ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i2p108-146

Relações entre matemática e filosofia na emergência da matemática pura: a matemática como fundamento da pensabilidade

Relations between mathematics and philosophy in the emergence of pure mathematics: mathematics as the foundation of thinkability

Las relaciones entre las matemáticas y la filosofía en el surgimiento de la matemática pura: las matemáticas como fundamento del pensamiento

Les relations entre les mathématiques et la philosophie dans l'émergence des mathématiques pures : les mathématiques comme fondement de la pensabilité

Vinicius Linder[1]
Universidade Federal do Rio de Janeiro
https://orcid.org/0000-0003-3730-4633

Gert Schubring[2]
Universität Bielefeld
https://orcid.org/0000-0002-4093-1091

Resumo

Neste artigo, investigamos as tensões e ingerências entre filosofia e matemática no contexto da emergência da matemática pura na Prússia, no século XIX. É bem conhecida, na historiografia, a ocorrência de uma virada epistemológica na matemática nesse século, que viria a reestruturar as concepções internas de seus objetos, em detrimento de uma noção quantitativa e a partir de uma concepção relacional. Argumentamos aqui que essa mudança perpassa, justamente, o entendimento kantiano de que, ao lidar com juízos sintéticos a priori, a matemática se conceberia como fundamento da pensabilidade. Nosso percurso então se faz por meio da investigação de manifestações dessas noções nos trabalhos de dois autores: Jakob Fries, filósofo da ciência e da matemática do início do século, e Hermann Grassmann, matemático, cuja obra viria a influenciar novas concepções na segunda metade do século. Nossa pesquisa identifica, nas perspectivas e práticas de Fries e Grassmann, uma unidade conceitual, em torno

[1] lindervinicius@gmail.com
[2] gert.schubring@uni-bielefeld.de

da reflexão fundacional da matemática a partir de estruturas abstratas do pensar. Essa constatação revela, por outro lado, a intervenção de práticas e referências filosóficas no interior da prática matemática, produzindo tensões e abarcando um relevante papel na mudança epistemológica em questão.

Palavras-chave: Filosofia da Matemática, Matemática Pura.

Abstract

In this paper, we investigate the tensions and interferences between philosophy and mathematics in the context of the emergence of pure mathematics in Prussia in the 19th century. In historiography the occurrence of an epistemological turn in mathematics in that century is well known. Such occurrence came to restructure the internal conceptions of its objects, in detriment of a quantitative notion and instead from a relational conception. We argue here that this change was facilitated, precisely, by the Kantian understanding that mathematics, by dealing with synthetic a priori judgments, would conceive itself as the foundation of thinkability. Our approach resides upon investigating how these notions were addressed and conceived of in the works of two authors: Jakob Fries, philosopher of science and mathematics at the beginning of the 19th century, and Hermann Grassmann, mathematician whose work would influence new conceptions by the second half of that century. Our research identifies, in the perspectives and practices of Fries and Grassmann, a conceptual unity, regarding the foundational reflection of mathematics from abstract structures of thinking. This finding reveal, on the other hand, the intervention of philosophical practices and references within the mathematical practice, producing tensions and encompassing a relevant role in the epistemological change in question.

Keywords: Philosophy of mathematics, Pure mathematics.

Resumen

En este artículo se investigan las tensiones e interferencias entre la Filosofía y las Matemáticas en el contexto del surgimiento de la Matemática Pura en Prusia en el siglo XIX. Es bien conocida, en la Historiografía, la ocurrencia de un giro epistemológico en las Matemáticas en este siglo, que vendría a reestructurar las concepciones internas de sus objetos, en detrimento de una noción cuantitativa y desde una concepción relacional. Argumentamos aquí que este cambio pasa, precisamente, por el entendimiento kantiano de que las Matemáticas, al tratar con juicios sintéticos a priori, se concebirían a sí mismas como el fundamento de la pensabilidad. Nuestro recorrido se realiza entonces a través de la investigación de las manifestaciones de estas nociones en las obras de dos autores: Jakob Fries, filósofo de la Ciencia y las Matemáticas de principios del siglo XIX, y Hermann Grassmann, matemático cuya obra influiría en las nuevas concepciones de la segunda mitad de ese siglo. Nuestra investigación identifica, en las perspectivas y prácticas de Fries y Grassmann, una unidad conceptual, en torno a la reflexión fundacional de las Matemáticas a partir de estructuras abstractas de pensamiento. Esta constatación revelaría, por otra parte, la intervención de prácticas y referencias filosóficas dentro de la práctica matemática, produciendo tensiones y abarcando un papel relevante en el cambio epistemológico en cuestión.

Palabras clave: Filosofía de la matemática, Matemática pura.

Résumé

Dans cet article, nous étudions les tensions et les interférences entre la philosophie et les mathématiques dans le contexte de l'émergence des mathématiques pures en Prusse au XIXe siècle. Il est bien connu, dans l'historiographie, l'occurrence d'un tournant épistémologique en mathématiques au cours de ce siècle, qui viendrait restructurer les conceptions internes de ses objets, au détriment d'une notion quantitative et à partir d'une conception relationnelle. Nous soutenons ici que ce changement passe, précisément, par la compréhension kantienne que les mathématiques, en traitant des jugements synthétiques a priori, se concevraient comme le fondement de la pensabilité. Notre parcours se fait ensuite à travers l'investigation des manifestations de ces notions dans les œuvres de deux auteurs : Jakob Fries, philosophe des sciences et des mathématiques au début du siècle, et Hermann Grassmann, mathématicien dont les travaux influenceront les nouvelles conceptions dans la seconde moitié du siècle. Notre recherche identifie, dans les perspectives et pratiques de Fries et Grassmann, une unité conceptuelle, autour de la réflexion fondatrice des mathématiques à partir de structures de pensée abstraites. Ce constat révèle, d'autre part, l'intervention de pratiques et de références philosophiques au sein de la pratique mathématique, produisant des tensions et englobant un rôle pertinent dans le changement épistémologique en question.

Mots-clés : Philosophie des mathématiques, Mathématiques pures.

Relações entre matemática e filosofia na emergência da matemática pura: a matemática como fundamento da pensabilidade

Ao longo dos séculos XVII e XVIII, é possível encontrar um intenso desenvolvimento das ciências matemáticas no contexto das ciências naturais, orientadas sobretudo a partir da tradição determinista do pensamento científico. Nesta concepção, a realidade e a natureza encontram-se determinadas através de suas relações de causalidade, as leis naturais, expressas por suas equações matemáticas.

Com efeito, esta tradição sugere que não só os princípios da realidade estariam submetidos à matemática como também o contrário se sucede: em que pese ser um saber eminentemente teórico, os princípios da própria matemática deveriam identificar-se nas condições dadas pelo real[3]. Assim, evidencia-se aqui uma matemática vinculada à realidade, de forma que seus objetos têm sua "cidadania" legitimada por sua conexão com os fenômenos do real. Em outras palavras, a concepção da matemática deste período teria um viés estritamente ontológico: seus objetos demandariam existência “concreta” ou “real”, envolvida diretamente com sua interpretação geométrica.

Um exemplo dessa tradição reside no entendimento quantitativo do conceito de número. No espírito desta concepção, pouco se distingue a grandeza do número, de forma que a legitimidade, por exemplo, dos números negativos enquanto objetos numéricos de fato acaba por ser rejeitada em vista do substancialismo que envolve esse paradigma. Como aponta Schubring (2005), tal entendimento numérico seria a expressão deste paradigma:

> "Hence, advances in concepts on negative quantities in the eighteenth century make it increasingly clear that only absolute numbers were accepted as legitimate number objects. Something that first emerged in a completely implicit way within fields of application finally became formulated increasingly explicitly as a precondition, as a consequence of reflections on foundations. This number concept was the expression of a quantity concept pervading the whole of mathematics that simultaneously aimed to ensure ontological ties to a “reality” (of whatever kind)." (Schubring, 2005, p. 481)

[3] O termo “real” aqui refere-se ao mundo físico em sua concretude, cuja existência de objetos é mediada pelos sentidos.

Já na segunda metade do século XVIII esta concepção da matemática teria levantado uma suspeita pessimista de seus proponentes quanto à sua possível estagnação teórica, como expressa em uma carta de Lagrange a d'Alembert, em 1772: "*ne vous semble-t'il pas que la haute géométrie va un peu à decadence? (...) Elle n'a d'autre soutien que vous et M. Euler*"[4] (Struik, 1987, p.136). Essa desconfiança encontraria consonância na extensa produção do campo no século XVIII, que teria então já atingido o apogeu de seus grandes resultados.

A partir do século XIX, entretanto, parece haver uma mudança de cenário, influenciada pela emergência das universidades da Prússia no contexto internacional. Ao contrário do que acontecia na França, onde a predominância da Ècole Polytechnique norteava práticas matemáticas tributárias dessa tradição tecnicista, desenvolvia-se na Prússia, um dos estados alemães, uma "nova" matemática, baseada nos valores neo-humanistas. Esta nova visão da matemática posiciona-se então sobre uma nova base epistemológica, ao propor o afastamento de seus pressupostos empíricos em vista de uma matemática "pura"[5].

A caracterização de uma nova matemática, aqui entendida como "pura", identifica-se nos novos objetos e elementos que emergem no século XIX. Se pode citar, por exemplo, as novas geometrias não euclidianas, as álgebras não comutativas, bem como o novo conceito de número, que aqui supera sua concepção quantitativa. De forma geral, esta reinterpretação de velhos objetos, e introdução de novos, representaria uma nova concepção de matemática, orientada, sobretudo, por uma nova perspectiva ontológica. A matemática deixaria de ser compreendida como uma "ciência das quantidades" em vista de ser concebida como uma "ciência das relações".

---

[4] "Não lhe parece que a sublime geometria está tendendo à decadência? Ela não tem outro suporte que não você e o Sr. Euler"

[5] O termo "puro" deve ser entendido não apenas em oposição ao "aplicado" mas, de forma geral, ao "empírico".

