ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i3p062-107

Analyse mathématique et regard didactique sur les formules de Taylor en vue d'une meilleure conceptualisation

Mathematical analysis and didactic look at Taylor's formulas for a better conceptualization

Análise matemática e olhar didático sobre as fórmulas de Taylor à vista de uma melhor conceitualização

Análisis matemático y mirada didáctica a las fórmulas de Taylor para una mejor conceptualización

Imed Kilani[1]
Université Virtuelle de Tunis, ISEFC, (ECOTIDI-UR16ES10)
https://orcid.org/0000-0001-9549-5250

Rahim Kouki[2]
Université de Tunis el Manar, IPEI El Manar, (ECOTIDI-UR16ES10)
https://orcid.org/0000-0002-8664-731X

Mohamed Beldi[3]
Université de Tunis el Manar IPEI El Manar, (RT-UR13ES27)
https://orcid.org/0000-0001-7952-922X

Résumé

Les formules de Taylor (Taylor-Young,Taylor-Lagrange et Taylor avec reste intégral) font l'objet d'un enseignement explicite en analyse à l'entrée à l'université et particulièrement dans les classes préparatoires aux études d'ingénieurs tunisiennes. Cet article a pour objet d'analyser ces formules sous les deux angles mathématique et didactique. Ce travail a permis de montrer l'illusion de transparence de ces formules et a révélé leurs complexités syntaxique et sémantique. L'analyse curriculaire que nous avons mené a montré la non prise en compte réelle de ces complexités aussi bien dans le programme officiel que dans le « savoir apprêté » des enseignants.

Mots clés : Les formules de Taylor, registres sémiotiques, restes de Taylor, approche locale et approche globale, ordre du développement, savoir apprêté.

1 kilanis2006@yahoo.fr
2rahim.kouki@ipeiem.utm.tn
3mohamed.beldi@ipeiem.utm.tn

Abstract

Taylor's formulas (Taylor-Young, Taylor-Lagrange, and Taylor with integral remainder) are the subject of explicit instruction in analysis on entering university and particularly in preparatory classes for Tunisian engineering studies. The purpose of this article is to analyze these formulas from both mathematical and didactic angles. This work allowed to show the illusion of transparency of these formulas and revealed their syntactic and semantic complexities. The curricular analysis that we carried out showed that these complexities were not really taken care of in both the official curriculum and in the "prepared knowledge" of teachers.

Keywords: Taylor's formulas, Semiotic registers, Taylor remainders, Local approach and global approach, Order of development, Prepared knowledge.

Resumo

As fórmulas de Taylor (Taylor-Young, Taylor-Lagrange e Taylor com resto integral) são objeto de ensino explícito em análise na entrada da universidade e particularmente nas aulas preparatórias aos estudos de engenheiros tunisianos. O objetivo deste artigo é analisar essas fórmulas sob os ângulos matemático e didático. Este trabalho permitiu mostrar a ilusão de transparência dessas fórmulas e revelou suas complexidades sintáticas e semânticas. A análise curricular que realizámos mostrou que estas complexidades não são realmente levadas em conta no programa oficial assim como no "saber preparado" dos professores.

Palavras-chave: Fórmulas de Taylor, Registros Semióticos, Restos de Taylor, Abordagem Local e Abordagem Global, Ordem de Desenvolvimento, Saber Preparado.

Resumen

Las fórmulas de Taylor (Taylor-Young, Taylor-Lagrange y Taylor con resto integral) se enseñan explícitamente en análisis al ingreso entrada a la universidad y, en particular, en las clases preparatorias de los estudios de ingeniería en Túnez. Este artículo pretende analizar estas fórmulas tanto desde el punto de vista matemático como didáctico. Este trabajo ha mostrado la ilusión de transparencia de estas fórmulas y ha revelado sus complejidades sintácticas y semánticas. El análisis curricular que hemos realizado ha demostrado que estas complejidades no se tienen realmente en cuenta ni en el programa oficial ni en los “conocimientos preparados” de los profesores.

Palabras clave: Fórmulas de Taylor, Registros Semióticos, Restos de Taylor, Enfoques Local y Global, Orden de Desarrollo, Conocimiento Preparado.

Analyse mathématique et regard didactique sur les formules de Taylor en vue d’une meilleure conceptualisation

La recherche que nous présentons dans cet article s’inscrit dans la problématique globale de l’étude de la transposition didactique des approximations dans le domaine de l’analyse réelle en nous centrons plus précisément sur les formules de Taylor sous ses différentes formes. Ces formules jouent, en fait, un rôle très important dans le domaine de l’analyse mathématique puisqu’elles permettent de faire des approximations locales et globales de fonctions complexes, de déterminer plus simplement des limites de fonctions, d’étudier les comportements asymptotiques des fonctions au voisinage de l’infini, d'étudier localement des positions de courbes par rapport à leurs tangentes et même de calculer des intégrales complexes etc.

Plusieurs recherches Tall & Vinner (1981), Martin (2013), Rasmussen & Wawro (2017) et Kouki & Griffits (2020), ont déjà été conduites dans le domaine des approximations locales des fonctions. Cependant, réserver une recherche didactique pour étudier, particulièrement, les spécificités des formules de Taylor n’a pas, à notre connaissance, eu lieu.

Dans cette recherche, nous supposons que les particularités et le rôle de chacune des formules de Taylor, qui font l’objet d’un enseignement explicite dans le cours d’analyse de la première année universitaire des instituts préparatoires aux études d’ingénieurs tunisiennes, ne sont pas totalement prises en considération aussi bien par les programmes que par les ouvrages universitaires.

Nous considérons, qu’une investigation de nature mathématique et épistémologique de chacune des formules de Taylor, permettra d’apporter un meilleur éclairage en rendant compte des insuffisances qui peuvent apparaître dans la conceptualisation de ces formules dans le processus de leur transposition didactique.

Dans la première partie de cet article, nous nous référons explicitement aux aspects mathématiques de la formule de Taylor avec ses différentes variantes afin de préciser les enjeux et les spécificités mathématiques de chacune d'entre elles. Dans la deuxième partie, et sans prétendre faire le tour de la genèse de ces formules, nous présentons quelques éléments clés de l'histoire du développement conceptuel de ces formules. Ce travail permettra de repérer les processus à l'origine de leur construction historique afin de les exploiter pour marquer des arrêts curriculaires, pertinents et légitimes, au moment de leur transposition interne. La troisième partie sera consacrée à une brève étude sémiotique au sens de Duval (1993 & 2006) des variantes de la formule de Taylor.

Le travail d'analyse mathématique, épistémologique et sémiotique enrichie par les jeux de cadres introduits et développés par Douady (1986 & 1991), nous en conduit à mener des analyses en termes de transposition didactique du programme officiel et du « savoir apprêté » relatifs aux formules de Taylor enseignés dans le domaine de l'analyse mathématique de la première année section Math-Physique (MP) du cycle préparatoire aux études d'ingénieurs.

Les formules de Taylor : ruptures et continuités

Du côté des mathématiques, les formules de Taylor sont principalement de trois variantes : Taylor-Young, Taylor-Lagrange et Taylor avec reste intégral. Ces formules permettent d'approximer une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

Elles se différencient, non seulement, par un reste qui peut s'exprimer sous différentes formes mais aussi par leurs hypothèses et par leurs applications. Dans cette partie, nous analyserons ces trois formules de la moins « précise » à la plus « précise ».

La formule de Taylor-Young

Soit I un intervalle ouvert non vide de IRet soit $x_0$un point de$I$.
Soit $f: I \to IR$ une fonction et n un entier≥ 0. Si $f$est n-fois dérivable sur I alors, il existe une fonction $\varepsilon(x)$ définie sur I, qui tend vers 0 quand x tend vers x_0, telle que pour tout $x \in V(x_0)\backslash\{x_0\}$ on a :

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x)$$

La formule de Taylor-Young est une formule « locale[4] », qui donne des informations sur la fonction f uniquement lorsque le réel x est au voisinage du point x_0 :

Si on considère $P_n(x)$ le développement de Taylor à l'ordre n en x_0, la formule de Taylor peut s'exprimer comme suit :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ de x_0 sur lequel

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon|x - x_0|^n$$

Cette formule est très utile si on n'a pas besoin d'informations sur le reste dont la forme, ici, n'est pas une priorité. D'ailleurs, elle ne permet ni d'estimer ni de majorer l'erreur commise dans l'approximation. Cette formule ne sert qu'à résoudre des problèmes locaux comme la détermination de limites ou l'étude de la position d'une courbe par rapport à sa tangente au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. Elle est couramment utilisée pour déterminer les développements limités. Pour cela, elle donne une condition suffisante pour qu'une fonction f admette un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 : où il suffit qu'elle soit n-fois dérivable au voisinage de x_0.

Dans certains ouvrages de mathématiques, dans beaucoup d'œuvres universitaires et dans plusieurs sites de mathématiques, l'énoncé de la formule de Taylor-Young suppose que la fonction f soit de classe C^n, alors qu'une fonction n-fois dérivable au point x_0 est supposée

[4] Dans sa thèse, Maschietto (2002) explique que faire une étude locale revient à mettre en jeu la notion d'intervalle à travers la problématique de son existence. Elle illustre ces propos par la définition suivante :
« Soit une fonction $f : I \subset IR \to IR$, avec I=$[a, b]$ et un point choisi $x_0 \in]a, b[$. « faire une étude locale de la fonction f au voisinage de x_0 correspond à chercher un intervalle (ouvert et centré en x_0), sur lequel une propriété est vraie. » (Maschietto, 2002, p. 66).

être suffisante. Pourquoi alors demander une hypothèse de plus ? Il semblerait que cette condition est imposée par le choix de la démonstration adoptée pour démontrer le théorème de Taylor-Young à partir du théorème de Taylor-Lagrange qui impose, lui, que la dérivée d'ordre n soit continue. Démontrer Taylor-Young à partir de la formule de Taylor avec reste intégral n'est pas possible puisque ce théorème exige que f soit de classe C^{n+1}.

La formule de Taylor-Young n'est pas un corollaire de celle de Taylor-Lagrange, comme il peut paraître. C'est un résultat à part qui peut se démontrer, par exemple, via un raisonnement par récurrence avec l'hypothèse que f est stricto sensu n-fois dérivable, ni plus ni moins. En effet, si nous considérons :

$$R_n(x) = f(x) - (f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n)$$

Pour $n = 1$,

$$R_1 = f(x) - f(x_0) - f^{(1)}(x_0)(x - x_0)$$

Comme f est dérivable enx_0, alors $\lim_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f^{(1)}(x_0)$ ceci est équivaut à

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^{(1)}(x_0) + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x)$ une fonction réelle qui tend vers 0 qd x tend vers x_0

Alors $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f^{(1)}(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$

D'où

$$R_1 = f(x) - f(x_0) - f^{(1)}(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Ainsi

$$R_1 = (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Supposons maintenant que le résultat soit vrai à l'ordre $n - 1$

$$P_n(x) = (f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n)$$

Donc $P_n'(x) = (f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n)'$

$$P_n'(x) = f^{(1)}(x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f'^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

$$R'_n(x) = f'(x) - P_n'(x) = (x - x_0)^{n-1}\varepsilon(x)$$

$$\int_{x_0}^{x} R_n'(t)dt = \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^{n-1}\ \varepsilon(t)dt$$

$$R_n(\mathrm{x}) = \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^{n-1}\ \varepsilon(t)dt$$

Posons $\varepsilon_1(x) = \frac{1}{|x-x_0|^n}\int_{x_0}^{x}(t - x)^{n-1}\,\varepsilon(t)dt$ avec $\varepsilon_1(x_0) = 0$

Montrons que $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 quand x tend versx_0.

