

A construção do conhecimento matemático vetorial à luz do desenvolvimento do espírito científico e dos obstáculos epistemológicos de Bachelard

The construction of vector mathematical knowledge in the light of the development of Bachelard's scientific spirit and epistemological obstacles

La construcción del conocimiento matemático vectorial a la luz del desarrollo del espíritu científico y los obstáculos epistemológicos de Bachelard

La construction des savoirs mathématiques vectoriels à la lumière du développement de l'esprit scientifique et des obstacles épistémologiques de Bachelard

Rita de Cássia Florêncio Rocha Kasahara¹

Universidade do Estado do Pará (UEPA-PA)

<https://orcid.org/0000-0003-1017-8550>

Ivanilde Apoluceno de Oliveira²

Universidade do Estado do Pará (UEPA-PA)

<https://orcid.org/0000-0002-3458-584X>

Pedro Franco de Sá³

Universidade do Estado do Pará (UEPA-PA)

<https://orcid.org/0000-0002-8986-2787>

Resumo

Esse artigo tem por objetivo analisar o desenvolvimento do conhecimento científico da história dos vetores a partir do desenvolvimento do Espírito Científico e dos Obstáculos Epistemológicos propostos por Bachelard (1884-1962), a fim de responder ao seguinte questionamento: De que forma se deu a presença e a ruptura dos obstáculos epistemológicos propostos por Bachelard ao longo do desenvolvimento do espírito científico da história dos vetores? No período Pré-Científico, compreendido desde a Antiguidade Clássica até os séculos XVI ao XVIII, o estudo partiu das análises e definições de Aristóteles, Newton, Leibniz, Weierstrass e Argand Gauss, que foram os principais e os primeiros autores a utilizar a ideia de vetores. No Estado Científico, final do século XVIII até o início do século XX, foram analisados o

¹ rita.rocha@ifpa.edu.br

² nildeapoluceno@uol.com.br

³ pedro.sa@uepa.br

surgimento das teorias sobre vetores, sendo os principais autores: Möbius, Hamilton, Grassmann, Clifford, Gibbs e Heaviside. Na Era do Novo Espírito Científico, observou-se a preocupação com a axiomatização da teoria de vetores, em especial, pelos seguintes autores: Peano, Shimmarck, Georg Hamel, Hahn, Wiener e Banach e a axiomatização proposta por Garret Birkhoff e Saunders Mac Lane. Ao finalizar o estudo e análise das teorias que marcam o desenvolvimento do sistema vetorial, é evidente a presença da ruptura e da vigilância epistemológica tratadas por Bachelard. De acordo com o autor, o espírito científico amadurecido e formado deve estar em constante vigilância, em constante reflexão sobre a reflexão para que porventura não venham surgir novamente obstáculos já superados ou novos e que impeçam o desenvolvimento do espírito científico.

Palavras-chave: História dos Vetores, Epistemologia de Bachelard, Obstáculos Epistemológicos, Espírito Científico.

Abstract

This article objective to analyze the development of scientific knowledge of the history of vectors from the development of the scientific spirit and the epistemological obstacles proposed by Bachelard (1884-1962), to answer the following question: How did the presence and the rupture of the epistemological obstacles proposed by Bachelard throughout the development of the scientific spirit of the history of vectors? In the Pre-Scientific period, from Classical Antiquity to the 16th to the 18th centuries, the study started with the analyzes and definitions of Aristotle, Newton, Leibniz', Well and, Argand Gauss. During the Scientific State, from the end of the 18th century to the beginning of the 20th century, the emergence of theories about vectors was analyzed, with the main authors being: Möbius, Hamilton, Grassmann, Clifford, Gibbs and, Heaviside. In the Age of the New Scientific Spirit, the concern with the axiomatization of vector theory was observed, especially by the following authors: Peano,

Shimmarck, Georg Hamel, Hahn, Wiener, and Banach, and the axiomatization proposed by Garret Birkhoff and Saunders Mac Lane. At the end of the study and analysis of the theories that mark the development of the vector system, the presence of rupture and epistemological surveillance treated by Bachelard is evident. According to the author, the mature and formed scientific spirit must be in constant vigilance, in constant reflection on the reflection so that, perhaps, obstacles that have already been overcome or new and that prevent the development of the scientific spirit do not arise again.

Keywords: Vector history, Bachelard's epistemology, Epistemological obstacles, Scientific spirit.

Resumen

Este artículo tiene como objetivo analizar el desarrollo del conocimiento científico de la historia de los vectores a partir del desarrollo del Espíritu Científico y los Obstáculos Epistemológicos propuestos por Bachelard (1884-1962), con el fin de responder a la siguiente pregunta: ¿Cómo surgió la presencia y la ruptura de los obstáculos epistemológicos propuestos por Bachelard a lo largo del desarrollo del espíritu científico de la historia de los vectores? En el período Precientífico, desde la Antigüedad Clásica hasta los siglos XVI al XVIII, el estudio se inició con los análisis y definiciones de Aristóteles, Newton, Leibniz, Weierstrass y Argand Gauss, quienes fueron los principales y primeros autores en utilizar la idea de vectores. Durante el Estado Científico, desde finales del siglo XVIII hasta principios del siglo XX, se analizó el surgimiento de teorías sobre los vectores, siendo los principales autores: Möbius, Hamilton, Grassmann, Clifford, Gibbs y Heaviside. En la Era del Nuevo Espíritu Científico se observa la preocupación por la axiomatización de la teoría vectorial, especialmente por parte de los siguientes autores: Peano, Shimmarck, Georg Hamel, Hahn, Wiener y Banach y la axiomatización propuesta por Garret Birkhoff y Saunders Mac Lane. Al final del estudio y

análisis de las teorías que marcan el desarrollo del sistema vectorial, se evidencia la presencia de ruptura y vigilancia epistemológica tratada por Bachelard. Según el autor, el espíritu científico maduro y formado debe estar en constante vigilancia, en constante reflexión sobre la reflexión para que, quizás, no vuelvan a surgir obstáculos ya superados o nuevos y que impidan el desarrollo del espíritu científico.

Palabras clave: Historia de los Vectores, Epistemología de Bachelard, Obstáculos Epistemológicos, Espíritu Científico.

Résumé

Cet article vise à analyser l'évolution des connaissances scientifiques sur l'histoire des vecteurs à partir du développement de l'Esprit scientifique et des Obstacles épistémologiques proposé par Bachelard (1884-1962), afin de répondre à la question suivante : Comment la présence et la rupture des obstacles épistémologiques proposés par Bachelard tout au long du développement de l'esprit scientifique de l'histoire des vecteurs ? Dans la période préscientifique, de l'Antiquité classique au XVIe au XVIIIe siècle, l'étude a commencé par les analyses et les définitions d'Aristote, Newton, Leibniz, Weierstrass et Argand Gauss, qui furent les principaux et premiers auteurs à utiliser l'idée de vecteurs. Dans l'État scientifique, de la fin du XVIIIe siècle au début du XXe siècle, l'émergence des théories sur les vecteurs a été analysée, les principaux auteurs étant : Möbius, Hamilton, Grassmann, Clifford, Gibbs et Heaviside. À l'ère du nouvel esprit scientifique, le souci de l'axiomatisation de la théorie des vecteurs a été observé, en particulier par les auteurs suivants : Peano, Schur, Georg Hamel, Hahn, Wiener et Banach et l'axiomatisation proposée par Garret Birkhoff et Saunders Mac Lane. Au terme de l'étude et de l'analyse des théories qui jalonnent le développement du système vectoriel, la présence de la rupture et de la surveillance épistémologique traitée par Bachelard est évidente ; Selon l'auteur, l'esprit scientifique mûr et formé doit être en vigilance constante, en réflexion constante sur la réflexion pour que, peut-être, des obstacles déjà surmontés ou

nouveaux et qui empêchent le développement de l'esprit scientifique ne se présentent pas à nouveau.

Mots-clés : Histoire des vecteurs, Epistémologie de Bachelard, Obstacles épistémologiques, Esprit scientifique.

A construção do conhecimento matemático vetorial à luz do desenvolvimento do espírito científico e dos obstáculos epistemológicos de Bachelard

O ensino do conteúdo de vetores é desafiador, tratar de um conceito abstrato para chegar ao real a fim de promover a apreensão e a compreensão pelos estudantes não é tarefa simples para o educador da área de Matemática. Muitos são os conceitos dados a vetor; porém, em matemática, refere-se ao espaço vetorial e é definido a partir do seu módulo direção e sentido e pode ser um número real, uma matriz, uma sequência ou uma função. É utilizado para representar grandezas. O conteúdo básico de vetores envolve o conceito de vetor, operações com vetores e transformação de coordenadas, além de, análises geométricas de vetores no plano e coordenadas bi e tridimensionais.

Contudo, para chegar aos conceitos, definições e axiomas utilizados hoje no ensino de vetores muitas foram as ideias e teorias propostas que datam deste a Antiguidade. Entender e conhecer a história da ciência e o processo de construção do conhecimento científico sobre determinado objeto têm sido um valioso artifício para compreender a realidade e, mais ainda, como um instrumento do processo de ensino aprendizagem.

Saito (2012) ao relacionar a história da matemática e a história da Ciência diz que novas tendências em historiografia da ciência têm apontado para uma matemática que deve ser abordada dentro de um quadro contextual mais amplo permitindo a ligação com outros campos do conhecimento, bem como, o processo de construção do conhecimento científico e seu impacto na sociedade.

Dentro desse contexto, D'Ambrosio (2012) diz que a matemática e sua história ainda estão imunes a reflexões e críticas e que tenta, ainda hoje, justificar o conhecimento por si próprio; o autor conclui dizendo:

Ao historiador das ciências e da tecnologia cabe, não apenas, o relato dos grandiosos antecedentes e consequentes das grandes descobertas científicas e tecnológicas, mas sobretudo a análise crítica que revelará acertos e distorções nas fases que prepararam

os elementos essenciais para essas descobertas e para sua expropriação e utilização pelo poder estabelecido. (D'Ambrosio, 2012, p. 341)

Assim, estudar a história da ciência não significa, apenas, colocar em ordem cronológica os acontecimentos e descrevê-los, mas em analisá-los epistemologicamente a partir, sim, dos acontecimentos e, também, das motivações. Para Japiassu (1986, p.36) é a epistemologia “que faz com que o objeto da história das ciências, seja um objeto *não dado*, mas um *objeto construído*, um objeto cujo inacabamento é essencial”.

Gaston Bachelard (1884-1962), químico, historiador, filósofo e epistemólogo, defende uma epistemologia histórica, crítica e fundamentada para dar sentido ao espírito científico. É através da retificação dos erros passados, os obstáculos epistemológicos, que o espírito científico deve corrigir os erros do presente; “sendo o conhecimento concebido como uma “produção histórica”, a epistemologia visa um *processo*” (Japiassu, 1986, p. 73).

Portanto, esse artigo apresenta os resultados de uma investigação que objetivou analisar o desenvolvimento do conhecimento científico da história dos vetores a partir do desenvolvimento do espírito científico e dos obstáculos epistemológicos propostos por Bachelard, a fim de responder ao seguinte questionamento: De que forma se deu a presença e a ruptura dos obstáculos epistemológicos propostos por Bachelard ao longo do desenvolvimento do espírito científico na história dos vetores?

Nesse sentido, esse artigo analisa o desenvolvimento da história dos vetores em relação aos principais autores que deram origem a teoria de vetores moderna, considerando o desenvolvimento do espírito científico e os obstáculos epistemológicos de Bachelard. Os obstáculos epistemológicos analisados foram o da experiência primeira, o do conhecimento geral, e o do conhecimento quantitativo.

