EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i2p618-646

Do sentido de beleza em matemática e do que se mostrou belo para nós na demonstração do teorema da incompletude de Gödel

On the sense of beauty in mathematics and what seemed beautiful to us in the demonstration of Gödel's incompleteness theorem

Sobre el sentido de la belleza en matemática y lo que resultó ser bello para nosotros en la demostración del teorema de incompletitud de Gödel

Sur le sens de la beauté en mathématiques et ce qui s'est avéré beau pour nous dans la preuve du théorème d'incomplétude de Gödel

Rosemeire de Fatima Batistela[1]
Universidade Estadual de Feira de Santana
https://orcid.org/0000-0003-2779-7251

Resumo

Neste artigo apresentamos um estudo que teve como pergunta norteadora: *O que é a beleza em Matemática e a beleza do teorema da incompletude de Gödel?* Buscamos apresentar conteúdo identificável para o que entendemos como beleza no teorema da incompletude de Gödel. Para isso, um estudo bibliográfico foi realizado e diferentes noções de beleza na Matemática são trazidas e articuladas. Também apresentamos nosso entendimento sobre beleza no teorema de Gödel. Compreendemos que o sentido de beleza matemática de um teorema é o de uma iluminação que evidencia o resultado. Além disso, entendemos que essa luz se permite ser vista na medida em que se esteja familiarizado com a teoria e com o ferramental utilizado na demonstração, a ponto de ser possível perceber os axiomas utilizados, a concisão da prova, a originalidade da articulação das ideias, as possibilidades de generalização do resultado e as aberturas de novas frentes de pesquisa. Entendemos também que os conhecimentos construídos por Gödel na elaboração do seu teorema da completude foram fundamentais na visão do problema da consistência da aritmética e na abordagem escolhida para a demonstração da

[1] rosebatistela@gmail.com

consistência da aritmética que se tornou a demonstração da incompletude da teoria da aritmética.

Palavras-chave: Demonstrações matemáticas, Evidência clara, Teorema da incompletude, Fenomenologia.

Abstract

In this paper we present a study that had as a guiding question: *What is the beauty in mathematics and the beauty in Gödel's incompleteness theorem?* We seek to present identifiable content for what we understand as beauty in Gödel's incompleteness theorem. For this, a bibliographic study was made and different notions of beauty in mathematics are brought and articulated. We also present our understanding of beauty in Gödel's theorem. We understand that the meaning of mathematical beauty of a theorem is that of an illumination that evidences the result. Moreover, we understand that this light allows itself to be seen insofar as one is familiar with the theory and with the tools used in the demonstration, to the point of being able to perceive the axioms used, the conciseness of the proof, the originality of the articulation of ideas, the possibilities of generalizing the result and the opening of new research fronts. We also recognize that the knowledge built by Gödel in the elaboration of his completeness theorem was fundamental in the view of the problem of the consistency of arithmetic and in the approach chosen to demonstrate the consistency of arithmetic, which became the demonstration of the incompleteness of the theory of arithmetic.

Keywords: Mathematical proofs, Clear evidence, Incompleteness theorem, Phenomenology.

Resumen

En este artículo presentamos un estudio que tuvo como pregunta orientadora: *¿Qué es la belleza en Matemática y la belleza del teorema de Gödel?* Buscamos presentar contenido identificable para lo que entendemos como belleza en el teorema de incompletitud de Gödel. Para ello se realizó un estudio bibliográfico y se traen y articulan diferentes nociones de belleza en Matemática. También presentamos nuestra comprensión de la belleza en el teorema de Gödel. Entendemos que el significado de belleza matemática de un teorema es el de una iluminación que evidencia el resultado. Además, comprendemos que esa luz se deja ver en la medida en que se está familiarizado con la teoría y con las herramientas utilizadas en la demostración, para el punto de poder percibir los axiomas utilizados, la concisión de la demostración, la originalidad de la articulación de ideas, las posibilidades de generalización del resultado y la apertura de nuevas frentes de investigación. También entendemos que el conocimiento construido por Gödel en la elaboración de su teorema de completitud fue fundamental en la visión del problema de la consistencia de la aritmética y en el enfoque elegido para demostrar la consistencia de la aritmética, que se convirtió en la demostración de la incompletitud de la teoría de la aritmética.

Palabras clave: Demostraciones matemáticas, Evidencia clara, Teorema de Incompletitud, Fenomenología.

Résumé

Dans cet article, nous présentons une étude dont la question directrice était *qu'est-ce que la beauté en mathématiques et la beauté du théorème d'incomplétude de Gödel*? Nous cherchons à présenter un contenu identifiable pour ce que nous entendons par beauté dans le théorème d'incomplétude de Gödel. Pour cela, une étude bibliographique a été réalisée et différentes notions de beauté en Mathématiques sont apportées et articulées, nous présentons également notre compréhension de la beauté dans le théorème de Gödel. On comprend que le sens de beauté mathématique d'un théorème est celui d'une illumination qui met en évidence le résultat, en outre, que cette lumière se laisse voir dans la mesure où l'on connaît la théorie et les outils utilisés dans la démonstration, pour le point de pouvoir percevoir les axiomes utilisés, la concision de la preuve, l'originalité de l'articulation des idées, les possibilités de généralisation du résultat et l'ouverture de nouveaux fronts de recherche. On comprend aussi que la connaissance construite par Gödel dans l'élaboration de son théorème de complétude était fondamentale dans la perspective du problème de la cohérence de l'arithmétique et dans l'approche choisie pour démontrer la cohérence de l'arithmétique, qui est devenue la démonstration de l'incomplétude de la théorie de l´arithmétique.

Mots-clés : Preuves mathématiques, Preuves claires, Théorème d'incomplétude, Phénoménologie.

Do sentido de beleza em Matemática e do que se mostrou belo para nós na demonstração do teorema da incompletude de Gödel

A busca pelo sentido de beleza em Matemática, despertado em nós na graduação em Matemática, aflorou no momento da pesquisa realizada no doutorado que envolveu o teorema da incompletude de Gödel[2]. A adjetivação de belo para a demonstração é recorrente na literatura. O sentido das adjetivações, ao dizer que a demonstração era bela, foi possível conforme a demonstração foi desvelando-se para nós, conforme fomos conhecendo as ideias que permeiam a prova, o método original criado para a demonstração, a forma surpreendente pela qual o teorema foi derivado, bem como o encadeamento dedutivo do qual decorre o segundo teorema.

Nesta ocasião apresentamos um estudo sobre como o fenômeno da beleza em Matemática tem feito sentido para nós, apresentando alguns pontos de vista que nos permitem articular compreensões e que evidenciam a nosso ver que o fenômeno solicita mais estudos. A fenomenologia é tomada aqui como um cuidado com o pensar.

Ao irmos nos adentrando à questão da beleza - buscando compreender na demonstração da incompletude as passagens destacadas como belas, as razões de existir delas, as possíveis motivações que influenciaram as escolhas de Gödel – ainda que numa compreensão inicial, entendemos que nos embrenhamos na questão da produção do conhecimento matemático uma vez que intuição e formalização se presentificam.

Nossa opção por apresentar passos e ou passagens da demonstração de Gödel é por crermos que o benefício da retrospectiva pode nos permitir compreender aspectos da demonstração que é considerada bela, afastando-se de ter a Matemática como um mecanismo. Do conjunto de todas as demonstrações matemáticas, algumas, além de expressarem

[2] Em geral quando se diz teorema de Gödel se refere ao primeiro teorema da incompletude, aquele estabelece a existência na teoria da aritmética de uma sentença verdadeira, porém indemonstrável. O segundo teorema é um corolário e estabelece que se a aritmética for consistente ela não pode demonstrar sua própria consistência. O segundo foi enunciado, mas não demonstrado por Gödel. Neste texto os dois teoremas serão chamados na forma singular de teorema da incompletude de Gödel.

logicamente a verdade, possuem a propriedade esclarecedora. No entendimento de que ao nos debruçarmos sobre a demonstração e os passos realizados por Gödel na elaboração do resultado poderemos compreender um pouco do que fica subentendido quando se adjetiva por bela tal demonstração.

