixa preta” e acessar parcial ou totalmente as referidas etapas. Assim, a análise de um *instrumento* deve permitir a identificação das potencialidades e dos possíveis entraves que podem surgir na resolução de problemas ou tarefas matemáticas sobre o objeto O.

Para conduzir a nossa análise nesta perspectiva é fundamental considerar situações/tarefas institucionais sobre O. Neste âmbito, nós recorreremos ao Modelo Praxeológico de Gestão de Tarefas (MPGT) utilizado, posteriormente, na *pesquisa externa* com estudantes de uma Universidade pública brasileira, e apresentar a análise dos recursos do *ambiente computacional GeoGebra* colocado em prática.

O MPGT “é um exemplar para elaboração de tarefas, que devem iniciar com um gênero (verbo no infinitivo), no contexto praxeológico, seguido de um complemento fixo, e de um Sistema de Variáveis Didáticas.” (HENRIQUES, 2019, p. 106). O referido MPGT é apresentado em um quadro contendo um exemplar que é colocado em prática em situações efetivas de aprendizagem, e que reproduzimos na Tabela 3.

Tabela 3.

Modelo Praxeológico de Gestão de Tarefas (Henriques, 2019, p. 106)

GT = [Verbo de ação, complemento fixo, SVD]	
Em que:	
<ul style="list-style-type: none"> • GT: significa geratriz ou gerador de tarefas. • Verbo de ação: define o gênero do tipo de tarefa T. • Complemento fixo: especifica um enunciado, sem ambiguidades, fixando os dados ou informações globais da situação ou tarefa que devem ser utilizadas no SVD ou subtarefas. • SVD: é um sistema de variáveis didáticas no gerador de tarefas (t). 	
Um exemplar de GT	
GT1	Considerar as informações I1, I2, I3, ..., In para realizar as seguintes tarefas:
t1	Enunciado da t1 utilizando alguma informação $I_k, 1 \leq k \leq n$.
t2	Enunciado da t2 utilizando alguma informação I_k e/ou resultado da t1
t3	Enunciado da t3 utilizando alguma informação I_k e/ou Resultado da t1, t2
..	...

A gestão de tarefas apresentada na Tabela 4 é constituída com dois geradores propostos aos estudantes matriculados em uma Universidade pública e Professores regentes na Educação Básica que participaram de uma das oficinas do GPEMAC ofertadas no segundo semestre de 2021, de forma remota. Estes geradores são utilizados nas análises apresentadas nesta seção, no âmbito da *pesquisa interna*, assim como na seção subsequente referente à *pesquisa externa*.

Tabela 4.

Geradores de tarefas em torno do estudo de SEL (Dados da pesquisa)

Primeiro Gerador de tarefas	
Gerador de Tarefas _ GT1	Considerar a sua relação com o objeto do saber Sistema de Equações Lineares (SEL) estabelecida durante as três partes da oficina, para realizar a seguinte tarefa, explicando cada passo.
	t1 Apresentar os elementos ou conceitos, em itens, (a), (b),... ou (i), (ii), (iii),... que encontrou na relação considerada no GT1, que não conhecia antes desta oficina.
	t2 Apresentar as ferramentas/recursos do <i>GeoGebra</i> , em itens, (a), (b),... ou (i), (ii), (iii),... que encontrou na relação considerada no GT1, que não conhecia antes desta oficina.
	t3 Descrever/"falar" um pouco sobre a sua aprendizagem ao longo da aplicação da oficina, destacando, se possível, as vantagens e as desvantagens da oficina, tanto no trabalho realizado no <i>ambiente papel/lápis</i> quanto no <i>ambiente computacional GeoGebra</i> .
Segundo gerador de tarefas	
Gerador de Tarefas _ GT2	Considerar o Sistema de Equações Lineares representado ao lado, para realizar as seguintes tarefas, explicando cada passo:
	$SEL \begin{cases} y + 3z = 5 \\ x - 3y + z = 2 \\ x + 4y + z = 3 \end{cases}$
	t1 Determinar o posto e a nulidade da matriz associada ao sistema <i>SEL</i> fornecido no GT2 utilizando as técnicas habituais do <i>ambiente papel/lápis</i> .
	t2 Decidir se esse sistema é <i>possível e determinado</i> , <i>é possível e indeterminado</i> ou <i>é impossível</i> . Se for uma das duas primeiras possibilidades, forneça a solução do sistema.
	t3 Descrever, na língua materna, o significado da solução obtida na realização da t2 do GT2 em conformidade com a solução correspondente no registro gráfico.
	t4 Validar, no registro gráfico em três dimensões, e por escalonamento de matriz, a solução fornecida na realização da t1 e t2, utilizando o <i>ambiente computacional GeoGebra online</i> .
	t5 Representar, no registro gráfico, o crivo ¹¹ da superfície de cada equação do <i>SEL</i> na vizinhança da solução fornecida na realização da t1 e t2.
t6 Apresentar cada ferramenta/recurso do <i>GeoGebra</i> , em itens (como na t1 do GT1), que utilizou na realização das tarefas do GT2, justificando o porquê da sua utilização.	

Vale sublinhar que o nosso objetivo nesta seção não é a apresentar uma resolução/solução de cada uma das tarefas do GT1 e do GT2, mas sim, a análise dos recursos do *GeoGebra* e os esquemas de ações instrumentais inerentes as tarefas em gestão em torno do

¹¹ Ver o conceito de crivo em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/44263>

objeto de estudo. Com efeito, apresentam-se na primeira coluna da Tabela 5 os referidos recursos acompanhados das respectivas potencialidades na segunda coluna.

Tabela 5.