Inicialmente, será feita uma descrição da Metodologia da Pesquisa, uma breve análise correlacionando a epistemologia e a história das ciências, bem como, uma sucinta descrição da epistemologia de Bachelard com destaque aos obstáculos que serão analisados nesse estudo.

Em seguida, a história dos vetores será analisada a partir do desenvolvimento do espírito científico proposto por Bachelard, onde serão destacados e analisados os principais acontecimentos à luz dos obstáculos epistemológicos citados. Na última seção, as considerações finais serão feitas para elucidar os fatos tratados e observados.

Metodologia da Pesquisa

Este trabalho apresenta uma pesquisa bibliográfica que de acordo com as definições de Gil (2002) e Marconi e Lakatos (2003) por ser constituída do levantamento de obras já publicadas sobre o tema em estudo. Com base nestes autores foi desenvolvida a partir das seguintes etapas: escolha do tema, elaboração do plano de trabalho, identificação, localização, compilação, fichamento, análise e interpretação e redação.

A escolha do tema se deu pela relevância e ineditismo para dar maior robustez à outras pesquisas sobre Vetores que estão sendo desenvolvidas pelos autores e possibilitar a análise da construção do conhecimento de uma teoria matemática a partir de uma análise epistemológica crítica e reflexiva. A delimitação em relação a quais obstáculos epistemológicos seriam investigados se deu, precisamente, quando do estudo da evolução histórica dos vetores e da epistemologia de Bachelard.

A elaboração do plano se deu em paralelo ao estudo bibliográfico a partir da construção do objetivo da pesquisa e questão norteadora, descritas na Introdução, e resultou na sequência de seções apresentadas nesse artigo.

As seções foram definidas de forma a promover a construção do conhecimento desde a Introdução, a relação da Epistemologia com a História das Ciências para dar um panorama geral e situar os leitores, da apresentação dos principais pontos e contextualização histórica da Epistemologia de Bachelard, suas ideias e obstáculos epistemológicos, culminando, com a análise da História dos vetores a luz do desenvolvimento do Espírito Científico de Bachelard e as Considerações Finais.

As fases de identificação, localização, compilação e fichamento foram realizadas em paralelo à medida em que os estudos foram sendo aprofundados e de acordo com a sequência definida, inicialmente, no plano de trabalho. A análise da Epistemologia e História das Ciências teve por fundamento, especialmente, em Japiassu (1981, 1986), Oliveira (2016) e correlatas.

As obras para analisar a evolução histórica dos vetores foram definidas a partir Crowe (1994) que apresenta um panorama detalhado da evolução histórica dos vetores com os autores e suas contribuições. A partir desse estudo inicial, cada contribuição foi aprofundada por autor considerando os tratados publicados à época, contexto histórico, motivação, publicações relevantes em revistas, teses e dissertações etc.

A pesquisa do histórico foi feita de forma cronológica a fim de identificar a evolução das teorias apresentadas e, conseqüentemente, permitir identificar posteriormente as principais rupturas e obstáculos epistemológicos. O estudo da epistemologia de Bachelard e dos obstáculos epistemológicos se deu, em especial, a partir de Bachelard (1977, 1996, 2006) e obras correlatas.

A fase de análise e interpretação possibilitou a redação do artigo e foi realizada a partir da crítica e reflexão de todo o material bibliográfico estudado; a definição das seções do artigo foram refletidas, definidas e escritas a fim de promover um encadeamento lógico de construção do conhecimento a partir das teorias e discussões tratadas e estudadas na pesquisa.

Nesse sentido, com objetivo precípua de elucidar questões relativas a relação e a importância da História da Ciência a partir do olhar da epistemologia e dar subsídios para o recorte da Epistemologia Histórica de Bachelard a seção A Epistemologia e a História das Ciências foi elaborada.

A partir da contextualização envolvendo Epistemologia e História das Ciências considerando o encadeamento de ideias a seção A Epistemologia Histórica de Bachelard é apresentada e tem por objetivo elucidar seus principais aspectos, contexto histórico, principais

características e os obstáculos epistemológicos, quais sejam, o obstáculo da experiência primeira, o obstáculo do conhecimento geral e o obstáculo do conhecimento quantitativo, a serem considerados na análise da evolução da teoria de vetores.

Vale ressaltar que não é objetivo dessa seção descrever de forma minuciosa a Epistemologia de Bachelard e nem seria possível considerando o escopo de um artigo, porém deseja-se fornecer o entendimento necessário para as análises que serão feitas posteriormente.

Por fim, como cerne dessa pesquisa, na última seção foram definidos e delimitados os períodos da história da teoria de vetores de acordo com as etapas históricas da evolução do pensamento científico propostos por Bachelard (1996). Para cada período foram analisados os obstáculos epistemológicos, a ruptura, a retificação de erros de acordo com as teorias e estudos à época.

Portanto, para esse estudo, considerando os períodos e etapas propostos por Bachelard (1996), a história dos vetores foi analisada da seguinte forma: no estado pré-científico serão investigadas as definições de Aristóteles (384a.C-322a.C), Isaac Newton (1643-1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Herbert George Well (1866-1946) e Jean Robert Argand (1768-1822).

No período científico, o estudo foi baseado no surgimento das teorias sobre vetores a partir dos autores August Ferdinand Möbius (1790-1868), Alexander Hamilton (1755-1804), Peter Guthrie Tait (1831-1901), Hermann Grassmann (1809-1877), William Kingdon Clifford (1845-1879), Josiah Willard Gibbs (1839-1903) e Oliver Heaviside (1850-1925).

Por fim, na era do Novo Espírito Científico houve a preocupação com a axiomatização da teoria tal como foi feito inicialmente, por Giuseppe Peano (1858-1932), perpassando por Rudolf Schimmack (1881-1912), Georg Hamel (1877-1954), Hans Hahn (1879-1934), Norbert Wiener (1894-1964) e Stefan Banach (1892-1945) e, culminando, com a axiomatização proposta por Garret Birkhoff (1911-1996) e Saunders Mac Lane (1909-2005).

Nas seções seguintes, bem como na Introdução e na própria seção de Metodologia da Pesquisa, as análises, reflexões, críticas e embasamento teórico serão apresentadas em consonância com a metodologia discutida e estudos realizados.

A Epistemologia e a História das Ciências

O processo de produção do conhecimento, em seus diferentes aspectos, é estudado pela epistemologia. A epistemologia reflete de forma crítica, histórica, filosófica etc como se dá o processo de produção do conhecimento; apresenta “um caráter interdisciplinar a se situar na interseção da Filosofia da Ciência e de outras disciplinas como a História das Ciências, a Sociologia do Conhecimento etc.” (Oliveira, 2016, p. 18).

Nesse sentido, Oliveira (2016, p. 18), diz que

A epistemologia tem como função refletir sobre a prática dos cientistas considerando o conhecimento um processo histórico, as ciências em via de se fazerem, em seu processo de gênese, formação e estruturação progressiva. Nesse sentido, a epistemologia chega sempre a um conhecimento provisório. A epistemologia estuda a produção do conhecimento em abordagem lógica, ideológica, sociológica, política etc.; formula juízos valorativos na apresentação do grau de cientificidade dos discursos das ciências; elucida o trabalho de produção de conhecimento do cientista e estuda a gênese e a estrutura do conhecimento científico, bem como as condições de sua produção. (Oliveira, 2016, p.18)

Contudo, não há um conceito fechado em relação a Epistemologia. Porém, de acordo com Japiassu (1986 como citado em Cezare & Andrade, 2016, p. 55), “para fins de estudo podemos apresentar a epistemologia como sendo o estudo metódico e reflexivo do saber, considerando sua formação, sua organização, seu desenvolvimento e funcionamento de seus produtos”.

Para todo processo de produção do conhecimento há um pré-saber que advém da própria cultura, do meio no qual está inserido, ou seja, consiste nas primeiras noções ou ideias criadas a partir de sua própria vivência; por outro lado, o saber constitui-se como conhecimentos organizados e que podem ser transmitidos (Japiassu, 1975 como citado em Oliveira, 2016).

Japiassu (1975, como citado em Oliveira, 2016, p. 21) “considera que há sempre uma relação entre o pré-saber e o saber, explicando que o primeiro é uma realidade cultural relativa ao saber ou à ciência, e que para um saber há sempre um pré-saber, constituindo-se em uma realidade ambígua”.

Ao estabelecer uma relação entre o saber e o pré-saber, Japiassu (1986, pp.19-20) estabelece uma série de categorias epistemológicas, dentre as quais a de recorrência epistemológica e a justifica da seguinte forma:

Em face da necessidade de explicar o devir de uma ciência, ligando o conhecimento de seu passado à análise de seu estado presente, e fazendo depender este estado presente de todos os elementos que constituíram sua possibilidade, devemos fazer apelo à categoria de *recorrência epistemológica*. É este conceito que torna possível o desenvolvimento de uma história teórica ou de um conhecimento teórico da história das ciências. É ele que nos permite compreender o devir real de uma ciência, que é o objeto da epistemologia histórica. (Japiassu, 1986, pp.19 -20)

Pode-se observar que a epistemologia está para a história das ciências através de uma abordagem reflexiva e crítica dessa; portanto, situar a ciência ou processo de construção de conhecimento através de uma ordem cronológica dos acontecimentos não constitui, por si só, uma análise epistemológica; Bachelard (2006) diz que evocar a continuidade da história empobrece as dialéticas e, conseqüentemente, a discussão dos problemas epistemológicos característicos da história das ciências.

Buscar a história das ciências a partir de uma análise epistemológica consiste em debruçar-se sobre os acontecimentos, refletir, analisar erros e conflitos, motivações etc. Para Bachelard (2006) a história da ciência é a história da superação dos obstáculos epistemológicos.

Japiassu (1986, p.12) assim como Bachelard (1996, 2006) defende uma história das ciências crítica a partir de uma abordagem epistemológica crítica e reflexiva, ao dizer que:

[...]E é tomando as ciências em sua “historicidade”, que se elabora a crítica epistemológica da ciência. Por outro lado, como a historicidade não é para a filosofia um simples acidente exterior, mas algo que lhe é essencial, da mesma forma a história das ciências se liga de muito perto à filosofia, pelo menos através de sua vertente

epistemológica. A história das ciências é um tecido de juízos implícitos sobre o valor dos pensamentos e das descobertas científicas. O papel da epistemologia é de explicitá-los. (Japiassu, 1986, p.12)

Ainda para o autor, o interesse na análise epistemológica da ciência pode ser tanto heurístico como pedagógico. O caráter heurístico fortalece as ciências as remontarem e trazerem à tona características históricas que motivaram ou influenciaram o desenvolvimento de determinado saber; o pedagógico, pode ser vislumbrado através da correção dos erros ao longo do processo histórico. Ou seja, entender a história da ciência consiste em não trazer o conhecimento por si, mas entender como se deu o seu processo de construção (Japiassu, 1981).