A beleza atribuída por muitos autores à demonstração do teorema da incompletude se mostrou para nós como uma articulação de elementos presentes na produção do conhecimento matemático: possibilidades antevistas de driblar obstáculos, analiticidade do problema e envolvimento profundo com a questão tratada e com os problemas centrais da Matemática à época.

Do sentido de *beleza* em Matemática e possíveis relações com a produção e o ensino

Em relação ao sentido de um teorema ser bonito, Rota (1997) afirma que há na comunidade matemática um consenso ao redor do que seja isso: é bonito se for esclarecedor. Os matemáticos utilizam o adjetivo belo quando querem dizer que o resultado é esclarecedor. Ser esclarecedor é trazer junto a si uma iluminação como uma clareira numa floresta, oportunizando que se perceba inevitavelmente o que está dito na declaração.

Na visão de Ghys (2015) a maioria dos matemáticos que se expõem a falar sobre beleza matemática se apoiam no platonismo e a entendem como uma qualidade que é ligada aos objetos matemáticos, portanto uma qualidade objetiva, que pode ser expectada, mas que independe do sujeito que observa. Assim, ele afirma que esses matemáticos se consideram como simples observadores de paisagens bonitas e apenas uma minoria deles se entende como exploradores, que avançam por grandes florestas selvagens, descobrindo, às vezes, algumas clareiras bonitas em seu interior.

Nos *Diálogos de Platão*, entre Sócrates e Hípias em “Hípias Maior” Sócrates profere que a beleza é apenas uma forma da verdade, que sintetiza o desenvolvimento entre o harmonioso e o útil. Esse também é o ponto de vista de Bertand Russell (1872-1970). Russell

(1919) afirma que Platão talvez tenha sido o homem que mais percebeu a beleza da Matemática defendendo seu ensino no cotidiano, principalmente por razões de necessidade de pensamentos nobres, que possibilitassem escapar do exílio do mundo real. Nos termos de Russell

> A matemática, corretamente observada, possui não apenas a verdade, mas a beleza suprema - uma beleza fria e austera, como a da escultura, sem apelar para qualquer parte mais fraca de nossa natureza, sem os belos ornamentos da pintura ou da música, mas sublimemente pura e capaz de uma rígida perfeição, como só a grande arte pode mostrar. O verdadeiro espírito de prazer, exaltação, no sentido de ser mais do que o Homem, que é a pedra de toque da mais alta excelência, encontra-se tanto na matemática como na poesia. O que é melhor em matemática merece não apenas ser aprendido como uma tarefa, mas ser assimilado como parte do pensamento cotidiano, e trazido repetidas vezes diante da mente com encorajamento sempre renovado. (Russell, 1919, p. 60, tradução nossa)[3].

Uma guinada na forma de pensar beleza matemática, segundo Ghys (2015) é devido a René Descartes (1596 – 1650) e a Henri Poincaré (1854 – 1912), que em vez de concentrar a beleza sobre o objeto exterior foca o ser humano que está observando. E assim, o matemático que, na visão platônica é um sujeito que assiste, nessa perspectiva passa a ser um sujeito que age e que pode assim produzir beleza ao fazer matemática. Sobre a matemática mais próxima do ser humano, Ghys (2015) assim se expressa:

> A cena da ação não era mais externa, mas resultava, pelo menos em parte, de um processo psicológico interno e inconsciente, junto com um processo racional consciente. A Matemática estava perdendo um pouco de sua universalidade para ganhar alguma subjetividade. Menos divina e mais humana. (Ghys, 2015, p. 5).

Entendemos que fazer matemática é uma atividade humana e é mais do que definir objetos, aplicar as regras lógicas e construir os objetos matemáticos por meio das demonstrações. Fazer matemática envolve um método, “o método de raciocínio por meio de cadeias de silogismos é um mecanismo de transformação, aplicável a conjuntos de premissas,

[3] “Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty - a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as in poetry. What is best in mathematics deserves not merely to be learnt as a task, but to be assimilated as a part of daily thought, and brought again and again before the mind with ever-renewed encouragement.” (Russell, 1919, p. 60).

[...] é a forma externa que o matemático dá ao seu pensamento, o veículo que o torna acessível para os outros" Bourbaki (1950, p. 223), e é também um processo que não é somente manusear peças segundo as regras do jogo, pois envolve julgamento do que é interessante e do que é útil em cada situação. Esse julgamento identifica-se com a parte mais intuitiva do processo. A intuição, nesse caso em que focamos o fazer matemático em demonstrações "é como uma capacidade de ajustar coisas aos padrões que estão dados, a partir do reconhecimento de semelhança entre aspectos de problemas e/ou ideias" (Batistela et al., 2016, p. 214).

As escolhas realizadas pelos matemáticos, nos ajustes aos padrões, segundo Poincaré (1946) em *A ciência e o método,* são norteadas pela harmonia, que por sua vez não se relaciona diretamente com utilidade, mas com beleza, com gosto pessoal e com a capacidade de articulação e criação. Disso, Poincaré afirma que, a busca pela harmonia, sustentada pelo anseio e pela beleza, acaba dirigindo as preferências e os resultados se assemelham, se as escolhas são realizadas almejando sua utilidade.

Immanuel Kant (1724 – 1804) expõe pensamento semelhante em Kant (1995) que relaciona beleza à utilidade, justamente um jogo em que se busca a beleza e acaba-se obtendo utilidade. Esse modo de pensar a beleza e a utilidade juntas é uma pista sobre o que a comunidade matemática concebe como belo. Esta tem sido a compreensão que tem guiado os esforços matemáticos no fazer matemático em suas escolhas, seja demonstrando seja criando definições ou teorias. No livro Silva e Idem (2021, p. 35) "compreende-se que existem elementos e valores estéticos intrínsecos à Matemática, além de uma dimensão estética no processo de produção do conhecimento."

Ghys (2015) sugere que olhemos para a beleza matemática como

> Uma espécie de *PageRank*, calculada sobre a enorme rede dos enunciados matemáticos. Este espaço matemático, que queremos explorar, é estruturado como a Web, com "páginas significativas", e outras que são menos relevantes. A beleza, a utilidade, a eficiência de um teorema depende do tamanho do território que sua descoberta abre. Mas nunca esquecendo o seu comportamento dinâmico. (Ghys, 2015, p. 9).

Rota (1997), por sua vez, ao falar de beleza matemática, introduz o conceito de iluminação como uma capacidade que alguns enunciados matemáticos possuem de iluminar uma paisagem podendo ser extensa ou nem tanto. O sentido de beleza em Matemática para ele é da seguinte forma:

> Nós reconhecemos a beleza de um teorema quando vemos a forma como o teorema "encaixa" no lugar, como ele lança luz em torno de si, como *Lichtung*[4]- uma clareira na floresta. Dizemos que uma prova é bela quando ela libera o segredo do teorema, quando ela nos leva inevitavelmente a perceber o teor da declaração que está sendo demonstrada. (Rota, 1997, p. 182, tradução nossa).[5]

Este autor concorda que os matemáticos utilizam o adjetivo bonito quando querem dizer que aquele resultado é esclarecedor e vai além disso, apresenta uma dimensão da forma como o teorema encaixa na teoria e de que a luz irradiada é lançada em torno dele iluminando o exposto. Disso, ser esclarecedor é trazer junto a si uma luz iluminadora como uma clareira numa floresta, essa luz oportuniza a percepção da verdade que está sendo expressa por meio dele.