Soit $\varepsilon_2 > 0$, comme $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0, ∃ η> 0/$|t - x_0| \prec$η $\Rightarrow|\varepsilon(t)| \prec \varepsilon_2$

Si on suppose que $|x - x_0| \prec$ η on a $|\varepsilon_1(x)| \prec \varepsilon_2 \frac{1}{|x-x_0|^n}\left|\int_{x_0}^{x}(t - x_0)^{n-1}\,dt\right|$

Donc $|\varepsilon_1(x)| \prec \frac{\varepsilon_2}{n}$

On en déduit que pour $|x - x_0| \prec$ η on a $|\varepsilon_1(x)| \prec \frac{\varepsilon_2}{n}$ c'est-à-dire que $\varepsilon_1(x)$tend vers 0 quand x tend vers x_0. Donc $R_n(x) = |x - x_0|^n\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x)$tend vers 0 quand x tend vers x_0. D'où le résultat.

Cette démonstration montre qu'on n'a pas besoin de la continuité de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f et que l'hypothèse qui consiste à imposer que f soit de classe C^n est « forte ». On a juste besoin de considérer que f soit n-fois dérivable au voisinage de x_0.

Ceci montre qu'il existe un écart didactique, au niveau des hypothèses dans la formule de Taylor-Young, entre le savoir savant purement mathématique et le savoir mathématique proposé à être enseigner. Cet écart n'a pas, à notre sens, de légitimité mathématique mais peut-être didactique dans le cas où la formule de Taylor-Young apparait dans le cours d'analyse avant d'entamer le chapitre intégration. En effet, la démonstration de la formule implique la notion d'intégrale qui est naturellement évitée. Cependant, ce choix a un coût qui consiste à imposer une condition supplémentaire à savoir la continuité de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f.

Le reste dans la formule de Taylor ($(x - x_0)^n \varepsilon(x)$) se présente, souvent sous la forme de $o((x - x_0)^n)$ connue sous le nom de « notation de Landau ». Cette notation, couramment utilisée aujourd'hui en analyse, doit s'entendre voulant dire que $o((x - x_0)^n)$ est une fonction négligeable devant $(x - x_0)^n$ lorsque x tend vers x_0. Ce qui se traduit par $\lim_{x_0} \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Ainsi, la formule de Taylor-Young peut se présenter sous l'écriture suivante :

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Cette notation, qui revient historiquement au mathématicien allemand Paul Bachmann et qui était largement utilisée dans les écrits de son élève Edmund Landau dès le début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, soulève un certain nombre de problèmes au sujet desquels un didacticien ne peut rester indifférent. Certes, elle a été introduite pour faciliter les calculs et la présentation des résultats, mais elle nécessite au praticien d'être très attentif en la manipulant. Dire que $f = o(g)$ doit se comprendre comme voulant dire que $f \epsilon o(g)$ c'est-à-dire que f est un élément parmi d'autres qui sont négligeables devant la fonction g. Dire aussi que $o(g) - o(g) = o(g)$ ne peut pas passer sous silence car cette propriété manque de rigueur, de clarté et « viole » même la sémantique classique des symboles de soustraction et de l'égalité : «$-$» et «$=$». Cette propriété doit se lire en utilisant un langage ensembliste : soit $A = o(g)$ l'ensemble des fonctions négligeables devant g et soit $B = A - A = o(g) - o(g)$ l'ensemble des différences de deux fonctions de $A, B = A - A = A$ signifie que B est inclus dans A. Nous pensons que l'usage de cette notation dans les classes de mathématiques, de physique ou d'informatique est loin d'être transparent pour les étudiants même si les choses peuvent passer sous silence. Une étude didactique relative à cette notation ne peut, à notre sens, que sensibiliser enseignants et étudiants de la portée sémantique et syntaxique particulière de cette notation.

Pour finir avec la formule de Taylor-Young, notons que, lorsque la formule s'applique au voisinage de $x_0 = 0$, nous obtenons la formule dite de Mac-Laurin:

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

Mais il faut savoir que cette formule vue sous cet angle laisse penser que ce mathématicien n'a que le mérite d'appliquer la formule de Taylor-Lagrange en un voisinage particulier d'une importance stratégique. Or ceci est inexact. En fait, Mac-Laurin a démontré différemment cette formule et en est arrivé au même résultat que celui de Taylor.

Dans son ouvrage *Treatise of Fluxions* paru en 1742, il expose sa démonstration et reconnait celle de Taylor :

> Aujourd'hui, pour beaucoup, le nom de Mac-Laurin est surtout associé à la formule dite de Taylor-Mac-Laurin. Nous n'allons pas faire l'histoire de cette formule, mais simplement donner la démonstration de notre auteur (Mac-Laurin). Cette formule apparait dans le Methodus Incremenrum directa et Inversa de Taylor parût en1715, ce que Mac-Laurin reconnait dans son Traité des Fluxions. La démonstration se trouve dans le livre II, à l'article 751. (Bruneau, 2005, p.352).

La formule de Taylor-Lagrange

Soit I un intervalle ouvert non vide de IR et soit x_0 un point de I.
Soit $f : I \to IR$ une fonction et n un entier ≥ 0. Si f est une fonction $(n+1)$- fois dérivable, alors il existe un réel $c$non connu compris entre x et x_0 qui dépend à la fois de n, de$x$, de $x_0$et de f tel que pour tout x dans I on a :

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

La formule de Taylor-Lagrange, représente une généralisation de la formule des accroissements finis. Contrairement à la formule de Taylor-Young qui est exclusivement locale, la formule de Taylor-Lagrange relie une notion locale (les dérivées successives) avec une notion « globale[5] » (le taux d'accroissement sur tout un intervalle I). Elle fournit donc un résultat sur le comportement de la fonction $f$sur tout l'intervalle Imais dépendant d'une inconnue c que l'on contrôle mal. Mais en contrepartie de cette qualité (globale), les hypothèses nécessaires pour l'établir sont plus restrictives que celles nécessaires pour établir la formule de Taylor-Young. En effet, alors que la formule Taylor-Young se suffit de l'existence de la dérivée d'ordre n de la fonction f, la formule de Taylor-Lagrange exige, elle, l'existence de la dérivée d'ordre $(n+1)$ de f. L'ajout de cette condition rend cette variante plus puissante puisque, contrairement à celle de Taylor-Young, le contrôle de l'erreur commise est possible dans cette variante lors de l'approximation par le polynôme de Taylor.

L'inégalité de Taylor-Lagrange est une conséquence de la formule de Taylor-Lagrange. En effet, lorsqu'il est possible de majorer la fonction $f^{(n+1)}$ c'est-à-dire lorsqu'il existe un réel M tel que pour tout $x$dans I, $\left|f^{(n+1)}(\mathrm{x})\right| \leq \mathrm{M}$ alors :

$$\left|f(x)-\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

Cette formule de Taylor-Lagrange est très utile lorsqu'on veut estimer l'erreur absolue commise en confondant la fonction à son polynôme de Taylor au voisinage d'un point x_0.

Les mathématiciens et surtout les physiciens se servent beaucoup de cette variante de la formule de Taylor. En effet, en mathématiques et surtout en physique, les ordres de grandeurs sont généralement exprimés en référence aux puissances de 10. Si $h = 1/10 = 10^{-1}$, alors $h2 = 1/100 = 10^{-2}, h3 = 1/1000 = 10^{-3}$, etc. Donc h^2 est une quantité d'un ordre de grandeur inférieur à celui de h, h^3 est une quantité d'un ordre de grandeur inférieur à h^2, etc. Dans certains contextes, et pour des raisons pratiques et même théoriques au sens physique, si

[5] On dit qu'une propriété d'une fonction f est globale si cette propriété est satisfaite par la fonction sur tout un intervalle I, contenu dans son domaine de définition. Les propriétés de croissance, décroissance sur un intervalle, de parité, de périodicité, travaillées …avec les objets fonctionnels sont des propriétés globales. (Maschietto, 2002, p. 65).

une quantité est d'un ordre de grandeur « suffisamment » inférieur à une autre, on peut la considérer négligeable par rapport à l'autre. C'est pour cette raison, que le physicien, en général, ne retiendra que $1, 2, 3, 4$ termes au plus du développement de Taylor selon la précision requise pour l'expérience. Ce choix dépend aussi de la précision que les instruments de mesure permettent de donner. Donc négliger des termes dans le polynôme de Taylor revient à accepter d'écraser, localement, la fonction sur ce polynôme tout en étant conscient qu'une erreur a été commise mais acceptable sous certaines conditions.

La formule de Taylor avec reste intégral

Soit I un intervalle ouvert non vide de IR et soit x_0 un point de I.
Soit $f : I \to IR$ une fonction et n un entier ≥ 0. Si f est une fonction de classe C^{n+1}, alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

La formule de Taylor avec reste intégral est une généralisation du théorème fondamental du calcul intégral, et s'obtient par un raisonnement par récurrence en effectuant des intégrations par parties. Elle a une étendue « globale » puisqu'elle est valable en tout point de I et fournit donc un résultat sur le comportement de la fonction f sur tout l'intervalle I.

Cette formule est la plus restrictive des trois formules de Taylor puisqu'elle demande que la fonction f soit de classe C^{n+1}. Mais en compensation elle donne une expression précise du reste ne dépendant d'aucun paramètre existentiel. La difficulté de manipulation du reste intégrale dans la formule de Taylor laisse penser, surtout chez les physiciens, qu'en pratique, elle est moins importante que les deux autres variantes. Ce qui pourrait expliquer pourquoi elle est rarement sollicitée. Cette vision des choses est réductrice de l'importance de cette formule. En effet, elle permet, par exemple, de déduire des valeurs d'intégrales complexes, difficiles à calculer directement. Par exemple, en appliquant cette formule à la fonction définie par $\mathrm{f(x)} =$

$\ln(1+x^2)$, on peut déterminer la valeur de l'intégrale compliquée suivante : $\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)} dt$ qui est égale à $\frac{ln2}{2}$.

Elle permet aussi, dans certains cas, de comparer une fonction quelconque à un polynôme connaissant le signe de l'intégrale comme dans l'exemple suivant : la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, entre 0 et x, pour la fonction $f(t) = e^t$ est $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^t dt$. Si $x \geq 0$, par positivité de l'intégrale on obtient $\forall x \in IR^+, e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Notons que lorsqu'on applique les formules de Taylor à l'ordre n sur un polynôme, lui aussi, de degré n le reste est nul et donc il n'y a pas d'erreur entre la valeur du polynôme en x_0 et de son développement de Taylor au voisinage de x_0 à l'ordre n.