Nesse sentido, Japiassu (1986, pp.31-32) fala sobre a importância da história das ciências ao dizer que

[...]hoje sabemos que fazer a história das ciências consiste em fazer a história dos conceitos e das teorias científicas, bem como das hesitações do próprio teórico. Trata-se de um esforço para se elucidar em que medida as noções, as atitudes ou os métodos ultrapassados foram, em sua época, ultrapassatempo. Mais profundamente, como nos mostrou Canguilhem, interrogar-se sobre a história das ciências consiste em interrogar-se ao mesmo tempo sobre sua *finalidade*, sobre seu *destino*, sobre seu *porquê*, mas também sobre *aquilo pelo que* ela se interessa, *de que* ela se ocupa, em conformidade com aquela que ela *visa*. (Japiassu, 1986, pp.31-32)

Silva e Arcanjo (2021) destacam que a história das ciências teve seu maior crescimento no século XX, principalmente, na Europa Continental, com o surgimento de epistemologias que buscavam analisar o desenvolvimento científicos por meio de fatos históricos; especificamente nos trabalhos do filósofo francês Abel Rey.

Para Bachelard (1996), a diferença entre o historiador e o epistemólogo reside na forma como olham a história e no uso da racionalidade e da construção do conhecimento; para o autor

[...] O historiador da ciência deve tomar as ideias como se fossem fatos. O epistemólogo deve tomar os fatos como se fossem ideias, inserindo-as num sistema de pensamento. Um fato mal interpretado por uma época permanece, para o historiador, um *fato*. Para o epistemólogo, é um *obstáculo*, um contra-pensamento. (BACHELARD, 1996, p. 22)

Dessa forma, o epistemólogo deve dar sentido aos fatos e identificar as barreiras existentes no processo de construção de dado conhecimento, elucidando as ideias e questionando-as. Para Lopes (1996, como citado em Cezare & Andrade, 2016, p.59),

a epistemologia histórica nos faz questionar a possibilidade de definirmos de forma universal o que é Ciência, e quando questionamos nessa perspectiva ela passar a ser um objeto construído socialmente, cujos critérios de cientificidade são coletivos e setoriais às diferentes ciências. (Lopes, 1996, como citado em Cezare & Andrade, 2016, p.59).

Apesar da importância da epistemologia histórica para a compreensão do desenvolvimento do conhecimento, é importante destacar que não há uma única epistemologia, há várias correntes epistemológicas, algumas excludentes, outras complementares, porém que refletem de acordo com o seu objeto o saber e o conhecimento científico.

Tesser (1995) cita a Epistemologia Genética de Piaget, a Histórica de Bachelard, a arqueológica de Foucault, a racionalista crítica de Popper e a Crítica de Habermas como principais linhas epistemológicas contemporâneas; além destas, Stigar, Ruthes e Mendes (2019) analisam, ainda, a epistemologia Complexa de Morin.

Japiassu (1986) defende que há, duas correntes epistemológicas, a lógica baseada no positivismo anglo-saxônico, e há àquela baseada na psicologia da inteligência no desenvolvimento do pensamento e do espírito científico, na qual situa-se a epistemologia de Bachelard, esta última será a fundamentação teórica para esse artigo.

Portanto, na seção seguinte será feita uma revisão sucinta da epistemologia histórica de Bachelard dando ênfase aos seus principais aspectos, pois seria inapropriado tratar todo estudo de Bachelard em um único artigo devido a importância e amplitude de sua obra. Esse estudo é necessário, pois é partir dele que faremos inferências e análises na história de vetores.

A Epistemologia Histórica de Bachelard

Gaston Bachelard foi um dos primeiros filósofos contemporâneos a fazer oposição as ideias empírico-indutivistas. Trabalhou nos Correios e Telégrafos na pesagem de cartas; em

1912, conclui o curso de licenciatura em Matemática e trabalhou como professor de ciências e filosofia no magistério secundário; em 1927, ministrou aula de história e filosofia na Universidade de Dijon e depois na Universidade de Sorbonne (Melo, 2005).

Historicamente, o século XVIII, conhecido por século das Luzes, foi marcado pelo movimento cultural da elite intelectual europeia, o Iluminismo, que influenciou as revoluções Industrial e Francesa e trouxe consigo ideais de liberdade, igualdade e fraternidade. O iluminismo trouxe o poder da razão como meio de transformar a sociedade e o conhecimento vindo da tradição medieval, estava em voga o “princípio da subjetividade”.

Ainda no século XVIII, Kant diz que o conhecimento é transcendental, ou seja, é formado pelo conhecimento imanente, que são as próprias ideias do sujeito, e transcendente, pois vai além do sujeito; para Kant, o sujeito representa as coisas na sua mente e não aprende as coisas do jeito que são. Iskandar e Leal (2002, p. 89) destacam que “Neste mesmo século, diferentes linhas filosóficas interpretaram o pensamento kantiano; entre elas encontra-se o Positivismo”.

Augusto Comte (1798-1857) é considerado o precursor do pensamento positivista e teve influências de Turgot, Condorcet e Saint-Simon, pois as ideias positivistas já se faziam presentes na sociedade. Iskandar e Leal (2002) apresentam as seguintes preocupações fundamentais do pensamento positivista de Comte, quais sejam:

[...] uma filosofia da história na qual encontram-se as bases de sua filosofia positivista e as três fases do desenvolvimento do pensamento humano: o teológico, o metafísico e o positivo. Após passar pelos três estágios históricos, no estágio científico, abandona-se a referência às causas últimas, ou seja, às não observáveis. (Iskandar & Leal, 2002, p.90)

Em sentido oposto ao pensamento de Kant cujo olhar sobre o mundo é de acordo com uma visão subjetivista e as condições materiais não eram consideradas; Comte traz a ideia de razão subjetiva-técnica, que é uma razão instrumental, objetivada; referenda o método experimental e considera que o conhecimento é relativo (Iskandar & Leal, 2002).

Comte apresenta a teoria dos três estados do espírito humano, sendo os estados teológicos e metafísico como provisórios e que o último, o positivo, é a base da ciência. O estado positivo tem por características a renúncia às pesquisas absolutistas, tem a observação como única base possível de conhecimento e a ciência seria, apenas, para a identificação das leis dos fenômenos. Dentro da ótica do positivismo, o conhecimento científico é real, útil, certo, preciso e relativo.

A partir dessa perspectiva e influenciados pelas ideias de Comte, um grupo de intelectuais apoiadores das ideias positivistas se reuniram no chamado Círculo de Viena (1922-1936), na Universidade de Viena, na Áustria, para rejeitar a interpretação metafísica do conhecimento; “assumiram que o conhecimento científico era o único dotado de significado e se empenharam na formulação de um critério de demarcação para o conhecimento científico fundamentado na lógica clássica” (Silva & Arcanjo, 2021, p.151).

Apesar de estar fundamentado nas ideias de Comte, o grupo foi denominado Neopositivistas devido algumas diferenças e aproximações entre esta e o Positivismo no que tange à teologia e a metafísica, à empiria e à ideia de uma ciência unificada (Lacerda, 2009).

Para estes, um conhecimento logicamente consistente precisa ser validado, sendo este um dos critérios da ciência inicialmente defendido, e que foi gradualmente reformulado para o critério da falseabilidade (Martins et al., 1990).

Paralelo a esse movimento, surge na França uma perspectiva epistemológica fundamentada no entendimento dos feitos científicos por meio de fatos históricos; o filósofo Abel Rey faz menção a uma epistemologia histórica em 1907; Gaston Bachelard foi aluno desse filósofo e é reconhecido, atualmente, como o responsável pela fundação da tradição da epistemologia histórica na França (Silva & Arcanjo, 2021).

Portanto, a epistemologia de Bachelard surge, historicamente, em um período no qual a reflexão científica era a-histórica, ou seja, a ciência acreditava na importância, apenas, do

presente e não precisava mais do passado e baseava-se na observação e experimentação (Beltran & Saito, 2012).

Confrontando os Neopositivistas, Bachelard (2006, p. 125) diz que “Cientificamente, considera-se o verdadeiro como rectificação histórica de um longo de erro, considera-se a experiência como rectificação de uma ilusão comum e inicial” e conclui, “Em suma, a ciência instrui a razão”.

Contrariando Comte, Bachelard (1996) acreditava que, individualmente, fora de qualquer correspondência histórica, o espírito científico passaria por três estados, mais exatos e específicos que os do positivista, chamados pelo filósofo de Lei dos três estados, que levam em consideração diferentes interesses, problemas e experiências que lhe constituem a base afetiva. Os três estágios são:

1º O *estado concreto*, em que o espírito se entretém com as primeiras imagens do fenômeno e se apoia na literatura filosófica que exalta a Natureza, louvando curiosamente ao mesmo tempo a unidade do mundo e sua rica diversidade.

2º O *estado concreto-abstrato*, em que o espírito acrescenta à experiência física esquemas geométricos e se apoia numa filosofia da simplicidade. O espírito ainda está numa situação paradoxal: sente-se tanto mais seguro de sua abstração, quanto mais claramente essa abstração for representada por uma intuição sensível.

3º O *estado abstrato*, em que o espírito adota informações voluntariamente subtraídas à intuição do espaço real, voluntariamente desligadas da experiência imediata e até em polémica declarada com a realidade primeira, sempre impura, sempre informe. (Bachelard, 1996, pp.8-9).

Portanto, podemos afirmar que a epistemologia de Bachelard é oposta àquela proposta segundo as ideias de Comte, pela corrente positivista. Comte acreditava que as ciências eram constituídas de verdades verdadeiras, acreditava piamente nas ciências experiências que eram as únicas consideradas válidas e qualquer outra fundamentação deveria ser abandonada.

Segundo Japiassu (1986, p. 66) um dos princípios da doutrina positivista poderia ser resumido a partir da seguinte afirmação: “[...] c) a função das ciências experimentais não é a de *explicar* os fenômenos, mas de *prevê-los*, e de *prevê-los* para *dominá-los*; o que importa não é saber o “porquê”, mas o “como” das ciências”.

Em oposição, Bachelard, acredita que o conhecimento é temporal e que a produção deste deveria levar em consideração vários aspectos, tais, como ideológico, lógico, histórico ... Japiassu (1986, p. 71) ao falar sobre o objeto da epistemologia de Bachelard, destaca que “uma disciplina que toma o conhecimento científico como objeto de investigação deve levar em conta a história desse objeto” (Japiassu, 1986, p.71).

Para Martins (2004, p.18), Bachelard

[...] não abdica da história da ciência em sua formação, mas do que isso, aprende com o material histórico, buscando nele elementos que ilustram, justificam e alicerçam as principais teses dessa epistemologia. É uma história que vai do passado com os olhos do presente, uma história “julgada” que evidencia o progresso científico a partir das constatações dos erros deste passado. (Martins, 2004, p.18)

Em Bachelard, uma dupla vertente pode ser identificada: uma científica e outra poética. A vertente científica o referencia como o homem diurno da ciência e acredita que é pelas retificações, criação, produção que o espírito chega a verdade a partir da razão; e a poética, com o homem noturno da poesia, refere-se a imaginação. “Portanto, a obra de Bachelard é uma revolução: uma visa a filosofia da *descoberta científica*; a outra, a filosofia da *criação artística*” (Japiassu, 1986, p.70).

A organização da sua filosofia do não é uma das características da obra de Bachelard; segundo essa filosofia os conhecimentos não possuem um racionalismo contínuo na história do conhecimento científico; não se trata de negar o conhecimento anterior, mas de dar a ele um novo significado, retificá-lo, reconstruí-los ou de aceitá-lo como parte integrante de uma nova teoria. Portanto,

Bachelard nega a filosofia do não enquanto uma atitude de recusa, para defendê-la como uma atitude de conciliação. Conciliação entendida no sentido da convivência com o diverso, a aceitação do dissenso - base necessária ao pluralismo. Conciliar não é aceitar qualquer teoria como válida, mas definir muito precisamente o campo de validade e aplicação de determinada teoria. (Lopes, 1996, p. 267)

Bachelard (1996) considera que o conhecimento empírico provoca muitos erros, apesar destes serem inevitáveis e necessários. Para eles, os erros são reflexos de períodos de estagnação e de regressão do espírito científico.