A respeito de beleza como uma forma de encaixe de um resultado numa teoria, Rota (1997) defende que alguns teoremas são apresentados como pérolas nas teorias, e quando assim, são suscetíveis de serem apreciados por aqueles que estão familiarizados com a teoria que os sustentam e costumam ser ininteligíveis para os que não são. A apreciação desse aspecto de beleza de um resultado, como um detalhe cuidadosamente lavrado e encaixado, demanda intimidade com a teoria e, nesse sentido, não se relaciona somente com a clareza que ele traz, mas, principalmente, ao encaixe dele no sistema de verdades.

Ainda sobre beleza de um resultado, como uma qualidade de ser esclarecedor, que faz com que o sentido do dito esteja claro, tal qual uma clareira, na metáfora de Rota (1997), nós

---

[4] *Lichtung*, do idioma alemão, significa clareira.

[5] “We acknowledge a theorem’s beauty when we see how the theorem “fits” in is place, how is sheds light around itself, like Lichtung— a clearing in the woods. We say that a proof is beautiful when it gives away the secret of the theorem, when it leads us to perceive the inevitability of the statement being proved.” (Rota, 1997, p. 182).

entendemos que além disso, o clarão que se atribui ao sentido do dito, alcança também e clareia as articulações que produziram tal resultado e o seu entorno na teoria. Tomando um resultado matemático considerado belo e dando voltas em torno dele podemos compreender que o adjetivo se refere também a haver explicitação de conexões estabelecidas entre áreas distintas da Matemática. O clarão, antes visto como iluminador do sentido do dito, alcança o encaixe do resultado no todo da teoria e, nessa perspectiva, amplia-se alcançando articulações que permitem perceber interligações entre áreas da Matemática que estão estabelecidas por meio do teorema.

Ainda no bojo da compreensão do sentido de beleza de uma demonstração, agora abordando a forma como isso pode se dar, entendemos que pode se dar por uma sensação de agradável surpresa em algum passo da demonstração e que essa sensação de agradabilidade estética não é privilégio de demonstrações somente, pois, pode também ser um atributo de uma teoria, de uma definição ou do enunciado de um teorema. Nesse caso, a compreensão dessa adjetivação requer o apadrinhamento com os axiomas, com o ferramental da teoria e com a linguagem na qual os termos envolvidos expressam o enunciado do teorema.

Isso nos leva a articular que o desenvolvimento da sensibilidade para a percepção do belo em Matemática demanda a compreensão do habitat da teoria em que o objeto está e do ferramental com o qual ele é produzido. Referindo-se a um teorema, a familiaridade com a teoria em que o teorema está envolvido é um elemento imprescindível na sensibilização para a percepção da beleza, e ela vem ao custo de doação àquele estudo.

A familiaridade com a teoria parece ser mais uma novidade trazido para os sentidos de beleza em Matemática, diz de uma requisição de relacionamento profundo com a teoria, ter intimidade com o método e com a linguagem utilizada. No campo das artes, o julgamento estético não é condicionado ao conhecimento sobre o autor da obra, o movimento artístico ao qual a obra está ligada, aos materiais utilizados etc. Esses entendimentos não são necessários para a apreciação de uma obra artística.

É comum nas disciplinas de cursos de graduação em Matemática a utilização do adjetivo belo para demonstrações. Aqui nos referimos aos teoremas. Esse destaque é importante pois é comum o entendimento e a adjetivação em geral da beleza dos fractais, nas equações, nas formas, figuras, sólidos geométricos, nas fórmulas etc.

Essa última, as fórmulas, foram objetos de pesquisa de (Zeki et al., 2014) e eles sugerem "que existe, neurobiologicamente, uma qualidade abstrata na beleza que é independente da cultura e do aprendizado." Podendo isso levar "à questão capital de se a beleza, mesmo em uma área tão abstrata como a matemática, é um indicador do que é verdadeiro na natureza, tanto dentro de nossa natureza quanto no mundo em que evoluímos." (Zeki et al., 2014, p. 9-10).

Na graduação em Matemática, muitas vezes a adjetivação realizada pelo professor é perseguida insistentemente pelos estudantes e somente alguns afirmam o contentamento de, depois de algum tempo, terem conseguido "ver" a beleza que o professor apontou. Refletindo sobre o desenvolvimento da percepção da beleza matemática nos estudantes, faz-se importante destacar que a adjetivação de belo, somente, não traz em si as condições e nem possibilita a percepção. Embora, de acordo com Rota (1997), possa deixar os estudantes positivamente impressionados. A convivência com a teoria poderá criar condições de "ver" a beleza anunciada. O encontro entre um estudante da graduação em Matemática e a beleza de um teorema matemático pressupõe conhecimento de aspectos da teoria que são acessados por meio de realização de exercícios, abordando os diversos aspectos que estão envolvidos na demonstração em foco. Nessa ocasião, para prover oportunidade de "visão" da beleza, o professor distingue entre aspectos mais e menos relacionados ao resultado e os aborda.

Rota (1997) afirma que não é possível ensinar uma pessoa a produzir resultados belos em Matemática, tampouco é possível ensinar a procurar beleza nos teoremas, porém, o desenvolvimento dessa sensibilidade é possível por meio do estudo e da intimidade com a teoria e com as ideias articuladas nas demonstrações dos teoremas da teoria. A produção ou a identificação de teoremas belos em Matemática não é uma habilidade treinável, porém é no âmbito do diálogo que se pode desenvolver a experiência estética.

A respeito disso, Bicudo e Klüber (2020, p. 75) afirmam que "é no diálogo com-o-aluno-junto-com-a-matemática que a experiência estética pode se dar na Educação Matemática enquanto a ação de educar matematicamente" e relatam:

> Certo dia, ao dialogar por bastante tempo com o orientador, sobre outros aspectos, sobre as possibilidades de resolver aquele problema de que estávamos tratando, o diálogo amistoso, a atenuação da tensão, a não preocupação com obter sucesso, a reflexão livre, a manifestação dos sentimentos para com o que fazíamos e como fazíamos, sem avaliação formal, apenas fluindo naquilo que fazíamos, levou-me à perplexidade quando me dei conta da clara compreensão de habitar aquilo, em cada momento. Vivenciei um modo de habitar aquela demonstração. Não apenas em sua beleza interna e clarividente naquele momento, mas no gesto de quem a conduzia, no acolhimento do meu pensar atento, mesmo não sabendo de que estava se abrindo em mim a possibilidade de compreender-como-ele aquele assunto, porém, ao-meu-modo. Bicudo e Klüber (2021, p. 74).

Em outra direção, é possível elaborar provas para serem elegantes e argumentos considerados bonitos costumam ser imitados. A palavra elegância matemática relaciona-se tangencialmente com o conteúdo do resultado e transversalmente com o método. Por ser assim, a elegância é algo que pode ser alcançado e isso é opção da maioria dos matemáticos. Enquanto a produção de um resultado belo não se dá por esforço/labor intelectual. Um resultado elegante raramente está associado à primeira versão dele próprio, pois a elegância decorre de escolhas de pressupostos utilizados, da originalidade das relações estabelecidas das quais se deriva o resultado e de possibilidade de utilização do método em outros problemas.

Vale a pena lembrar que a falta de elegância nas demonstrações é tida entre os matemáticos como algo a ser corrigido ou eliminado. Na crise da Fundamentação da

Matemática, a rejeição do projeto intuicionista deveu-se principalmente à falta de elegância das demonstrações. Da Silva afirma: “A elegância em Matemática, como em qualquer contexto, se define como o máximo de efeito (ou consequências desejáveis) com o mínimo de recursos.” Da Silva (2007, p. 194, nota 10). Disso, entendemos elegância em Matemática como uma qualidade que pode ser esteticamente percebida e que diz da intersecção entre usar a menor quantidade possível de recursos da teoria e obter o caminho da prova mais conciso possível. Assim, por exemplo, uma primeira versão de um teorema é tomada e elaborações posteriores vão verificando a possibilidade de articular os argumentos utilizando o mínimo possível de proposições verdadeiras aceitas ou demonstradas e estabelecendo o resultado da forma mais sucinta possível, eliminando alguma redundância que possa haver. Podemos nos perguntar o que significa uma demonstração em que a beleza esteja faltando.