Esta virada epistemológica da matemática ocorrida no século XIX, entendida como um fenômeno inicialmente restrito à Prússia, é inserida por Schubring (1981) em um contexto de disciplinarização e institucionalização da matemática. Tal processo demandaria o reconhecimento social da atuação de uma comunidade científica e sua contrapartida institucional. Nesse sentido, a emergência de uma matemática "pura", independentemente de suas aplicações, bem como o desenvolvimento de uma metodologia própria, legitimariam o processo de institucionalização, que levaria a matemática à sua autonomia científica. Se fazia, assim, a necessidade de renovação da visão interna sobre os princípios e metaconcepções.

Nesse contexto de formação de uma nova cosmovisão da matemática pura, encontrar-se-ia o privilegiamento das bases epistemológicas fornecidas pela filosofia de Immanuel Kant (1742-1804), em sua Crítica da Razão Pura. Ao consagrar a matemática pura como o sumo exemplar da existência de juízos sintéticos a priori, Kant garantiria a ela a possibilidade da produção de novos conhecimentos. O encontro dessas ideias filosóficas com a produção matemática é ressaltado também por Roque (2012):

> O estilo dos matemáticos alemães da época pode ser explicado, em grande parte, pela proximidade com a faculdade de filosofia e pelo contato com os filósofos. Promoviam-se, assim, orientações mais teóricas, motivadas também por pressuposições filosóficas. O grupo dos neokantianos do início do século XIX, que se opunha ao idealismo de Hegel, exerceu forte influência sobre diversos matemáticos alemães algumas décadas depois. Os valores neo-humanistas enxergavam a matemática como uma ciência pura, o que era expresso na visão de vários pensadores da época. Os conceitos fundamentais deviam ser definidos por meio de outras definições claramente explicitadas e nunca se basear em intuições. (Roque, 2012, p. 419)

Diante do exposto, este trabalho tem como foco a análise das relações entre filosofia e matemática, no contexto da emergência da matemática pura na Prússia, no século XIX, buscando ressaltar a relevância de trabalhos que exercitam essa relação. Nosso ponto central se constitui no argumento de que as contribuições desse contexto orientaram a concepção da matemática, em torno do entendimento desta como um fundamento da pensabilidade e, dessa forma, uma ciência voltada às suas estruturas abstratas. Tendo as produções da filosofia pós kantiana como norte, entendemos como necessário inicialmente empreender uma breve revisão teórica em torno da obra de Kant. Em seguida, buscaremos tratar de alguns personagens os quais nos são relevantes às concepções emergentes da matemática pura. Privilegiamos então, na terceira seção, a discussão da obra do filósofo Jakob Fries (1773-1843), o qual apresenta contribuições consideráveis neste sentido. Na quarta seção, trataremos da obra do matemático Hermann Grassmann (1809-1877), como um exemplo prático significativo de considerações sobre as concepções da matemática pura. Na verdade, em ambos os personagens, tentaremos nos ater não apenas às concepções que estes apresentam, mas sobretudo a como essas concepções se identificam nas práticas apresentadas em suas obras de referência.[6]

A filosofia da matemática de Immanuel Kant

As primeiras concepções de Kant relativas à filosofia da matemática surgem em sua fase pré-crítica. Destaca-se aqui seu texto de 1763, "Tentativa de introduzir a concepção de Quantidade Negativa na Filosofia". Na primeira seção do texto, Kant lança mão de discussões relativas à fundamentação dos números negativos, no que diz respeito sobretudo à sua significação perante a ausência de quantidade, ou seja, ao "nada".

A proposta de Kant, neste caso, visa a relativização do significado deste "nada", entre a categoria lógica (ou filosófica) e a matemática. Segundo Kant, uma oposição lógica consiste na simultaneidade da afirmação e da negação de uma mesma coisa. O produto dessa oposição lógica é o nada absoluto, ou seja, a contradição da própria possibilidade de existência. Por outro lado, uma oposição real refere-se à situação de dois predicados que se anulam, tais como movimentos em direções opostas. Neste caso, o produto desta oposição é, em essência, algo, ainda que seja relativamente nulo, de forma a ser um nada relativo. Em um olhar mais

[6] Todas as traduções de citações das obras de Fries e Grassmann foram feitas pelo primeiro autor deste artigo.

abrangente sobre as concepções dos números reais, Schubring (2005) caracteriza a importância desta abordagem:

> By means of this conceptual differentiation, Kant successfully deontologized the "nothing" in mathematics, attributing to it the exclusively relational character of the zero. This relativization at the same time accepted that negative numbers enjoyed the mathematical status of real numbers. The important step away from metaphysics, and toward the program of algebraization of mathematics, this meant was rapidly adopted in Germany, whereas France and England did not follow suit for a long time to come. (Schubring, 2005, p. 141)

É notável, também, que tal distinção vem a antecipar as próprias distinções dos conhecimentos da filosofia e da matemática por ele apresentadas posteriormente.

Ao longo do texto da Crítica da Razão Pura[7] (CRP), sua primeira e principal obra da fase crítica, não se encontra referência direta ao termo "filosofia da matemática". No entanto, não faltam considerações sobre as concepções fundacionais da matemática, além de reflexões metodológicas desta, sobretudo como um projeto efetivo de ciência.

De forma geral, na CRP, Kant inaugura o que chama de crítica ao dogmatismo filosófico vigente na filosofia, de forma a tomar como inconsistente toda a produção filosófica que o antecede. O sentido de "crítica" aqui se traduz em dupla acepção do termo, de forma a assumir, primeiramente, uma denúncia, sob a qual Kant visa apontar os equívocos que a filosofia precedente teria cometido ao não traçar com precisão os limites da racionalidade em sua relação com os entes, o que caracteriza um sentido negativo de sua crítica. Por outro lado, o sentido positivo da crítica kantiana se identifica numa "mudança de foco" do fazer filosófico, de modo que a relação das coisas com sua pensabilidade sutilmente renegaria o fazer ontológico em vista da preponderância dos fenômenos. De outro modo, isso significará dizer que as representações dos seres não se regulam pelos seres em si mesmos, mas pelas nossas condições e modos de representação. Desse modo, para Kant, o que acessamos dessas coisas

[7] Via de regra, utilizamos aqui a tradução portuguesa de 2005, editada pela Fundação Calouste Gulbenkian.

ou objetos do mundo é o seu fenômeno, ou seja, aquilo que delas acessamos de acordo com nossas condições de possibilidade de conhecê-las. O estudo dessas condições de possibilidade torna-se, portanto, o elemento privilegiado da teoria do conhecimento transcendental de Kant, tal como este a define:

> Chamo transcendental a todo o conhecimento que em geral se ocupa menos dos objetos, que do nosso modo de os conhecer, na medida em que este deve ser possível a priori. Um sistema de conceitos deste gênero deveria denominar-se filosofia transcendental. (Kant, 2005, B 25)

Nesta mudança de referencial consistirá na virada epistemológica de Kant, a qual seria por ele próprio entendida como uma "revolução copernicana" do pensamento. Diante desta, na qual o sujeito torna-se o elemento central do conhecimento, os objetos passam a ser regulados pelas condições de conhecimento do sujeito, estas últimas relacionadas às suas estruturas cognitivas a priori.

Kant então iniciará todo um sistema de concepções obtidas a partir do ato reflexivo em torno destas condições. Seu objetivo, em parte, se volta à possibilidade de produção de uma ciência que segue o que chama de uma "via segura". O que asseguraria, no entanto, a validade de uma ciência para Kant? Tal segurança encontra-se na distinção do tipo de juízo que essas ciências emitem, bem como na correspondência entre os conceitos gerados e *intuições puras*.[8] Nesse sentido, Kant caracterizaria juízos sintéticos *a priori*, tendo em vista a sua possibilidade e ingerência nas ciências. A matemática emerge, nesse cenário, como um exemplar dessa legitimidade:

> A geometria é uma ciência que determina sinteticamente, e, contudo, a priori, as propriedades do espaço. Que deverá ser, portanto, a representação do espaço para que esse seu conhecimento seja possível? O espaço tem de ser originariamente uma intuição, porque de um simples conceito não se podem extrair proposições que ultrapassem o conceito, o que acontece, porém, na geometria. Mas essa intuição deve-

[8] O termo" intuição" (*Anschauung*) na filosofia de Kant terá um papel central e nem sempre relativo à sua acepção do senso comum, sobretudo quando este se refere à intuição pura (*Reine Anschauung*).

> se encontrar em nós a priori, isto é, anteriormente a toda a nossa percepção de qualquer objeto, sendo, portanto, intuição pura e não empírica. (Kant, 2005, B40)

O que nos será importante aqui é entender que a matemática, no sistema kantiano, se conceberá como elemento fundamental do conhecer. Na verdade, para Kant, os entes matemáticos constituem-se enquanto objetos da intuição pura, e como tais, terão papel orientador da razão humana. grosso modo, em Kant, a geometria euclidiana estudaria não as propriedades de um espaço que nos é externo e existe em si mesmo, mas as condições que a razão humana possui para conhecer, espacialmente, aquilo que lhe é externo. Com efeito, Kant se esforça em demonstrar que o espaço não seria um conceito, mas uma intuição pura, ou seja, um fundamento da nossa capacidade de conhecer.

Dessa maneira, ao constituir um dos fundamentos regulatórios da razão, a Matemática se apresentaria, na doutrina kantiana, como o exemplo paradigmático de ciência. É bem conhecida sua enunciação nos Princípios Metafísicos da Ciência da Natureza de 1786, a qual diz que em qualquer teoria particular, haveria tanta ciência quanto há de matemática. Por um lado, portanto, essa legitimação viria a impulsionar os processos de matematização das ciências e, por outro, reconceitualizar a própria matemática, posicionando-a num lugar privilegiado na organização do saber.