Além de considerar os erros, Bachelard (1996), também apresenta uma série de obstáculos que ele denomina de Obstáculos Epistemológicos que representam as dificuldades dos cientistas e que devem ser sempre analisados e refletidos e é o aprofundamento destes que, muitas vezes, valorizam a história do pensamento científico.

Lopes (1993, p. 325) sobre os obstáculos epistemológicos diz que

Não é possível se adquirir uma nova cultura por incorporação aos traços remanescentes. Os hábitos intelectuais incrustados no conhecimento não questionado invariavelmente bloqueiam o processo de construção do novo conhecimento, caracterizando-se, portanto, segundo Bachelard, como ‘obstáculo epistemológico’. (Lopes, 1993, p.235)

Ao longo da obra *A Formação do Espírito Científico* (1996), Bachelard, traz nove tipos de obstáculos epistemológicos. Serão utilizados três destes obstáculos nesse trabalho para analisar o desenvolvimento histórico da teoria de vetores a fim de delimitar o estudo proposto, quais sejam: o obstáculo da experiência primeira, o obstáculo do conhecimento geral e o obstáculo do conhecimento quantitativo. É importante destacar que a escolha desses obstáculos não implica, de forma alguma, na ausência dos demais que não serão objeto de análise nesse estudo.

O primeiro obstáculo citado pelo filósofo é o da experiência primeira que “impede” a crítica ao pensamento científico e, portanto, não representa uma base segura, é um obstáculo genuinamente empirista; o “espírito científico deve formar-se *contra* a Natureza, contra o que é, em nós e fora de nós” (Bachelard, 1996, p.29). Contra as primeiras impressões, a experiência primeira, nenhum fato pode opor-se, não aceita críticas; assim, é preciso romper com o conhecimento comum, pois segundo Eduard Le Roy (1899 como citado em Bachelard, 1996, p.51) “o conhecimento comum é inconsciência de si”.

Para Bachelard (1996, p.47) para romper o obstáculo da experiência primeira

É preciso então reavivar a crítica e pôr o conhecimento em contato com as condições que lhe deram origem, voltar continuamente a esse "estado nascente" que é o estado de vigor psíquico, ao momento em que a resposta saiu do problema. Para que, de fato, se possa falar de *racionalização da experiência*, não basta que se encontre *uma razão para um fato*. A razão é uma atividade psicológica essencialmente politrópica: procura revirar os problemas, variá-los, ligar uns aos outros, fazê-los proliferar. Para ser racionalizada, a experiência precisa ser inserida num jogo de *razões múltiplas*. (Bachelard, 1996, p.47)

O obstáculo do conhecimento geral é uma consequência do obstáculo das primeiras experiências, porém é, genuinamente, racionalista; para o filósofo, após experienciar os fenômenos, o próximo passo é a generalização do que foi observado sem preocupação com as variáveis, baseada em uma sequência de fatos particulares, sem exceção, levando a definições e generalizações matemáticas apressadas e mal colocadas (Bachelard, 1996). Há uma atração pelo particular e pelo geral, interligando-se um pela generalização do outro. Dessa forma,

O conhecimento a que falta a precisão, ou melhor, o conhecimento que não é apresentado junto com as condições de sua determinação precisa, não é conhecimento científico. O conhecimento geral é quase fatalmente conhecimento vago. (Bachelard, 1996, p. 90)

Outro obstáculo a ser analisado é o do conhecimento quantitativo que se refere a “criação” de imagens geométricas a partir da imaginação sem as expressões algébricas para justificá-las; a utilização de expressões algébricas se faz necessária para evitar generalizações objetivas que levam a imaginações de várias imagens individuais (Bachelard, 1996).

Bachelard (1996, p. 288) explica que “para quebrar esse fascínio das formas simples e fechadas sobre as quais podem acumular-se tantas interpretações falhas, o melhor é explicitar como é feita sua produção algébrica”.

Além dos obstáculos epistemológicos, Bachelard também introduz a noção de ruptura epistemologia, que está ligada, a correção, retificação dos erros; de vigilância histórica para garantir a existência do espírito científico crítico; e de recorrência histórica que liga a ciência

ao passado para analisar o presente. Para Japiassu (1986, p. 76)
Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.24, n.2, p 682-727, 2022

Pela introdução da noção de ruptura epistemológica, Bachelard se opõe as tradições positivas. É preciso que se reconheça que, nos fatos, há ciências coexistindo com ideologias. Donde a importância de uma filosofia que, longe de ser uma representante das ideologias junto às ciências, terá por missão neutralizar os discursos ideológicos e impedir, assim, na medida do possível o aparecimento dos obstáculos. Pelo menos, esta filosofia terá por função distinguir, nos discursos científicos, aquilo que pertence a prática científica daquilo que provém das ideologias. Donde a função de vigilância, atribuída por Bachelard a esta nova epistemologia. Ao acompanhar os progressos do pensamento científico, ela, ela terá a preocupação de isolar, na prática científica, os interesses históricos e filosóficos. E o conceito que sustenta todo o “projeto” de Bachelard é o de obstáculo epistemológico, que designa os efeitos sobre a prática científica das relações que o cientista mantém com ela. (Japiassu, 1986, p.76)

Portanto, é a luz da ruptura desses obstáculos epistemológicos e da epistemologia histórica proposta por Bachelard que se propõe uma análise do desenvolvimento do conhecimento científico da história dos vetores.

A história dos vetores à luz do desenvolvimento do espírito científico de Bachelard

Bachelard (1996) considera três grandes períodos referentes as diferentes etapas históricas do pensamento científico. O primeiro período estaria compreendido desde a Antiguidade Clássica até os séculos de renascimento e de novas buscas, século XVI ao XVIII; esse período representa o estado pré-científico, é nesse período que os obstáculos epistemológicos serão vistos de forma mais explícita.

O estado científico, segundo período, estaria representado pelo final do século XVIII até o início do século XX, caracterizado, de certa forma, pela ruptura dos obstáculos epistemológicos. O terceiro período representa o início do novo espírito científico com o “nascimento” de novas formas de conhecimento e da retificação destes e de antigos, e teria início a partir do ano de 1905 até os dias atuais.

Historicamente, os matemáticos sempre buscaram representações para os números, assim como, os cientistas físicos por representações matemáticas das entidades físicas e dos fenômenos que as envolviam. Essa representação de entidades físicas foi possível, em parte, pela geometria grega e pelas filosofias naturais.

Durante o século XVII, os físicos matemáticos começaram a preencher e transformar essa lacuna representando quantidades escalares através de sua posição e de seu comprimento para as grandezas vetoriais como força, velocidade, momentum e aceleração. Entretanto, somente no século XIX, houve a criação e desenvolvimento de métodos vetoriais (Crowe, 1994).

Portanto, nas seções seguintes os períodos propostos por Bachelard (1996) serão analisados conforme os estudiosos à época, tal qual relacionados na Metodologia da Pesquisa desse artigo.

O estado pré-científico

Ao analisar o espírito pré-científico é importante observar a presença do obstáculo relativos as experiências primeiras que dão origem a racionalizações prematuras. As convicções primeiras trazem em si certezas imediatas, que não aceitam críticas e acreditam que o conhecimento do qual partiu, o senso comum, era o certo. A experiência primeira precisa ser equacionada racionalmente, ligar os fatos, investigá-los e interrogá-los: eis o grande obstáculo.

Bachelard (1996) refere-se a esse conhecimento como o *tesouro pueril* que não permite intromissão ou questionamento e dá origem a uma espécie de *inconsciente do espírito científico*. Assim,

O pensamento pré-científico não se fecha no estudo de um fenômeno bem circunscrito. *Não procura a variação, mas sim a variedade*. E essa é uma característica bem específica: a busca da variedade leva o espírito de um objeto para outro, sem método; o espírito procura apenas ampliar conceitos; a busca da variação liga-se a um fenômeno particular, tenta objetivar-lhe todas as variáveis, testar a sensibilidade das variáveis. Enriquece a compreensão do conceito e prepara a matematização da experiência. Mas, observemos o espírito pré-científico em busca da variedade. (Bachelard, 1996, pp.38-39)

Os primeiros marcos da história dos vetores, ou as primeiras ideias de vetores surgem a partir do conceito do paralelogramo de forças. A ideia de um paralelogramo de velocidade era defendida por muitos autores antigos gregos, dentre estes, Aristóteles, que tem um tratado

apócrifo chamado *Problems of Mechanics* no qual está presente o princípio do Paralelogramo de Forças, defendido a partir da composição do movimento, utilizado até hoje (Dugas, 2011).

Dugas (2011 como citado em Caire, 2020, p. 103) traz a definição original de composição dos movimentos de Aristóteles:

Deixe um corpo em movimento ser simultaneamente acionado por dois movimentos tais que as distâncias percorridas no mesmo tempo estão em constante proporcional, então ele se moverá ao longo da diagonal de um paralelogramo que tem como lados duas linhas cujos comprimentos estão nessa relação constante (Dugas, 2011 como citado em Caire, 2020, p. 103).

Portanto, a mecânica aristotélica é baseada em noções intuitivas baseadas nas observações do dia a dia; para romper o obstáculo epistemológico visto no pensamento de Aristóteles é necessário considerar várias outras formas de forças, bem como, a introdução de atrito e resistências do meio, além do método experimental, tal como fez Arquimedes (287a.C-212a.C) para explicar a mecânica dos fluidos (Heath, 1897).

Segundo Bachelard (1996), o pensamento pré-científico não está preocupado com a variação, mas com a variedade: não há método para a busca de outros objetos que podem ser relacionados ao fenômeno, não há realização da matematização da experiência.

Para a teoria de vetores, Aristóteles traz a ideia que seria utilizada mais tarde na adição geométrica de vetores; no século XIX, era comum ver o conceito de paralelogramo ser adotado na resolução de problemas físicos, aparecendo em tratados; no entanto, o utilizavam sem consciência da ideia de vetores ou de adição de vetores (Crowe, 1994).

A presença do obstáculo da Experiência Primeira no pensamento de Aristóteles pode ser justificada ao confrontar com a epistemologia de Bachelard (1996, p.36), pois

O fato de oferecer uma satisfação imediata à curiosidade, de multiplicar as ocasiões de curiosidade, em vez de benefício pode ser um obstáculo para a cultura científica. Substitui-se o conhecimento pela admiração, as ideias pelas imagens (Bachelard, 1996, p.36).

Ainda, no século XVII, Isaac Newton (1643-1727) impulsionado pelo método racional e experimental à época, tinha por regra não assumir outras causas além daquelas necessárias para explicar o fenômeno e creditar efeitos análogos quando relacionados a mesma causa; esses pensamentos, o levou a definir a lei do paralelogramo de forças a partir da dinâmica, ao contrário, dos demais filósofos que “demonstraram” a lei a partir da estática (Dugas, 2011).

Sobre a relação entre o conhecimento empírico e racional e o obstáculo da experiência primeira, Bachelard (1996, p.18) diz que “quando o conhecimento empírico se racionaliza, nunca se pode garantir que valores sensíveis primitivos não interfiram nos argumentos”.