Rota (1997) entende que o sentido do conceito de beleza matemática pode ser compreendido quando seguimos as pistas que se dão no contraste entre o esforço requerido para a apreciação da beleza e a imaginária visão de um *flash* de luz que permite perceber a beleza encoberta ali e vamos desvelando os sentidos que se mostram.

Se, por um lado, matemáticos têm clareza sobre o que é a verdade e como verificar a ocorrência desta no sentido lógico do termo, por outro, questionam sobre o sentido dessas provas lógicas, uma vez que elas não esclarecem o sentido do que afirmam e a relevância delas, seja na teoria ou em conexões com outras teorias. Questionamentos sobre utilidade, que são comuns, segundo Rota (1997), sinalizam a falta da percepção do sentido da afirmação que expressa a verdade do afirmado. Uma clarificação do sentido da declaração é o que está implicitamente sendo solicitado.

Rota (1997) compreende que a propriedade de ser esclarecedor é objetivamente atribuída a algumas demonstrações e negada a outras. Isso é tema de discussão entre os matemáticos, pois é sabido que se espera que o ensino ofereça algum esclarecimento quanto ao sentido da verdade formal de um comunicado, em detrimento de desejarem que os alunos aprendam apenas tendo contato com a verdade formal. A iluminação é uma qualidade possível das demonstrações. Um teorema matemático pode ou não ser esclarecedor. A respeito disso, Rota (1997, p. 12, tradução nossa) considera “Se as afirmações da matemática fossem formalmente verdadeiras, mas de forma alguma esclarecedoras, a matemática seria um jogo curioso jogado por pessoas estranhas”.[6]

A beleza matemática ainda que de forma sutil, segundo Rota (1997), influencia o ensino de matemática, pois quando uma bela teoria é reconhecida pelos matemáticos ela tem mais chances de passar a ser tópico de ensino. Quando a beleza é percebida em alguma teoria, o que segundo Rota (1997) é raro, isso influencia fortemente a matemática cotidiana, pois acaba sendo mais explorada que recompensada. A matemática cotidiana por ser mais compreensível e poder se desdobrar em outros campos de atividade como, por exemplo, no ensino. A comunicação da Matemática é influenciada pela beleza do que está sendo comunicado. Nesse caso, a beleza não é simplesmente um atributo subjetivo de um teorema, ela é uma propriedade objetiva, que se relaciona com a verdade expressa ali. A verdade de um teorema e a sua beleza andam de mãos dadas. A verdade matemática depende de sua prova para ser legitimada e a beleza se faz sentir quando de modo harmonioso a construção da verdade por métodos matemáticos libera o segredo da prova naquelas circunstâncias.

Uma vez acordados sobre a beleza de um teorema estar intrinsecamente relacionada com iluminação, e essa significando ser possuidora de uma luz que torna compreensível o resultado, faz-se importante saber que a comunidade matemática nega a importância lógica desse conceito. Rota (1997) afirma que essa iluminação a que nos referimos não é formalizável. A respeito disso ele proclama:

[6] “If the statements of mathematics were formally true but in no way enlightening, mathematics would be a curious game played by weird people.” Rota (1997, p. 12).

> Beleza matemática é a expressão que os matemáticos inventaram para admitir obliquamente o fenômeno da iluminação, evitando ao mesmo tempo o reconhecimento da imprecisão desse fenômeno. Eles dizem que um teorema é bonito quando querem dizer que o teorema é esclarecedor. A confortável idéia única de beleza matemática nos salva de ter que lidar com um conceito que vem em graus. (Rota, 1997, p. 182, tradução nossa).[7]

Nosso entendimento a respeito da expressão "admitir obliquamente" é que esse tema solicita mais esclarecimentos. O texto *The Phenomenology of Mathematical Beauty* de Rota, apresenta pistas de sentidos em que estes termos são utilizados na comunidade matemática e a pista geral, que diz da iluminação, mas ainda assim esse fenômeno é olhado de soslaio.

Do teorema da incompletude de Gödel e de sua *beleza*

O teorema da incompletude de Gödel foi demonstrado em 1931 no contexto da crise dos fundamentos da Matemática, período em que estava posta a dúvida sobre os critérios matemáticos e filosóficos para a fundamentação satisfatória dessa ciência. As três escolas filosóficas, quais sejam, Logicismo, Intuicionismo e Formalismo tentaram excluir as desconfianças buscando "elucidar o estatuto ontológico dos objetos matemáticos e, secundariamente, em dar conta do acesso ao seu conhecimento". (Ferreira, 1995, p. 21).

Pode-se afirmar que o Formalismo teria realizado totalmente seu projeto se tivesse apresentado uma demonstração finitista da consistência da aritmética, assim se teria uma axiomatização completa da Matemática, ou seja, toda asserção matemática seria demonstrada como verdadeira ou como falsa. O primeiro teorema de Gödel, ao demonstrar que existe um conjunto não vazio de sentenças verdadeiras as quais não podem ser circunscritas pelo processo de sua demonstração, estabeleceu a impossibilidade do Formalismo oferecer uma fundamentação sólida e definitiva da ciência Matemática.

[7] "The term "mathematical beauty," together with the lightbulb mistake, is a trick mathematicians have devised to avoid facing up to the messy phenomenon of enlightenment. The comfortable one-shot idea of mathematical beauty saves us from having to deal with a concept that comes in degrees." Rota (1997, p. 12).

A demonstração da completude da lógica de predicados estabelece que nessa teoria tudo que é verdadeiro tem uma demonstração, ou seja, a verdade e a demonstrabilidade matemática correspondem. A demonstração do primeiro teorema da incompletude na teoria dos números naturais mostra que não é válida nessa teoria, e tampouco em sistemas correlatos, a ideia de que verdade pode ser reduzida à demonstrabilidade. Nos termos de Gödel (1977), na apresentação do teorema da incompletude[8]:

> É razoável por isso supor que estes axiomas e regras de inferência sejam também suficientes para decidir todas as questões em matemática que podem ser formalmente expressas nesses sistemas. No que se vai seguir mostrar-se-á que não é assim, mas antes que, em ambos os sistemas citados, existem problemas relativamente simples dos números inteiros que não podem ser decididos com base nos axiomas. Esta situação não depende da natureza especial dos sistemas construídos, mas aplica-se a uma vasta classe de sistemas formais. (Gödel, 1977, p. 245).

A demonstração do teorema de Gödel foi para nós o resultado que nos deixou perplexos[9] sobre o sentido de *beleza* de um teorema e nos colocou em movimento de busca de compreender o sentido disso. Os elogios para a demonstração da incompletude são inúmeros. Chaitin (2002) adjetiva a demonstração e o próprio Gödel, ambos, de muito inteligentes. Nagel e Newman (1973, p. 83) chama a demonstração de Gödel de "uma maravilhosa sinfonia intelectual". Goldstein (2008) expõe:

> A prova da incompletude é um dos exemplares de raciocínio matemático mais espantoso já produzidos, espantoso tanto na simplicidade da estratégia principal como na complexidade dos detalhes, a tradução meticulosa da metamatemática dentro da matemática mediante o que passou a ser chamado de aritmetização de Gödel. É uma mescla cuidadosamente ordenada de várias camadas ou "vozes", tanto matemáticas como metamatemáticas, o contraponto se fundindo em acordes harmônicos nunca antes ouvidos. Goldstein (2008, p. 132).