Par exemple le polynôme de degré n définit par $P(x) = (1+x)^n$ admet le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 suivant :

$$P(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} x^k$$

Ce résultat est également obtenu par application de la formule du binôme de Newton. En effet, pour tout $n \in IN$ et pour tout $x, y \in IR$: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$.

En particulier si $y = 1$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Une question classique consiste à chercher une valeur approchée d'un nombre comme $A = 0{,}95^{97}$

En remarquant que $0{,}95^{97} = (1-0{,}05)^{97}$ et en appliquant un développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 de $f(x) = (1+x)^n$ on obtient :

$(1-0{,}05)^{97} = 1 - 97.(0{,}05) + \frac{97.96}{2}.(0{,}05)^2 + \frac{97.96.95(1+c)^{94}}{6}(-0{,}05)^3 = 7{,}79 - 18{,}43(1+c)^{94}$ avec $c \epsilon]-0{,}05 ; 0[$

Quant à la formule du binôme de Newton elle permet d'avoir

$0{,}95^{97} = (1-0{,}05)^{97} = \sum_{k=0}^{97}(-1)^k C_{97}^k 0{,}05^k$=$1-97.(0{,}05)+\frac{97.96}{2}(0{,}05)^2+\varepsilon$

= 7,79 +ε avec $\varepsilon = \sum_{k=3}^{97}(-1)^k C_{97}^k\ (0{,}05)^k$

Intuitivement on remarque que l'écart entre $0{,}95^{97}$ et 7,79 est grand tellement grand qu'on ne peut l'assimiler à une erreur d'approximation. Pourtant, comme nous l'avons expliqué plus haut si $x = h = -0{,}05 = -5.10^{-2}$, alors $x^2 = h^2 = 25.10^{-4}$ est une quantité inférieure à celle de $x = h$. Se limiter, dans ce cas particulier, à une approche exclusivement syntaxique de l'approximation conduit à des dérives. Voilà un exemple montrant qu'on ne peut faire l'économie d'un contrôle du type sémantique et se laisser à la merci exclusive des traitements syntaxiques. Dans cet exemple, la puissance $n = 97$ couplée avec $x = h = -0{,}05$ donne $nx = nh = -4{,}85$ qui est une valeur assez grande relativement à $0{,}95^{97}$ qui est assez voisine de 0 (à 10^{-6} près, la calculatrice affiche $0{,}95^{97} = 0{,}006905$). Les valeurs assignées à x et à la puissance n dans $(1+\mathrm{x})^{\mathrm{n}}$ ont une incidence directe sur la qualité de l'approximation. Or, la prise en compte de ces deux valeurs est de l'ordre de la sémantique.

Dans le paragraphe suivant et conformément au point de vue d'Artigue (1990 & 2005), nous conduisons un bref aperçu historique au sujet des formules de Taylor afin de comprendre le contexte dans lequel elles se sont développées d'une part, et mieux conceptualiser les notions enjeu dans ces formules, d'une part.

Aperçu historico-épistémologique des Formules de Taylor

Depuis l'antiquité, les Grecs, se sont intéressés aux questions relatives aux approximations locales et donc au calcul infinitésimal. Archimède par exemple a étudié des cas particuliers du calcul infinitésimal par des techniques géométriques comme celles de la quadrature ou la cubature. Appollonius, comme son prédécesseur Archimède, a également étudié le calcul infinitésimal en faisant appel à la notion de tangente aux coniques etc.

Ce n'est qu'au début du XVII^{ème} siècle que les mathématiciens ont commencé vraiment à s'intéresser aux questions relatives au calcul infinitésimal.

En effet, l'invention de l'imprimerie au XV^{ème} siècle, en Europe, a permis aux sciences de se développer et particulièrement les mathématiques. Cette avancée technique a rendu les hommes plus curieux et les a poussés à explorer et à chercher à comprendre leur espace. Le besoin de naviguer et de découvrir le monde a particulièrement encouragé géographes et mathématiciens à développer le domaine de la géométrie pour accéder à des cartes géographiques de plus en plus précises.

En outre, le développement du champ relatif au calcul algébrique et formel en géométrie a permis aux mathématiciens européens, au cours de cette même période, d'élargir le champ de résolution des problèmes qui sont devenus beaucoup plus complexes que ceux traités auparavant par les Grecs.

La notion de fonction prend alors une place prépondérante dans les travaux de Taylor, Stirling, Euler, Maclaurin, Lagrange Newton, Leibniz et Bernoulli. Ils se sont servis d'elle pour étudier des problèmes d'optimisation et introduire la notion de développement en séries entières ou asymptotiques. Mais la question de leur convergence n'était pas d'actualité à cette époque (Coppo, 2009).

Au sein de ce champ de savoir s'est développé le calcul infinitésimal en tant qu'outil puissant permettant d'aborder l'étude théorique du calcul des variations, du calcul différentiel et aussi du calcul intégral. Mais G.de l'Hospital a fait une avancée spectaculaire dans ce domaine puisqu'il :

> … a été le premier vulgarisateur de l'analyse infinitésimale … Il a eu le grand mérite d'avoir le premier expliqué la méthode, fort intelligemment, en un bel ordre, les propriétés bien rangées, comme s'exprimait Jean Bernoulli. (Burkhadart & Wirtinger, 1909, p. 248).

Malgré les avancées réalisées, les mathématiciens de l'époque ne s'attachaient pas, en général, à donner à leurs procédés mathématiques une rigueur au sens mathématique actuel. L'important pour eux était de résoudre les problèmes. La validité des méthodes appliquées était à leurs yeux suffisamment contrôlée par l'intuition, par le recours au registre graphique et par le travail dans le cadre géométrique. Certes, il y a eu des objections relatives à ces procédés et méthodes dès le début. En revanche, l'importance des progrès que les nouvelles techniques ont permis de réaliser, étaient suffisante pour surmonter les critiques de certains mathématiciens de l'époque :

> Le manque de précision des nouvelles méthodes en avait d'abord éloigné quelques géomètres comme B. Nieuwentijt, M. Rolle et J. Gallois. Contre eux, Jean Bernoulli, J. Hermann et P. Varignon défendaient le nouveau calcul. Même jusque vers le milieu du 18ème siècle (Jean le Rond) d'Alembert et, en Angleterre, Colin Maclaurin développent une méthode des limites qui présente encore bien des obscurités. (Burkhadart & Wirtinger, 1909, p. 249).

Face aux critiques multiples de ces nouvelles techniques de calcul, J. L. Lagrange a pris une autre tournure en cherchant à fonder le calcul infinitésimal sur la base du développement en séries qui a acquis progressivement, depuis la fin du 14ème siècle un statut mathématique à part entière.

Les infiniment petits

L'usage des infiniment petits et la portée donnée au calcul des limites en analyse au XVIIème siècle à fait l'objet de beaucoup de débat chez les mathématiciens. G.W. Leibniz dans une lettre adressée en 1714 à Tournemine, éminent professeur de philosophie et de théologie, soulève son désarroi par rapport à l'idée de l'infiniment petit. Il disait :

> Au lieu de prendre les grandeurs infinitésimales pour zéro, comme Monsieur de Fermat, Monsieur Descartes, et même Monsieur Newton et tous les autres ont fait, avant que mon Algorithme des incomparables ait paru dans les actes de Leipzic ; il faut supposer que ces grandeurs sont quelque chose, qu'elles diffèrent entre elles, et qu'elles soient marquées de différentes manières dans l'analyse nouvelle. Car elles y seraient confondues si elles étaient prises pour des zéros. Je les prends donc, non pas comme des riens, ni même pour des infiniment petits à la rigueur ; mais pour des quantités incomparablement ou indéfiniment petites, et plus que d'une grandeur donnée ou

> assignable, inférieures à d'autres dont elles sont les différences, ce qui rend l'erreur moindre qu'aucune erreur assignable, ou donnée, et par conséquent elle est nulle . (Burkhadart & Wirtinger,1909, p. 282).

En 1716 et toujours par rapport à la même problématique, il écrit au mathématicien Pierre Dangicourt :

> Je leur témoignai que je ne croyais point, qu'il y eut des grandeurs véritablement infinies ni véritablement infinitésimales, que ce n'étaient que des fictions, mais des fictions utiles pour abréger et pour parler universellement, comme les racines imaginaires dans l'algèbre, telles que $\sqrt[2]{-1}$. (Burkhadart & Wirtinge, 1909, p. 282)

Du théorème de Rolle aux formules de Taylor avec reste intégral et de Taylor-Lagrange

Le théorème de Rolle a été énoncé en 1690 par le mathématicien Michel Rolle. En élaborant une méthode fortement critiquée à l'époque dite « méthode des cascades ». Il a appliqué cette méthode uniquement dans le cas où $f(x)$ est un polynôme. Bourgade souligne que :

> Cette méthode affirme que les racines d'un polynôme sont séparées par les racines de son polynôme dérivé (sa « cascade ») et l'itération de ce procédé permet de localiser grossièrement les racines. La praxéologie construite par M. Rolle dans son Traité d'Algèbre (1690) est vivement critiquée faute d'une technologie complète. (Bourgade, 2013, p. 225)

Du théorème de Rolle se déduit alors le théorème des accroissements finis qui va jouer un rôle central dans le domaine de l'analyse mathématique, non seulement à un niveau théorique, puisqu'il va permettre de démontrer d'autres théorèmes, mais aussi à un niveau technologique au sens de la TAD de Chevallard (1991), puisqu'il va permettre de fonder des techniques de calcul approché en contrôlant sa précision :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ à valeur dans IR, dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c\epsilon]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Ce résultat, sous les mêmes conditions, s'écrit, également, comme suit :

Alors il existe $\theta\epsilon]0,1[$tel que $f(b) - f(a) = f'\big(a + \theta(\mathrm{b} - \mathrm{a})\big)(b - a)$.

La non connaissance effective du réel c ou encore du réel θ dans le théorème des accroissements finis a soulevé, à l'époque et même plus tard, des objections auprès de certains mathématiciens. En effet, le mathématicien allemand Leopold Kronecker :

> ... refuse le droit de citer (la démonstration du théorème des accroissements finis) en mathématiques parce qu'elle ne fournit aucun procédé permettant de déterminer effectivement, avec une approximation donnée à l'avance, les bornes supérieure et inférieure et par suite le nombre θ dont il est question. Pour combler cette lacune G. Kowalewski démontre le théorème des accroissements finis en formant une suite infinie qui définie le point $a + \theta(b - a)$. (Burkhadart & Wirtinger ,1909, p. 271)

Malgré ces critiques beaucoup de mathématiciens n'ont pas abandonné le TAF, puisqu'il représente un cas particulier de la formule de Taylor.