Ferramentas do GeoGebra com as respectivas potencialidades utilizadas na pesquisa em conformidade com os geradores propostas aos estudantes (Dados da pesquisa)

Ferramenta (F_i), i ∈ N	Potencialidade
F1. <i>Campo de entrada</i>	<i>Permitir a relação instrumental/comunicação entre o sujeito e o instrumento, fornecendo dados ao GeoGebra.</i>
F2. <i>ABC Texto</i>	<i>Permitir a digitação de textos informativos, tais como enunciado de tarefas ou de qualquer outra natureza instrucional.</i>
F3. <i>Resolver</i>	<i>Permitir a resolução de uma equação ou sistema de equações.</i>
F4. <i>Curva</i>	<i>Permite a visualização de curvas parametrizadas entre outros objetos.</i>
F5. <i>Superfície</i>	<i>Permite a visualização de superfícies parametrizadas entre outros objetos.</i>
F6. <i>InterseçãoGeométrica</i>	<i>Permitir a visualização da curva de interseção de duas superfícies previamente representadas no GeoGebra.</i>
F7. <i>Interseção de dois objetos</i>	<i>Permitir a visualização de interseção de dois objetos, tais como curvas, por exemplo, previamente representadas no GeoGebra.</i>
F8. <i>{{lista},{lista},...}</i>	<i>Permitir o acesso/visualização dos elementos de uma matriz na sua forma M_{mn} (m quantidade de linhas e n de colunas) e outros tipos de listas.</i>
F9. <i>MatrizEscalonada</i>	<i>Permitir o acesso da matriz escalonada de uma matriz previamente implementada no GeoGebra ou implementada juntamente com essa ferramenta.</i>
F10. <i>(x1, x2, x3, ...)</i>	<i>Permitir a visualizar componentes ordenados de pontos em n dimensões com n maior ou igual a dois.</i>
F11. <i>Segmento (A,B)</i>	<i>Permitir a visualização do segmento de origem no ponto A com extremidade no ponto B, pontos estes previamente identificados no GeoGebra.</i>

Uma vez destacadas/identificadas as ferramentas e as suas potencialidades inerentes as tarefas em gestão, deve-se desenvolver os esquemas de ações instrumentais correspondentes.

Assim, no tocante a primeira tarefa t1 do G2 constata-se que a construção do *instrumento* durante a *gênese instrumental* em torno desta tarefa no *GeoGebra*, pode ocorrer de diversas formas, isto é, diferentes esquemas podem ser organizados para se alcançar o resultado esperado. Não listamos todos, mas, certamente, um desses esquemas é:

- ✓ utilizar as ferramentas F1, F8, implementando em cada lista de F8, a partir de F1, os coeficientes de cada equação, executar a instrução com a tecla “Enter”. Em seguida aplicar a ferramenta F9 em que a instrução correspondente também deve ser executada com a tecla “Enter”.

Esse esquema é colocado em prática no *GeoGebra* conforme mostrado na Tabela 6.

Tabela 6.

Realização parcial da t1 do GT2 com ferramentas e potencialidades do GeoGebra (Produção do autor)

<i>Ferramenta</i>	<i>Implementação</i>
F1., F8.	M={ {0, 1, 3, 5}, {1, -3, 1, 2}, {1, 4, 1, 3} } “Executar com <i>Enter</i> ” $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ “Resultado da primeira ação”
F9.	Matriz Escalonada (\$M) “Executar com <i>Enter</i> ” $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{34}{21} \end{pmatrix}$ “Resultado da segunda ação”, que consiste na Matriz M’ linha reduzida à forma escada equivalente a matriz M, internamente pelo <i>GeoGebra</i> .

Com este resultado em tela, o sujeito/estudante, deve, contudo, ter o conhecimento de que: “*dada uma matriz $A_{m \times n}$, seja $B_{m \times n}$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a matriz $A_{m \times n}$. O posto de A , denotado por p , é [a quantidade] de linhas não nulas da matriz B . A nulidade da matriz A é o número representado por $n-p$ ”.*

Compreende-se, portanto, que para se determinar o posto de uma matriz A , deve-se, inicialmente, escalonar essa matriz. Em seguida, contar a quantidade de linhas não nulas, que é o **posto** da matriz A . A **nulidade** é a diferença entre a quantidade de colunas n da matriz A e o posto p .

Conjectura-se que as ferramentas utilizadas acima permitem responder uma parte da tarefa, escalonamento da matriz, no *ambiente computacional GeoGebra*, mas não a segunda, que deve ser externada mediante a competência do sujeito na contagem e cálculo da diferença (nulidade). Assim, decorre-se da Tabela 6 que o posto de M é $p=3$, e a nulidade é $n-p = 1$.

As tarefas t_2 e t_3 são especificamente descritivas a partir do resultado alcançado na realização da t_1 . Ao passo que a realização da t_4 no *GeoGebra* requer a construção de esquemas próprios. Um desses esquemas é:

- ✓ utilizar a ferramenta F1, entrando com cada equação fornecida no GT2 tal como ela é, executar a instrução com a tecla “*Enter*”. Em seguida aplicar a ferramenta F6 formando pares dessas equações, que também deve ser executada com a tecla “*Enter*”. Aplicar a ferramenta F7 considerando os resultados obtidos com aplicação da F6.

Esse esquema é colocado em prática no *GeoGebra* conforme mostrado na Tabela 7.

Tabela 7.