---

[8] O artigo que trouxe o teorema da incompletude ao conhecimento da comunidade matemática foi publicado em 1931 na revista *Monatshefte für Mathematik und Physik*, sob o título, em alemão, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Verwandter Systeme (Sobre proposições formalmente indecidíveis nos Principia Mathematica e sistemas correlatos).* Em 1930, em Königsberg num congresso sobre Epistemologia das Ciências Exatas Gödel apresentou os resultados que no ano seguinte foram trazidos ao público.

[9] A perplexidade segundo Bornhein (1976) é o que move o pensar filosófico e ocorre no movimento de pensar algum assunto iniciando-se por alguma intranquilidade e se abrasa produzindo dúvida e desabrochando na perplexidade que pode nos mover num percurso de busca por conhecer que se dá por meio de questionamentos, investigação, diálogo, esclarecimentos, respostas, desassossegos, outras buscas, avanços, dúvidas ...

A respeito da demonstração da incompletude, do contexto matemático à época e das ideias que influenciaram Gödel, Chaitin (2002)[10] entende que Gödel levou muito a sério a descoberta do paradoxo por Bertrand Russell - aquele que explicitava que intuições lógicas, intuições matemáticas, são inconsistentes - e construiu sua teoria da incompletude sobre este paradoxo."

O empenho de Hilbert objetivava contornar o obstáculo apresentado pelo paradoxo de Russell. Hilbert seguia a tradição formal, o método axiomático, a lógica simbólica e o Formalismo, por meio de um tipo de jogo que evitava os paradoxos, uma vez que se pudesse construir e concordar com as regras em jogo. Um jogo de raciocinar matematicamente combinando símbolos. Assim, o critério para a verdade matemática poderia ser, segundo as pretensões de Hilbert à época, subjetivo, excluindo todo arbítrio humano, toda interpretação. O sistema formal proposto por Hilbert incluía um conjunto de axiomas e a linguagem formal, pretendendo com isso abarcar todas as razões matemáticas e a concordância, com pretensões de convencer as pessoas do poder da Matemática e resolver as questões filosóficas.

A ideia que Hilbert perseguia era: se a verdade matemática é realmente objetiva, se não há elemento subjetivo então uma prova matemática também será verdadeira ou falsa, independente de interpretação. “Procedendo por meio da ideia da lógica matemática, para "atomizar" a Matemática, em pequenas etapas, deixando nada de fora, nada para a imaginação, e assim uma prova poderia ser verificada automaticamente.” Chaitin (2002, p. 18, tradução nossa)[11].

[10] “He said that Bertrand Russell made the amazing discovery that our logical intuitions, our mathematical intuitions, are self-contradictory, they're inconsistent! So Gödel took Russell very seriously, he didn't think that it was all a big joke.” Chaitin (2002, p. 12).

[11] “It's important to fill in all the details-that's the idea of mathematical logic, to "atomize" mathematical reasoning into such tiny steps that nothing is left to the imagination, nothing is left out! And if nothing is left out, then a proof can be checked automatically, that was Hilbert's point, that's really what symbolic logic is all about.” Chaitin (2002, p. 18).

O termo utilizado por Chaitin (2002) e por outros matemáticos em relação ao teorema da incompletude é "descoberta". Gödel teria descoberto que o que Hilbert pretendia era impossível. Este autor explana que o que Hilbert ambicionava para a Matemática toda, Gödel descobriu que era inviável até mesmo para o conjunto de axiomas da aritmética com as operações de adição e subtração. Os limites da formalização do raciocínio matemático, explicitado pelo resultado de Gödel que lança no mundo o fenômeno da incompletude da Matemática o qual esclarece que "se você assumir que os axiomas não permitem que você prove falsos teoremas, então [o conjunto de axiomas] será incompleto, haverá teoremas verdadeiros que não podem ser provados com esses axiomas." Chaitin (2002, p. 19, tradução nossa)[12]

Gödel começa sua demonstração da incompletude com o paradoxo do mentiroso, aquele que afirma sobre si mesmo "eu sou falso" e que não é nem verdadeiro e nem falso, que equivale à "Esta afirmação é falsa" e prosseguiu construindo uma declaração "eu sou improvável" e "Esta afirmação é improvável". A respeito disso, Chaitin (2002) declara "Agora, se você pode construir tal afirmação na teoria elementar dos números, em aritmética, uma afirmação matemática - não sei como você faz uma afirmação matemática dizendo que é improvável, você tem de ser muito inteligente, mas se você pode fazer isso, é fácil ver que você está em apuros. Basta pensar um pouco sobre isso."[13]

A declaração "esta afirmação é improvável" se for provada é falsa e se for improvável é verdadeira.[14] Ora, o que isto significa na aritmética dos números naturais? Conforme

[12] "More precisely, it'll either be inconsistent or it'll be incomplete. So if you assume that it only tells the truth, then it won't tell the whole truth. There's no way to capture all the truth about addition, multiplication, and 0, 1, 2, 3, 4 ...! In particular, if you assume that the axioms don't allow you to prove false theorems, then it'll be incomplete, there'll be true theorems that you cannot prove from these axioms." Chaitin (2002, p. 19).
[13] "Now if you can construct such a statement in elementary number theory, in arithmetic, a mathematical statement-I don't know how you make a mathematical statement say it's unprovable, you've got to be very clever-but if you can do it, it's easy to see that you're in trouble. Just think about it a little bit." Chaitin (2002, p. 20).

[14] A noção de provabilidade utilizada é puramente mecânica, ou seja, a derivabilidade da fórmula em questão dos axiomas da lógica explicitados e por meios puramente mecânicos, as regras lógicas de inferência.

explicitamos acima de modo não particularizado, a proposição construída na aritmética dos números naturais, se for provada significa que nessa teoria, se for assumido que os axiomas não permitem que teoremas falsos sejam demonstrados, então o conjunto de axiomas é incompleto, pois não permitiu provar a proposição verdadeira, ou seja, pelo menos essa proposição verdadeira não pode ser provada com esses axiomas.

Hintikka (2000), apresenta que

> O que Gödel mostrou em detalhes de preenchimento é que sempre que uma fórmula de tal lógica de primeira ordem não pode ser refutada, no sentido de que sua negação não pode ser provada, isso pode ser interpretado como sendo verdadeira. Segue-se que, sempre que uma fórmula é verdadeira em todos as possíveis interpretação ("em todos os modelos"), pode ser provada. Hintikka (2000, p. 02, tradução nossa)[15]

Ainda a respeito da demonstração de Gödel, Chaitin (2002) comenta que existem muitos detalhes técnicos complicados, mas parece a ele que há nela muita programação[16]. Isso porque um sistema lógico pode ser considerado um método mecânico, pois se pode programar os axiomas e as regras de inferências num computador e ele processará teoremas obtidos a partir desses axiomas por essas regras.

Por falar em programação, o teorema da incompletude de Gödel abriu áreas novas da pesquisa técnica, principalmente a teoria da recursão e a teoria dos modelos, Goldstein (2008). Chaitin (2002) esclarece que Turing aprofunda o resultado de Gödel e mostra abertamente que Gödel abriu as portas da ciência da computação "ele tira do armário o computador. O computador estava implícito no artigo de Gödel, mas isso realmente não era visível para

[15] "What Gödel showed in fill detail is that whenever a formula of such a first-order logic cannot be disproved, in the sense that its negation cannot be proved, it can be interpreted so as to be true. It follows that, whenever a formula is true on every possible interpretation ("in every model"), it can be proved." Hintikka (2000, p. 02).