Dans son ouvrage *Methodus incrementorum directa et inversa*, paru en1715, B. Taylor avance la relation suivante composée d'un nombre infini de termes :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots$$

Dans la page 298 de l'Encyclopédie des sciences mathématiques pure et appliquées, Tome II, les auteurs soulignent :

> … qu'il l'a envisagée comme cas limite d'une relation analogue, composée d'un nombre n déterminé de termes relatives aux accroissements finis d'ordre 1, 2, …, n-1 d'une fonction quelconque donnée f(x) ; B Taylor ne s'est d'ailleurs nullement préoccupé de la signification précise du développement
> $$\mathrm{f(x)} + \frac{\mathrm{h}}{1!}\mathrm{f'(x)} + \frac{\mathrm{h}^2}{2!}\mathrm{f''(x)} + \cdots$$
> qui figure dans le second membre de la relation.

Ils ajoutent, juste après, que cette même relation est apparue chez Euler qui ne s'est pas préoccupé, lui aussi, des conditions de sa validité. Il a attaché plutôt de l'importance à ses applications.

Outre l'importance de ce résultat et de son incidence dans le champ de l'analyse mathématiques, beaucoup de mathématiciens de l'époque, donnant de l'importance à la rigueur mathématiques, se sont penchés sur ce résultat cherchant à le valider mathématiquement. Dans l'Encyclopédie des mathématiques (p. 299-300), les auteurs soulignent que dans son ouvrage édité en 1797 sous le titre *Théorie des fonctions analytiques*, Lagrange, reprend les n premiers termes de la relation de Taylor, remplace x par a $(x = a)$ et h par $b - a$ $(h = b - a)$ et écrit l'expression R_n suivante qui représente ce que nous appelons aujourd'hui le reste de Lagrange :

$$R_n = f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1!}f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) - \cdots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$

Il montre rigoureusement, sous conditions que f soit n - fois dérivable et que sa dérivée d'ordre n soit continue, que R_n est exactement égale à : $R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^n(t)dt$

Ainsi et pour la première fois, Lagrange précise avec exactitude l'erreur commise en confondant la valeur de la fonction avec ce que nous appelons aujourd'hui le polynôme de Taylor à l'ordre n.

Certes, en pratique le calcul de l'erreur n'est pas chose aisée du fait que l'intégrale en jeu dans l'expression de R_n n'est pas toujours calculable mais elle permet de donner, dans le cas où la fonction dérivée d'ordre $n$est majorée, un ordre de grandeur de l'erreur commise chose que les physiciens font souvent dans leurs calculs.

Trouver un lien entre le TAF et la formule de Taylor est une question mathématiquement légitime. En effet, à l'ordre 1, l'expression de R_1 donne $R_1 = f(b) - f(a)$

or dans le TAF $f(b) - f(a) = f'(\mathrm{a} + \theta\ (b - a))\ (b - a)$ où $\theta \epsilon]0,1[$

d'où, $R_1 = f'(a + \theta\ (b - a))\ (b - a)$ où$\theta \epsilon]0,1[$

Lagrange, Ampère et Cauchy ont aussi cherché à décrire R_n sous une forme analogue. En utilisant des procédés d'intégrations, Lagrange survient au résultat suivant :

$R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\mathrm{a} + \theta(\mathrm{b} - \mathrm{a}))$ avec $\theta \epsilon]0,1[$ (Burkhadart. H &Wirtinger.W, (1909), p. 301)

Ampère et Cauchy ont aboutit aussi à ce même résultat en procédant différemment et en partant directement du TAF. Ampère déduit, en plus, de l'expression ci-dessus une autre expression de R_n :

$R_n = \frac{(b-a)^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\mathrm{a} + \theta(\mathrm{b} - \mathrm{a}))$ avec $\theta \epsilon]0,1[$ (2.Ibid)

Contrairement à l'expression de R_n sous sa forme intégrale qui exige que la fonction $f$soit de classe C^n, ces deux nouvelles expressions, certes moins précises, sont moins exigeantes puisqu'elles ne demandent qu'une fonction f n-fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.

En remplaçant a par x et b par $x+h$ on obtient l'actuelle formule de Taylor :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n$$

Selon l'expression de R_n on a une des variantes de la formule de Taylor :

Taylor avec reste intégral lorsque $R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h u^{n-1} f^{(n)}(x-u+h)du$

Taylor-Lagrange lorsque $R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\mathrm{a} + \theta \mathrm{h})$ où $\theta \epsilon]0,1[$

Dans le paragraphe suivant et après ce bref aperçu historique nous mettons au clair, la pertinence de l'approche sémiotique des formules de Taylor.

Une analyse sémiotique des formules de Taylor

La notion de registre sémiotique est pertinence dans certaines analyses didactiques. Son importance provient de la nécessité de concevoir l'objet conceptuel relatif aux formules de Taylor à travers les diverses représentations sémiotiques nécessaires à la fois pour le désigner et le manipuler intellectuellement. Selon Duval (1993, p. 37), la diversification des représentations sémiotiques d'un objet mathématique est un « *point stratégique pour la compréhension des mathématiques* ». Un graphe, une formule algébrique, une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, un symbole para-mathématique…peuvent être tous des représentations sémiotiques pour un même objet mathématique.

Afin de conceptualiser un objet mathématique, Duval (1993, p. 51) souligne la nécessité de faire appel, à au moins, deux registres sémiotiques différents dont il faut être capable de coordonner entre eux. Coordonner entre deux registres sémiotiques différents suppose la possibilité de conversion de l'un vers l'autre. Selon Duval, les apprenants qui n'ont pas les moyens de faire cette conversion sont incapables de bien concevoir l'objet conceptuel et auront même des difficultés à le manipuler correctement selon les différentes facettes des notions qui lui sont associés. Nous pensons que la maîtrise de la conversion d'un registre à un autre, lors de l'enseignement des formules de Taylor, est très importante pour les étudiants, en général, et particulièrement pour ceux des classes préparatoires aux études d'ingénieurs non seulement dans le cours de mathématiques mais aussi dans celui de physique ou d'informatique.

Ainsi, par exemple, mettre en correspondance dans le registre de l'écriture formelle l'ordre du développement de Taylor au voisinage d'un point x_0 d'une fonction f et la « qualité » de l'approximation dans le registre graphique, établit une congruence entre les deux registres ce qui facilite l'appropriation des formules de Taylor. En effet, la formule de Taylor-Lagrange nous fournit une méthode de construction dans le registre de l'écriture formelle d'une approximation d'une fonction f par un polynôme de degré fini au voisinage d'un point x_0 lorsque la fonction f est $(n+1)$ - fois dérivable :

Formule de Taylor-Lagrange

Soit f une fonction $n+1$ - fois dérivable au voisinage de x_0, alors

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

avec $P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ le polynôme de Taylor de degré n au voisinage de x_0.

$R_n(x)$ est le reste de Lagrange donné par l'expression : $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ où c est un réel non connu compris entre $x_0$et x dépendant à la fois de n, de $x_0$de x et de la fonction f.

Par exemple :

- $P_0(x) = f(x_0)$est un polynôme de degré 0. Il représente une approximation à l'ordre 0 de la fonction $f$au voisinage de x_0
- $P_1(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0)$ est un polynôme de degré 1. Il représente une autre approximation linéaire à l'ordre 1 de la fonction $f$au voisinage de x_0 ;

$P_2(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$ est un polynôme de degré 2. Il représente une autre approximation quadratique de la fonction $f$au voisinage de x_0.

Et ainsi de suite…

$P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$… $P_n(x)$. sont tous des polynômes qui représentent des approximations de la fonction f(x) au voisinage de x_0. Mais $P_i(x)$donne une approximation meilleure que celles obtenues par les polynômes $P_k(x)$ quelque soit l'entier naturel i supérieur à l'entier naturel k.

Il faut remarquer que lorsqu'on fixe l'ordre i c'est-à-dire le polynôme $P_i(x)$, plus on s'éloigne du voisinage x_0 plus l'écart entre $f(x)$ et $P_i(x)$ augmente et plus on s'approche du voisinage de x_0 plus l'écart entre $f(x)$ et $P_i(x)$ diminue.

Le graphe de la fonction arctangente, ci-dessous, illustre la précision et la signification sémantique de l'approximation en fonction de l'ordre du développement. Ce graphe est construit avec le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra. Son intérêt réside dans le fait qu'il permet de réaliser des animations et de visualiser toutes les étapes de la construction graphique réalisée. Il permet aussi de zoomer et de voir ainsi la précision et la qualité de l'approximation de la fonction arctangente selon le polynôme d'approximation et donc selon l'ordre du développement. Il permet ainsi d'apprécier les qualités sémantiques de l'approximation graphique entre la fonction et ses polynômes de Taylor qui représente le reste du développement à différents ordres.

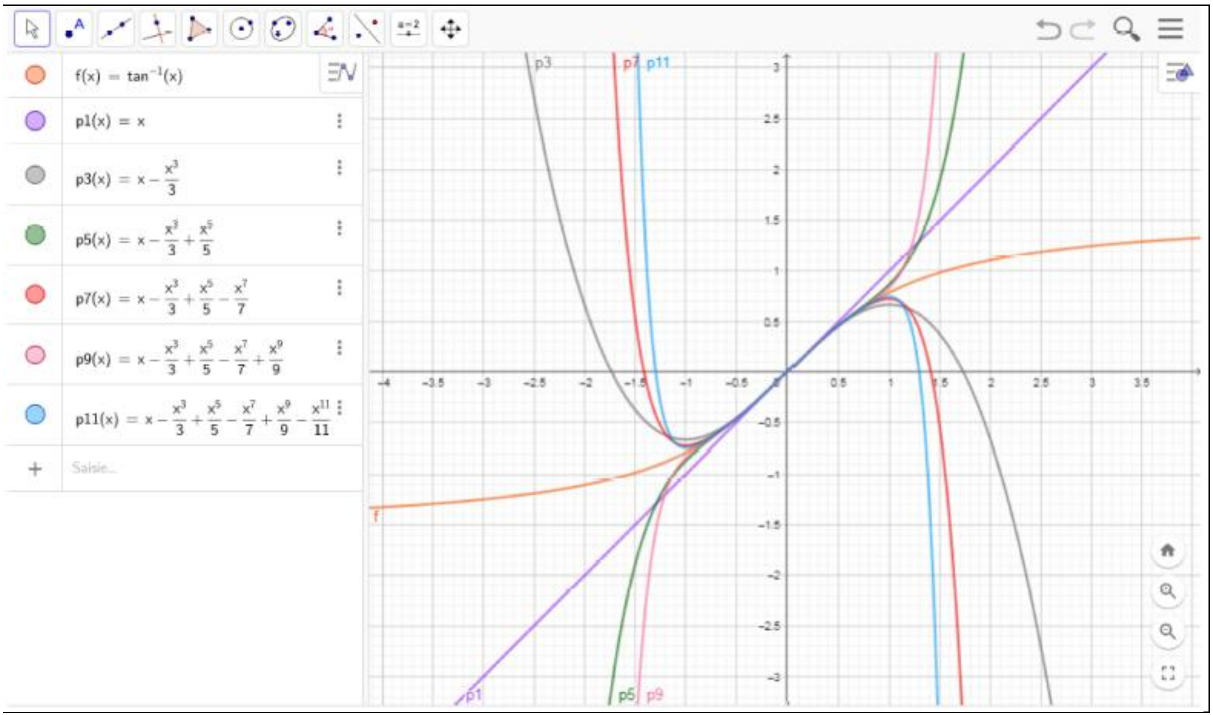

Figure 1.