Para o filósofo, esse obstáculo traz consigo grande resistência por estar eivado de aspectos psicológicos, metáforas, imagens e analogias afastando-se dessa forma do conhecimento abstrato, fechando a novas ideias por considerar, de certa forma, o conhecimento como “acabado”; e o analisa da seguinte forma

Enfim, se conseguíssemos tomar – a respeito de qualquer conhecimento objetivo – a justa medida do empirismo, por um lado, e do racionalismo, por outro lado, ficaríamos admirados com a imobilização do conhecimento produzido por uma adesão imediata a observações particulares. Veríamos que, no conhecimento vulgar, os fatos são *muito precocemente* implicados em razões. Do fato à ideia, o percurso é muito curto. A impressão é que basta considerar o fato. Costuma-se dizer que os antigos podem ter-se enganado quanto à interpretação dos fatos, mas que, pelo menos, eles viram, e viram bem – os fatos. Ora, é necessário, para que um fato seja definido e situado, um mínimo de interpretação. Se essa interpretação mínima corresponde a um erro fundamental, o que resta do fato? É claro que, quando se trata de um fato definido extrinsecamente, em um domínio manifestamente alheio à sua essência, essa pobre definição – sem consequências – poderá não ser errônea (Bachelard, 1996, p.55).

No século XVII, também, outro conceito surge como motivador para o conceito de vetor moderno, Leibniz (1679) apresenta o conceito de situação geométrica em uma carta datada de 8 de setembro de 1679 à Christian Huygens; nesta, descreveu a sua insatisfação com a álgebra, acreditava que era preciso um método que resultasse em formas mais curtas ou mais bonitas de construção geométrica.

Na correspondência, alegou que era preciso um método que fosse distinto da análise geométrica ou linear e que expressasse situações diretamente, assim como, a álgebra expressava magnitudes diretamente; Leibniz, sentia a necessidade de utilizar entes que pudessem representar grandezas e movimentos nas diversas áreas das ciências (Leibniz, 1679).

Leibniz (1679) acreditava ter descoberto elementos com características diferentes da álgebra e que podiam ser imaginados de forma exata, embora sem figuras, e em caminho fiel a natureza. A principal influência de Leibniz em relação a análise vetorial diz respeito ao fato de propor a existência de uma nova álgebra, na qual entidades geométricas são simbolicamente representadas que seriam os primórdios dos vetores (Caire, 2020).

Para Russell (1946 como citado em Xambó-Descamps, 2018), Leibniz acreditava firmemente na importância da lógica, não, somente, em sua própria esfera, mas também como uma base da metafísica; nesse sentido, poderia ter sido considerado o fundador da matemática lógica caso seu trabalho tivesse sido publicado.

O autor destaca que Leibniz não publicou o seu trabalho em respeito a Aristóteles, pois havia encontrado vários erros na doutrina aristotélica e não queria, de certa forma, acreditar em tais evidências e, assim, preferiu creditar os erros a si próprio; por outro lado, Leibniz dedicou a sua vida a descobrir um tipo de generalização matemática chamada por ele de Característica Universal (Russel, 1946 como citado em Xambó-Descamps, 2018).

Ao analisar o estudo de Leibniz à luz dos obstáculos epistemológicos de Bachelard pode-se perceber o crédito de seu pensamento a doutrina do *geral*, que predominou desde Aristóteles a Bacon (1561-1626), baseada no raciocínio indutivo que a partir de casos particulares chegava a generalização, ou seja, “Recolhe os axiomas dos dados dos sentidos e particulares, ascendendo contínua e gradualmente até alcançar, em último lugar, os princípios da máxima generalidade” (Bacon, 1973 como citado em Oliveira, 2016, p.73).

Para Bachelard (1996, p.70) “a busca apressada da generalização leva muitas vezes a generalidade mal colocadas, sem ligação com funções matemáticas essenciais do fenômeno”. Para universalizar um conceito ou uma definição matemática, é preciso deixar muito claro o que não faz parte daquele conceito.

Por exemplo, ao generalizar o conceito de vetor, de acordo com a epistemologia de Bachelard, e expressá-lo em termos de funções matemáticas é essencial, que, anteriormente, seja definido o que não é vetor, o que não faz parte dessa generalização; há de se considerar que nem tudo, ou pouquíssimas coisas, podem ser generalizadas.

Por fim, o último sistema a ser analisado durante o período pré-científico é a representação geométrica de Números Complexos apresentada, inicialmente, por Wessel e, posteriormente, por Argand Gauss, no início do século XVIII. Essa representação geométrica hoje é conhecida por Diagrama de Argand. O sistema de números complexos pode legitimamente ser considerado como um sistema vetorial de duas dimensões. (Wessel, 1897)

Além de ter sido o primeiro a mostrar a representação geométrica de números complexos, Wessel, também, adicionou segmentos em um espaço tridimensional e utilizou a regra do “início de um final do outro”, adição gráfica, ainda sem utilizar essas denominações, para somar vetores, tal como fazemos hoje (Wessel, 1897). Caire (2020, p.48) descreve a regra da seguinte forma:

Wessel adicionou segmentos em espaço tridimensional, percebeu que vetores não paralelos podiam ser somados colocando o terminal de uma linha no início de um segundo e, em seguida, somando-os desenhando uma linha desde o início do primeiro até o final do segundo. (Caire, 2020, p.48)

O sistema de Wessel e Argand Gauss nos possibilita, em relação a análise vetorial, vislumbrar a ruptura de diversos obstáculos epistemológicos e, a menos por um fator de cronologia histórica, poderia ser considerado e colocado como o marco inicial do estado científico; ou uma transição entre o estado concreto e o concreto-abstrato.

Assim, as rupturas são observadas em relação ao obstáculo das primeiras impressões, ou experiências primeiras, ao criar um conjunto de números, qual seja, os complexos, ao considerar quantidades negativas que representariam direções e sentidos opostos e ao representar segmentos no espaço tridimensional.

Portanto, a partir de nossa análise em consonância com a epistemologia de Bachelard, há um avanço em relação ao pensamento científico que se desvencilhou dos aspectos relacionados, apenas, a natureza e a observação dos fenômenos, além de, desvincular-se, de certa forma, da teoria do geral.

Contudo, destaca-se que a ausência da matematização, principalmente, em relação a representação no espaço tridimensional, traz à tona a presença do obstáculo do conhecimento quantitativo que, sem a expressão algébrica para justificá-lo torna-se objeto de intuições e de constituição de formas geométricas que não refletem a realidade.

Bachelard (1996, p. 285) diz que “achamos pessoalmente que o pensamento matemático forma a base da explicação física e que as condições do pensamento abstrato são doravante inseparáveis das condições da experiência científica”.

Tendo analisado as principais ideias sobre vetores durante o período pré-científico pode-se encontrar diversos obstáculos epistemológicos que impediram o desenvolvimento para o estado científico segundo a epistemologia de Bachelard. Não há a existência de apenas um obstáculo em cada teoria mas um conjunto deles e caberia a análise de outros obstáculos da teoria de Bachelard que não, apenas, os aqui discutidos.

Em cada teoria, foi evidenciado o obstáculo de maior destaque, porém todos os obstáculos que nos propomos a analisar estão presentes em todas as teorias em maior ou menor profundidade. É interessante notar que mesmo dentro do estado do período científico há evidências de rupturas de obstáculos ao passar de um filósofo para outro, cronologicamente,

até mesmo, pelo desenvolvimento do próprio conhecimento apesar de ser um período marcado pelo pensamento aristotélico.

De acordo com Oliveira (2016, p.31), o conhecimento científico à época de Aristóteles “seria o conhecimento dos universais adquirido pelos conhecimentos das causas, pela razão ou uso do raciocínio”.

Seguido a este, apresenta-se o conhecimento científico a partir do empirismo e experimental de Bacon e do pensamento de Galileu que “concebe a natureza como um conjunto de fenômenos mecânicos e que estes fenômenos só podem ser compreendidos por meio do conhecimento matemático” (Oliveira, 2016, p.77).

Bachelard (1996, p. 294) destaca que “[...] Essa necessidade de sentir o objeto, esse apetite pelos objetos, essa curiosidade indeterminada ainda não correspondem – sob nenhum título – a um estado de espírito científico”. A partir do desenvolvimento do estado pré-científico para o estado científico as rupturas dos obstáculos tornam-se mais evidentes, a medida em que os erros são retificados.

O Estado Científico

O estado científico é marcado pela retificação de erros que caracterizam as rupturas dos obstáculos epistemológicos. Para Bachelard (1977, p. 112)

O espírito científico é essencialmente uma retificação do saber, uma ampliação dos quadros do conhecimento. Ele julga seu passado histórico condenando-o. Sua estrutura é a consciência de suas falhas históricas. Cientificamente, pensamos o verdadeiro como retificação histórica de um longo erro; pensamos a experiência como retificação da ilusão vulgar e primeira. (Bachelard, 1977, p.112)

Ao longo da obra de Bachelard (1996) algumas características que estabelecem o espírito científico podem ser observadas, quais sejam: a crítica é elemento integrante do espírito científico; o espírito científico busca a variação para enriquecer e compreender o conceito e a partir daí seguir para a matematização.

Além disso, o espírito científico deve opor-se as imagens, analogias e metáforas; deve ser contrário a estereótipos de origem afetiva e não perceptiva; e a generalidade retificada deve ser vista como generalidade ampliada (Bachelard, 1996).

Na história de vetores será utilizado nesse artigo o período marcado pelas ideias de Möbius até o sistema de Gibbs-Heaviside, que compreende o período do início ao final do século XIX, marcado pela corrida dos matemáticos e físicos pela matematização do sistema vetorial moderno, para caracterizar o estado científico. Não é intuito detalhar o sistema de cada um dos autores, mas as suas principais motivações e feitos a fim de limitar a análise à epistemologia histórica.

Möbius era alemão e estudava astronomia com Argand Gauss por volta de 1813, tendo trabalhado com segmentos de reta o que na essência se tornariam os vetores, desenvolveu uma aritmética voltada para a soma de segmentos de reta utilizando a ideia dos paralelogramos e a multiplicação por um número real ao estudar centro de gravidade e geometria projetiva; é responsável, também, pelo desenvolvimento do sistema de Wessel e Argand Gauss ao demonstrar algebricamente a ideia proposta por estes (Caire, 2020).

Portanto, à luz de Bachelard (1996) pode-se observar a ruptura do obstáculo quantitativo a partir da matematização da experiência do estado pré-científico. Após as ideias de Möbius, muitos outros estudiosos passaram a desenvolver ideias sobre vetores; porém, por volta de 1844, dois autores tiveram grande destaque, quais sejam: Hamilton (1843), com o seu *Quartenion* e que teve maior aceitação, e Grassmann, com o seu *Ausdehnungslehre* (Genese, 1893).

Grassmann e Hamilton influenciaram o aparecimento de novas definições, propriedades e características dos vetores que devem ser vistas como complementares, algumas independentes, mas que propõem melhoramentos, correções, até chegar na álgebra vetorial moderna que utilizamos (Crowe, 1994).

Na visão de Bachelard (1977) o espírito científico deve permanecer vigilante sendo, por isso, considerado o filósofo da eterna desilusão: “A filosofia da desilusão não pretende ser a filosofia do eterno e do imutável, da razão totalizante e totalitária, mas se quer aberta e retificável” (Lopes, 1996, p.270).

De acordo com Bachelard (1996), podemos analisar que a proposição de novas teorias leva a ruptura a princípio dos obstáculos epistemológicos da experiência primeira, do conhecimento geral e do quantitativo, pois há o nascimento de novos sistemas, a sua diferenciação em relação a matemática já existente, a matematização a partir da reflexão e a demonstração que são características dessas rupturas.