Jakob Fries e a *Syntaktik* como fundamento da matemática

Na primeira metade do século XIX, sob a influência do romantismo, se apresenta na Alemanha um contexto de tensão entre filosofia e ciência. Essa tensão identificar-se-ia na predominância, no contexto universitário alemão, das correntes da filosofia idealista, e é ampliada sobretudo pela ascensão dos sistemas especulativos de Fichte, Schelling e Hegel. Em contraposição à concepção rígida de ciência em Kant, esses sistemas propõem a dissolução da dicotomia entre conhecimento científico e não científico, de forma a relativizar a noção de verdade científica. Ao longo das primeiras décadas do século XIX, tais propostas produziriam uma rejeição dos cientistas às produções filosóficas:

> In contrast to Kant, later idealism, especially with Schelling and Hegel, rather constitutes a criticism of natural science (as formed by Galilei and Newton). This fact easily explains the negative attitude of some 19th century natural scientist towards post-kantian idealism as well as a growing interest in it which can be observed in several twentieth-century scientists during the crises of classical physics. (Gajdenko, 1981, p. 61)

O desenvolvimento dessa tensão ocasionaria, em resposta, na formação de uma nova filosofia da ciência na segunda metade do século, orientada diretamente por praticantes das ciências e não mais tão somente pelas escolas filosóficas. Característicos dessa nova filosofia da ciência emergente da segunda metade do século XIX são os nomes de Ernst Mach (1838-1916), Hermann von Helmholtz (1821-1894), Ludwig Boltzmann (1844-1906), e Heinrich Hertz (1857-1894).

Entretanto, paralela e um tanto alheia a essa narrativa historiográfica parece se encontrar a filosofia de Jakob Friedrich Fries (1773-1843). Fries teria desenvolvido logo no início do século XIX uma readaptação da filosofia crítica de Kant, em direção à uma extensão e aprofundamento da noção de ciência, relacionando-a às novas contribuições científicas do período. Além disso, e em particular, Fries desenvolveria uma filosofia da matemática propriamente dita a partir de sua obra *Die Mathematische Naturphilosophie*, de 1822, de forma a estender as noções já introduzidas por Kant.

Nascido em 1773, oriundo de uma educação primária religiosa, Fries inicia estudos livres em 1795, em Leipzig, e em 1797 muda-se para Jena onde, além de ingressar em estudos modernos de filosofia, adquire nível avançado em química. É notável que Fries parece ter desenvolvido precocemente as questões relativas à psicologia na filosofia de Kant que viria a desenvolver. Ele teria, à época, assumido três tarefas à sua reelaboração da filosofia kantiana: demonstrar que a crítica da razão pura era um ramo da psicologia empírica; traçar a precisa relação entre a "psicologia geral" e a "psicologia empírica"; escrever uma nova e antropológica crítica da razão (Henke, 1867, p. 44-45).

Em 1805, Fries seria admitido à cátedra de filosofia e matemática elementar em Heidelberg. Neste período, torna-se um crítico do idealismo de Fichte e Schelling, o qual se tornará predominante na Alemanha até a segunda metade do século. Em 1807, publica sua obra mais importante, sua *Anthropologische Kritik der Vernunft*, sobre a qual estabelece sua conhecida fundamentação antropológica à filosofia crítica de Kant. Já em 1816, assume as cadeiras de filosofia, matemática e física na universidade de Jena.

Os anos seguintes em Jena lhe são especialmente controversos. Políticamente, Fries era assumidamente um nacionalista liberal, de forma a apoiar as fraternidades estudantis (*Burschenschaften*). Em meio aos movimentos nacionalistas e em reação às fraternidades, em 1819 são instaurados os decretos de Karlsbad, os quais dissolvem as *Burschenschaften,* estabelecendo censura e inspeção nas universidades. Como resultado, Fries é deposto de sua cátedra, retornando apenas em 1824 como professor de matemática e física, e impedido de assumir uma cadeira em filosofia. Somente em 1838 ele recuperaria seu direito irrestrito ao ensino.

A recepção da obra de Fries também é tema bastante controverso. Para o historiador e filósofo Helmut Pulte (2006), o limitado impacto de Fries na filosofia da ciência posterior encontra-se em contraste com suas realizações nesta área. É possível apontar alguns motivos pelos quais Fries não seria suficientemente reconhecido. Por um lado, o banimento da cátedra de filosofia a partir de 1819 seria decisivo na influência exercida por Fries. Além disso, é notável a hegemonia do idealismo alemão no contexto filosófico na primeira metade do século XIX, contra o qual Fries declaradamente se opunha:

> While German academic philosophy and its historiography stuck to the idea of the predominance of philosophical speculation over empirical research, most practicing scientists turned away from German “school philosophy” and considered science and

> its history from the point of view of naive positivism. Neither view could perceive and appreciate Fries's peculiar approach and his achievements. (Pulte, 2006, p. 118)

Assim, por um lado, a primazia do idealismo de Fichte, Schelling e Hegel, contra os quais Fries se posicionava, teria prejudicado a recepção de sua reinterpretação kantiana da filosofia da ciência. Por outro lado, o neokantismo da segunda metade do século XIX, tendo em vista seu repetido esforço em um "retorno a Kant", acabaria por abdicar das produções pós Kantianas da primeira metade do século. Nesse sentido, a marca de um "psicologismo" na revisão antropológica da doutrina kantiana de Fries o tornaria desimportante aos interesses dos filósofos da segunda metade do século.

Contudo, é possível encontrar o reconhecimento da obra de Fries nos meios científicos, e em particular, entre diversos matemáticos alemães da primeira metade do século XIX. Em especial, nota-se que matemáticos como August Leopold Crelle (1780-1855), Carl Jacobi (1804-1851), Karl Heinrich Schellbach (1805-1892), Hermann Grassmann (1809-1877), dentre outros matemáticos que viriam a contribuir com os processos de emergência da matemática pura, ao menos conheciam o trabalho de Fries (Schubring, 1999, p. 186). O caso de Gauss é ainda mais notável, uma vez que se entende que ele rejeitaria, de forma geral, as concepções da filosofia de sua época. Em uma carta a Fries em 1841, Gauss expressaria uma surpreendente admiração por sua obra de história da filosofia de 1837:

> Sempre tive um grande gosto pela especulação filosófica, e agora estou ainda mais satisfeito por ter em você um guia confiável para o estudo do destino da ciência desde os tempos mais antigos até os mais recentes, uma vez que não leio os escritos de muitos filósofos em particular, os escritos de vários filósofos bem conhecidos (talvez melhores, assim chamados) que apareceram desde Kant às vezes me lembram da peneira de Bockmelker, ou, para usar a imagem moderna, da trança de Münchhausen, pela qual ele se puxou para fora da água. Esses amadores não ousariam fazer tal confissão diante de seus mestres; isso não aconteceria se eles considerassem o caso baseados em seus méritos. Muitas vezes me arrependi de não morar em sua localidade, a fim de ser capaz de colher tanta satisfação quanto instrução de um discurso filosófico. (Gauss, 1841 apud Hermann, 1994, p. 7, tradução nossa)

Dessa maneira, podemos aqui posicionar Fries como uma influência filosófica presente na produção matemática da primeira metade do século XIX.

Na obra *Mathematische Naturphilosophie* de 1822, após uma recapitulação essencial da doutrina kantiana, tal como o papel fundamental da matemática na teoria do conhecimento e a natureza sintética e a priori de duas proposições, e da análise de distinções relativas a ciências gerais e descritivas, Fries apresenta sua filosofia matemática da natureza. Esta, enquanto ciência, constaria de três partes: a primeira parte puramente filosófica sobre as leis gerais da natureza, na legislação das categorias extraídas pela crítica da razão; a segunda parte puramente matemática, dada por estes princípios; e a terceira parte relativa à teoria do movimento ou da matemática aplicada (Fries, 1822, p. 9). Uma vez que a primeira parte caberia à metafísica, restariam então duas tarefas, relativas às segunda e terceira partes.

> Primeiro, uma filosofia da matemática pura, na qual a natureza das abstrações matemáticas está fundamentada e sua reivindicação de validade em todo o conhecimento humano deve ser determinada. Em segundo lugar, a investigação filosófica da teoria pura do movimento, a filosofia natural matemática de Newton ou a doutrina do princípio básico da igualdade de efeito e contra-efeito, desde que seja de uma investigação filosófica. Na verdade, essa ciência é o arsenal de todas as hipóteses a partir das quais as explicações subsequentemente sucedem na experiência. (Fries, 1822, p. 9)

A teoria do movimento, ou foronomia, teria um papel central sobre a experiência, norteando as leis válidas a qualquer objeto externo. Fries a definiria enquanto a "filosofia da matemática aplicada", ou seja, "[...] uma matemática aplicada ao conhecimento metafísico. Nela está contido o conhecimento do todo, o conhecimento completamente científico do homem no que concerne à parte externa da natureza" (Fries, 1822, p. 397, tradução nossa). Assim, sem tornar-se efetivamente um sistema, as leis da teoria do movimento se tornariam espécies de fundamentos a priori e guias heurísticos às teorias da natureza assim subsumidas. A matemática pura, por outro lado, teria um papel constitutivo às leis do próprio pensamento:

> Devemos afirmar que toda a visão do mundo [*Weltansicht]* de acordo com as leis da forma e do movimento é, por sua origem, puramente matemática. Diremos, portanto, para uma definição mais precisa das regras indicadas: as propriedades gerais dos corpos não são apenas aquelas que são encontradas em todos os corpos com os quais podemos experimentar, mas acima de tudo aquelas que, de acordo com as leis determinadas a priori, devem pertencer à intuição matemática. Portanto, temos que determinar o julgamento das forças materiais a priori não apenas de acordo com a experiência, mas acima de tudo de acordo com as leis matemáticas. (Fries, 1822, p. 23)

Sob tal distinção metodológica entre as matemáticas puras e aplicadas e, sobretudo, um novo posicionamento ontológico da matemática pura, Fries reivindica a necessidade de produção de uma filosofia fundamentadora desta matemática pura:

> A matemática pura prescreve as supremas leis do movimento e as formas das forças básicas, pelas quais tudo é efetuado, à todas as doutrinas naturais com necessidade, e prescreve também as formas supremas de todos os processos sob os quais as substâncias físicas entram em interação. Vou aqui tentar defender o direito da matemática pura por meios filosóficos. (Fries, 1822, p. 32)

De maneira geral, tal construção de uma filosofia da matemática, em Fries, é justificada por uma "inconsciência" ou ausência de reflexão que os próprios matemáticos teriam sobre os fundamentos ou da legitimidade da matemática enquanto ciência. Tais questões, segundo ele, estariam fora do escopo de problemas da própria matemática e dos matemáticos, sendo essa uma problemática particular à filosofia.