Realização parcial da t4 do GT2 com ferramentas e potencialidades do GeoGebra
(Produção do autor)

<i>Ferramenta</i>	<i>Implementação</i>
F1	<ul style="list-style-type: none"> ● eq1: $y + 3z = 5$ “Executar a instrução com <i>Enter</i>” ● eq2: $x - 3y + z = 2$ “Executar a instrução com <i>Enter</i>” ● eq3: $x + 4y + z = 3$ “Executar a instrução com <i>Enter</i>”
F6	<ul style="list-style-type: none"> ● f: Interseção Geométrica (eq1, eq2) “Executar a instrução com <i>Enter</i>” ● g: Interseção Geométrica (eq1, eq3) “Executar a instrução com <i>Enter</i>” ● h: Interseção Geométrica (eq2, eq3) “Executar a instrução com <i>Enter</i>”
F7	● P = Interseção (f, g) “Executar a instrução com <i>Enter</i> ”

Apresenta-se na Figura 11 o resultado da execução das instruções implementadas na Tabela 7.

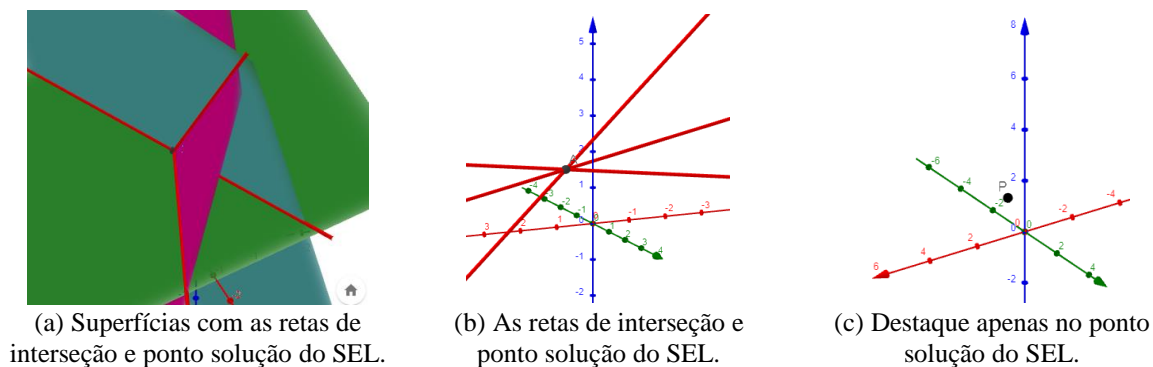
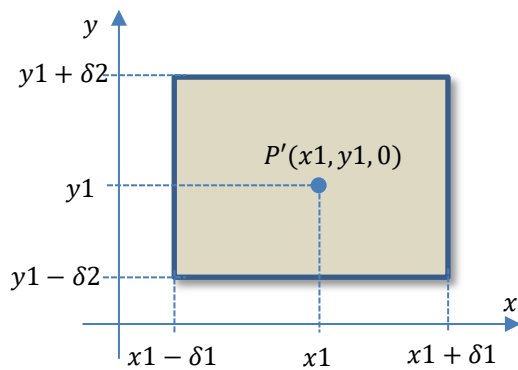


Figura 11.

Visualização das superfícies planas das equações do sistema, as suas interseções duas a duas e o ponto solução do SEL, no registro gráfico (Produção do autor)

É fundamental observar nesse resultado o potencial da Geometria Dinâmica na validação de soluções de Sistemas de Equações Lineares no registro gráfico. A visualização correspondente a Figura 11 (a) ainda pode ser refinada, observando-se cada superfície estritamente, na vizinhança da solução do SEL. Isso remete ao desenvolvimento de competências na construção de esquema de ação instrumental em torno da t5 do GT2. Para isso, é necessário eleger uma das variáveis em cada equação como dependente e descrever um único domínio D comum ao crivo de cada superfície, sendo as demais variáveis independentes. O conjunto D deve conter a projeção ortogonal P' do ponto P solução do SEL. Digamos que a variável z seja eleita como dependente em cada equação. Com esta escolha, P' é um ponto do plano xy de coordenadas $(x_1, y_1, 0)$. Assim, se $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$ são incrementos de x_1 e y_1 , respectivamente, então as ilustrações indicadas na Figura 12, exprimem uma boa representação do domínio D no registro gráfico (c.f. Figura 12 (a)), e analiticamente, no registro algébrico (c.f.

Figura 12 (b)).



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

em que

- ✓ $a = x1 - \delta1$
- ✓ $b = x1 + \delta1$
- ✓ $c = y1 - \delta2$
- ✓ $d = y1 + \delta2$

(a) Domínio do crivo de uma superfície S na vizinhança da solução do sistema de três equações lineares, no registro gráfico.

(b) Representação analítica do domínio do crivo de uma superfície S na vizinhança da solução do sistema de três equações lineares, no registro algébrico.

Figura 12:

Domínio retangular do crivo de uma superfície na vizinhança de um ponto, em particular, solução do SEL (Produção do autor)

Nesta perspectiva, a representação do crivo da superfície de cada equação de *SEL* na vizinhança da solução fornecida na realização da t2 do GT2, no registro gráfico, requer a construção dos seguintes esquemas de ação instrumental na relação [S(i)-O] do modelo SAI:

- ✓ *Esquema1*: utilizar a ferramenta F1, entrando com $x1$ atribuindo-lhe o valor da abscissa do ponto solução do *SEL*. Idem para $y1$ com o valor da ordenada do ponto solução do *SEL*.
- ✓ *Esquema2*: utilizar a ferramenta F1, entrando com $\delta1$ atribuindo-lhe um valor para incremento de $x1$, idem para $\delta2$ em vista do incremento de $y1$.
- ✓ *Esquema3*: utilizar as ferramentas F1, F5, implementando nas entradas de F5, a partir de F1, a expressão de x , de y e de z , das equações paramétricas da primeira equação do *SEL* com os parâmetros definidos em $[a, b]$ e $[c, d]$, considerados no domínio D . Executar a instrução com a tecla “Enter”, obtendo como resultado o crivo CS1 de eq1.
- ✓ Repetir o *Esquema3* para a segunda e em seguida para a terceira equação do *SEL*, obtendo como resultado o crivo CS2 de eq2 e CS3 de eq3, respectivamente.
- ✓ *Esquema4*: utilizar as ferramentas F1, F4, implementando nas entradas de F4, a partir de F1, a expressão de x , de y e de z , das equações paramétricas da interseção de CS1 com CS2, isto é, para $CS1 \cap CS2$, com o parâmetro definido no intervalo $[a, b]$. Executar a instrução com a tecla “Enter”.
- ✓ Repetir o *Esquema4* para $CS1 \cap CS3$ e em seguida para $CS2 \cap CS3$.