Nesse sentido, Hamilton, evidentemente, rompe, inicialmente, um obstáculo epistemológico ao encontrar um erro, aos 16 anos, na demonstração da lei do paralelogramo das forças na Mecânica celeste de Laplace (O'Connor & Robertson, 1998).

Hamilton era um exímio estudioso de línguas, matemática e astronomia; a partir dos números complexos de Wessel e Gauss desenvolveu um estudo sobre a *Theory of Triplets* no qual pretendia representar os números complexos em três dimensões; no entanto, inconsistências em algumas propriedades matemáticas o levaram a “abandonar” as *Triplets* e a desenvolver um sistema denominado *Quartenion*, entre 1843 à 1866, com a introdução de uma quarta componente; o *quartenion* pode ser considerado número complexo de quarta dimensão (Silva & Martins, 2003).

Curiosamente, a história conta que, todos os dias seu filho, durante o café da manhã, perguntava a ele como fazer a multiplicação das *Triplets* e sempre o respondia que, somente, era possível somá-las e subtraí-las, já que a multiplicação revelava inconsistências matemáticas.

Segundo a história, a ideia da criação do *Quartenion* surgiu em um Domingo quando estava caminhando pelo Canal Royal, em direção ao conselho da Academia Real Irlandesa,

com sua esposa, quando uma corrente elétrica pareceu percorrer a sua mente e trouxe em “forma de flash” o que viria a ser a solução para o problema da multiplicação das *triplets*, ou seja, o surgimento do *quaternion* (Crowe, 1994).

De acordo com Menon (2009, p.4)

As similaridades geométricas entre números complexos e vetores no plano e, por outro lado, a ausência de correlações entre números complexos e vetores no espaço tridimensional (R^3), motivou Hamilton a buscar generalizações dos números complexos em 3 dimensões. (Menon, 2009, p.4)

Hamilton (1843) desenvolveu a teoria do *Quaternion* com elementos iniciais da álgebra vetorial utilizada hoje, porém com outras denominações e/ou notações. Pode-se considerar, uma mudança de comportamento a partir de Hamilton: a visualização de grandezas vetoriais para a resolução de problemas tendo por analogia a teoria de Números Complexos.

Muitos foram os seguidores de Hamilton, dentre os quais, Peter Tait, que “descreveu” o *quaternion* a partir da aplicação em física, “distanciando-se” do aspecto puramente matemático dado por Hamilton que dificultava o entendimento de grupos não pertencentes a área da Matemática como físicos que estavam ansiosos por métodos novos e acessíveis que pudessem ser utilizados nos problemas relacionados a física (Pritchard, 1998).

O *Treatise* de Tait (1890) trouxe uma nova direção sobre o *quaternion* aproximando-o da análise vetorial moderna através da igualdade de vetores, adição, subtração e multiplicação de um vetor por um escalar e de diferenciação de um vetor em termos de uma simples variável escalar.

Pode-se perceber a analogia entre as fórmulas utilizadas na teoria vetorial moderna e as de Tait; além disso, apresenta inúmeros exemplos e teoremas (Tait, 1890). Tait faleceu em 1901 e seu trabalho influenciou fortemente estudiosos da época como William Thomson (1824-1907) e James Clerk Maxwell (1831-1879). (Pritchard, 1988)

James Clerk Maxwell (1831-1879), citou a teoria de Hamilton e Tait em sua obra, enalteceu sua utilidade, porém trouxe alguns questionamentos como a questão do sinal negativo do produto escalar e a não separação dos produtos; outro destaque importante nesse trabalho, deve-se a notação de vetores utilizada por Maxwell, também apresentou o operador ∇ e os teoremas de Gauss e Stokes, que ainda não recebiam essa denominação, em notação de *quaternion* (Maxwell, 1873).

Segundo os obstáculos epistemológicos de Bachelard, podemos perceber que o nascimento de um novo sistema, os *quaternions*, implicou sobremaneira no rompimento do obstáculo da experiência primeira, na retificação de um sistema para avançar o conhecimento, pois no conhecimento anterior não cabia um sistema tridimensional, além disso, representações apenas, por imagens, foram rompidas, um sistema novo a partir de representações algébricas foi criado e, dessa forma, justificado.

Contudo, ao analisar a história dos vetores tanto Tait, seguidor de Hamilton, e Maxwell, amigo de Tait, não se contentaram com a teoria de Hamilton e propuseram melhorias, correções e aprimoramentos (Crowe, 1994); em especial, em Maxwell é visível a crítica característica do espírito científico.

De forma paralela, independente e no mesmo período do desenvolvimento da teoria da Hamilton, Grassmann, sob influência de seu pai que foi autor de muitos livros de matemática e física, também desenvolvia uma teoria para a álgebra vetorial (Heath, 1917).

Epistemologicamente, pode-se dizer, pós-análise, que Grassmann rompeu obstáculos tais como Hamilton, pois também propôs uma nova teoria com características herdadas das ideias de Leibniz do espírito pré-científico, porém com um olhar crítico, impondo retificações, erros, melhoramentos, matematização e uma generalização retificada e ampliada.

Em sua obra *Ausdehnungslehre*, Grassmann (1844 como citado em Crowe, 1994), descreveu o produto escalar e vetorial, porém utilizava grandezas geométricas e não vetoriais;

provavelmente, a ideia inicial do produto geométrico teve origem em um dos estudos feitos e publicados por seu pai.

Para ser aceito como professor, Grassmann, submeteu ao colegiado da universidade o título *Theorie der EbbeundFlut (1840)*, Teoria da Vazante e fluxo, que contém a primeira apresentação de um sistema espacial baseado em vetores mais próximo da teoria moderna em mais de 200 páginas, incluindo também adição e subtração de vetores, produto de vetores, diferenciação de vetores e elementos de função linear de vetores.

Curiosamente, esse estudo é baseado no livro Mecânica Celeste de Laplace que foi o mesmo livro em que Hamilton havia encontrado um erro quando adolescente. Para confirmar a sua teoria, Grassmann a aplicou nos estudos de Lagrange sobre Mecânica Celeste e obteve equações menos numerosas e mais simples (O'Connor & Robertson, 2005).

Vale destacar que a teoria de Hamilton teve origem na de Wessel e Argand dos Números Complexos e as de Grassmann na de Leibniz, apesar de ambos terem por base a Mecânica Celeste de Laplace (Otte, 1989).

Após as ideias de Hamilton e Grassman, Clifford, um matemático inglês interessado em matemática pura que conhecia muito bem o sistema de Grassmann e o de Hamilton, escreveu um trabalho que é considerado uma transição entre o *quaternion* e a análise de vetores em 1878 (O'Connor & Robertson, 2015).

Na *lecture* mais famosa *Elements of Dinamyc (1878)* introduziu o conceito de vetores, ou “passos”, como costumava chamar. A álgebra geométrica de Clifford é definida em um espaço n-dimensional. Clifford separou os produtos escalar e vetorial tal como utilizamos hoje e diferente da forma que Hamilton havia apresentado, os dois produtos juntos; eis o principal obstáculo epistemológico rompido por sua teoria a partir da correção do erro da teoria anterior.

Em sua álgebra, o produto entre dois vetores $a.b$ é a área do paralelogramo formada pelos dois vetores, sendo que o sinal depende da ordem do vetor, invertendo-o caso a ordem

dos vetores fosse trocada. A definição de produto de vetor é equivalente a definição moderna o que demonstra o desenvolvimento da matematização e da consolidação do espírito científico (Clifford, 1878).

Ao observar a teoria de Clifford pode-se perceber a retificação de alguns “erros” das teorias anteriores, além de representar o sistema vetorial em um espaço n-dimensional; sua teoria, traz em si, conceitos utilizados hoje na teoria de vetores e a ruptura dos obstáculos epistemológicos analisados de acordo com o seu processo de produção do conhecimento que, de forma alguma, pode ser visto como encerrado, acabado ou isento de erros. Clifford ao analisar o produto escalar como positivo ou negativo, não analisa a sua variação, sendo ainda um dos obstáculos a ser superado.

Por fim, Gibbs, considerado o pai da álgebra vetorial moderna, por volta de 1881, apresentou a sua teoria como nova, porém o que se viu foram adaptações, melhoramentos, aplicados a teoria de Hamilton e a resolução de alguns questionamentos já trazidos por outros cientistas, como Maxwell, o que caracterizaria, a partir de Bachelard (1996) o espírito científico a partir da matematização, generalização retificada e ampliada e a busca da variação.

As principais contribuições de Gibbs (1906a) foram: distinção entre escalares e vetores; utilizou o sinal negativo para representar a direção reversa, contrária, de vetores; definiu as operações com vetores: adição, subtração, multiplicação por um escalar, produto escalar e produto cruzado.

Gibbs (1906a) utilizou os produtos, escalar e cruzado, de forma separada; utilizou o operador ∇ com a mesma simbologia e operações que usamos hoje e aplicou os teoremas de Gauss e Stokes para a resolução de integrais de linha, de superfície e de volume, dentre outras coisas.

Outro estudioso à época foi Heaviside (1925) que, apesar de negar, sofreu grande influência da Teoria de Hamilton, através dos estudos das obras de Maxwell, assim como

Gibbs. Se tornou o grande aliado de Gibbs em defender a teoria da álgebra Vetorial moderna proposta, apenas de não se saber ao certo o fato d'eles negarem influência de teorias anteriores.

Heaviside utilizou o sistema de Gibbs e o aplicou em problemas físicos, a fim de aproximar e de promover a aceitação dos físicos em relação ao sistema proposto, já que estes eram grandes interessados em utilizar formas de representar e equacionar as suas grandezas físicas e, dessa forma, tornar o sistema mais popular e útil; além disso, definiu o operador ∇ , apresentou teoria eletromagnética em termos de vetores e alterou algumas notações utilizados por Gibbs (Heaviside, 1925).

Os anos de 1894 à 1910, após a grande discussão entre as teorias, foi o período em que os sistemas de análise vetorial foram aceitos e muitos artigos de outros estudiosos envolvendo as teorias de Hamilton, Tait, Gibbs e Heaviside foram publicados, principalmente, por físicos, em especial, associados a teoria Elétrica e influenciados sobremaneira por Heaviside e Maxwell o que levou, conseqüentemente, a divulgação e ao maior número de publicações de estudos contendo a teoria de Gibbs-Heaviside tornando-a amplamente conhecida e divulgada (Gibbs, 1906a, 1906b).

Ao finalizar o estudo desse recorte das teorias que marcaram o desenvolvimento do sistema vetorial é evidente a presença da ruptura e da vigilância epistemológica tratadas por Bachelard (1996). A noção de ruptura está presente na retificação de erros, ou seja, um conhecimento anterior é, em grande parte, corrigido pelo conhecimento anterior e o conhecimento considerado “correto” é sedimentado e consolidado pelo espírito científico.

Por isso, não existem verdades primeiras, apenas os primeiros erros: a verdade está em devir. Bachelard, portanto, se situa como o filósofo da desilusão, aquele que afirma: somos o limite das nossas ilusões perdidas (Bachelard, 1970). O que significa dizer que somos a expressão, não de nosso conhecimento imediato, de nossas habilidades inatas, mas do constante e descontínuo processo de retificação que nosso espírito sofre no decorrer da existência. O que sabemos é fruto da desilusão com aquilo que julgávamos saber; o que somos é fruto da desilusão com o que julgávamos ser. (Lopes, 1996, p.254)

A postura da vigilância é marcada por um eterno recomeçar que impele o espírito científico a sempre evoluir, a sempre questionar, aprofundando e avançando no conhecimento científico de forma a não o tornar banal. Trata de manter a criticidade do espírito científico.