Em relação à produção de uma filosofia da matemática pura, é notável que a primeira metade da *Mathematische Naturphilosophie* de 1822 trate exclusivamente desse assunto. É possível, contudo, traçar algumas contribuições anteriores de Fries a esse assunto. Em um artigo de 1810, Fries faria uma pertinente crítica à *Géométrie de Position*, de Lazare Carnot, de 1803, complementando a crítica de outro matemático alemão, Friedrich Gottlieb Busse (1756-1835). Segundo Schubring (1999), Fries teria sido o primeiro a ressaltar o problema conceitual básico na refutação de números negativos em Carnot, a saber, a não separação consistente entre números e quantidades.

> Pensamos que o primeiro defeito, através da qual ocorrem tantos erros na teoria das quantidades opostas, reside no fato de que normalmente não se distinguem

> adequadamente quantidades e números, mas sim que os números designados ±7, ±a são chamados imediatamente de quantidades. Se, no entanto, considerarmos, números positivos e negativos por si mesmos e estabelecermos então as quantidades opostas apenas como casos de aplicação ao cálculo com números negativos, os argumentos da teoria ganham facilidade e clareza. (Fries, 1810, p. 315 apud Schubring, 1999, p. 184)

A crítica de Fries ressaltaria, com efeito, uma questão fundamental à admissão dos números negativos e, em linhas mais gerais de sua própria filosofia, a separação entre as matemáticas pura e aplicada. Veremos que esta consciência, expressa já em 1810, poderá ser identificada aos progressos alcançados pela obra de 1822, cujo cerne encontra-se nesta distinção.

A mais interessante contribuição que Fries apresenta no *Mathematische Naturphilosophie* identifica-se na delimitação de uma disciplina básica da matemática, denominada por ele de *Syntaktik*, a qual tem a tarefa de examinar e fundamentar procedimentos e conexões. É possível encontrar nesta concepção uma forte influência da escola combinatória, que desde 1780 se faria presente no contexto da matemática alemã. Inspirada pelo programa algébrico de Lagrange e inaugurada por Carl Friedrich Hindenburg (1741-1808), a abordagem da escola combinatória se caracteriza por um formalismo algébrico, orientado pelo teorema polinomial, uma generalização do teorema binomial. Tal abordagem se encontraria bastante conhecida não só no contexto universitário, mas também nas abordagens de ensino secundário (cf. Schubring, 2009). A *Syntaktik* de Fries, no entanto, daria um passo para além do simples entendimento da matemática como um jogo simbólico:

> [Fries] fez da relação entre signos e significado a dimensão fundamental de sua reflexão sobre a matemática pura, uma vez que a diferenciação entre o significado sintático e o aritmético das expressões matemáticas é um dos elementos essenciais do seu programa. (Schubring, 1999, p. 185)

Assim, nós voltamos, aqui, à análise dos aspectos apresentados na obra. Na primeira seção da introdução, denominada "da tarefa de uma filosofia da matemática", Fries afirma que a base para a construção de uma filosofia da matemática encontra-se no projeto de uma razão crítica:

> A Crítica da Razão[9] mostra em suas deduções por que e como as formas de nosso conhecimento matemático, em virtude da sensibilidade de nosso espírito, tornam-se formas básicas necessárias de todo nosso conhecimento sensível. Mostra também que todo o conhecimento científico do homem só pode ser formado quando subordinamos o conteúdo da experiência às verdades filosóficas fundamentais por meio de formas matemáticas. (Fries, 1822, p. 35)

Tal projeto, novamente, localiza a matemática como elemento fundante da organização do pensamento humano. A distinção da matemática em termos de sua plausibilidade ou assertividade não estaria, assim, baseada apenas na sua rigidez lógica, mas na sua ligação intrínseca com a própria pensabilidade ou, em outras palavras, à sua construtividade em termos da intuição pura:

> A intuição matemática une, através de uma concepção intuitiva da conexão de todos os objetos em um todo, todas as concepções sensoriais umas com as outras e as sujeita de acordo com todos os tipos de intuição pura em ordem, número, forma e duração às formas necessárias de condensar todas as coisas. (Fries, 1822, p. 38)

Essas considerações sobre a natureza do conhecimento matemático são então condensadas em três afirmações:

(1) "Todas as explicações de conceitos em matemática são consideradas construções de conceitos em intuição pura" (Fries, 1822, p. 39, tradução nossa): Todo conhecimento matemático não é dado, mas construído a priori, na intuição pura. Por meio de uma definição, tais conceitos são construídos e por ela completamente compreendidos. Além disso, tal definição deve gerar uma representação mental (geral e a priori) de forma clara. Isto se mostraria tanto na geometria na construção de formas geométricas quanto na aritmética, nas designações de variáveis por letras.

[9] O termo "Crítica da Razão" (*Kritik der Vernunft*) não deve ser entendido como uma referência direta à obra de Kant, mas com uma conotação mais geral de um projeto inaugurado por ele. Deve-se ter em mente que o próprio Fries, em 1807, viria a publicar sua "*Neuer oder Anthropologische Kritik der Vernunft*".

(2) O sistema em qualquer ciência matemática é hipotético (Fries, 1822, p. 41, tradução nossa): Estruturas matemáticas comportam-se causalmente, sob o julgo de demonstrações as quais se valem da própria estrutura de proposições verdadeiras, estas com caráter de necessidade, ou seja, a priori. Ainda sobre essa afirmação, Fries argumenta contra um programa de construção empirista da matemática. Para isso, se referencia, e o fará outras vezes no texto, na obra *Philosophisch-mathematische Abhandlungen* de 1807, de Abraham Kästner[10] (1719-1800) e Georg Klügel[11] (1739-1812).

> Locke afirma que só deduzimos esses princípios de percepções individuais por indução, Leibniß o refuta e Kästner expressa esse contra-argumento muito clara e definitivamente da seguinte maneira: "Nenhuma indução é a maneira pela qual alguém chega aos axiomas matemáticos. Esta é a abstração. Um par de postes, colocados um em cima do outro, é uma imagem para a mente reconhecer que um par de linhas retas só pode se cruzar uma vez. Essa consciência repousa na capacidade do entendimento de abstrair, de pensar algo sobre as barras que pensaria tão bem sobre vigas ou sobre cordas esticadas umas sobre as outras ou linhas desenhadas" (Fries, 1822, p.45-46)

De fato, tais questões fariam parte das novas concepções emergentes na Alemanha, sobretudo a partir do movimento de ascensão do método analítico. Outros autores representativos deste período são Christian Wolff (1679-1754), autor do livro-texto alemão de maior alcance no oeste europeu, Christian Hausen (1693-1743), Johann Segner (1704-1777) e Wenceslaus Karsten (1732-1787) (cf. Schubring, 2005).

(3) O método de ensino da matemática é sempre dogmático, mas em grande parte baseado na investigação segundo o método da crítica especulativa para a invenção de teorias (Fries, 1822, p. 47, tradução nossa): Aqui, numa alusão à dicotomia dos métodos sintéticos e analíticos, Fries atribui à sua filosofia da matemática também a tarefa desta investigação analítica, ou seja, a investigação dos fundamentos últimos dos procedimentos matemáticos.

[10] Nota-se que Kästner era professor de matemática na universidade de Göttingen, autor da série de livros-texto de matemática mais divulgada da época.
[11] Professor de matemática na universidade de Halle e discípulo de Kästner, autor de uma famosa tese de doutorado, aparentemente a primeira com o caráter de pesquisa, analisando todas as tentativas de prova do 5º axioma de Euclides e mostrando o fracasso destes.

Fries então parte para uma separação pragmática entre o que entenderá por matemática pura e aplicada, em vista a desenvolver o objeto privilegiado de sua filosofia da matemática. No sentido de Fries, apesar de distinguíveis, matemáticas pura e aplicada são indissociáveis, à semelhança da relação entre intuições e conceitos, na obra kantiana. Assim, por um lado, a matemática pura trata das formas puramente intuitivas, de maneira que estas precisam de algum elemento sobre o qual se manifestam para serem identificadas. A matemática aplicada, por outro lado, precisa de uma fundamentação abstrata sob a qual se subordina em sua organização.