Esses esquemas são colocados em prática no *GeoGebra*, conforme mostrado na Tabela 8, na relação do sujeito com o objeto O por mediação do *instrumento* ([S(i)-O]) na pesquisa

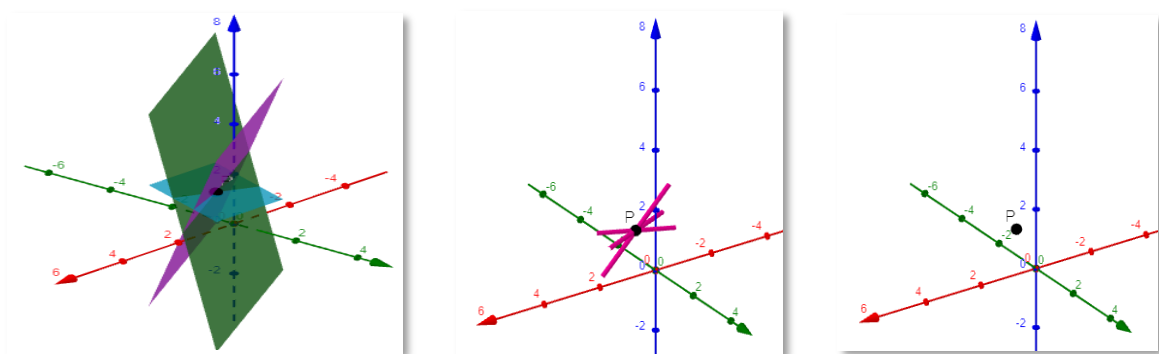
interna na qual estamos imersos neste momento, e espera-se também que esses esquemas emerjam na *pesquisa externa* face ao modelo SAI estendido.

Tabela 8.

*Realização parcial da t4 do GT2 com ferramentas e potencialidades do GeoGebra
(Produção do autor)*

Ferramenta	Implementação
F1	<ul style="list-style-type: none"> ● $x1 = x(P)$ “Executar a instrução com a tecla <i>Enter</i>” ● $y1 = y(P)$ “Executar a instrução com a tecla <i>Enter</i>” ● $\delta1 = 2$: “Executar a instrução com a tecla <i>Enter</i>” ● $\delta2 = 3$: “Executar a instrução com <i>Enter</i>”
F5	<ul style="list-style-type: none"> ● $CS1 = Superfície\left(u, v, \frac{3-v}{3}, u, x1 - \delta1, x1 + \delta1, v, y1 - \delta1, y1 + \delta1\right)$ “Executar a instrução com <i>Enter</i>” ● $CS2 = Superfície(u, v, 2 - u + 3v, u, x1 - \delta1, x1 + \delta1, v, y1 - \delta1, y1 + \delta1)$ “Executar a instrução com <i>Enter</i>” ● $CS3 = Superfície(u, v, 3 - u - 4v, u, x1 - \delta1, x1 + \delta1, v, y1 - \delta1, y1 + \delta1)$ “Executar a instrução com <i>Enter</i>”
F4	<ul style="list-style-type: none"> ● $Cr1 = Curva\left(u, \frac{3u-1}{10}, \frac{5}{3} - \frac{3u-1}{30}, u, x1 - \delta1, x1 + \delta1\right)$ “Executar a instrução com <i>Enter</i>” ● $Cr2 = Curva\left(u, \frac{4-3u}{11}, \frac{5}{3} - \frac{4-3u}{30}, u, x1 - \delta1, x1 + \delta1\right)$ “Executar a instrução com <i>Enter</i>” ● $Cr2 = Curva\left(u, \frac{1}{7}, \frac{17-7u}{7}, u, x1 - \delta1, x1 + \delta1\right)$ “Executar a instrução com <i>Enter</i>”

Apresenta-se na Figura 13 o resultado da execução das instruções (Tabela 8), implementadas no *GeoGebra* na relação [S(i)-O]. Salienta-se que as parametrizações, tanto das superfícies quanto das curvas (retas das interseções das superfícies) ocorrerão na relação usual sujeito-objeto [S-O] mediante aplicação de técnicas do *ambiente papel/lápis*, como uma estratégia de incentivar a estreita relação existe entre este ambiente de aprendizagem e o *ambiente computacional*.



(a) Crivos de Superfícies juntamente com os crivos das retas de interseção e o ponto solução do SEL

(b) Crivos das retas de interseção juntamente com o ponto solução do SEL

(c) Destaque apenas no ponto P solução do SEL

Figura 13:

Visualização dos crivos das superfícies planas de equações e retas de interseção na

vizinhança do ponto solução do Sistema de Equações Lineares (Produção do autor)

A elaboração e implementação de esquemas de ações instrumentais é, portanto, uma ação/prática que deve ocupar um espaço significativo na análise das relações do sujeito, tanto na *pesquisa interna* quanto na *pesquisa externa* inscritas na Abordagem Instrumental. Mas, quais são os esquemas desenvolvidos pelos estudantes na construção do *instrumento*, face à resolução de SEL utilizando as ferramentas do *ambiente computacional GeoGebra*? Esse questionamento remete a nossa investigação à *pesquisa externa*, favorecendo a realização das análises que apresentamos na seção subsequente.