Nesse sentido, é importante destacar que, embora, seja possível a verificação da ruptura de alguns obstáculos epistemológicos nas teorias tratadas sobre o desenvolvimento da teoria de vetores; estes, os obstáculos, de fato, nunca são definitivamente superados, pois o espírito científico está sempre pautado em conhecimentos anteriores.

A Era do novo Espírito Científico

Nesse período, há uma corrida pela axiomatização, formalização, da álgebra linear, bem como, do espaço vetorial a partir de teoremas. Portanto, há uma religação dos conceitos, proposições de abstrações, a racionalidade é evidente e cria novas objeções; verifica-se a passagem do estado concreto-abstrato, marcado pela intuição e esquemas geométricos, para o estado abstrato, caracterizado pela razão, pela abstração, pelo devir científico.

O marco cronológico de fundação do novo espírito científico, para Bachelard (1996), é o ano de 1905. Contudo, a partir da análise do estado científico pode-se dizer que, durante o período de transição do séc. XIX para o séc. XX as primeiras características da formação do Novo Espírito científico já podem ser constatadas, em relação aos vetores; assim, esse comportamento pode ser vislumbrando a partir de Gibbs e Heaviside ao propor um sistema consolidado para a álgebra vetorial moderna. Para Bachelard (1996, pp. 7-8)

[...]O papel da matemática na física contemporânea supera pois, de modo singular, a simples descrição geométrica. O matematismo já não é descritivo e sim formador. A ciência da realidade já não se contenta com o *como* fenomenológico; ela procura o *porquê* matemático. Da mesma forma, já que o concreto aceita a informação geométrica, já que o concreto é corretamente analisado pelo abstrato, por que não aceitaríamos considerar a *abstração* como procedimento normal e fecundo do espírito científico? Com efeito, ao examinar o desenvolvimento do espírito científico, logo se percebe um movimento que vai do geométrico mais ou menos visual para a abstração completa. Quando se consegue formular uma *lei geométrica*, realiza-se uma

surpreendente inversão espiritual, viva e suave como uma concepção; a curiosidade é substituída pela esperança de criar. (Bachelard, 1996, pp.7-8)

De acordo com a história dos vetores, em 1887, Peano, apresentou conceitos semelhantes aos de vetores a partir de n-tuplas com a demonstração da adição e multiplicação escalar. Em 1888, a partir de uma aproximação de Grassmann que ele chamou de Cálculo Geométrico, apresentou vetores como uma diferença entre dois pontos; e, ainda, em 1888, chamou de sistema linear o que chamamos, hoje, de espaço vetorial (Moore, 1995).

Para Moore (1995), na perspectiva atual, a terceira aproximação foi a mais importante, uma vez que sua axiomatização a partir do sistema linear é, essencialmente, o conceito moderno de espaço vetorial sobre os números reais. Peano, apresentou a primeira axiomatização geométrica de espaço vetorial.

Em 1888, Peano publicou o livro *Calcolo Geometrico (1888)*, a obra é baseada nas ideias originadas por Leibniz, e desenvolvidas, especialmente, na obra de Grassmann, porém tratadas de forma simplificada por Peano; utilizou, ainda, as teorias de Möbius, Bellavitus e Hamilton; contém, também, a primeira definição de espaço vetorial com notação e estilos modernos, considerou vetores em um plano, porém não os definiu em termos de axiomas (Moore, 1995).

Apesar disso, essa obra de Peano não teve grande aceitação. Sobre essa obra de Peano, Caire (2020, p.114) diz que

Em *Calcolo geometrico* (1888), Peano utilizou a palavra “ente” para o que entendemos atualmente como vetor e a palavra “grupo” para base. Definiu sistema linear e suas propriedades e a relação entre os “entes” de um sistema linear. As relações entre os “entes” foram definidas por Peano como dependência e independência e são as mesmas empregadas até hoje considerando conjuntos de vetores em espaços vetoriais. (Caire, 2020, p. 114)

Em 1898, Peano apresentou a definição de um vetor como um segmento de linha orientado, ou seja, de forma contrária a que vinha apresentando (vetores a partir da preposição geométrica); a partir daí, decidiu axiomatizar a geometria partindo de vetores. Peano

desenvolveu 11 axiomas, dentre estes, do conceito de vetor, do conjunto de vetores, da adição, do produto de um vetor por um número, do produto interno de vetores (Moore, 1995).

Em relação a motivação e a aproximação usada Peano (1898 como citado em Moore, 1995, p. 271) diz que

Nesse trabalho eu proponho considerar as ideias são encontradas na teoria de vetores e classificadas como primitivas, quais são extraídas a partir da observação de espaços físicos e quais são ideias derivadas, com definições dadas; e considerar quais proposições devem ser assumidas como primitivas e quais são deduzidas a partir destas por um processo puramente lógico, sem recorrer a intuição. Então, a teoria de vetores parece ser desenvolvida sem pressupor qualquer estudo geométrico anterior. Uma vez que, por meio dessa teoria, toda a geometria pode ser tratada, resultando, desse modo, na possibilidade de substituir a teoria de vetores pela geometria elementar. (Peano, 1898 como citado em Moore, 1995, p. 271, tradução nossa).

Entre 1903 e 1907, dois matemáticos alemães, Rudolf Schimmack e Georg Hamel, deram prosseguimento aos quatro axiomas que haviam sido propostos por Gaston Darboux em 1875 (Moore, 1995).

Darboux (1875 como citado em Moore, 1995) publicou um artigo no qual analisou a composição das forças em estática considerando, por exemplo, a lei do paralelogramo, “[...] Ora, parece que, com o século XX, começa um pensamento científico contra as sensações [...]. O pensamento científico moderno exige que se resista à primeira reflexão” (Bachelard, 1996, p. 307).

Schimmack apresentou sete axiomas, em especial, sobre adição de vetores, a partir de Darboux e do conceito tradicional; definiu um vetor como um segmento de linha orientado no espaço Euclidiano. Hamel contribuiu na construção de uma base para os números reais como um espaço vetorial para números racionais, mas não apresentou nenhum conceito geral sobre a “base” do espaço vetorial (O’Connor & Robertson, 2004).

A partir da axiomatização de Peano, em 1918, Hermann Weyl, também, publicou uma axiomatização do espaço vetorial sobre números reais; na sua obra traz os fundamentos da

geometria e conceitua vetor, intuitivamente, com um deslocamento no espaço. Contudo, três outros matemáticos, também, tentaram normatizar o espaço vetorial: Hahn e Wiener e Banach.

De acordo com Moore (1995), Hahn formulou a normatização de espaço vetorial, chamando-o de espaço linear, os axiomas propostos por ele, de forma geral, consideraram um espaço Euclidiano n-dimensional e um espaço sequencial de dimensões infinitas; Wiener apresentou um Sistema Vetorial no qual seus axiomas definiram, de certa forma, um espaço vetorial normatizado, mas a noção de completude estava ausente.

A definição de Banach teve muito mais influência que dos autores anteriores, pois não utilizou a axiomatização a partir das ideias de Hilbert para a geometria Euclidiana como foi feito pelos outros (Moore, 1995).

Banach (1922 como citado em Moore, 1995) definiu os axiomas a partir de uma classe de domínios da seguinte forma: analisava os teoremas tidos como verdadeiros para uma classe de domínios; para uma classe particular de domínios, verificava a validade dos teoremas para essa classe e, a partir daí, mostrava que os teoremas satisfaziam aquela classe de domínios e, assim, os axiomatizava.

Muitos outros autores surgiram com ideias similares em relação a axiomatização do espaço vetorial, porém, nesse trabalho, os principais foram destacados. O fim do período da axiomatização pode ser considerado com a publicação em 1941 da obra *A Survey of Modern Algebra*, por Garret Birkhoff e Saunders Mac Lane, estudantes de Harvard (Moore, 1995). Nessa obra a noção de espaço vetorial foi definida de uma forma abstrata como

um espaço vetorial V sobre um campo F é dito ser um conjunto V com uma operação $+$ em um grupo Abelian e satisfaz os seguintes quatro axiomas: existe uma operação, chamada produto escalar, qual para algum a em F e algum x em V resulta em ax e é tal que (V1) $a(x+y)=ax+ay$; (V2) $(a + b)x=ax+bx$; (V3) $(ab)x=a(bx)$; (V4) $1x=x$. (Birkhoff & Maclane, 1941 como citado em Moore, 1995, p. 263, tradução nossa)0

Epistemologicamente, podemos analisar o desenvolvimento da axiomatização como uma reflexão da reflexão que é uma característica da ciência contemporânea, há um eterno

pensar, um eterno melhoramento, uma eterna correção de erros e rompimentos de obstáculos epistemológicos.

Não há, pois, apesar de se tratar de uma nova era do espírito científico, a ausência de obstáculos, mas a ruptura a partir da reflexão; outra característica observada é a origem dos obstáculos, não se trata mais de romper, especificamente, aqueles advindos da experiência primeira ou do conhecimento, mas de romper com aqueles advindos do próprio amadurecimento do espírito científico, ávido em desenvolver teorias a partir da razão, do *porquê* matemático.

Sobre essa objetividade científica, Bachelard (1996, p. 305) diz que

[...]No ponto de evolução em que se encontra a ciência contemporânea, o cientista vê-se diante da necessidade, sempre renascente, de *renunciar a sua própria intelectualidade*. Sem essa renúncia explícita, sem esse despojamento da intuição, sem esse abandono das imagens preferidas, a pesquisa objetiva não tarda a perder não só sua fecundidade mas o próprio vetor da descoberta, o ímpeto indutivo. Viver e reviver o momento de objetividade, estar sempre no *estado nascente* de objetivação, é coisa que exige um esforço constante de dessubjetivação. Alegria suprema de oscilar entre a extroversão e a introversão, na mente liberada psicanaliticamente das duas escravidões – a do sujeito e a do objeto! Uma descoberta objetiva é logo uma retificação subjetiva. (Bachelard, 1996, p. 305)

Portanto, a partir do desenvolvimento do espírito científico podemos identificar obstáculos e a ruptura destes dentro do processo de construção do conhecimento da teoria de vetores. Epistemologicamente, Bachelard nos permitiu um novo olhar sobre a história através de uma reflexão crítica.

Para a análise foi necessário se desprender de um contar fatos cronologicamente para verificar os fatos motivados e justificados, aspectos lógicos, ideológicos, motivações, justificações e aspectos que nem sempre estão evidentes ou explícitos; porém, sempre com muito cuidado para que a subjetividade não se sobrepusesse a razão.

Considerações finais

Para Entender e justificar a história a partir dos obstáculos epistemológicos propostos por Bachelard é preciso atenção, paciência e estudo; é um eterno debruçar-se no processo de produção do conhecimento e na epistemologia do autor.

A obra de Bachelard é densa e envolve rupturas que vão além de seu tempo, contrapõe as ideias positivistas de Comte e propõe uma epistemologia histórica; encontrar um recorte da obra de Bachelard para analisar acontecimentos históricos do desenvolvimento de uma determinada teoria, de um objeto, não se trata, pois de tarefa trivial.

Portanto, à luz da epistemologia de Bachelard, esse artigo teve por finalidade responder ao seguinte questionamento: De que forma se deu a presença e a ruptura dos obstáculos epistemológicos propostos por Bachelard ao longo do desenvolvimento do espírito científico na história dos vetores?