Portanto, o "acesso", por assim dizer, à matemática pura não dar-se-ia sem a ingerência da matemática aplicada, uma vez que seria preciso uma espécie de "campo de ação" para que essas formas puras possam ser caracterizadas. Essa relação intrínseca entre matemática pura e aplicada teria, segundo Fries, gerado mal-entendidos sobre a própria natureza dos objetos da matemática, como a confusão entre grandeza (*Größe*) e número (*Zahl*). Tais equívocos viriam da não diferenciação entre a forma do pensamento e sua representação sensível:

> Todo conhecimento humano surge de modos sensíveis de percepção, e os modos abstratos de percepção são sempre, em primeiro lugar, produtos artificiais do entendimento, apenas suas ferramentas de auto-observação. No começo, entretanto, seu significado será inevitavelmente confundido com o de um modo perceptivo de conhecimento e, assim, os conceitos gerais de um modo abstrato de representação são julgados como objetos de percepção. O misticismo consiste nessa confusão de nossos conceitos com o próprio ser. (Fries, 1822, p. 53)

Objetos da matemática pura, portanto, careceriam de uma representação sensível, sendo entendidos a partir de suas inserções nestas, ou seja, são formas de conexão ou formas relacionais. Seus fundamentos representacionais seriam então o tempo e o espaço:

> Todo o nosso conhecimento matemático é baseado nas representações do tempo e do espaço como formas nas quais recebemos uma combinação de todos os objetos de percepção em um todo. [...] Portanto, todo o desenvolvimento científico abstrato do conhecimento puramente matemático surge para nós por meio de construções arbitrárias realizadas no pensamento, ou seja, representações na percepção pura de tais invasões no tempo e no espaço. (Fries, 1822, p. 55-56)

Aqui, o tempo se estabelece como a conexão perceptiva dos sentidos internos, em uma dimensão, bem como o espaço se impõe como conexão perceptiva dos sentidos externos, com suas três dimensões. O modo de conexão de ambos é semelhante, caracterizando o que entendemos como grandeza. Uma grandeza em abstrato, portanto, é aqui entendida como uma concepção estrutural de organização:

> A abstração matemática vai ainda mais além aqui das concepções de tempo e espaço in abstracto, na medida em que só entende esse tipo de conexão por si mesma, e chegamos em parte à consideração da própria grandeza in abstracto, em parte às meras concepções de organização em geral na medida em que a abstração apenas enfatiza para si as atividades da construção voluntária da imaginação. (Fries, 1822, p. 57)

Cada modo distinto de representação nos fornece uma conexão contínua distinta, aqui chamado de "série contínua". A ideia é que cada série apresente uma forma peculiar de delimitação, ou seja, distintas formas relacionais. Fries apresenta então três tipos de séries ou conexões puras: (1) a série descritiva do tempo (a ideia temporal do anterior e do sucessor); (2) a série descritiva das formas espaciais, que contém três séries interconectadas: a linha como uma série de pontos, a superfície como uma série de linhas e a expansão espacial como uma série de superfícies; (3) a série de tamanhos (a ideia comparativa entre maiores e menores). As duas primeiras séries são obtidas pela abstração pictórica enquanto a terceira é esquemática, uma vez que não se representa isoladamente.

A distinção entre tais tipos de abstração caracterizaram as distinções, por exemplo, entre a geometria e a aritmética. Fries tensiona as distinções usuais, as quais considera inadequadas. Ele cita a distinção de Kästner, por exemplo, a qual distingue aritmética e geometria a partir de suas características discretas e contínuas, respectivamente. A definição de uma grandeza discreta, por exemplo, enquanto “aquela que consiste de partes simples”, poderia ser substituída por “aquele em que distinguimos as partes, e consideramos composto por estas”, a qual retorna às noções primeiras dos arranjos e combinações dadas pela abstração esquemática. Nesse sentido, os postulados da aritmética retomariam casos particulares dessas formas conectivas:

> Mas só podemos trazer noções de tamanhos para os conceitos se pensarmos na forma numérica como um todo como uma combinação de partes semelhantes e iguais, ou seja, de unidades. Conseqüentemente, os postulados da aritmética só retornam a um caso especial dos postulados da *Syntaktik*. (Fries, 1822, p. 68)

Com efeito, Fries então apresenta a *Syntaktik*, ou teoria combinatória, como tal ciência básica das formas conectivas:

> *Syntaktik* contém a abstração mais geral que pode ser feita para o conhecimento matemático. Baseia-se unicamente nos postulados do arranjo arbitrário de determinados elementos e em sua repetição arbitrária sem fim. Visto que não conhece axiomas, também não tem teoria própria; suas operações são diretamente compreensíveis em si mesmas e em sua apresentação científica tudo depende da flexibilidade de arranjo e designação. (Fries, 1822, p. 70)

A tarefa geral da *Syntaktik* é especificar as combinações que podem se formar a partir de um certo índice, formando o que é chamado "*complexion*". Na prática, as regras da *Syntaktik* são nada menos do que as regras da análise combinatória de Hindenburg. Fries defende que essas operações da *Syntaktik* "intervêm em tudo o que pensamos e conhecemos nas mais variadas coisas da vida, como na ciência":

> As operações sintáticas da imaginação produtiva são as mais gerais de todas e, portanto, afetam as mais diversas coisas na vida, como na ciência, em tudo o que pensamos e conhecemos. Onde existe uma situação na vida que não exige o arranjo e a seleção do melhor arranjo? Por exemplo, toda a arte da memória é de natureza sintática. Na lógica, toda explicação e divisão de um conceito, bem como toda listagem de um sistema de acordo com a forma, é uma operação sintática, e em todo comércio isso é imediatamente evidente. (Fries, 1822, p. 72-73)

As próprias operações aritméticas serão entendidas como casos particulares de operações da *Syntaktik*, de maneira que uma soma é definida pela indexação de valores aos elementos do índice e agrupamentos de combinações que possuem os mesmos valores. Analogamente, a subtração é entendida como a involução desses elementos. Assim, ao definir sua soma aritmética, Fries afirma:

> Um todo composto de partes simples do mesmo tipo é chamado de soma. De duas partes que juntas formam uma soma, cada uma é chamada de diferença ou diferença entre a soma e a outra parte. Essa soma é objeto de aritmética. Mas a soma nada difere da *complexion* da *Syntaktik*, com a previsão da semelhança de seus elementos. (Fries, 1822, p. 79)

A partir dessa fundamentação gnosiológica, Fries trará distinções específicas e que considera problemáticas, como a distinção entre o número (*Zahl*) e a grandeza (*Größe*). Assim, uma grandeza, no sentido de Fries, surge apenas posterior à identificação de semelhanças:

> Chamamos as coisas de uma origem ou da mesma espécie se as observarmos de acordo com as propriedades que têm em comum umas com as outras. Se olharmos agora apenas para a semelhança de coisas de um tipo, na medida em que ou são completamente semelhantes ou não levamos em conta as diferenças que existem entre elas, então só resta considerar a diferença de tamanho [*Größe*] (quantidade), a que chamamos diferença numérica [*numerisch*], multiplicidade. (Fries, 1822, p. 77-78)

O número, por outro lado, emergeria do ato da medida e assim se caracterizaria como um elemento relacional entre uma grandeza e sua unidade:

> Medir uma quantidade significa apresentá-la comparando-a com outra, pela sua relação definitiva com outra. Esta relação, porém, é sempre a da combinação de partes iguais. A mente deve extrair diretamente a ideia de uma certa magnitude, a medida, da sua percepção e, por meio da forma numérica, pensar na relação de outras magnitudes com a medida. Uma unidade é a parte dada de uma quantidade por meio da qual as quantidades [*Größen*] são medidas. Uma unidade, que é em si mesma uma quantidade, identifica uma medida. Número [*Zahl*] é a representação gráfica da relação específica entre uma quantidade e uma unidade. (Fries, 1822, p. 80)

Essa concepção “relacional” de número, à medida que o distingue de uma grandeza, o “desontologiza”, o que permitirá uma concepção distinta sobre alguns casos particulares, como os números negativos:

> Se alguns, como Carnot, encontraram contradições nesta noção de diminuição de números independentes, foi apenas porque confundiram grandeza e número. Não existem grandezas negativas independentes para além dos números; uma grandeza só se torna negativa em relação a outra, mas lidamos facilmente com números decrescentes independentes. (Fries, 1822, p. 124)

De forma semelhante, caberá aqui também o tratamento de números imaginários (eingebildete *Zahlformeln*). Fries apresenta-os inicialmente como uma impossibilidade, ao discutir a contingência da operação inversa às potências, denotando o caso geral $\sqrt[2n]{-a}$. Porque, no entanto, denotar uma impossibilidade? Com efeito, segundo ele, existirão tipos de cálculo (*Rechnungsarten*) com tais termos que resultam, de fato, em números reais. Esses tipos de cálculo distinguem-se na relação entre o cálculo numérico (*Ziffernrechnung*) e o cálculo de letras (*Buchstabenrechnung*):

> O cálculo numérico combina os próprios números em seus tipos de cálculo por meio de seus sinais e nunca pode chegar a resultados inaplicáveis para quantidades contínuas de sementes opostas. O cálculo de letras, por outro lado, combina em seus modos de cálculo as próprias operações aritméticas em geral e deve, portanto, proceder em geral como se todas as operações pudessem ser revertidas em geral e completamente. (...) Em outras palavras: as operações de cálculo de letras denotam por si mesmas, além de números, apenas operações sintáticas e, de forma geral, devem ser comparadas como tais. Seu significado aritmético para números reais só pode ser determinado com maior precisão para casos individuais de aplicação. (Fries, 1822, p. 157)

De maneira geral, portanto, observamos que o novo tratamento dado por Fries à fundamentação dos objetos matemáticos o permitiria conceber e destacar problemas conceituais relevantes de sua época. Denotam-se sobretudo os esclarecimentos acerca de números negativos e complexos, e as considerações à convergência de séries, funções e continuidade[12]. Essa mudança fundamental, em direção à uma concepção abstrata do número, não viria sem uma reconceitualização da própria matemática, sua posição e seu papel na teoria do conhecimento. Tais questões assim se identificam não somente na proposta apresentada por Fries na introdução, como nas práticas de sua fundamentação a partir da *Syntaktik*.

Dando continuidade, a próxima seção aborda outro matemático, Hermann Grassmann, o qual, de maneira semelhante à Fries, discutiria o fundamento da prática matemática em relação à teoria do conhecimento, oferecendo também uma disciplina básica, sobre a qual sua ciência se respalda.

[12] Por questão de espaço e ênfase, tais questões não serão tratadas aqui, mas em futuras publicações.

A Teoria das Formas de Hermann Grassmann

Hermann Günther Grassmann (1809-1877) foi um professor secundário e cientista alemão, atuante em diversas áreas do conhecimento, em especial, a linguística, a física e a matemática. Seu pai, Justus Grassmann (1779-1852), um pastor protestante, seria também um professor e cientista. Seriam determinantes no trabalho de Grassmann a influência familiar dos trabalhos não só de seu pai, como também de seu irmão mais novo, Robert Grassmann (1815-1901). Hermann Grassmann seria reconhecido na linguística por suas produções sobre sânscrito, na física por seus trabalhos sobre a teoria das marés e, particularmente, na matemática, através de sua obra *Die Lineale Ausdehnungslehre* de 1844.