Représentations graphiques des approximations polynômiales de la courbe de la fonction arctangente

Lorsqu'on ne prend pas en compte le reste de Taylor, on commet une erreur d'approximation, sauf dans le cas où la fonction f est égale stricto sensu à P_n comme dans l'exemple suivant :

$$f(x) = (1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

$$= f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

$$= \sum_{k=0}^{5} C_5^k x^k$$

La question de l'évaluation de l'erreur commise, lorsqu'on approche une fonction f par le polynôme de Taylor $P_n(x)$ qui lui est associé au voisinage de x_0, est cruciale notamment chez le physicien.

Ceci se traduit mathématiquement par l'évaluation de la distance algébrique entre $f(x)$ et le polynôme $P_n(x)$.

En fait, d'après la formule de Taylor-Lagrange :

$f(x) - P_n(x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$où c est un réel compris entre $x_0$et x.

L'erreur absolue est donc$|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| |(x - x_0)^{n+1}|$

Pour estimer l'erreur, l'approche la plus fréquente étant de majorer la dérivée d'ordre $n + 1$ de la fonction f. Donc s'il existe un réel M tel que$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$pour tout x au voisinage de x_0,

$$|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon(x))}{(n+1)!}\right| |(x - x_0)^{n+1}| \leq M \frac{|(x - x_0)^{n+1}|}{(n+1)!}$$

Il s'agit en fait de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Remarquant que si la fonction $f$est $(n + 1)$-fois dérivable au voisinage de x_0 et que si sa dérivée d'ordre $n + 1$ est majorée, alors plus en augmente l'ordre n plus l'erreur diminue pour x_0 et x fixés.

L'intérêt de travailler les conversions de registres dans le domaine des approximations locales en général et dans le cas particulier des formules de Taylor permet de mobiliser des procédés cognitifs différents selon le type de conversion : par exemple du registre algébrique au registre numérique ou du registre graphique au registre numérique ou encore du registre algébrique au registre graphique. L'écart cognitif est sans doute différent pour chacun de ces changements. Il devrait être provoqué par l'enseignant aussi bien dans la classe de mathématiques que celle de physique quand il introduit et invite les étudiants à manipuler les formules de Taylor. Car chaque registre permet l'accès à une partie des caractéristiques de ces formules. Changer de registre permet alors aux étudiants d'avoir une connaissance meilleure et plus générale de ce champ de savoir.

Les analyses mathématiques, historico-épistémologiques et sémiotiques que nous avons menées autour des formules de Taylor, nous ont incité à étudier comment ces formules sont transposées dans les programmes de mathématiques des Instituts Préparatoires aux Etudes d'Ingénieurs et comment sont-elles approchées dans un polycopié de mathématiques de référence mis au service des enseignants d'une institution universitaire tunisienne. Nous répondons à ces deux questions dans ce qui suit.

Les formules de Taylor dans les programmes de mathématiques des IPEI et dans le polycopié de référence de la première année de l'IPEIM

Les classes préparatoires aux études d'ingénieurs, en Tunisie, comportent deux années d'études couronnées par un concours national d'accès aux écoles d'ingénieurs. Chaque année universitaire est découpée en deux semestres. Chaque semestre est constitué de quinze semaines d'enseignement. Pour la section MP, le programme des mathématiques de la première année s'étale sur les deux semestres. Au cours de chacun, les étudiants suivront, séparément, un cours d'algèbre et un cours d'analyse. Chaque cours dure 84 heures à raison de six heures par semaine. Il est sectionné en « parties » lesquelles sont subdivisées en chapitres dont le volume horaire de chacun est mentionné dans le programme global et concerne le temps alloué aux cours qui sont de type intégré (*cours, applications et exercices corrigés (T.D)*).

La formation dans les écoles préparatoires aux études d'ingénieurs est une formation principalement généraliste. Les écoles préparatoires imposent ainsi un cursus commun très important et relativement similaire**.** L'objectif principal de cette formation est de préparer, les étudiants aux concours d'accès aux écoles d'ingénieurs. Mais cette formation peut permettre à certains étudiants de conduire avec succès un cursus scientifique différent. S'inscrivant dans cette logique, les concepteurs des programmes soulignent que le programme des mathématiques :

> … est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant ou de scientifique. » (IPEIEM[6], 2016, p. 2).

Pour atteindre cet objectif, les concepteurs des programmes de mathématiques précisent que le travail, avec les étudiants, doit se faire autour d'activités mathématiques visant à développer « *six grandes compétences* » :

> – s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
> – modéliser : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
> – représenter : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
> – raisonner, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
> – calculer, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
> – communiquer à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique. (IPEIEM, 2016, p. 2).

Le programme d'analyse, comme le soulignent les concepteurs des programmes est centré autour des deux concepts fondamentaux, celui des fonctions et celui des suites. Il note, dans l'introduction générale, l'importance de travailler les problèmes mathématiques selon une double approche : qualitative et quantitative. En ce qui concerne les fonctions (ce qui nous intéresse ici), les concepteurs marquent l'intérêt d'étudier, à la fois, leurs comportements global et local ou asymptotique. Ceci les amène à prévoir, dans le programme, tout un chapitre spécifique qui traite des méthodes de l'analyse asymptotique. Ils soulignent que ce chapitre sera exploité ultérieurement dans l'étude des séries.

La dérivation des fonctions, le calcul des primitives, la résolution de certains types d'équations différentielles… font l'objet d'un chapitre important, introduit dès le début, dont

[6] Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs El Manar.

l'objectif est de permettre aux étudiants l'exercice de calculs simples mais fondamentaux afin de leur faciliter l'appropriation des différentes notions du programme.

Chaque chapitre est présenté sous la forme d'un tableau à deux colonnes : colonne des « *CONTENUS*» et colonne des «*CAPACITÉS & COMMENTAIRES* ». Dans la première, les concepteurs précisent les différentes notions à enseigner relatives à ce chapitre. Dans la deuxième, ils notent leurs remarques, à prendre en compte, relatives à chaque notion. Comme les chapitres sont regroupés, généralement, en « *parties* », les concepteurs ont précisé, au commencement de chacune, les objectifs et remarques généraux que vise chaque partie.

Les formules de Taylor, sous leurs trois variantes, font l'objet d'un enseignement explicite dans le cours d'analyse de la première année. Elles ne sont pas regroupées dans un seul chapitre, elles sont plutôt étudiées, séparément, dans des chapitres différents. Selon les demandes du programme, la formule de Taylor-Lagrange doit être introduite dans le cours d'analyse autour de la neuvième semaine d'enseignement du premier semestre. Trois semaines plus tard, la formule de Taylor-Young fait son apparition dans le même cours d'analyse. Il faut noter qu'en parallèle dans le cours d'algèbre du premier semestre, et autour de la neuvième semaine d'enseignement, la « *Formule de Taylor polynomiale* » fait l'objet d'un enseignement explicite dans le méga chapitre (28 heures) « *Polynômes et fractions rationnelles* ».

Quant à la formule de Taylor avec reste intégrale, elle est enseignée au début du deuxième semestre dans le cours d'analyse à la fin du premier chapitre « *Intégration* ».

La formule de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor-Lagrange est enseignée explicitement au premier semestre sous le sous chapitre intitulé « *Fonctions de classe* C^k » inclus dans le chapitre[7] « *Dérivation* » relevant de la partie titrée « *Limite, continuité et dérivabilité* ». Dans ce chapitre, les étudiants

[7] Ce chapitre est programmé à être enseigné en 14h.

étudieront successivement les notions mathématiques suivantes : « *Nombre dérivé, fonction dérivée* », *« Extremum local et point critique* », « *Théorèmes de Rolle et des accroissements finis* », « *Fonctions de classe* C^k»… Dans l'introduction de cette partie de cours, les concepteurs du programme, soulignent que « *Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.* ». Ceci montre l'importance à accorder aux figures géométriques pour travailler les aspects qualitatifs qui servent à comprendre les phénomènes mathématiques des problèmes et la signification des notions en jeu, au delà des aspects quantitatifs chiffrés, intervenant les notions de limites, de continuité et de dérivabilité comme par exemple, la monotonie d'une fonction, l'existence de limites, la convergence et la divergence, la continuité, la dérivabilité, l'existence de zéros et d'extremums, l'existence de tangentes …

En regardant de plus près, nous remarquons qu'aucun commentaire ou remarque n'est particulièrement mentionné au sujet de la formule de Taylor-Lagrange. Ceci nous laisse penser que pour les concepteurs du programme cette formule, est suffisamment transparente, qu'elle va de soi et donc ne nécessite pas un arrêt pour l'analyser et discuter de ses particularités. Or cette formule, en plus de sa charge syntaxique lourde, elle est sémantiquement complexe du fait qu'elle relie une notion locale à savoir les dérivées successives d'une fonction f avec une notion globale qui est le taux d'accroissement de f sur tout un intervalle I. Pourtant dans l'introduction générale du programme d'enseignement, les concepteurs ont attiré l'attention sur la nécessité d'étudier les aspects locaux et globaux des phénomènes mathématiques. Ils ont aussi explicitement mentionné, dans la première grande compétence visée par le programme, l'importance « *d'identifier des particularités* ». Ce qui n'a pas été marqué à l'occasion de cette formule.

Certes le recours au registre graphique a été souligné, de manière générale, à l'introduction de cette partie de cours, mais à l'occasion de la formule de Taylor-Lagrange les concepteurs n'ont pas spécifiquement rappelé l'importance de l'interprétation graphique de ce résultat, chose qui a été redemandé par exemple pour la notion de « *dérivabilité en un point, nombre dérivé* », pour l'« *égalité des accroissements finis* », et pour le *« Théorème de la limite de la dérivée »*. Nous pensons que l'interprétation graphique, du polynôme de Taylor selon l'ordre de son développement et du reste de Lagrange avec ses spécificités, doit être explicitée et discutée avec les étudiants pour une conceptualisation adéquate de la formule.

Notons que l'Inégalité de Taylor-Lagrange, n'est pas évoquée dans cette partie de cours. Elle est enseignée au deuxième semestre dans le chapitre « Intégration » à la suite de la formule de Taylor avec reste intégral. Or la formule et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont bien la généralisation du théorème et de l'inégalité des accroissements finis. Dans le programme, l'inégalité des accroissements finis est présentée comme conséquence du théorème des accroissements finis. On peut alors se demander pourquoi les concepteurs ont-ils changé de logique et ont décalé l'enseignement de l'inégalité de Taylor-Lagrange dans le chapitre « Intégration » au lieu de la considérer comme conséquence naturelle de la formule de Taylor-Lagrange.

Formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young, est enseignée, elle aussi, au premier semestre (à peu près trois semaines après celle de Taylor-Lagrange) dans le dernier chapitre intitulé « *Analyse asymptotique* »[8] sous le sous chapitre « *Développements limités* ». Dans ce chapitre les étudiants étudieront successivement les notions mathématiques suivantes : « *Relations de comparaison : cas des suites* », « *Relations de comparaison : cas des fonctions* », « *Développements limités* » et « *Exemples de développements asymptotiques* ».

[8] Ce chapitre est programmé à être enseigné en 14h.

Dans l’introduction générale, les concepteurs du programme soulignent que « *L’objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants avec les techniques asymptotiques de base, dans les cadres discret et continu.* ». L’entrainement et l’exercice pratique sont à privilégier dans cette partie de cours. Les aspects théoriques sont de moindre importance. En effet, les concepteurs marquent que la priorité doit être donnée à « *...la pratique d’exercices plutôt qu’à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison*. ».

En ce qui concerne les fonctions, les relations de comparaison (Relations de domination, de négligeabilité, d’équivalence) sont des relations qui permettent d’étudier et de comparer la vitesse de croissance d'une fonction à celle d'une autre fonction considérée comme plus « simple » au voisinage d'un point ou à l'infini. Ces relations de comparaison font intervenir, comme souligné dans le programme, les notations $f = O(g), f = o(g)$ et $f \sim g$. Les étudiants rencontrent pour la première fois ces notations dans ce chapitre. Bien qu’elles soient syntaxiquement « simples », elles sont sémantiquement complexes comme nous l’avons souligné plus haut. Ne pas attirer l’attention des enseignants pour s’attarder sur l’analyse des propriétés élémentaires relatives à ces relations de comparaison laisse penser qu’elles sont transparentes. Nous mettons l’hypothèse que ces notations, qui sont fortement utilisées, entre autres, dans la formule de Taylor-Young et dans les développements limités en général, ne sont pas suffisamment claires pour les étudiants.

La formule de Taylor-Young apparait dans le programme après l’introduction de la définition d’un développement limité ainsi que les propriétés (unicité des coefficients, la troncature du développement, le développement en 0 des fonctions paires et impaires) et les opérations (combinaison linéaire, produit, quotient, composée[9]) relatives à un développement limité.

Comme attendu, cette formule est avancée comme moyen permettant de donner un développement limité en un point lorsque la fonction f est de classe C^n. Or comme nous l'avons expliqué plus haut (dans la partie théorique), exiger que la fonction f soit de classe C^n est excessif[10] : la formule de Taylor-Young ne demande en fait de la fonction f que d'être n-fois dérivable en un point x_0.

Le développement limité à tout ordre en 0 est particulièrement indiqué ce qui laisse penser, étant donné son lien avec la formule de Taylor-Young, que la formule de Mac-Laurin sera spécialement évoquée au cours de la transposition interne. Le développement limité à tout ordre en 0 des fonctions qui à chaque x de leurs domaines de définition on associe $exp(x)$, $sin(x), cos(x), sh(x), ch(x), ln(1+\ x)$, $(1+\ x)^{\alpha}$, $Arctan(x)$ est particulièrement noté dans le programme ainsi que celui de la fonction tangente mais pour celle-ci seulement à l'ordre 3.

Les concepteurs des programmes ont manqué encore une fois de souligner les aspects locaux et/ou globaux des formules de Taylor. Attirer l'attention des étudiants sur ces aspects est important. Par exemple, la formule de Taylor-Young est une formule exclusivement locale donc ne donnant des informations sur la fonction f que lorsque le réel x est au voisinage du point x_0. Ainsi, elle ne sert que pour résoudre des problèmes locaux comme la détermination de limites ou l'étude locale de la position d'une courbe par rapport à sa tangente au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$.

Dans l'introduction du chapitre, les concepteurs ont précisé que *« Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir rapidement mener à bien des calculs*

[9] Les concepteurs du programme font remarquer que « *Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible* ».
[10] Ce glissement est assez fréquent dans les ouvrages de mathématiques, comme nous l'avons mentionné dans la partie « Les formules de Taylor : ruptures et continuités ».

asymptotiques simples ». En analysant de plus près ce chapitre nous remarquons que les aspects quantitatifs (calculatoires) du développement sont privilégiés au détriment des aspects qualitatifs donnant, par exemple, du sens à la formule de Taylor-Young : l'interprétation graphique du développement, l'aspect local du développement, le rôle de l'ordre du développent en relation avec l'erreur commise localement entre la fonction et son polynôme de Taylor etc.

Formule de Taylor avec reste intégral

La formule de Taylor avec reste intégrale, est explicitement enseignée au deuxième semestre dans le premier grand chapitre « Intégration »[11].Elle représente une généralisation du théorème fondamental du calcul intégral, et s'obtient par récurrence via des intégrations par parties.

Contrairement aux deux autres formules de Taylor, celle-ci apparaît sous l'en-tête d'un sous-chapitre intitulé « Formules de Taylor ». Ce sous-chapitre est le dernier du chapitre « Intégration ». Il est précédé respectivement par les sous chapitres « *Continuité uniforme* », « *Fonctions continues par morceaux* », « *Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment* », « *Sommes de Riemann* », *« Intégrale fonction de sa borne supérieure* » et « *Calcul de primitives* ». Dans cette partie du cours les étudiants étudierons d'abord « *Pour une fonction f de classe* C^{n+1}, (la) *formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n* » ensuite, « (l') *Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe* C^{n+1}». Les concepteurs des programmes, ont choisi de placer l'enseignement de l'Inégalité de Taylor-Lagrange à la suite de l'enseignement de la formule de Taylor avec reste intégral. Ils ont pu choisir de l'enseigner à la suite de la formule de Taylor-Lagrange. Ce choix bien qu'il est mathématiquement légitime, il est inexpliqué, à ce niveau d'analyse, sur le plan didactique.

[11] Ce chapitre est programmé à être enseigné en 24h.

Dans la colonne des « *CAPACITÉS & COMMENTAIRES* », les concepteurs du programme ont noté l'intérêt de souligner « ... *la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et Taylor-Lagrange).* ». Cet intérêt aux aspects locaux et globaux n'a pas été évoqué avant à l'occasion des formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange. Les concepteurs ont attendu que les trois formules de Taylor soient enseignées et connues par les étudiants, pour étudier les particularités de chacune des formules du point de vue de leur caractère local ou global et avoir ainsi plus de visibilité par rapport à ses notions.

Voyons dans ce qui suit comment un ensemble d'enseignants universitaires ont traduit les instructions des concepteurs du programme analysé ci-dessus, dans un polycopié, en termes de contenus d'enseignement relatifs aux formules de Taylor.

Les formules de Taylor à travers le polycopié de référence de la première année de l'IPEIM section Mathématiques-Physique

À l'université, en Tunisie, il n'y a pas de manuels universitaires officiels. Les enseignants ont la liberté de concevoir et construire leurs cours comme ils le perçoivent en se référant aux grandes lignes des programmes validés au niveau du ministère de l'Enseignement Supérieur par les Commissions Nationales Sectorielles (CNS) formées par des enseignants universitaires nommés par le ministère.

Le polycopié de cours de mathématiques que nous analyserons dans ce travail de recherche du point de vue des formules de Taylor est le fruit d'une initiative et d'une collaboration entre enseignants de mathématiques qui exercent à l'Institut Préparatoire des Etudes d'Ingénieurs d'El Manar (IPEIEM) rattaché à l'Université de Tunis el Manar (Tunisie). Certes il n'est pas une référence didactique officielle, mais les enseignants et notamment les nouveaux parmi eux peuvent le consulter pour une meilleure visibilité du programme officiel surtout que la formation dans les Instituts Préparatoires est couronnée par un concours national d’accès aux écoles d’ingénieurs. L’un des objectifs de cette initiative est d’essayer de rapprocher et de minimiser les écarts entre les pratiques enseignantes. Il faut noter aussi que ce document ne constitue pour l’enseignant qu’un des éléments de la situation de la classe. Il ne détermine pas les conditions et la manière d’utilisation de cette documentation si jamais il y a utilisation.

Il faut noter aussi qu’il n’est pas toujours possible d’avoir accès à l’université aux documents sur lesquels s’appuie l’enseignant universitaire pour conduire sa classe de mathématiques. Le polycopié que nous analyserons représente, pour nous, une opportunité permettant d’étudier comment la transposition didactique interne des formules de Taylor s’est faite par un certain nombre d’enseignants de mathématiques exerçant à l’IPEIM. Ce projet de cours s’inscrit dans ce que Ravel appelle « savoir apprêté » en distinguant dans le processus de transposition interne deux étapes : du « *savoir à enseigner* » au « *savoir apprêté* » et du « *savoir apprêté* » au « *savoir enseigné* ». Au sujet du « *savoir apprêté* », elle note que ce savoir est :

> Le résultat des choix didactiques et mathématiques faits par un enseignant en vue d’enseigner un objet de savoir mathématique donné. Notons que pour un enseignant, ce savoir « apprêté » s’identifie au projet de cours et que ce savoir est nécessairement autre que le savoir enseigné ... Le projet de cours de l’enseignant constitue donc pour nous une étape intermédiaire dans le processus de transposition didactique interne qui mène du savoir à enseigner au savoir enseigné. (Ravel, 2003, p. 19).

L’analyse du polycopié va nous permettre donc d’avoir une idée sur le rapport aux savoirs de certains enseignants de l’IPEIM aux sujets des formules de Taylor bien qu’ils sont obligés, malgré tout, de rester sous l’emprise des revendications du programme officiel.

Selon les revendications du programme, la première formule de Taylor que les étudiants devront rencontrer est la formule de Taylor-Lagrange. Elle doit être enseignée explicitement au premier semestre sous le sous chapitre « *Fonctions de classe* C^k» lequel figure dans le chapitre « Dérivation »[12]. En étudiant ce chapitre à partir de ce polycopié, nous étions surpris de ne pas retrouver la formule de Taylor-Lagrange comme prévu dans le programme officiel. D'ailleurs aucune trace de cette formule n'existe dans tout le polycopié. Le sous chapitre, « *Fonctions de classe C^k*, dans lequel devrait figurer la formule de Taylor-Lagrange» est bien existant. Il se compose de deux parties : « *Définitions, remarques et exemples* » et *« Opérations sur les fonctions C^k*».