[16] "And Gödel's original proof is very, very clever and hard to understand. There are a lot of complicated technical details. But if you look at his original paper, it seems to me that there's a lot of LISP programming in it, or at least something that looks a lot like LISP programming. Anyway, now we'd call it LISP programming. Gödel's proof involves defining a great many functions recursively, and these are functions dealing with lists, which is precisely what LISP is all about." Chaitin (2002, p. 20). "The computer was implicit in Gödel's paper, but this was really not visible to any ordinary mortal, not at that time, only with hindsight. And Turing really brings it out in the open." Chaitin (2002, p. 21).

qualquer mortal comum, não naquele momento, apenas em retrospecto."[17] (Chaitin, 2002, p. 21, tradução nossa).

Este autor ressalta que a expectativa de Hilbert era que deveria haver um procedimento mecânico para decidir se uma prova obedece às regras, ou não. Turing avançou com a questão mostrando que nenhum sistema axiomático formal pode funcionar, enquanto Gödel demonstrou isso em relação à um sistema específico. Assim ele se expõe:

> Gödel estava realmente olhando para 0, 1, 2, 3, 4 ... e adição e multiplicação, e Turing está olhando para uma questão matemática bastante estranha, que é se um programa para ou não. É uma questão matemática que não existia à época do artigo original de Gödel. Então você vê, Turing trabalhou com conceitos completamente novos ... Mas o artigo de Gödel não é apenas tremendamente inteligente, ele teve que tenha a coragem de imaginar que Hilbert podia estar errado. Chaitin (2002, p. 24, tradução nossa).[18]

Além disso, Chaitin (2002) expõe que o teorema da incompletude faz sentido para ele quando ele assume que

> Verdade matemática é uma quantidade infinita de informações, mas qualquer determinado conjunto de axiomas tem apenas uma quantidade finita de informações, porque haverá apenas um número finito de princípios que houve concordância como as regras do jogo. E sempre que alguma declaração, qualquer afirmação matemática, envolve mais informações do que a quantidade nesses axiomas, então é muito natural escapar da capacidade desses axiomas. Chaitin (2002, p. 34, tradução nossa).[19]

O que Gödel apresentou diz respeito ao fundamento axiomático da Matemática e expõe que toda metodologia anterior de produção da Matemática era insatisfatória, pois mesmo se o

---

[17] "Turing's approach to all these questions is completely different from Gödel's, and much deeper. Because Turing brings it out of the closet! [Laughter] What he brings out of the closet is the computer! The computer was implicit in Gödel's paper, but this was really not visible to any ordinary mortal, not at that time, only with hindsight. And Turing really brings it out in the open." Chaitin (2002, p. 21).

[18] "Now Turing is really going, I think, much deeper into this whole matter. And he's showing, by the way, that it's not just one particular axiomatic system, the one that Gödel studied, that can't work, but that no formal axiomatic system can work. But it's in a slightly different context. G6del was really looking at 0, 1, 2, 3, 4 ... and addition and multiplication, and Turing is looking at a rather strange mathematical question, which is does a program halt or not. It's a mathematical question that did not exist at the time of Gödel's original paper. So you see, Turing worked with completely new concepts ... But Gödel's paper is not only tremendously clever, he had to have the courage to imagine that Hilbert might be wrong." Chaitin (2002, p. 24).

[19] But a better way to say it, is that mathematical truth is an infinite amount of information, but any particular set of axioms just has a finite amount of information, because there are only going to be a finite number of principles that you've agreed on as the rules of the game. And whenever any statement, any mathematical assertion, involves more information than the amount in those axioms, then it's very natural that it will escape the ability of those axioms. (Chaitin, 2002, p. 34).

conjunto de axiomas da aritmética de Peano fosse consistente - como Hilbert e seus seguidores ansiavam demonstrar – a incompletude coexistia junto com a hipótese da consistência. Talvez seja por isso que vários autores cientes do método de produção da Matemática – cientes que teoremas são verdades obtidas por derivação utilizando as regras lógicas de inferência - apresentam o teorema de Gödel como uma descoberta, parece-nos fazer sentido a perspectiva, pois o teorema da incompletude demonstra que na hipótese de os axiomas de Peano serem formalmente consistentes (nenhuma afirmação falsa ser provável com esses axiomas – excluindo a possibilidade de paradoxos), isso não seria suficiente porque pode acontecer que nem todas as verdades possam ser provadas no sistema. Assim, a prova da consistência dos axiomas da aritmética almejada por Hilbert não era suficiente para resolver as dúvidas instaladas nos fundamentos da Matemática pela descoberta dos paradoxos.

Da Silva esclarece o que seria uma forma direta de demonstrar a consistência:

> Um modo direto de se demonstrar a consistência de um sistema axiomático formal é simplesmente mostrar que nenhuma demonstração formal no contexto desse sistema termina numa contradição manifesta [...], ou seja, nenhuma contradição será jamais um teorema do sistema. (Da Silva, 2003, p. 30).

O teorema da incompletude de Gödel, se diz muitas vezes, que ele é uma resposta de impossibilidade de resolução do problema da consistência dos axiomas de Peano, porém, é possível entendermos mais detalhadamente essa questão. O teorema da incompletude não demonstrou que os axiomas de Peano são inconsistentes, mas que, se eles fossem consistentes ainda assim haverá verdades não demonstráveis no sistema, ou seja, no sistema formal da aritmética de Peano é inevitável a existência de fórmulas verdadeiras que não podem ter suas existências expressas na forma de uma demonstração, como idealizava a escola formalista. Verdades sem demonstração necessariamente coexistem na complexidade da Matemática com as verdades demonstradas e com os problemas sem solução.

Goldstein (2008) apresenta que a prova da completude da lógica límpida[20] elaborada por Gödel no doutorado pareceu trivial, uma vez que provou o que todos já aceitavam como verdade, porém ela pode ter trazido à Gödel a possibilidade de haver proposições aritméticas verdadeiras, mas não demonstráveis dentro do sistema formal da aritmética. A respeito disso, assim se expressa a autora:

> Mas a dificuldade da prova - a prova substantiva com vários passos, que foi exigida - deveria ter impressionado as pessoas como algo inesperado, até alarmante. Ao mostrar como era complicado provar realmente a completude da lógica límpida, Gödel estava dando margem à possibilidade de que outros sistemas formais consistentes – aqueles, por exemplo, enriquecidos pelos axiomas da aritmética – pudessem não ser completos. Goldstein (2008, p. 130).

Em nosso entendimento, a provável hipótese que Gödel teria elaborado ao realizar a prova da completude da lógica teria apontado o caminho de desviar-se de enfrentar esse problema, supondo verdadeira a coerência do sistema e estabelecendo a incompletude.

É sabido que a tentativa de fornecer uma prova de consistência relativa da análise levou Gödel ao teorema da incompletude. Em Davis (2005, p. 231 apud Bernays, 1938, p. 82), uma afirmação de Gödel

> É misterioso porque Hilbert queria provar diretamente a consistência da análise por métodos finitários. Eu vi dois problemas distinguíveis: provar a consistência da teoria dos números pela teoria dos números finitários e provar a consistência de análise pela teoria dos números. ... Comecei abordando a segunda parte: provar a consistência da análise em relação à teoria dos números inteiros. Davis (2005, p. 231, tradução nossa).[21]

Sobre sua escolha da abordagem do problema, Gödel explica que um modelo aritmético de análise é uma relação aritmética de existência que satisfaz o axioma de compreensão, qual seja, $(\exists n)\ (x)\ x \in n \equiv \varphi\ (x)$. Continuando, ele expõe:

---

[20] "O que Gödel fizera foi provar a completude do que se denomina "cálculo de predicados" ou, às vezes, "lógica de primeira ordem" ou "lógica quantificacional". Não importam os nomes feios, que espantam as almas poéticas. Vamos rebatizar o sistema de lógica formal em questão de "lógica límpida". Goldstein (2008, p. 126-127).