Em 1827, Hermann Grassmann inicia seus estudos em filologia e teologia em Berlim. Em 1831, qualifica-se a professor de filologia e, não tão satisfatoriamente, a professor de matemática, onde lecionaria, a princípio, apenas nas classes iniciais. Esse fato é notável, uma vez que Grassmann só desenvolveria conhecimentos em matemática tardiamente, e de maneira autodidata.

A partir de 1840, haveria uma cooperação entre Hermann Grassmann e seu irmão Robert. À época, Robert, que desde jovem dedicara-se aos conhecimentos de matemática e física, estaria trabalhando em seu exame admissional à carreira de professor. Dado que ambos os irmãos estariam preparando-se às dissertações dos exames admissionais em assuntos correlatos, aponta-se aqui o início da contribuição intelectual entre eles. Em um artigo de 1996, Schubring argumenta que, ao contrário da opinião de outros autores (sobretudo Lewis, 1977) na qual seria Schleiermacher o principal influenciador da concepção matemática de Grassmann, o ímpeto essencial à formação das concepções apresentadas no *Ausdehnungslehre* viria das contribuições de seu irmão Robert - em especial, certas concepções extraídas da obra de Fries (cf. Schurbring, 1996). Schubring sustenta ainda que haveriam diversas correlações entre a obra de Fries e a de Grassmann, que apontam a uma concepção comum dos autores em direção à abstração das formas matemáticas:

> There are several pivotal elements in Fries's philosophy of mathematics which are in structural agreement with Grassmann's conceptions. Fries stands, like so many German philosophers, in the tradition of Kant but he has independently analyzed the process of concept formation in mathematics and the sciences. A preeminent task for him is to develop a philosophy of pure mathematics. This means primarily the study of the "laws of the connection forms" [*Verknüpfungsformen*]. And Fries emphasizes: "Mathematics is the complete system of the mathematical forms." Among all abstraction processes, pure mathematics finds its ultimate success in detecting "the pure forms of the composition of things" for the mind (Fries 1822, pp. 49-50). The correspondence between Fries's and Grassmann's conception of mathematics as "*Formenlehre*," hence, is striking. (Schubring, 1996, p. 66)

Em 1842, Grassmann torna-se professor em uma *Realschule* de Stettin e em 1852 se tornaria *Oberlehrer* em Stettin, posição na qual sucederia seu pai e lecionaria por mais 25 anos. Ainda que Grassmann nunca tenha se tornado professor universitário, posição a qual candidataria-se em 1847 e em 1862, ambas sem sucesso, nota-se, à época de Grassmann, uma distinta preocupação com a atuação de professores secundários na Alemanha (cf. Schubring, 1981, p.124) , o que o permite tomar parte e posição na pesquisa acadêmica.

Em 1844, Grassmann publica sua principal obra sobre a matemática: *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*. Tendo como elemento central a introdução de um novo ramo da matemática, a teoria das extensões, Grassmann apresenta, no entanto, uma nova proposta de fundamentação da matemática, de um ponto de vista conceitual. De forma geral, o *Ausdehnungslehre* apresenta uma visão essencialmente abstrata dos elementos fundamentais da matemática, sendo, neste sentido, bastante inovador. O livro teria uma fraca recepção nos meios matemáticos, que seria atribuída ao estilo de sua escrita, dada a reflexões filosóficas, e distante de uma apresentação comum aos textos matemáticos. É curioso que, no prefácio da edição de 1844, Grassmann pareça projetar a consciência dessa possível rejeição:

> De fato, ao apresentar uma nova ciência, para que sua posição e significado possam ser devidamente reconhecidos, é indispensável mostrar de uma vez sua aplicação e sua relação com objetos afins. A introdução também deve servir a esse propósito. Na natureza das coisas, isso é mais de natureza filosófica, e quando o separei do contexto de toda a obra, fiz isso para não assustar imediatamente os matemáticos com a forma filosófica. Pois ainda há uma certa rejeição entre os matemáticos, e em parte não erroneamente, diante das discussões filosóficas de assuntos matemáticos e físicos. (Grassmann, 1844, XV)

No final da década de 1850, Grassmann trabalharia com seu irmão Robert em uma reformulação do *Ausdehnungslehre*, republicando-o em 1862. Neste sentido, distinguem-se aqui as publicações de 1844 e 1862 pelas denominações A1 e A2. No A2, é notável a alteração na estrutura do texto, em particular a completa omissão da introdução de cunho filosófico, bem como uma reestruturação metodológica do texto, em favor de um formato mais próximo à organização proposicional, caraterística do estilo euclidiano. Fica claro que, nesse movimento, Grassmann estaria buscando se adequar e ter uma boa recepção de sua proposta que, novamente, não teria sucesso ao menos na década de 1860.

Como aponta Tobies (1996) a boa recepção e valorização do *Ausdehnungslehre* se daria sobretudo após sua morte, em 1877, a partir da iniciativa de matemáticos como Alfred Clebsch (1833-1872) e Felix Klein (1849-1925). Este último, em particular promoveria a publicação da coletânea de seus trabalhos. Curiosamente, em comparação a outros poucos grandes matemáticos que tiveram a coletânea de seus trabalhos publicados - é o caso de Gauss (após 1870), Riemann (1876), Steiner (1881), Jacobi (1881), Möbius (1885), Borchardt (1888), Dirichlet (1889) e Schwarz (1890) -, este torna-se um fato notável, uma vez que Grassmann não seria ativo na academia ou na universidade (Schubring, 1996, p. XII).

Já na segunda metade do século XIX, seria possível observar o reconhecimento e a declarada influência de Grassmann nas práticas matemáticas. É bem conhecido o fato de que a centralidade da noção de sucessor na fundamentação dos números nos trabalhos de Dedekind e Peano, seriam extraídas do *Lehrbuch der Arithmetik*, livro de Grassmann de 1861. Por outro lado, Grassmann inspiraria a concepção dos fundamentos da matemática para filósofos como Cassirer e Whitehead.

Assim, pretendemos aqui uma apresentação dos principais aspectos apresentados no *Ausdehnungslehre*, ressaltando sua relevância para uma nova concepção ontológica dos objetos da matemática.

O *Ausdehnungslehre* (A1) de maneira geral, pretende apresentar um novo ramo da matemática, a teoria das extensões, a qual ele deriva de uma sistemática do conhecimento científico. Tais distinções serão aqui discutidas e se encontram na introdução do A1, entendida, neste trabalho, como um texto eminentemente filosófico.

Além de deduzir a teoria das extensões, uma das principais ideias de Grassmann é a introdução de uma teoria das formas (*Formenlehre*), a qual se identificaria a uma disciplina fundamental à matemática, e cujos elementos se mostrariam puramente abstratos. Em primeiro lugar, Grassmann apresenta uma primeira divisão das ciências, sendo elas reais ou formais:

> A principal divisão das ciências se dá entre o real e o formal. As ciências reais tratam dos seres que são pensados externos à pensabilidade, e sua verdade consiste na correspondência do pensamento com o ser. As ciências formais, por outro lado, têm por objetos os produtos internos do próprio pensamento, e sua verdade consiste na correspondência formal entre os próprios processos da pensabilidade. (Grassmann, 1844, XIX)

\\\As ciências formais, por sua vez, dividem-se em ciências gerais, relativas à lógica e a dialética, e as particulares, relativas à matemática pura. Conclui-se aqui que a matemática pura, ao compor as ciências formais particulares, se refere aos objetos particulares internos ao pensamento (*Die reine Mathematik ist daher Wissenschaft des besonderen Seins als eines durch das Denken gewordenen*). A matemática é, segundo essa concepção, uma teoria das formas. Nota-se, logo de cara, que Grassmann entende e apresenta os elementos da matemática como elementos da consistência interna do pensamento, opondo-se a um sentido ontológico externo ao sujeito do pensamento. Com isso, Grassmann negaria prontamente uma concepção da matemática enquanto ciências das quantidades ou das grandezas:

> O nome "teoria da grandeza" é impróprio para toda a matemática, uma vez que não se encontra uso para a grandeza em um ramo substancial dela, a saber, a teoria combinatória, e mesmo na aritmética apenas em um sentido incidental. Por outro lado, o termo "forma" pode parecer muito ampla, e assim a expressão "forma de pensamento" é mais apropriada; ora, a forma em seu significado puro, desprovida de todo conteúdo real, nada mais é do que a forma de pensamento e, portanto, a expressão é adequada. (Grassmann, 1844, p. XX)

Desta asserção, segue um corolário bastante intrigante: Grassmann declara que a geometria, por consequência desta definição, não faria parte da matemática pura:

> Antes de prosseguirmos com a divisão da teoria das formas, temos que separar um ramo que foi equivocadamente atribuído a ela. Este ramo é a geometria. A partir dos conceitos expostos acima, é evidente que a geometria, como a mecânica, se refere a entes reais; para a geometria, este ente é o espaço. Isso é claro, pois o conceito de espaço não pode ser produzido pelo pensamento, mas surge como algo dado. Qualquer um que sustente o contrário deve assumir a tarefa de deduzir a necessidade das três dimensões do espaço das leis do pensamento puro, um problema cuja solução é patentemente impossível. [...] A posição da geometria em relação à teoria das formas depende da relação da percepção do espaço com o pensamento puro. (Grassmann, 1844, p. XX-XXI)

Esta afirmação é bastante interessante e devemos nos ater a ela um momento. Por um lado, o fato de que Grassmann pretende excluir a geometria do ramo das matemáticas nos mostra o ímpeto e a orientação fundacional proposta no A1. Nesse sentido, ele não propõe apenas uma sistemática na qual derivará o ramo científico que deseja iniciar, mas uma que revisa o próprio entendimento dos fundamentos constitutivos da matemática. Por outro lado, o argumento apresentado por Grassmann propõe que o espaço é um ente externo à pensabilidade e, dessa forma, a necessidade de suas propriedades não poderia ser deduzida. Isso, portanto, parece concluir que as propriedades do espaço, tal como a tridimensionalidade, seriam contingentes e dependentes da relação estabelecida entre percepção e pensamento puro. A passagem então continua:

> Embora tenhamos acabado de dizer que essa percepção [*Anschauung*] confronta o pensamento como algo dado independentemente, não é com isso afirmado que a percepção do espaço emerge apenas da consideração de objetos sólidos; antes, é aquela percepção fundamental [*Grundanschaaung*] que nos é transmitida pela abertura de nossos sentidos ao mundo sensível, que adere a nós tão intimamente quanto o corpo e a alma. O mesmo ocorre com o tempo e com a percepção do movimento baseada no tempo e no espaço, pelo que se poderia identificar a teoria pura do movimento (forometria) entre as ciências matemáticas tais como a geometria. O conceito de força motriz flui da ideia de movimento por meio do contraste entre causa e efeito. Assim, a geometria, a forometria e a mecânica aparecem como aplicações da teoria das formas às percepções fundamentais do mundo sensível. (Grassmann, 1844, p. XXI)

Grassmann busca, portanto, distinguir e afastar sua teoria das formas de quaisquer percepções sensíveis. Assim, se por um lado ele levanta a ressalva de que a percepção (*Anschauung*) a qual se refere não é mero registro empírico - mas se refere à própria condição de conhecimento dos objetos da percepção -, a produção de conhecimento a partir delas dependeria de sua relação com o pensamento puro, que aqui independe dessas percepções. A teoria das formas seria, portanto, pura abstração interna, como constata um comentário do filósofo Ernst Cassirer:

> The goal, which Grassmann set himself, was to raise the science of space to the rank of a universal science of form. The character of a pure science of form is defined by the fact that in it proof does not go beyond thought itself into another sphere, but remains entirely in the combination of different acts of thought. (Cassirer, 1953, p. 97)

Esse fato notável na obra de Grassmann teria consequência sobretudo à sua abordagem do espaço. Grassmann abandonaria o espaço empírico em direção a um espaço abstrato, com *n* dimensões, coerente à sua teoria das formas como uma produção interna do pensamento.

Seguindo com a sistematização do conhecimento em Grassmann, chega-se a uma terceira distinção: a de formas contínuas e discretas. Tal distinção é apresentada aqui de uma maneira um tanto enigmática:

> Cada ente particular do pensamento (forma) pode vir a ser uma das duas maneiras: ou por um simples ato de geração [*Erzeugens*] ou por um ato duplo de posicionar [*Setzens*] e conectar [*Verknüpfens*]. Aquilo que surge da primeira maneira é a forma contínua, ou grandeza no sentido estrito, enquanto o que surge da segunda maneira é a forma discreta ou conectiva. (Grassmann, 1844, p. XXIII-XXIV)

A quarta distinção de Grassmann diz respeito à relação fundamental entre as formas, a qual é inerente à existência delas enquanto seres particulares. Tais distinções são aquelas entre o Diferente e o Igual. Assim, Grassmann define por formas algébricas aquelas que são gerenciadas pelo Igual, e formas combinatórias aquelas que o são pelo Diferente.

Grosso modo, podemos assim entender a sistemática do conhecimento de Grassmann: ciências distinguem-se entre reais e formais, sendo esta distinção característica da natureza dos objetos, externos e internos ao próprio pensamento, respectivamente. As ciências formais dividem-se em gerais, relativas à conhecimentos totalizantes do pensamento, como a lógica, e particulares, relativos à matemática, aqui entendida como uma teoria das formas, ou seja, uma teoria dos entes particulares internos ao pensamento. Tais formas particulares são caracterizadas por duas dicotomias paralelas: a primeira entre formas particulares contínuas e discretas, e segunda entre formas particulares algébricas e combinatórias.

Grassmann então propõe categorias que emergem das combinações destas últimas distinções e destas categorias, ramos científicos próprios. Assim, formas algébricas discretas identificam, na sistemática tradicional do conhecimento matemático, a números, enquanto formas combinatórias discretas referem-se a combinações. Tais formas constituem os objetos, respectivamente, da teoria dos números (*Zahlenlehre*) e da teoria combinatória (*Kombinationslehre*). Formas algébricas contínuas, por sua vez, identificam-se a grandezas intensivas, as quais seriam tratadas devidamente no Cálculo. Finalmente, formas combinatórias contínuas referem-se a grandezas extensivas. Estas fazem partes de um novo ramo, o qual Grassmann pretende introduzir, e que ele denomina de teoria das extensões (*Ausdehnungslehre*).

Na base das ciências matemáticas, anterior a todas essas, encontra-se a teoria das formas (*Formenlehre*). Grassmann inicia definindo, de maneira um tanto informal, a que ele se refere com a "teoria geral das formas" (*allgemeinen Formenlehre*), como uma espécie de fundamento ou ciência precedente à todos os ramos da matemática:

> Pela teoria geral das formas entendemos aquela série de verdades que se relacionam com todos os ramos da matemática da mesma forma, e que assim assumem apenas os conceitos gerais de igualdade e diferença, conjunção e separação. A teoria geral das formas deve, portanto, preceder todos os ramos especiais da matemática. (Grassmann, 1844, p. 1)

Curiosamente, Grassmann admite que um tal ramo geral na verdade "ainda não existe", ou não teria sido devidamente desenvolvido. Estabelecem-se então dois conceitos básicos: a equidade (*Gleichheit*) e a distinção (*Verschiedenheit*). Esses conceitos apresentam-se de acordo com relações estabelecidas entre objetos, de forma que uma certa dupla pode ser equivalente segundo uma certa relação ou distinta segundo outra. Essas relações não dizem respeito a equidade em si, mas aos objetos que estão sendo comparados. Por exemplo, duas distâncias (*Strecken*) de mesmo tamanho não seriam, assim, absolutamente iguais, mas iguais apenas em tamanho. Define-se então o conceito de equidade: “Serão iguais aqueles sobre os quais se pode sempre afirmar o mesmo ou, mais genericamente, aqueles que podem ser substituidos um pelo outro em cada juízo.” (Grassmann, 1844, p. 2)

Grassmann considera então uma segunda oposição, entre a conexão (*Verknüpfung*) e a separação (*Sonderung*). Pela primeira temos uma espécie de operação, sobre a qual duas formas, enquanto termos (*Glieder*) da conexão, geram uma terceira forma resultante (*Ergebniss*). Havendo necessidade de distinção entre os termos, distinguem-se o anterior (*Hinterglied*) do posterior (*Vorterglied*). A conexão denota-se pelo símbolo $\frown$, sendo o resultante entre os fatores a e b denotado por $(a \frown b)$.

Grassmann considera que os tipos de conexões podem ser especificados de acordo com as circunstâncias com as quais elas mantêm o mesmo resultante. Tais circunstâncias se orientam a partir das propriedades da comutatividade e da associatividade. Ele as define separadamente e, a partir da presença de ambas as propriedades, ele define conexões simples (*einfachen Verknüpfungen*), que as possuem:

> Se uma conexão é de tal ordem que se pode, sem alterar o resultado, posicionar os parênteses arbitrariamente no caso de três conexões, e alterar a ordem no caso de duas, assim também no caso de qualquer número de ligações a colocação dos parênteses e a ordem das conexões é indiferente ao resultado. Por uma questão de brevidade, chamaremos a essa conexão, à qual se aplicam as disposições declaradas, uma conexão simples. Já não é possível uma maior determinação do tipo de conexão, se não se voltar à natureza das formas conectadas, e por isso procedemos à resolução da conexão obtida, ou ao procedimento analítico. (Grassmann, 1844, p. 4)

Um procedimento analítico (*analytische Verfahren*) consiste na determinação de um termo de uma conexão a partir do outro termo e de seu resultante. Nota-se que, para uma conexão particular, existem a princípio dois processos analíticos, a determinar os fatores anterior e posterior. Caso essa conexão seja intercambiável, este processo é o mesmo. Denota-se, de maneira oposta à conexão sintética (*synthetische Verknüpfung*), previamente referida, com o símbolo $\smile$.

Assim, o termo ($a \smile b$) refere-se à forma que em conexão com o fator b gera o fator a, ou seja, $(a \smile b \frown b)=a$. De forma análoga, temos que ($a \smile b \smile c$) refere-se à forma que, em conexão com os fatores c e b, nesta ordem, gera o fator a. Assim, para o caso de conexões simples, temos a dedução da seguinte propriedade:

> Se a conexão sintética for simples, e a correspondente analítica for inequívoca, então, após um símbolo sintético, o parêntese pode ser definido ou omitido conforme desejado. Chamamos então (se esta singularidade ocorre de uma forma geral) a conexão sintética é chamada adição, e a correspondente analítica subtração. (Grassmann, 1844, p. 7)

Em outros termos, o que fica definido por Grassmann em sua teoria geral das formas, são operações abstratas, pelas quais se identificam propriedades fundamentais. Apesar de caracterizadas pela conexão sintética, tais relações fundamentais carecem de uma caracterização particular, como determinações qualitativas das conexões. Tais determinações vêm a ter papel determinante em tais relações, uma vez que orientam as propriedades que estas venham a ter.