Nous pouvons expliquer ce manquement dans le fascicule par la liberté que se donnent les enseignants universitaires dans la construction de leur cours. Ce qui les conduit parfois à faire des dépassements et à imposer leurs propres avis sur ce qui est important à enseigner de ce qui est de moindre importance et voir même ce qui est sans importance. En tant qu'enseignant universitaire nous avons toujours assisté à des discussions pareilles entre les collègues. L'écart didactique entre les pratiques de classe des enseignants d'une part, et les revendications du programme et la réalité de la classe d'autre part, au niveau du lycée, a conduit Ravel, à souligner dans l'introduction de sa thèse que :

> Si un observateur curieux ouvre la porte de différentes salles de classe et observe plusieurs professeurs faire un cours sur un même objet mathématique à un niveau scolaire donné, il est fort probable, qu'en refermant les portes, il n'ait pas l'impression d'avoir observé exactement le même objet mathématique dans toutes les classes. Et si ce même observateur, pour essayer de s'expliquer ce phénomène, va ensuite consulter le programme scolaire –première référence à laquelle sont liés les professeurs pour construire leurs cours–, il risque également d'être surpris de constater qu'il existe un écart entre l'objet mathématique présent dans le programme et celui observé dans les classes. (Ravel, 2003, p.16).

Si la situation est telle au lycée où les enseignants sont habituellement attachés aux documents officiels (programmes et manuels scolaires) que dire alors de la situation à l'université où les enseignants possèdent, malgré tout, une grande liberté dans l'exercice de leur métier.

[12] 16 pages sont consacrées à ce chapitre qui se compose de quatre sous chapitres: 1. Nombre dérivé, fonction dérivées,2. Fonctions de classe C^k , 3. Propriétés des fonctions dérivables, 5. Extension aux fonctions à valeurs dans C.

L'absence de la formule de Taylor-Lagrange du chapitre « *Dérivation* » entraine automatiquement l'absence de l'Inégalité de Taylor-Lagrange qui est une conséquence de la formule. Elle figure dans le fascicule, comme prévu par le programme officiel, au deuxième semestre dans le chapitre « Intégration », à la suite de l'introduction de la formule de Taylor avec reste intégral. Or, la formule de Taylor-Lagrange est une généralisation de l'égalité des accroissements finis et l'inégalité de Taylor-Lagrange est aussi une généralisation de l'inégalité des accroissements finis. On peut alors se demander, pourquoi les concepteurs du polycopié ont-ils présenté l'inégalité des accroissements finis comme conséquence de l'égalité des accroissements finis (ce qui est d'ailleurs très pertinent) et ont changé de logique en présentant l'inégalité de Taylor-Lagrange non pas comme conséquence de la formule de Taylor-Lagrange (qui figure dans le programme et qui est absente du polycopié) mais plutôt comme conséquence de la formule de Taylor avec reste intégral.

Il faut remarquer que dans la partie introductive « *Définition de la dérivabilité* », les auteurs du polycopié, ont introduit la définition d'un développement limité à l'ordre 1 en un point a d'une fonction f définie sur un intervalle I et ont énoncé et démontré juste après, la « propriété » qui lie la notion de dérivabilité en un point avec la notion de développement limité à l'ordre 1 en ce même point[13]. Ils ont, également, fait appel à cette notion de développement limité à l'ordre 1 en un point a pour démontrer le fameux résultat : « *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a* ».

Aucune interprétation géométrique n'est développée à cette occasion. Le travail est fait exclusivement dans un registre algébrique. Or une interprétation géométrique du lien entre la notion de dérivabilité en un point et le développement limité à l'ordre 1 en ce point nous paraît

[13] [13]« *Propriété : Soit* $f : I \to \mathrm{I}R$ *et* $a \in I$.

f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 *en* a, *et ce développement limité est alors nécessairement :*

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\mathcal{E}(x).$$ » (p. 3)

importante pour une meilleure conceptualisation de la notion de dérivabilité et pour une bonne préparation à la compréhension de la notion de développement limité pour des ordres plus élevés. Le jeu entre les deux registres algébrique et géométrique permet d'avoir un meilleur accès à ces deux notions difficiles à visualiser et à comprendre pour un non expert. Il faut remarquer que les auteurs ont fait une brève interprétation géométrique du lien entre la dérivabilité au point a et la notion de tangente à la courbe C_f au point $A(a, f(a))$.

En adéquation avec les instructions du programme officiel, la formule de Taylor-Young apparait dans le chapitre « analyse asymptotique »[14] après l'introduction de la notion de développement limité et d'un certain nombre de propriétés relatives au fonctionnement de cette notion. Les relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence sont introduites[15] avant l'introduction de la définition d'un développement limité.

Comme nous l'avons souligné et prévu plus haut, la formule de Taylor-Young est donnée, dans le polycopié, sous la forme d'une propriété au service de la notion de développement limité et ceci pour une fonction f de classe C^n :

« **3.2 Formule de Taylor-Young et développements limités usuel**s

Propriété 21 (Formule de Taylor-Young)

Soient $n \in IN$ et $f : I \rightarrow IK$ de classe C^nsur I. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en tout point a de I qui est $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$ lorsque $x \rightarrow a$ »

[14] Il s'agit d'un chapitre de 22 pages dans lequel sont traitées successivement les notions suivantes :

1. Relations de comparaison : cas des suites (Relations de domination, de négligeabilité, Relation d'´equivalence).
2. Relations de comparaison : cas des fonctions (Relation de domination, de négligeabilité, Relation d'équivalence).
3. Développements limités (Généralités, Formule de Taylor-Young et Développements limités usuels, Dérivabilité et développement limité, Opérations sur les développements limités.
4. Applications des développements limités (Recherche de limites et d'´equivalents, Etude locale d'une fonction, Application `a l'étude d'asymptotes obliques).

[15] Nous ne discuterons pas ici de la problématique liée aux notations de Landau. Elle fera l'objet d'un article en cours de construction qui sera publié prochainement.

Dans cette propriété la fonction f est de classe C^n. Or, nous avons expliqué, plus haut, que le fait que f soit de C^nest excessif puisque qu'il suffit que la fonction f soit n-fois dérivable au point a pour que la formule soit valide. Les auteurs de ce fascicule ont renvoyé explicitement le lecteur vers le chapitre « Intégration » pour découvrir la démonstration de ce résultat. En analysons ce chapitre nous n'avons pas trouvé la démonstration en question. Ce que nous avons trouvé est plutôt la démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral[16] suite à l'introduction de cette formule. Cette démonstration ne peut pas s'appliquer pour valider la formule de Taylor-Young puisque ni les hypothèses ni le reste ne sont les mêmes. La formule de Taylor-Young nécessite une fonction n-fois dérivable alors que la formule de Taylor avec reste intégral exige que f soit de classe C^{n+1}. La démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral telle qu'elle est présentée dans le polycopié implique la notion d'intégrale qui n'est pas encore enseignée quand la formule de Taylor-Young l'est déjà. Ceci pourrait expliquer pourquoi la formule de Taylor-Young n'est pas démontrée juste après l'introduction de la formule. Mais il faut noter que cette formule pourrait se démontrer via un raisonnement par récurrence avec l'hypothèse que f est n-fois dérivable et donc sans impliquer la notion d'intégrale.

Ajoutant à cela que la formule le de Taylor-Young est une formule locale alors que la formule de Taylor avec reste intégral a une étendue globale. Les aspects locaux et globaux qui sont si important comme nous l'avons vu plus haut et comme ils sont mis en avant dans le programme officiel ne sont pas discutés en profondeur dans ce cours à l'occasion des formules de Taylor. Les auteurs du polycopié, à l'occasion d'une remarque donnent l'exemple solitaire de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour noter que cette fonction peut être approximée au voisinage de 0 par les parties régulières de son développement limité en 0. Ils donnent les

[16] Ce résultat est démontré par un raisonnement par récurrence et en faisant appel à la notion d'intégration par parties.

polynômes $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x + x^2$ et $P_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ représentant les parties régulières de son développement limité pour les ordres $1,2\ et\ 3$. Ils illustrent l'idée d'approximation locale de la fonction f par les polynômes P_1, P_2 et P_3 en faisant appel à un simple graphique et notent juste après « *…que les parties régulières (polynômes de Taylor) ne sont de bonnes approximations de* f *qu'au voisinage de* 0. *Un développement limité n'a donc d'intérêt qu'au voisinage de* a. ». Le graphique tel qu'il est proposé ne semble pas jouer un rôle central, pour les concepteurs du polycopié, pour une meilleure conceptualisation de la notion d'approximation et de ce qui en découle de cette approximation : le lien entre l'ordre du développement et la qualité de l'approximation de la fonction f, la signification et la traduction du reste d'un point de vue graphique… sont totalement absents. Le travail mathématique dans le registre graphique, qui est très pertinent dans le cas des formules de Taylor, ne semble pas tenir une place privilégiée pour les enseignants qui ont construit ce fascicule. Le bref passage, concernant la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ne peut à lui seul clarifier les rapports entre les aspects locaux et globaux des formules de Taylor et la traduction de ces rapports en termes de quantificateurs. Nous pensons que les concepteurs du polycopié ont raté une bonne occasion pour mettre un peu plus au clair la complexité du rapport entre local et global qui s'impose dans le travail mathématique à l'université et ce, à plusieurs occasions notamment en géométrie, en analyse ou encore en topologie. Nous mettons l'hypothèse que la compréhension des aspects locaux et globaux dans les énoncés mathématiques n'est pas immédiate et pose de vrais problèmes aux étudiants en général et particulièrement à ceux des instituts préparatoires aux études d'ingénieurs.

Nous remarquons aussi que les aspects calculatoires du développement sont privilégiés dans ce chapitre au détriment des aspects qualitatifs donnant du sens à la formule de Taylor-Young. L'interprétation graphique du développement et la mise en avant de l'aspect local du développement, du rôle de l'ordre du développent en relation avec l'erreur commise localement entre la fonction et son polynôme de Taylor sont tous absents.

Il faut noter que le reste dans la formule de Taylor-Young est proposé avec une expression impliquant la notation « petit o » de Landau. L'expression du reste impliquant les epsilons est dévoilée rapidement sous forme de remarque comme si le rapport entre elle et l'expression engageant la notation « petit o » est suffisamment transparent permettant de saisir et de faire le passage de l'une vers l'autre sans difficultés. Or nous avons souligné plus haut que la notation « petit o » n'est pas aussi transparente comme elle peut le paraître. Nous pensons que l'expression de la notion de négligeabilité en ayant recours aux epsilons est plus signifiante et moins problématique pour les étudiants[17].

Quant à la formule de Taylor avec reste intégrale, elle figure comme le suggère le programme officiel dans le chapitre « intégration »[18]. Elle est présentée en association avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, sous la forme d'un corollaire dans le sous chapitre « *Intégrale et dérivation-applications* » :

« ***Corollaire 1.3.6 – Formule de Taylor avec reste intégrale-Inégalité de Taylor-Lagrange***.

Soient I *un intervalle de* IR, $n\epsilon IN$, $f\epsilon C^{n+1}(I,IR)$ *et* $a\epsilon I$. *On a*

$$\forall x\epsilon I, f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

$$\forall x\epsilon I, \left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right|\leq\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\epsilon[a,x]}\left|f^{(n+1)}(t)\right|. »$$

---

[17] Cette hypothèse est soumise à vérification dans un travail de recherche en cours de réalisation.