Aplicação e análise de práticas de estudantes sobre Sistemas de Equações Lineares

Conforme sublinhado anteriormente, a investigação envolveu dez participantes por intermédio de uma das oficinas do GPEMAC, ofertadas no segundo semestre de 2021, de forma remota¹² utilizando-se a plataforma *Google meeting*. Dentre os participantes havia estudantes de curso de Licenciatura em Matemática matriculados em uma Universidade pública e Professores de Matemática da rede pública estadual.

A oficina foi organizada em três partes, aplicadas em duas sessões. Sendo duas na primeira sessão e uma na terceira. Cada sessão foi gravada por meio do *Google meeting* e disponibilizada aos participantes no *Classroom* do grupo.

Os dois geradores de tarefas apresentados anteriormente, que favoreceram a análise das ferramentas do *GeoGebra* na relação [S-i] na *pesquisa interna*, apresentada na seção anterior, foram disponibilizados aos participantes no final da oficina, no *Classroom* do grupo, como dispositivo experimental, atuando também como avaliação da oficina. Neste momento, os participantes foram deixados à vontade para utilizarem tanto o *ambiente papel/lápis* quando o

¹² A referida oficina foi intitulada: Soluções de sistemas de equações lineares no registro numérico e validação no registro gráfico: práticas pessoais do *ambiente papel/lápis* ao *ambiente computacional*. Oficinas do GPEMAC, 2021.

ambiente computacional GeoGebra online acessível para todos, por se tratar de um ambiente de acesso livre. Dentre os dez participantes, seis responderam o dispositivo, postando os seus respectivos arquivos munidos de respostas no *Classroom*, os quais identificamos por POSEL1¹³, POSEL2, ... POSEL6.

Sem retomarmos os referidos geradores de tarefas, organizamos na Tabela 9 as respostas fornecidas pelos POSEL para t1 do GT1: Apresentar os elementos ou conceitos, em itens, (a), (b),... ou (i), (ii), (iii),... que encontrou na relação considerada no GT1, que não conhecia antes desta oficina.

Tabela 9.

Respostas fornecidas pelos participantes à t1 do GT1 (Dados da pesquisa)

POSEL1	POSEL2	POSEL3
(a) Operações Elementares: Permuta; Multiplicação e Substituição.	Posto e nulidade de uma matriz	Sistema solúvel (quantidade de equações igual à quantidade de variáveis)
(b) A definição da Forma Escada	Determinar quando um sistema linear é PD, PI ou I	Método de resolução de SEL, Sistemas Equivalentes.
(c) Posto e nulidade de uma Matriz		A técnica de resolução de SEL por Sistemas Equivalentes é operacional na pesquisa de soluções de sistema com m equações (linhas) e n incógnitas
(d) Teorema: Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente		Operação, permutar duas linhas (no caso de o elemento do sistema ser zero), pois o coeficiente de da primeira equação do sistema tem de ser diferente de zero.
(e)		Linha reduzida à forma escada.
(f)		Matriz ampliada.
(g)		Posto e Nulidade
POSEL4	POSEL5	POSEL6
(a) O conceito de posto de uma matriz;	Sem resta!	t1: Eu não conhecia os conceitos de posto e nulidade, para mim foram novidades, eu nem imaginava a importância que esses elementos tinham para resolução de sistemas lineares. Os teoremas para mim, assim como os elementos que os compõem. Então achei muito interessante abordar esses conceitos.
(b) O conceito de nulidade de uma matriz;		
(c) A ideia de que em um sistema de m equações e n incógnitas, podemos assumir para a_{ij} e b_{ij} valores reais ou complexos .		

Uma observação notável nas respostas apresentadas pelos participantes, salvo o POSEL5 que não respondeu a t1 do GT1, consiste na unanimidade da ausência de suas relações com o conceito de posto e de nulidade de uma matriz, importantes na tomada de decisão sobre a solução de um SEL. Entendemos também que quando POSEL2 escreve PD, PI e I, está se referindo a um sistema que seja *possível e determinado*, *possível e indeterminado* ou *impossível*. Além disso, muitos conceitos

¹³ Participante da Oficina Sistema de Equações Lineares (POSEL)

trabalhados durante a aplicação da oficina encontram espaço significativo na formação deles, mostrando a relevância e a contribuição das oficinas do GPEMAC no desenvolvimento de suas competências pessoais, em particular, no que diz respeito ao tratamento do objeto SEL, tanto no *ambiente papel/lápis* quanto no *ambiente computacional*, conforme se pode acompanhar ainda nas suas respostas que trazemos na Tabela 10, no tocante a t2 do GT1: Apresentar as ferramentas/recursos do *GeoGebra*, em itens, (a), (b),... ou (i), (ii), (iii),... que encontrou na relação considerada no GT1, que não conhecia antes desta oficina.

Tabela 10.