O interessante, neste caso, é o fato de que, mesmo que Grassmann venha a canonizar as conexões simples, fica evidente que sua teorização considera a possibilidade de conexões não associativas ou não comutativas. Grassmann não seria o primeiro a fazê-lo, uma vez que em 1770 o trabalho do matemático francês Etienne Bézout já havia considerado produtos não comutativos (cf. Ferreira, 2021). Bézout, no entanto, trabalha com números "concretos", relacionados à grandezas reais, com naturezas distintas. O que parece diferenciar o trabalho de Grassmann, nesse sentido, é o fato de que ele considera este caso para operações abstratas do pensamento, que antecedem e fundamentam as operações usuais, como este se refere à sua nova ciência, no prefácio:

> Através da nova análise, foi dada a possibilidade de desenvolver um ramo da matemática puramente abstrato; de fato, esta análise, desenvolvida sem pressupor qualquer teorema que já tivesse sido provado em outro lugar, e movida puramente em abstração, era em si mesma uma ciência própria. A vantagem essencial alcançada por esta concepção é, em relação à forma, que todos os princípios que expressavam opiniões sobre o espaço foram agora completamente omitidos, tornando o início tornou-se tão imediato quanto o da aritmética, e, em relação ao conteúdo, que se omite a restrição a três dimensões. (Grassmann, 1844, p. VII)

De fato, operações multiplicativas não comutativas seriam efetivamente abordadas em sua teoria da extensão, cujos objetos e operações, à semelhança do que apresenta para a aritmética, serão inicialmente definidos em termos das conexões. Curiosamente, podemos entender que, a condição de "*outsider*" de Grassmann, enquanto um autodidata e com posições desfavoráveis à certas convenções da pesquisa matemática, o permitiriam aceitar essa propriedade com menor estranheza. Com efeito, Grassmann define uma conexão multiplicativa geral, que será indicativa tanto ao produto aritmético quanto aos produtos da teoria da extensão:

> [...] as leis da multiplicação, tal como estabelecidas pela aritmética, que declaram a permutabilidade e compatibilidade dos termos, não decorrem desta relação geral, pelo que também não são determinadas pelo conceito geral de multiplicação. Pelo contrário,

> na nossa ciência conheceremos tipos de multiplicação em que pelo menos a permutabilidade dos termos não tem lugar, mas em que todas as propostas até agora estabelecidas têm no entanto a sua plena aplicação. (Grassmann, 1844, p. 13)

Novamente, o principal objetivo de Grassmann é introduzir um novo ramo da matemática, o qual opera de maneira distinta dada a natureza de seus objetos. Não é nosso objetivo aqui, contudo, a análise das operações de produto na teoria das extensões. Nos interessa o fato de que, ao construí-las, Grassmann negaria princípios básicos das operações usuais. Para que esses objetos e operações sejam entendidos como matemáticos, é necessário que o próprio corpo de conhecimentos matemáticos os abarque como tal. Ferreira (2021) cita a crítica de Ampère, no qual este condena as operações não comutativas de Bézout de "derrubarem princípios básicos". A superação desse tipo de acepção, em Grassmann, teria de repassar a revisão dos próprios princípios básicos que, na esteira de Fries, tornam-se derivados de uma nova fundamentação.

Considerações Finais

As análises aqui propostas identificam uma unidade conceitual, presente em trabalhos da primeira metade do século XIX, que reposiciona a matemática na teoria do conhecimento. A perspectiva histórica de uma virada epistemológica na matemática, ocorrida no século XIX, é bem conhecida. Gillies (1992) chega a anunciá-la como uma espécie de revolução científica, aos moldes de Thomas Kuhn (1992). De fato, a propagação da concepção gaussiana da matemática enquanto "ciência das relações" seria fundamental à sua concepção moderna, baseada em estruturas e suas propriedades. Contudo, nos parece menos conhecida a forma com a qual essa virada apropria-se de discursos e práticas filosóficas, em particular, da filosofia kantiana. Na verdade, do contrário: parece haver na historiografia a afirmação de que as construções da matemática pura negariam o fazer filosófico. Como exemplo, podemos tomar a afirmação de Otto Neurath (1882-1945), na International Encyclopedia of Unified Science, de 1955:

> The evolution of non-Euclidean geometry, for instance, which prepared modern theories of measuring time and space, was hardly supported by modern philosophers- another example of the inadequacy of philosophers. One can rather assume that the ideas of Gauss, Bolyai, Lobachevski, and others were impeded by Kantianism: they had to start by opposing all kinds of apriorism. (Neurath, 1955, p.11)

No sentido de Neurath, matemáticos como Gauss se oporiam fortemente à intervenção filosófica na matemática. Em um artigo de 1923, o matemático alemão Heinrich Emil Timerding (1873-1945) mostra a quão controversa se tornaria essa visão. Abordando as raras considerações de Gauss sobre a filosofia de Kant, Timerding mostra que dificilmente haveria qualquer desvio entre as opiniões de ambos. Curiosamente, o que Timerding afirma é que, apesar de declarar não concordar com o kantismo, um olhar mais atento identificaria a concordância de Gauss com as concepções de Kant. Para Timerding, essa suposta discordância residiria explicitamente no equívoco ou desentendimento, por parte de Gauss e de seus intérpretes, sobre a distinção kantiana entre realidade empírica e idealidade transcendental do espaço. Nesse sentido, ainda que não se trate de determinar se Gauss seria um kantiano ou não, nos parece interessante que as aproximações entre Gauss e Kant identificariam-se muito mais em suas práticas e não em suas declarações.

Assim, este trabalho busca contribuir em uma investigação sobre as intervenções da filosofia na emergência de uma matemática pura no século XIX[13]. Argumentamos aqui que a virada epistemológica da matemática, de uma ciência das quantidades a uma ciência das relações, perpassa o entendimento da matemática como fundamento da própria pensabilidade, tal como enunciado por Kant. Como norte metodológico dessa investigação, acreditamos ser necessário ainda analisar de que formas esse entendimento se manifesta, tanto nos trabalhos de

[13] Este artigo compõe uma pesquisa de mestrado em andamento.

outros matemáticos do período, quanto nas análises filosóficas produzidas, sobretudo, pelo neokantismo do final do século.

Por outro lado, também nos parece interessante como esse sistema de convicções se manifesta no ambiente do ensino. Nesse sentido, se a concepção fundamental sobre a matemática e sua posição na teoria do conhecimento teria sido uma questão fundamental à produção de uma matemática pura no século XIX, de que maneira isto foi e é compreendido em sala de aula? O historiador da matemática Luis Radford propõe, em um artigo de 1997, que a interação entre ensino e história deveria dar-se, em detrimento de abordagens anedóticas ou contextuais, a partir de "uma espécie de laboratório epistemológico, no qual explora-se o desenvolvimento do conhecimento matemático" (Radford, 1997, p. 26). Nesse sentido de se pensar a história no ensino, a análise da emergência de conceitos a partir de suas interações com a filosofia nos parecem especialmente interessantes.

Referências

Cassirer, E. (1953). *Substance and Function*. Translated by William & Maria Swabey. Dover Publications Inc., 1953.

Ferreira, D., & Schubring, G. (2021). "Complex numbers" and the problem of multiplication between quantities. *Historia Mathematic*a.

Fries, J.F. (1822). *Die mathematische Naturphilosophie nach philosophischer Methode bearbeitet: ein Versuch*. CF Winter.

Gajdenko, P. (1981). Ontologic Foundation of Scientific Knowledge in Seventeenth-and Eighteenth-Century Rationalism. In H. N. Jahnke & M. Otte (eds.): *Epistemological and social problems of the sciences in the early nineteenth century* (pp. 55-63). Springer, Dordrecht.

Gillies, D. (1992). *Revolutions in Mathematics*. Clarendon.

Grassmann, H. (1844). *Die Wissenschaft der extensiven Größe oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disziplin*. Leipzig.

Grassmann, H. (1861). *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*. Th. Chr. Fr. Enslin.

Grassmann, H. (1995). *A new branch of mathematics: the "Ausdehnungslehre" of 1844 and other works.* Translated by Lloyd C. Kannenberg. Open Court Publishing Company.

Herrmann, K. (1994). Jakob Friedrich Fries (1773-1843): Eine Philosophie der exakten Wissenschaften. *Tabula Rasa*. Jenenser Zeitschrift Für Kritisches Denken (6).

Henke, E.L.T. (1867). Jakob Friedrich Fries. *Aus seinem handschriftlichen Nachlasse dargestellt*. Brockhaus.

Kant, I. (1992b). *Theoretical Philosophy*, 1755–1770, translated by D. Walford in collaboration with R. Meerbote, The Cambridge Edition of the Works of Immanuel Kant.

Kant, I. (2005). *Crítica da razão pura*. Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. 5º edição. Fundação Calouste Gulbenkian.

Kuhn, T. (1992). *A estrutura das revoluções científicas*. Perspectivas.

Lewis, A.C. (1977). H. Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik. *Annals of Science*, 34:2, 103-162

Neurath, O. (1955). Unified Science as Encyclopedic Integration. In: O. Neurath, R. Carnap & C. Morris (eds.): International Encyclopedia of Unified Science. The University of Chicago Press.

Pulte, H. (2006). Kant, Fries and the Expanding Universe of Science. In: M. Friedman, & A. Nordmann (eds.): *The Kantian Legacy in Nineteenth-Century Sciences*, p. 101–122. MIT Press.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the learning of mathematics*, 17(1), 26-33.

Roque, T. (2012). *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Zahar.

Schubring, G. (1981). The conception of pure mathematics as an instrument in the professionalization of mathematics. In: H. Mehrtens, H. Bos & I. Schneider (eds): *Social history of nineteenth century mathematics*. p. 111-134. Birkhäuser.

Schubring, G. (1996). The cooperation between Hermann and Robert Grassmann on the foundations of mathematics. In: G. Schubring (ed.): *Hermann Günther Graßmann (1809–1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar*, p. 59-70. Springer.

Schubring, G. (1996). *Hermann Günther Grassmann (1809-1877): visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar*. Springer Science & Business Media, 1996.

Schubring, G. (1999). Philosophie der Mathematik bei Fries. In W. Hogrebe and H. Kay (eds.): *Jakob Friedrich Fries—Philosoph, Naturwissenschaftler und Mathematiker: Verhandlungen des Symposions "Probleme und Perspektiven von Jakob Friedrich Fries' Erkenntnislehre und Naturphilosophie" vom 9.–11. (*pp. 175–193) Friedrich–Schiller–Universität Jena.

Schubring, G. (2005). *Conflicts between generalization, rigor, and intuition*: number concepts underlying the development of analysis in 17th-19th century France and Germany. Springer.

Struik, D. (1987). *A concise history of mathematics*. 4th edition. Dover Publications.

Timerding, H.E. (1923). Kant und Gauss. *Kant-Studien*, v. 28, n. 1-2, p. 16-40.

Tobies, R. (1996). The Reception of H. Graßmann's mathematical achievements by A. Clebsch and his school. In G. Schubring (ed.): *Hermann Günther Graßmann (1809–1877):*

Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar (pp. 117-130). Springer, Dordrecht.