[21] "It is mysterious why Hilbert wanted to prove directly the consistency of analysis by finitary methods. I saw two distinguishable problems: to prove the consistency of number theory by finitary number theory and to prove the consistency of analysis by number theory. ... I began by tackling the second half: to prove the consistency of analysis relative to full number theory." Davis (2005, p. 231).

> Se o último "φ (x)" é substituído por "φ (x) é demonstrável", a relação de existência pode ser facilmente definida. No entanto (e este é o ponto decisivo) decorre da solução correta dos paradoxos da semântica de que a "verdade" das proposições de uma linguagem não pode ser expressa na mesma linguagem, embora provável (sendo uma relação aritmética) pode. Portanto, verdadeiro não coincide com provável. Davis (2005, p. 231, tradução nossa).[22]

Essa escolha explicitada acima é entendida por nós como nuclear na elaboração da demonstração da incompletude, uma vez que ela expressa a razão da estratégia utilizada por Gödel na criação de uma proposição que é verdadeira porque diz que não é dedutível. Para a elaboração da proposição, Gödel criou a enumeração, que associa, de forma unívoca, um número natural a cada símbolo, a cada sentença, a cada sequência de sentenças. A enumeração foi criada especificamente para isso.

Entendemos que o teorema de Gödel é belo em vários aspectos, a saber, pela estética do raciocínio empregado, pelo ferramental utilizado, pelo método criado para a elaboração da proposição indecidível, pela articulação das ideias que conduzem a argumentação, pelo encadeamento dedutivo do primeiro teorema da incompletude produzindo o segundo teorema que explicita aspectos latentes no primeiro, e não somente isso.

Nossa experiência com a realização de uma demonstração deste teorema nos possibilitou compreender o sentido de esteticamente agradável, perceber o labor na elaboração original de Gödel e o sentido de ser um teorema iluminativo. A demonstração do teorema da incompletude de Gödel é extremamente elegante, no sentido apresentado nesse texto. A elegância tomada como um empenho que se relaciona à forma de apresentação do resultado também enlaça o sentido do belo pela clareza que ele traz consigo e viabiliza a compreensão da verdade na dimensão da metamatemática.

[22] "For an arithmetic model of analysis is nothing else but an arithmetical $\in$-relation satisfying the comprehension axiom: $(\exists n)\,(x)\; x \in n \equiv \varphi(x)$. Now if in the latter "φ(x)" is replaced by "φ(x) is provable", such an $\in$-relation can easily be defined. However (and this is the decisive point) it follows from the correct solution of the semantic paradoxes that the "truth" of the propositions of a language cannot be expressed in the same language, while provability (being an arithmetical relation) can. Hence true $\not\equiv$ provable." Davis (2005, p. 231).

O teorema de Gödel, em suas enunciações, promove abertura para compreender o alcance de sistemas formais que incluem os axiomas de Dedekind- Peano para a Aritmética dos números naturais. E mais: eles são apresentados como duas pérolas no contexto da metamatemática, uma na sequência da outra. A nosso ver eles são belos porque clareiam e expressam formalmente o estado de autoconsciência da própria Matemática a respeito das possibilidades do que pode ser considerado como verdade matemática e consequentemente do que é Matemática.

O teorema da incompletude de Gödel é um clarão na Matemática a respeito da busca por um sistema de axiomas consistente e completo. Ele, que estabelece a incompletude da aritmética e de sistemas correlatos, possibilitou que análises lógicas e filosóficas sobre a Matemática do século XX ocorressem, implicou em mudanças conceituais sobre objetos matemáticos, tornou possível a percepção de diferentes visões do conhecimento matemático e trouxe para a Matemática técnicas metamatemáticas antes inexistentes.

Na/para a demonstração do primeiro teorema da incompletude, Gödel produziu na metamatemática uma sentença matemática verdadeira e mostrou que a proposição correspondente a ela não pode ser demonstrada como tal na Aritmética dos números naturais. Na elaboração da demonstração, ele encadeou uma dedução e uma argumentação que trouxe à luz o segundo teorema que estabelece que a teoria da Aritmética com o método formal da Matemática não pode demonstrar sua própria consistência.

Uma vez que, a sentença indecidível foi criada pelo método da aritmetização da metamatemática que mapeou a metamatemática na aritmética e, dada a argumentação de Gödel, a partir da sentença indecidível obtida no primeiro teorema, pode ser obtida a generalização do resultado. Assim, o teorema de Gödel foi demonstrado por meio da técnica da aritmetização da metamatemática que ele próprio criou valendo-se do ferramental dos sistemas formais e sua generalização, devido ao seu método de mapeamento da metamatemática ele afirma que na Aritmética se a consistência da teoria for verdadeira ela não pode ser matematicamente demonstrada dentro do sistema.

O impacto matemático e cultural do teorema da incompletude deve-se ao raciocínio utilizado por Gödel. Em pormenores, ele mapeou declarações sobre o sistema de axiomas de axiomas da Aritmética dos números naturais em declarações sobre números. Por meio do raciocínio empregado o sistema de axiomas pode expressar-se sobre si mesmo. O processo do mapeamento da Metamatemática na Aritmética inicia-se com a Numeração de Gödel, que numera símbolos, fórmulas e sequências de fórmulas e com isso, a metamatemática (da aritmética) fica completamente aritmetizada.

A respeito desse passo da prova do teorema de Gödel, Becker (1965) expressa-se:

> Gödel conseguiu realizar esta proeza pelo seguinte passo genial, a que se deu o nome de "aritmetização da metamatemática". Parte de que, considerada exteriormente, uma fórmula lógico-matemática é uma sequência finita de sinais para constante, variáveis e números lógicos, e que um argumento matemático total (uma demonstração ou toda uma teoria) é uma sequência finita de sequências finitas de sinais. Gödel numerou todos os sinais (o que se pode fazer de diferentes maneiras[23]), e conseguiu assim uma correspondência biunívoca entre expressões lógico matemáticas e sequências finitas. E já que é possível ordenar de diferentes modos, sequências finitas de números e fazer corresponder biunivocamente a outras, argumentos inteiros podem ser substituídos por números. (Becker, 1965, p. 150).

A respeito da numeração, ele definiu os números de Gödel que relacionam os símbolos elementares e as variáveis de um sistema de axiomas aos números naturais, e assim, qualquer combinação desses símbolos e variáveis, isto é, qualquer fórmula aritmética ou sequência de fórmulas que podem ser construídas – são relacionadas ao seu próprio e único número de Gödel.

O processo permite que não somente essas, mas também as declarações metamatemáticas, que são declarações sobre fórmulas aritméticas, possam ser traduzidas em

[23] Becker (1965) explica que Quine (1950), em *Methode of Logic*, apresenta outro método, muito simples e muito elegante de "aritmetização" e distinto do apresentado por Gödel na demonstração da incompletude de 1931. Becker (1965, p. 151).

fórmulas com seus próprios números de Gödel. Os números de Gödel podem ser gerados para todas as fórmulas, sejam elas verdadeiras ou falsas, e por meio dos números de Gödel podemos falar sobre essas fórmulas falando de números inteiros. O mapeamento funciona porque os números de Gödel são inteiros e números inteiros são fatorados em números primos de uma única maneira.

Por meio da aritmetização da metamatemática e por meio da argumentação ele constrói uma fórmula G, que tem um número de Gödel, a qual afirma por si mesma que não pode ser provada. A verdade da fórmula G é indecidível. Para a construção de G, o principal *insight* de Gödel foi a substituição do número de Gödel da própria fórmula na própria fórmula. Pode-se ver em Nagel e Newman (1973) a realização desse passo da prova de Gödel por meio de um exemplo.