Respostas fornecidas pelos participantes à t2 do GT1 (Dados da pesquisa)

POSEL1	POSEL2	POSEL3
(a) O comando de inserir no campo de entrada do GeoGebra uma Matriz qualquer.	Imputar sistema de equação	Os recursos de representação de matriz e matriz escalonada.
(b)	Análise do gráfico das equações	
(c)	Imputar matriz e calcular seu escalonamento	
POSEL4	POSEL5	POSEL6
(d) Obter uma matriz $m \times n$ ampliada no campo de entrada do geogebra pelo exemplo de sintaxe: M= {{a11,a12,a13,a14,b1}, {a21,a22,a23,a24,b2}}. As chaves separam as linhas da matriz e as vírgulas as colunas.	Sem resposta!	Eu não conhecia a ferramenta de colocar matrizes, era uma ferramenta que eu tinha muito interesse em aprender a utilizar e graças a oficina eu pude a ver em prática. A ferramenta de escalonar a matriz também é muito interessante e tem uma importância muito relevante quando se trata do trabalho com sistemas lineares
(e) Para escalonar uma matriz, utilizamos no software geogebra o comando “MatrizEscalonada (M)”, fazendo referência a matriz obtida anteriormente.		

Dentre as ferramentas destacadas na análise de recursos do *ambiente computacional GeoGebra*, podemos encontrar nas respostas dos participantes as ferramentas: F1, F8, F9 (c.f. Tabela 5). Isso mostra uma certa relação instrumental dos participantes com este ambiente. Quando POSEL2 escreve “Imputar” acreditamos que esteja se referindo a possibilidade de implementar uma matriz no *GeoGebra*, em que seja necessária a mobilização da ferramenta F8.

Em contrapartida, confrontando as respostas destes participantes com o resultado apresentado na *pesquisa interna* (Tabela 5), percebe-se a existência de ferramentas não mencionadas por eles. Manifestando-se daí a necessidade de se investir mais na relação do sujeito (S) com o objeto O (SEL) por mediação do *instrumento* (i), isto é, a relação [S(i)-O] na *pesquisa externa* com base no modelo SAI estendido, onde o Professor/pesquisador exerça um


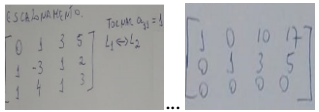
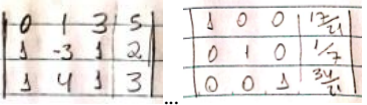
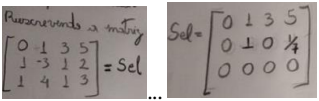
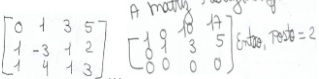
papel de educador, orientador, incentivador, etc., dos estudantes (S) na identificação das ferramentas do *ambiente computacional* adequadas à situação e na descrição das respectivas potencialidades que intervêm na elaboração dos esquemas de ações instrumentais. Em seguida, realizar-se a implementação de cada esquema na construção do *instrumento* durante a *gênese instrumental*, ou seja, a resolução da tarefa visada na perspectiva de ABIN. Vemos aí também a importância das relações [(E(P)-i)] e [(E(i)(P)-O)] no modelo SAI estendido.

Na terceira tarefa t3 do GT1 os participantes foram bem descritivos e unânimes sobre aquisição de novos conhecimentos durante o desenvolvimento da oficina, revelando-se mais uma vez a importância desse tipo de atividade na formação inicial, para os estudantes em curso de Licenciatura em Matemática, e continuada, no tocante aos Professores de Matemática da rede pública estadual.

Observadas essas importantes informações a partir do GT1, apresentamos, a seguir, a análise das práticas pessoais dos participantes, referentes às tarefas gerenciadas no segundo gerador (GT2). Assim, diferentemente da escolha realizada sobre a análise das tarefas do GT1, restringimo-nos à apresentação dos resultados que organizamos nas Tabelas 11, 12 e 13, referentes as tarefas t1, t4 e t5 do GT2, respectivamente.

Tabela 11.

Respostas fornecidas pelos participantes na resolução da t1 do GT2 (Dados da pesquisa)

POSEL1	POSEL2	POSEL3
		
POSEL4	POSEL5	POSEL6
		<p>Peço desculpas por não poder responder o GT2...</p>

Trazemos na Tabela 11, apenas a matriz inicial extraída no sistema proposto no GT2, e a matriz final obtida pelo participante, por *linha reduzida a forma escada*, na relação usual [S-O] do modelo SAI, utilizando as técnicas do *ambiente papel/lápis*. Nesta utilização,

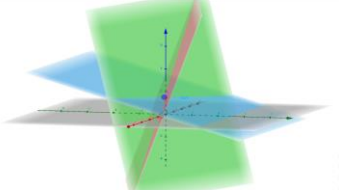
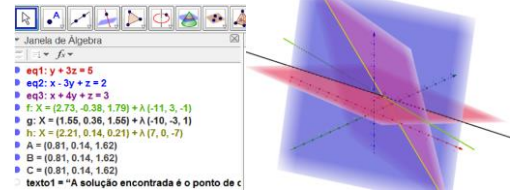
consideram-se três operações elementares sobre as linhas de uma matriz, que são:

- i) **Permutação** da *i-ésima* com a *j-ésima* linha, denotada por: $L_i \leftrightarrow L_j$
- ii) **Multiplicação** da *i-ésima* linha por um escalar não nulo k , denotada por: $L_i \rightarrow k \cdot L_i$
- iii) **Substituição** da *i-ésima* linha pela *i-ésima mais k vezes a j-ésima linha*, denotada por: $L_i \rightarrow L_i + k \cdot L_j$

Em conformidade com o disposto na análise de recursos de um *ambiente computacional*, apenas dois, dentre os cinco participantes que responderam a tarefa (t1) do GT2 utilizaram, convenientemente as referidas operações, apresentando assim o resultado esperado, notadamente, o POSEL1 e o POSEL3. Este resultado indica, portanto, a necessidade de uma discussão complementar do pesquisador/Professor juntamente com os referidos participantes, justificada pela Interação Estudante-Objeto-Mediada pelo Professor [E(P)-O], preconizada no modelo SAI estendido. A realização da t4 do G2, que requer “*validar, no registro gráfico em três dimensões, e por escalonamento de matriz, a solução fornecida na realização da t1 e t2, utilizando o ambiente computacional GeoGebra online*”, serve, além do desenvolvimento de competências matemáticas, de elemento de reflexão da própria prática que o participante realizou no *ambiente papel/lápis*, é uma espécie de autoavaliação mediada por instrumento na relação [S(i)-O] do modelo SAI estendido. O que é que os participantes desenvolveram a partir desta tarefa? A Tabela 12 traz respostas para essa questão.