[18] Il s'agit d'un chapitre de 23 pages dans lequel sont traitées successivement les notions suivantes :

1. Intégrale des fonctions en escaliers ;
2. Intégrale des fonctions continues par morceau ;
3. Intégrale et dérivation-applications ;
4. Calcul approché d'intégrales ;
5. Encore des exercices.

La formule de Taylor avec reste intégrale est démontrée par un raisonnement par récurrence en effectuant des intégrations par parties. L'inégalité de Taylor-Lagrange n'est pas justifiée. Les auteurs ont juste noté qu'elle est la conséquence directe de la formule de Taylor avec reste intégrale.

À la suite de ce corollaire, les concepteurs de ce cours ont illustré ce résultat par l'application corrigée suivante :

« *Exercice 1.8 Montrer que*

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], x - \frac{x^3}{6} \leq sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \text{ »}$$

Nous remarquons encore une fois l'absence de la prise en compte par les auteurs des aspects locaux et globaux des formules de Taylor. Pourtant le programme officiel et à l'occasion de cette formule (les formules de Taylor-Lagrange et Taylor-Young devraient être déjà enseignées) a demandé explicitement de prendre en compte ces aspects :

« *On soulignera la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et Taylor-Lagrange).* »

La fonction f dans la formule de Taylor-Young est n-fois dérivable, dans la formule de Taylor-Lagrange est de classe C^n et dans la formule de Taylor avec reste intégral est de classe C^{n+1}. Ces distinctions sont fondamentales. Elles engendrent des formules qui diffèrent par leur étendue locale ou globale et par l'expression de l'erreur commise en approchant la fonction avec son polynôme de Taylor. Nous pensons qu'un étudiant qui n'est pas suffisamment sensibilisé à ces dissemblances risque de ne pas bien conceptualiser les formules de Taylor.

Le recours au registre graphique pour une meilleure conceptualisation de la formule de Taylor avec reste intégrale et de l'inégalité de Taylor-Lagrange est encore une fois manquant.

Nous remarquons dans ce polycopié que l'approche syntaxique dans un registre algébrique est dominante au détriment de l'approche sémantique dans un graphique. Ceci montre la résistance des enseignants aux changements recommandés qui les incitent à faire appel à au moins deux registres différents et à ne pas rester emprisonner dans le cadre algébrique souvent mobilisé solitairement dans la classe de mathématique. A ce sujet Arslan (2005) souligne la dominance de l'approche algébrique dans l'activité de l'enseignant et :

> …confirme que la prégnance historique de la résolution algébrique persiste à peser dans l'enseignement actuel français mais aussi au plan international. D'ailleurs cette tendance reste confirmée dans l'analyse des manuels et des programmes que nous avons faite dans la partie B de cette thèse. (Arslan, 2005, p. 19).

Or l'écart cognitif entre l'approche algébrique et l'approche graphique des différentes notions enjeu dans les formules de Taylor est sans doute à ne pas négliger. Il devrait être provoqué par l'enseignant quand il introduit et invite les étudiants à manipuler ces formules. Car chaque registre permet l'accès à une partie des caractéristiques de ces formules. Changer de registre permet alors aux étudiants d'avoir une connaissance meilleure et plus générale de ce champs de savoir. De ce fait nous pensons que l'approche sémantique des formules de Taylor à travers l'étude graphique est une bonne occasion offerte pour réaliser des expériences et des découvertes surtout lorsque le travail se fait à l'aide de logiciels graphiques dynamiques. Ces derniers sont capables d'aider les étudiants à mieux percevoir par exemple l'écrasement du polynôme de Taylor sur la fonction localement et de voir la qualité de cet écrasement en fonction de l'ordre du développement. Ils permettent aussi d'évaluer qualitativement l'erreur commise en faisant varier l'ordre du développement de Taylor.

Conclusion

Dans ce travail de recherche nous avons étudié pour, des fins didactiques, les aspects mathématiques, épistémologiques et sémiotiques des différentes variantes des formules de Taylor. A la lumière de ce travail nous avons mené une étude curriculaire au niveau des programmes officiels de l'enseignement de l'analyse de la première année de l'IPEIM section Mathématiques-Physique que nous avons complété par une analyse d'un polycopié rédigé par un groupe d'enseignants universitaires.

L'analyse mathématique a permis de mettre en évidence une nécessité didactique de rallier les exigences des hypothèses que vérifient chacune des variantes des formules de Taylor avec l'étendue locale ou globale de la variante d'une part, et la nature de l'expression du reste de Taylor propre à chacune des variantes, d'autre part. Cette nécessité permettra de montrer aux étudiants le rôle pratique que peut jouer chacune des variantes dans l'exercice mathématique. Nous avons montré aussi que même si le contrôle syntaxique, à lui seul, permet d'aboutir à un développement de Taylor mathématiquement valide dans la majorité des cas, on ne peut pas faire l'économie d'un contrôle sémantique de la validité du développement de Taylor-Young, dans certains cas, surtout lorsqu'on applique ce développement pour faire un calcul numérique approché.

L'étude épistémologique a montré, entre autres, que la problématique du reste de Taylor n'était pas une priorité pour certains mathématiciens, éminents, du 17ème et du 18ème siècle devant l'importance des applications possibles qu'ont ouvert les approximations en termes de développement de Taylor. Ce constat est, pour nous, d'une grande importance didactique. En discutant, de manière libre, avec des enseignants de physique et avec des étudiants nous avons remarqué la légèreté qu'ils donnent aux restes de Taylor jugeant que c'est plutôt la partie polynomiale du développement qui est la plus importante dans toute cette histoire. La rigueur mathématique n'est pas, pour eux, une priorité lorsqu'il s'agit des formules de Taylor. Or, on ne peut conceptualiser convenablement les formules de Taylor que lorsqu'on adopte ce point de vue. On peut se demander d'ailleurs comment ces étudiants gèrent-ils les notations de Landau, qui sont déjà porteuses d'ambiguïtés, dans les développements limités.

Pour une conceptualisation adéquate du développement de Taylor nous avons montré, en adéquation avec le point vue de Duval (1993), l'intérêt d'approcher ce développement en le convertissant du registre de l'écriture formelle au registre des représentations graphiques en insistant sur les notions de voisinage, d’ordre du développement et de la signification sémantique du reste du développement et donc de l’erreur commise à chaque développement.

L’analyse du programme officiel montre que les concepteurs incitent, en générale, les enseignants à étudier les problèmes mathématiques selon la double approche qualitative/quantitative. Cependant, et en ce qui concerne les formules de Taylor, ils n’ont pas particulièrement insisté sur l’importance de ce double regard. Plus précisément, ils n’ont manifesté un intérêt aux aspects locaux et globaux de ces formules que de manière succincte à l’occasion de la formule de Taylor avec reste intégral qui s’enseigne après les deux autres variantes (Taylor-Lagrange et Taylor-Young). L’analyse montre aussi que l’approche graphique du développement de Taylor est presque absente et que l’approche calculatoire algébrique est, par contre, dominante.

L’étude que nous avons menée au niveau du polycopié de référence montre étonnamment l’absence de la formule de Taylor-Lagrange. Cette absence marque un phénomène assez courant dans l’enseignement supérieur qui consiste à se donner en tant qu’enseignant la liberté de sélectionner selon sa propre vision et ses propres convictions ce qui est pertinent de ce qui de moindre importance voir même de ce qui est sans importance.

Tout comme les concepteurs du programme, les enseignants du polycopié ont privilégié et de loin les aspects calculatoires pour les développements de Taylor sans faire recours au registre graphique. Le jeu entre les registres algébrique et graphique est quasi-absent. Le travail dans le registre graphique de l’effet de la variation de l’ordre du développement, de la signification du polynôme de Taylor par rapport à la fonction d’étude et du sens du reste de Taylor qui représente l’erreur commise en substituant le polynôme de Taylor à la fonction sont tous absents. Or ces détails sont d’une importance capitale.

Ce travail de recherche demande à être complété sur de nombreux points, notamment l’observation des étudiants en situations réelles appelant la manipulation des différentes variantes de Taylor, voir l'impact sur le niveau de conceptualisation des formules de Taylor chez les étudiants suite à un enseignement bien organisé engageant un logiciel graphique dynamique. Une étude des pratiques des enseignants de mathématiques et de physique dans des classes ordinaires ne peut que nous éclairer davantage sur les difficultés réelles relatives à l'enseignement et l'apprentissage des formules de Taylor. Il est aussi très intéressant de mener une recherche didactique sur les notations de Landau qui sont parfois porteuses d'ambiguïtés pour un non averti.

Références

Arslan, S. (2005). *L'approche qualitative des équations différentielles en classe de terminale S : Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences ?*. Thèse. Université Joseph Fourier.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10* (2), 241-286.

Artigue, M. (2005). Apprendre les mathématiques au niveau universitaire : ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine. *Annales de Sciences Cognitives et Didactique, 11*, 269-288.

Bourgade, J-P. (2013). Le théorème des accroissements finis comme question curriculaire. In G. Cirade & al (Eds.), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 221-245). Toulouse : France.

Bruneau, O. (2005). *Pour une biographie intellectuelle de Colin Mac-Laurin (1698-1746) : ou l'obstination mathématicienne d'un newtonien*. Thèse. Université de Nantes.

Burkhadart. H & Wirtinger.W. (1909). Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, Tome II, Premier volume, Fonctions de variables réelles, éd. française réd. et publ. d'après l'éd. Allemande sous la dir. de Jules Molk.

Chevallard, Y. (1991). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112.

Coppo, M-A.(2009). Une histoire des séries infinies d'Oresme à Euler.*Gazette des Mathématiciens*. *N° 120*, 39-52.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7* (2), 5-32.

Douady, R. (1991). Tool, Object, Setting, Window: Elements for Analysing and Constructing Didactical Situations in Mathematics. In A.-J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. Van Dormolen (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 107-130). Netherlands: Kluwer AcademicPublishers.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiqueet de sciences cognitives,* 5, 37-65.

Duval, R. (2006).A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics.*EducationalStudies in Mathematics*, *61*(1), 103-131.

Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs El Manar. (2016). Classes préparatoires MP: Programme de mathématiques première année. http://www.ipeiem.rnu.tn/sites/default/files/Prog Maths MP 1ère année.pdf

Kouki, R., & Griffiths, B.J. (2020). Introducing Taylor Series an Local Approximations using Historical and Semiotic Approach. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(2), em0573. https://doi.org/10.29333/iejme/6293

Martin, J. (2013). Differences between experts 'and students' conceptual images of mathematical structure of Taylor series convergence. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 267-283.

Rasmussen, C., &Wawro, M. (2017).Post-calculus research in undergraduate mathematics education. In J. Cai (Ed.), *The compendium for research in mathematics education*. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tall, D. &Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.*EducationalStudies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Maschietto, M. (2002). *L'enseignement de l'Analyse au lycée : les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices*. Thèse. Université paris 7-Denis Diderot.

Ravel, L.(2003). Des programmes à la clase : Etude de la transposition didactique interne : Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique. Thèse. Laboratoire Leibniz-IMAG.