Uma vez construída a fórmula G, pergunta-se G pode ser provada? Se sim, isso significa que existe uma sequência de fórmulas que é a demonstração da fórmula G, mas isso é o oposto do que afirma G. Se um sistema é consistente declarações opostas não podem ser ambas verdadeiras e daí resulta que G é indecidível, no entanto G é claramente verdadeira. Uma vez que a fórmula G é verdadeira, mas indecidível dentro do sistema axiomático usado para construí-la esse sistema está incompleto. O sistema além de estar incompleto é incompletável. Gödel mostrou que o sistema axiomático acrescido desse axioma ulterior (G), de forma semelhante ao projeto empreendido para construir G, permite que uma nova e verdadeira fórmula G' seja obtida.

Considerações finais

Do exposto acima compreendemos que Gödel teve junto a si - enquanto está trabalhando na elaboração da demonstração do teorema da incompletude - o *know-how* de ter realizado a prova da completude da lógica límpida, possivelmente antevendo a possibilidade de o sistema formal da aritmética não ser completo. Essa evidência foi decisiva para a abordagem do problema da consistência, supondo-a verdadeira e estabelecendo a incompletude.

Outro ponto que se mostrou importante para nós é o fato de Gödel ter compreendido que o problema da consistência da análise possuía duas partes e ter trabalhado primeiramente na segunda parte. Isso difere do trabalho que vinha sendo realizado por Hilbert e seus seguidores os quais atacavam diretamente o problema da consistência da análise.

Na abordagem inicial do problema da consistência da análise, conforme explícito em Davis (2005), Gödel tem clareza que o axioma da compreensão é central e que a verdade das proposições de uma linguagem não pode ser expressa na mesma linguagem, embora pudesse ser provável, se a verdade fosse estabelecida como uma relação aritmética. Ele próprio assume que esse é o ponto decisivo. Em nosso entendimento, decorre daí a articulação que Gödel estabelece entre a metamatemática e a aritmética por meio do mapeamento que permite a criação da sentença e posteriormente a conclusão de que verdade e demonstrabilidade não são sinônimos na Matemática.

A numeração de Gödel, a descrição de um cálculo formalizado dentro do qual se pode expressar notações e relações aritméticas é uma adaptação do sistema desenvolvido no *Principia Mathematica*. Ele criou um método para investigar a estrutura: aritmetizou completamente o cálculo formal utilizando o teorema fundamental da aritmética[24], ele apresenta o mapeamento que estabelece a correspondência um a um de um certo conjunto dos números inteiros com as expressões do cálculo. A articulação realizada por Gödel é de uma "engenhosidade admirável", Nagel e Newman (1973, p. 71). Com a criação desse método ele permitiu explorar questões metamatemáticas investigando relações aritméticas de números inteiros, que é o que o ponto decisivo, como afirmamos acima.

---

[24] O Teorema Fundamental da Aritmética aqui enunciado como "Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou pode ser escrito de forma única, a menos da ordem dos fatores, como produto de números primos" garante a existência da representação de um número natural maior do que 1 como um produto de seus divisores primos e garante que essa representação é única.

Por meio do espelhamento providenciado pelo mapeamento Gödel construiu a fórmula G que representa o enunciado metamatemático “A fórmula G não é demonstrável”. Mesmo olhando em retrospectiva para o resultado e sabendo que a apresentação de um teorema na comunidade matemática esconde as idas e voltas desnecessárias, nós entendemos que Gödel fez de modo ascendente o passo a passo da argumentação – que em Nagel e Newman (1973) são cinco. A sinfonia maravilhosa é o quinto passo em que ele funda o enunciado metamatemático “se a aritmética é consistente ela é incompleta” que tem seu correspondente dentro da aritmética. A etapa final é a conclusão (se a aritmética é consistente sua consistência não pode ser estabelecida por nenhum raciocínio metamatemático que possa ser representado no âmbito do formalismo da aritmética) é obtida do fato de ser impossível, se a aritmética é consistente.

A exploração do mapeamento é a chave do argumento, o possibilitador da construção da fórmula. A ideia de mapear estava presente na Matemática, por exemplo, Hilbert mapeou a geometria sobre a álgebra enquanto outros mapearam a relação entre figuras sobre o plano e figuras sobre a superfície esférica. Segundo Nagel e Newman (1973), o aspecto básico do mapeamento estimulou Gödel a construir sua prova.

De nossa perspectiva, a beleza do teorema da incompletude é principalmente devido à articulação que Gödel produziu do ferramental lógico e matemático, de sua visão analítica da questão, das habilidades adquiridas em trabalhos anteriores - principalmente a prova da completude da lógica de predicados -, de intuições que o instigaram não somente a realizar a prova e sim a escolher o caminho que ele avaliou mais eficaz.

Referências

Batistela, R. F., Barbariz, T. A. M., Lazari, H. (2016). Um estudo sobre demonstração matemática por/com computador. *Revemat,* 11, p. 204-215.

Becker, O. (1965). Os limites do pensamento matemático. In: O. Becker. *O pensamento matemático:* suas grandezas e seus limites (pp. 114-189). Herder Editorial.

Bicudo, M. A. V., & Klüber, T. E. (2021) Experiências Estéticas em Educação Matemática: um olhar fenomenológico. In: R. S. R. SILVA & R. C. Idem (orgs.). *Experiências Estéticas em Educação Matemática* (pp. 25-80). Editora Fi.

Bourbaki, N. (1950). The Architecture of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 57 (4), p. 221-232.

Brolezzi, A. C., & Ota, I. N. N. (2018). Arte, Educação Matemática e Empatia: algumas reflexões. *Revemat*, 13 (2), p. 228-249. https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2018v13n2p228

Chaitin, G. J. (2002). *Conversations with a Mathematician*: Math, Art, Science and the Limits of Reason. Springer-Verlag London.

Da Silva, J. J. (2007). *Filosofias da Matemática*. Editora UNESP.

Davis, M. (2005). What Did Gödel Believe and When Did He Believe It? *The Bulletin of Symbolic Logic*, 11(2), p. 194-206.

Ferreira, F. (1995). *No paraíso, sem convicção…* uma explicação do programa de Hilbert. In J. F. Coelho (org.). Matemática e Cultura II. Lisboa: Centro Nacional de Cultura e SPB Editores.

Ghys, E. (2015). *A beleza da matemática*. Palestra para Academia Brasileira de Ciências. https://www.abc.org.br/2015/05/15/a-beleza-da-matematica

Gödel, K. (1977). Acerca das Proposições Formalmente Indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos. In M. Lourenço (org.). *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo* (pp. 245-290). Fundação Calouste Gulberkian.

Goldstein, R. (2008). *Incompletude: a prova e o paradoxo de Kurt Gödel*. Tradução de I. Koytowski. Companhia das Letras.

Hintikka, J. (2000). *On Gödel*. Wadsworth/Thomson Learning.

Kant, I. (1995). *Crítica da faculdade do juízo*. Tradução de Valério Rohden e António Marques. Editora Forense Universitária

Poincaré, J. H. (1946). *Ciencia y método*. Espasa-Calpe Argentina S. A.

Poincaré, J. H. (1984). *A Ciência e a Hipótese*. Tradução de Maria Auxiliadora Kneipp. Editora Universidade de Brasília.

Rota, G. C. (1997). The Phenomenology of Mathematical Beauty. *Synthese*, 11 (2), p. 171-182.

Silva, R. S. R., & Idem, R. C. (2021). Experiências Estéticas em Educação Matemática: Apresentação. In: R. S. R. SILVA & R. C. Idem (orgs.). *Experiências Estéticas em Educação Matemática* (pp. 25-51). Editora Fi.

Zeki, S., Romaya, J. P., Benincasa, D. M. T., Atiyah, M. F. (2014). The experience of mathematical beauty and its neural correlates. *Frontiers in Human Neuroscience.* 8 (Artigo 68), p. 1-12.