Tabela 12:

Respostas fornecidas pelos participantes à t4 do GT2 (Dados da pesquisa)

POSEL1	POSEL3
	

Conforme se pode observar na Tabela 12, apenas dois participantes responderam, parcialmente, a t4 do GT2, sendo os mesmos que forneceram o resultado esperado na realização da t1 e da t2. Parcialmente no sentido de que o POSEL1, além de ocultar as instruções fornecidas ao *GeoGebra*, não indica como identificou o ponto ilustrado juntamente com as superfícies de equações

que constituem o sistema. Mais ainda, ele não explora o conceito de interseção de duas superfícies. Consequentemente, ele não constrói o *instrumento* para a interseção de curvas, em particular, das retas resultante das interseções das superfícies planas, duas a duas. Contrariamente do POSEL 1, o POSEL3 por sua vez, além da ilustração das superfícies planas no registro gráfico, que passa pela mobilização da ferramenta F1, ele se apropria das ferramentas F4 e F6 por instrumentação na relação [S-i], mediante a seleção dessas ferramentas no menu de ferramentas de *GeoGebra*, e proceder com ação de “clique” sobre os objetos correspondentes, obtendo assim, os resultados identificados por f , g e h como interseção de superfícies identificadas por eq1, eq2 e eq3, duas a duas. Sendo os resultados identificados por A, B e C como interseções das retas de equações indicadas f , g e h , duas a duas. Essa análise é notável na prática do POSEL3. Assim ele escreve:

- a) Digitei as equações no campo de entrada.
- b) Usei a ferramenta “Interseção de Duas Superfícies” para encontrar as retas de interseção dos planos.
- c) Usei a ferramenta “interseção de Dois Objetos” para encontrar o ponto de interseção das retas que foram formadas pela interseção dos planos.

A validação da solução por escalonamento de matriz no *GeoGebra* não foi explorada, nem pelo POSEL1 e nem pelo POSEL3, mesmo sabendo que os dois mencionaram a ferramenta F8, ao responderem a t2 do GT1, onde POSEL1 escreveu: “o comando de inserir no campo de entrada do *GeoGebra* uma Matriz qualquer” e o POSEL3 escreveu: “os recursos de representação de matriz e matriz escalonada”.

Ora, no resultado apresentado por POSEL3, identificado por A, B e C como interseções das retas de equações indicadas f , g e h , duas a duas, revela que $A=B=C$ =Ponto solução do sistema em questão que este e POSEL1 forneceram, anteriormente, na resolução da t1 do GT2.

A ausência desta validação mostra a necessidade de se investir na “Interação Estudante-Objeto mediada pelo *instrumento* e pelo Professor [(E(i)(P)-O)], prevista no modelo SAI estendido, que deva favorecer as organizações didáticas fundamentais na orientação do estudante diante do desenvolvimento da sua relação com os objetos do saber em jogo, por mediação do *instrumento* [S(i)-O]. Nessas organizações a identificação de *ferramentas* do

software, assim como a elaboração de esquemas de ações instrumentais, se tornam fatores fundamentais na construção do *instrumento*.

A terceira, sendo a última tarefa do GT2 que nos incumbimos analisar, é identificada por t5 com o seguinte enunciado “*Representar, no registro gráfico, o crivo da superfície de cada equação do SEL na vizinhança da solução fornecida na realização da t1 e t2*”. Conforme se pode observar na Tabela 13, nenhum dos participantes realizou esta tarefa.

Tabela 13.

Respostas fornecidas pelos participantes à t5 do GT2 (Dados da pesquisa)

POSEL1	POSEL2	POSEL3
Sem resposta!	Sem resposta!	Sem resposta!
POSEL4	POSEL5	POSEL6
Sem resposta!	Sem resposta!	Sem resposta!

A descrição, instrumentação e instrumentalização de crivos de superfícies, em geral, e planas, em particular, na vizinhança de soluções de Sistemas de Equações Lineares em 3D, são encaradas como grandes desafios por muitos estudantes, pois a implementação de um crivo de uma superfície, não requer apenas a transferência da equação correspondente tal como ela é, no *ambiente computacional*, exige mais do que isso, é necessário o desenvolvimento de competências que vão além do simples entrada de informações no *software*, e apertar a tecla “*Enter*”, como no caso da visualização das superfícies de eq1, eq2 e eq3 (c.f. POSEL3), sem algum custo adicional.

Os esquemas apresentados durante a análise das ferramentas do *ambiente computacional GeoGebra* na *pesquisa interna*, mostram muito bem a necessidade de que nos referimos acima. Podemos, por tanto, conjecturar que, apesar dos estudantes terem acesso as tecnologias digitais, não é evidente nas suas práticas, face à gestão de tarefas de Superfícies de Equações Lineares, a mobilização de ferramentas do *software* e de esquemas adequados, necessários na obtenção de soluções eficazes na perspectiva de construção do *instrumento* na *gênese instrumental*, conjecturando-se, assim que o *software* por si só, é insuficiente para promover a aprendizagem dos estudantes sem a intervenção e a organização didática eficaz do(a) Professor(a). Vemos daí, de forma explícita, o papel e o estima do modelo SAI estendido em trabalhos de pesquisa, de ensino e de

extensão fundamentados na Abordagem Instrumental proposta por *Pierre Rabardel* (c.f. Figura 1).