Durante o período pré-científico foram analisados os fatos históricos que deram início a ideia de vetores. Foi observado que, nesse período, os obstáculos epistemológicos estão presentes ao longo de toda a construção do pensamento científico, seja a partir das experiências primeiras que eram irrefutáveis e levavam a generalizações dando vez ao obstáculo do conhecimento geral; ou a partir da ausência de matematização das representações geométricas.

O período científico é marcado, de certa forma, pelas seguintes características: ruptura dos obstáculos epistemológicos a partir de uma análise crítica das teorias existentes e elaboração de novas; busca da variação e não da variedade para chegar a matematização a partir da análise de casos gerais, oposição a imagens, analogias e metáforas; e retificação das generalizações e criação de expressões algébricas para representar o conhecimento até então existente.

A era do Novo Espírito Científico caracteriza a fase de consolidação do pensamento e do espírito científico. Para vetores é o período da axiomatização do espaço vetorial, da

relição das teorias, conceitos, proposições, do dever científico evidenciado pela abstração e pela razão.

A partir da análise epistemológica dos fatos pode-se perceber que houve uma constante ruptura e re-aparecimento dos obstáculos. Essa característica é observada na preocupação de melhoramentos das teorias existentes, na busca constante das correções de erros, no desenvolvimento cronológico de uma teoria pra outra, dentre outros aspectos.

Portanto, não é certo dizer que o aparecimento e a ruptura de determinado obstáculo significam o seu nascimento ou a sua morte, pelo contrário, há um eterno renascer; por isso, de acordo com o Bachelard, o espírito científico amadurecido e formado deve estar em constante vigilância, em constante reflexão sobre a reflexão para que não venham, porventura, surgir, novamente, obstáculos já superados ou novos e impeçam o desenvolvimento do espírito científico.

Por fim, nesse trabalho, analisar recortes da história dos vetores a partir, também, de um recorte da epistemologia de Bachelard era tarefa primordial e, conseqüentemente, entender a epistemologia é verificar o processo de construção do saber científico.

É importante destacar que para qualquer teoria apresentada caberia um estudo epistemológico amplo e aprofundado individualizado a partir de Bachelard, pois cada autor é único, envolto por erros que devem ser retificados e analisados para a compreensão da sua história.

Nesse sentido, uma limitação a ser sanada em trabalhos futuros é a análise envolvendo os demais obstáculos epistemológicos propostos por Bachelard, além do uso, de outras epistemologias que possam, também, ajudar a compreender o processo de construção de conhecimento, bem como, a utilização dessas mesmas epistemologias para analisar como se deu o processo de elaboração, criação e elucidação de outras teorias matemáticas.

É importante frisar a importância desse estudo para a práxis docente que deve estar intimamente ligada as circunstâncias históricas e ao conhecimento científico possibilitando uma intervenção escolar com uma prática reflexiva e a utilização da história crítica como recuso pedagógico e de aprendizagem para estimular os alunos a entender a origem e a motivação para estudar determinado conteúdo.

Referências

- Bachelard, G. (1977). *Epistemologia*. Zahar.
- Bachelard, G. (1996). *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. (Estela dos Santos Abreu, Ed. & Trad.). Contraponto.
- Bachelard, G. (2006). *A Epistemologia*. (Fátima Lourenço Coutinho e Mário Carmino Oliveira, Ed. & Trad.). Edições 70, LDA.
- Beltran, M., & Saito, F. (2012) História da ciência, epistemologia e ensino: uma proposta para atualizar esse diálogo. *Atas do VIII ENPEC* http://abrapecnet.org.br/atas_enpec/viii/enpec/resumos/R1396-1.pdf
- Caire, E. (2020). *Uma cronologia histórica sobre as ideias de conjuntos linearmente independentes e de base até o século XIX* [Tese de doutorado em Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista]. <http://hdl.handle.net/11449/192751>.
- Cezare, P., & Andrade, M. (2016). A epistemologia de Bachelard e a construção do conceito de adaptação das espécies. *Revista Investigações em Ensino de Ciências*, 22 (3), pp.53-73. <https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/26/420>.
- Clifford, W. K. (1878). *Elements of Dynamic: An Introduction to the Study of Motion And Rest in Solid and Fluid Bodies, Part I, Kinematica*. Macmillan And Co.
- Crowe, M. J. (1994). *A history of vector Analysis : the evolution of the idea of a vectorial system*. Dove Publications.
- D'Ambrosio, U. (2012). Tendências e Perspectivas Historiográficas e Novos Desafios na História da Matemática e na Educação Matemática. *Educação Matemática e Pesquisa*, 14 (3), 336-347. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12769/9349>
- Dugas, R. (2011). *A History of Mechanics*. Routledge & Kegan Paul LTD.
- Genese, R. W. (1893). Grassmann's "Ausdehnungslehre". *Nature*, 48 (1248), p. 517. <https://www.nature.com/articles/048517a0.pdf>
- Gibbs, J. W. (1881). *Elements of Vector Analysis: arranged for the use of students in physics*. Tuttle, Morehouse & Taylor.
- Gibbs, J. W. (1906a) Quaternions and Ausdehnungslehre. In J. W. Gibbs, *Scientific Papers of Josiah Willard Gibbs* (pp. 255-269). https://en.wikisource.org/wiki/Scientific_Papers_of_Josiah_Willard_Gibbs,_Volume_2

- Gibbs, J. W. (1906b) Quaternions and the Algebra of Vectors. In J. W. Gibbs, *Scientific Papers of Josiah Willard Gibbs* (pp. 270-277). [https://en.wikisource.org/wiki/Scientific Papers of Josiah Willard Gibbs, Volume 2](https://en.wikisource.org/wiki/Scientific_Papers_of_Josiah_Willard_Gibbs,_Volume_2)
- Gil, A. C. (2002) *Como elaborar projetos de pesquisa*. Atlas.
- Heath, T. L. (1897). *The works of Archimedes*. University Press.
- Heath, A. E. (1917). Hermann Grassmann. *The Monist*, 27 (01), 1-2. <https://www.jstor.org/stable/27900621?seq=1>
- Heaviside, O. (1925). *Electromagnetic Theory*. The Electrician.
- Hamilton, W. R. (1843) On quaternions; or on a New System of Imaginaries in Algebra. *Philosophical Magazine Series* 3, 25 (3), 511-519 <http://dx.doi.org/10.1080/14786444708645898>
- Iskandar, J. I., & Leal, M. R. (2002). Sobre Positivismo e Educação. *Revista Diálogo Educacional*, 3 (7), 89-94. <https://doi.org/10.7213/rde.v3i7.4897>
- Japiassu, H. F. (1981). *Questões Epistemológicas*. Imago, 1981.
- Japiassu, H. F. (1986). *Introdução ao pensamento epistemológico*. Alves, 1986.
- Lacerda, G. B. (2009). Augusto Comte e “positivismo” redescobertos. *Revista Sociologia Política*, 17 (34), 319-343. <https://www.scielo.br/j/rsocp/a/wNFWRdJ7j3G4GZwgzJF4V4C/?lang=pt&format=pdf>
- Leibniz, G. W. (2012). Studies in a geometry of situation with a letter to Christian Huygens: 1679. In Loemker, L. E. (org), *Philosophical Papers and Letters: a Selection*, (pp. 248-258). Kluwer Academic Publishers.
- Lopes, A. R. C. (1993). Bachelard o Filósofo da Desilusão. *Ensenanza de las Ciencias*, 11 (3). Barcelona, v. 11, n. 3.
- Lopes, A. (1996). Bachelard: o filósofo da desilusão. *Caderno Brasileiro do Ensino de Física*, 3 (3). 248-273. <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/7049/6525>
- Marconi, M., & Lakatos, E. (2003). *Fundamentos de Metodologia Científica*. Atlas S.A.
- Martins, A. (2004). *Concepções de estudantes a cerca do conceito de tempo: uma análise à luz da epistemologia de Gaston Bachelard*. [Tese de Doutorado em Educação, Universidade de São Paulo]. <http://doi.org/10.11606/T.48.2004.tde-30112004-183841>
- Martins, J., Boemer, M., Ferraz, C. (1990) A fenomenologia como alternativa metodológica para pesquisa: algumas considerações. *Revista da Escola de Enfermagem*, 24 (1), 139-147. <https://www.scielo.br/j/reusp/a/wfHN6qH33k7WK5nBfYgTtYy/?lang=pt&format=pdf>
- Maxwell, J. C. (1873). *Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford University Press.
- Melo, A. (2005). *Contribuições da Epistemologia Histórica de Bachelard no estudo do desenvolvimento dos conceitos da óptica*. [Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina]. <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/102161/221544.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- Menon, M. J. (2009). Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 31 (2). <https://doi.org/10.1590/S1806-11172009000200006>
- Moore, G. (1995). The Axiomatization of Linear Algebra:1875-1940. *Historia Mathematica*, 22, 262-303. <https://doi.org/10.1006/hmat.1995.1025>
- O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (1998). Sir William Rowan Hamilton. *MacTutor History of Mathematics Archive, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Escócia*. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hamilton>
- O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2004). Georg Karl Wilhelm Hamel. *MacTutor History of Mathematics Archive, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Escócia*. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hamel/>
- O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2005) Hermann Günter Grassmann. *MacTutor History of Mathematics Archive, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Escócia*. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Grassmann/>
- Oliveira, I. A. (2016). *Epistemologia e Educação: bases conceituais e racionalidades científicas e históricas*. Vozes.
- Otte, M. (1989). The Ideas of Hermann Grassmann in the Context of the Mathematical and Philosophical Tradition since Leibniz. *Historia Mathematica*, 16, 1-35. [https://doi.org/10.1016/0315-0860\(89\)90096-7](https://doi.org/10.1016/0315-0860(89)90096-7)
- Pritchard, C. (1998). Tendril of the Hop and Tendril of the Vine: Peter Guthrie Tait and the Promotion of Quaternions, Part I. *The Mathematical Gazette*, 82 (493), 22-36 <http://www.jstor.org/stable/3620147>
- Saito, F. (2012). History of Mathematics and History of Science: Some remarks concerning contextual framework. *Educação Matemática e Pesquisa*, 14 (3), 363-385. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12763/9351>
- Silva, C. C., & Martins, R. (2003). Por que os quatérnions são compostos por quatro números? [Apresentação de trabalho]. *Anais do V Seminário Nacional de História da Matemática*. Rio Claro/SP.
- Silva, E.; & Arcanjo, F. (2021) História da ciência, epistemologia e dialética. *Transformação*, 44 (2), 149-174. <https://doi.org/10.1590/0101-3173.2021.v44n2.11.p149>
- Stigar, R., Ruthes, V., & Mendes, A. (2019) Revisões Epistemológicas Contemporâneas. *Universitas*, 13 (24). <https://revistauniversitas.inf.br/index.php/UNIVERSITAS/article/view/359>
- Tait, P. G. (1890). *An Elementary Treatise on Quaternions*. Cambridge at the University Press.
- Tesser, G (1994) Principais linhas epistemológicas contemporâneas. *Educar em Revista*, 10, 91-98., <https://doi.org/10.1590/0104-4060.131>
- Wessel, G. (1897). *Essay sur la Représentation Analytique de La Direction*. Copenhague. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99681g/f1.item>
- Xambó-descamps, S. (2018). From Leibniz' scharacteristica geométrica to contemporary geometric algebra. *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, XVI, 109-141. <https://web.mat.upc.edu/sebastia.xambo/HistoricalEssays/2018-Xambo--From-Leibniz-CG-to-GA.pdf>

Declaração de disponibilidade de dados

O compartilhamento de dados não é aplicável a este artigo, pois nenhum dado novo foi criado ou analisado neste estudo.

Data: 10/02/2022.