Considerações finais

Quando pensamos em escrever este artigo, ambicionamos em trazer elementos de reflexão acerca da utilização da Abordagem Instrumental de *Pierre Rabardel*, como quadro teórico eficaz, no desenvolvimento de trabalhos de pesquisadores, em Educação, que possam se interessar pela análise de ferramentas tecnológicas e as respectivas potencialidades na construção do *instrumento* pelo sujeito, diante dos objetos de saberes, visando a aprendizagem matemática.

Esse pensamento nos levou a discorrer, com propriedade, sobre os constructos teóricos propostos por *Rabardel*, desde o ponto de partida dessa abordagem ao momento que entramos nas aplicações, dando atenção especial as *ferramentas* tecnológicas digitais, elegendo o *software GeoGebra* como *ambiente computacional* de aprendizagem. Observamos os elementos teóricos desta abordagem em duas dimensões: a *pesquisa interna* e a *pesquisa externa*. Na primeira dimensão, além de discutirmos sobre os elementos primitivos da abordagem, apresentamos uma extensão do modelo SAI em três dimensões, como meio de provocarmos uma reflexão sobre o papel do Professor ou do pesquisador nas relações primitivas deste modelo na *pesquisa externa* durante a aplicação dos estudos em sala de aula. Recorrendo ao Modelo Praxeológico de Gestão de Tarefas (MPGT), buscamos entender as ferramentas do *software* eleito no tratamento das tarefas gerenciadas com base no exemplar do MPGT, destacando, por conseguinte, as potencialidades de cada *ferramenta*, assim como os esquemas de ações instrumentais que favorecem a realização dessas tarefas no *GeoGebra*. Apropriando-nos das práticas de sujeitos que participaram de uma oficina sobre soluções de Sistemas de Equações Lineares, ofertada pelo Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em *Ambiente Computacional* (GPEMC), utilizando dois geradores de tarefas, entramos na *pesquisa externa*, analisando assim as práticas efetivas destes participantes. Os

resultados obtidos mostram que existe uma aliança muito forte entre o trabalho do sujeito realizando no *ambiente papel/lápis* e no *ambiente computacional*. Contudo, essa aliança é fraca nas práticas dos estudantes, na perspectiva de construção do *instrumento* durante a *gênese instrumental*. Esse resultado nos levou a seguinte conjectura: apesar de, nos tempos atuais, os estudantes terem acesso as tecnologias digitais, a referida aliança é quase ausente nas suas práticas efetivas institucionais, face a gestão de tarefas de SEL. Com efeito, sustentamos o fato de que o *ambiente computacional* por si só, é insuficiente para promover a aprendizagem dos estudantes sem que haja a intervenção e a organização didática eficaz do(a) Professor(a) na construção do *instrumento*. Essa intervenção é gerenciada no modelo SAI estendido, no qual se observa a multiplicidade das relações instrumentais que envolve o Professor/pesquisador, o aluno/estudante, o *instrumento*, e o objeto do conhecimento visado, simultaneamente no mesmo meio de aprendizagem.

Referência

- Abar, C. A. A. P; Alencar, S. V. A Gênese Instrumental na Interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de Matemática. *Boletim de Educação Matemática*. Rio Claro, SP, v.27, n. 46, agosto, p.349-365,2013.
- Boldrini, Luis José e outros (1980). *Álgebra Linear*. 3 ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil.
- Drijvers P. (2002), L'algèbre sur l'écran, sur le papier et la pensée algébrique. p. 215-242. In: Guin D. & Trouche L. Calculatrices symboliques – transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. La pensée sauvage éditions.
- Guin D. & Trouche L. (Coord. par) (2002). Calculatrices symboliques – transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. La pensée sauvage éditions.
- Henriques, A. (2019) *Saberes Universitários e as suas relações na Educação Básica - Uma análise institucional em torno do Cálculo Diferencial e Integral e das Geometrias*. Via Litterarum. Ibicará, Bahia. Editora.
- Henriques, A., Nagamine, A., Serôdio, R. (2020). Mobilização de crivos de curvas e de superfícies na resolução de problemas matemáticos: uma aplicação no ensino superior. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v.22, n. 1, 253-275.
- Henriques, A. Serôdio, R. Intervenção de Tecnologias e Noções de Registros de Representação no Estudo de Integrais Múltiplas na Licenciatura em Matemática. Anais do VI HTEM - São Carlos-SP. 2013.

- Bittar, M. (2011). A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. *Educar em Revista*, Curitiba, (157-171). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S0104-40602011000400011>
- Lagrange J.B. (2002), Etudier les mathématiques avec les calculs symboliques : quelle place pour les techniques. p. 151-185. In: GUIN D. & TROUCHE L. *Calculatrices symboliques – transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques*. La pensée sauvage éditions.
- Trouche L (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans l'environnement calculatrice symbolique. p. 187-214. In: GUIN D. & TROUCHE L. *Calculatrices symboliques – transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques*. La pensée sauvage éditions.
- Rabardel P. (1995). *Les Hommes et les Technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin Editeur, Paris.
- Ramos, S. M. *Aplicação de Modelos de PCOC na Aprendizagem da Geometria Espacial no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, 2018.
- Verillon P. (1996), La problématique de l'enseignement : un cadre pour penser l'enseignement du graphisme, *Revue GRAF & TEC*. V. 0 n° 0, Université Fédérale Santa Catarina, Brésil.