

**La transposición didáctica en la enseñanza de la geometría en España durante la década de los 60**

**Transposição didática no ensino da geometria em Espanha durante a década de 1960**

**Didactic transposition in the teaching of geometry in Spain during the 1960s**

**La transposition didactique dans l'enseignement de la géométrie en Espagne dans les années 1960**

Julián Roa González<sup>1</sup>

Universidad a Distancia de Madrid

<https://orcid.org/0000-0002-4017-3067>

Mercedes Hidalgo-Herrero<sup>2</sup>

Universidad Complutense de Madrid

<https://orcid.org/0000-0001-6510-6090>

**Resumen**

En este trabajo teórico se abordan las transformaciones y adaptaciones que se dieron en España en los años 60 para adaptarse al cambio de filosofía que supuso la Matemática Moderna. El cambio en las bases epistemológicas sobre la enseñanza de las Matemáticas se produjo de forma general en el contexto internacional. Sin embargo, el proceso de Transposición Didáctica fue diferente en cada país. El objetivo de nuestra investigación es analizar las restricciones transpositivas que se vivieron en España en los años 60 y ejemplificar el cambio de epistemología a través de textos escolares y disposiciones legales de ese momento histórico. Para llevar a cabo nuestro análisis y reflexión se ha hecho uso de dos herramientas propuestas por la Teoría Antropológica de lo Didáctico: la Transposición Didáctica y los Niveles de Codeterminación. Adicionalmente a estas herramientas se ha realizado una revisión bibliográfica de la legislación y un análisis de distintos materiales escolares del período en cuestión.

---

<sup>1</sup> [julian.roa@udima.es](mailto:julian.roa@udima.es)

<sup>2</sup> [mhidalgo@ucm.es](mailto:mhidalgo@ucm.es)

**Palabras clave:** Teoría Antropológica de lo Didáctico, Transposición Didáctica, Geometría, Matemáticas, Análisis Histórico.

### **Resumo**

Este artigo teórico trata das transformações e adaptações que tiveram lugar em Espanha nos anos 60, a fim de se adaptar à mudança de filosofia que a matemática moderna provocou. A mudança das bases epistemológicas sobre o ensino da matemática ocorreu de uma forma geral no contexto internacional. No entanto, o processo de transposição didática foi diferente em cada país. O objetivo da nossa investigação é analisar as restrições de transposição experimentadas em Espanha nos anos 60 e exemplificar a mudança da epistemologia através de textos escolares e disposições legais desse momento histórico. A fim de realizar a nossa análise e reflexão, fizemos uso de dois instrumentos propostos pela Teoria Antropológica da Didática: a Transposição Didática e os Níveis de Co-determinação. Para além destes instrumentos, foi efetuada uma revisão bibliográfica da legislação e uma análise de diferentes materiais escolares do período em questão.

**Palavras-chave:** Teoria Antropológica da Didática, Transposição Didática, Geometria, Matemática, Análise Histórica.

### **Abstract**

This theoretical work deals with the transformations and adaptations that took place in Spain in the 1960s to adapt to the change in philosophy that modern mathematics brought about. The change in the epistemological bases on the teaching of mathematics occurred in a general way in the international context. However, the process of didactic transposition was different in each country. The aim of our research is to analyze the transpositional restrictions experienced in Spain in the 1960s and to exemplify the change of epistemology through school texts and legal provisions of that historical moment. To carry out our analysis and reflection, we have made use of two tools proposed by the anthropological theory of the didactic: didactic

transposition and levels of codetermination. In addition to these tools, a bibliographical review of the legislation and an analysis of different school materials from the period in question were carried out.

**Keywords:** Anthropological theory of the didactic. Didactic Transposition, Geometry, Mathematics, Secondary Education, Historical analysis.

### **Résumé**

Cet article théorique traite des transformations et des adaptations qui ont eu lieu en Espagne dans les années 1960 afin de s'adapter au changement de philosophie qu'ont entraîné les mathématiques modernes. Le changement des bases épistémologiques de l'enseignement des mathématiques s'est produit de manière générale dans le contexte international. Cependant, le processus de transposition didactique a été différent dans chaque pays. L'objectif de notre recherche est d'analyser les restrictions de transposition vécues en Espagne dans les années 1960 et d'illustrer le changement d'épistémologie à travers les textes scolaires et les dispositions légales de ce moment historique. Pour mener à bien notre analyse et notre réflexion, nous avons eu recours à deux outils proposés par la théorie anthropologique de la didactique : la transposition didactique et les niveaux de codétermination. En plus de ces outils, une revue bibliographique de la législation et une analyse de différents matériels scolaires de la période en question ont été réalisées.

**Mots-clés :** Théorie anthropologique du didactique, Transposition didactique, Géométrie, mathématiques, Analyse historique.

## **La transposición didáctica en la enseñanza de la Geometría en España durante la década de los 60**

Los conocimientos que constituyen una disciplina rara vez son transmitidos directamente a los estudiantes de las escuelas primarias y secundarias. Lo habitual es que entre el saber sabio y el saber a enseñar se produzcan una serie de transformaciones y adaptaciones que permitan a los estudiantes ir acercándose a esos conocimientos de forma paulatina. En la Teoría Antropológica de lo Didáctico se definen esos cambios como transposición didáctica.

El saber sabio matemático fue puesto en cuestión a principios de siglo XX en lo que se ha denominado posteriormente como crisis de los fundamentos. Esta crisis transformó el saber sabio matemático profundamente y llevó a la noosfera matemática a aceptar la teoría de conjuntos como elemento unificador. Inicialmente esos cambios no fueron llevados a las aulas, sin embargo, a finales de los años 50 los logros espaciales soviéticos provocan una serie de reacciones en el ámbito educativo occidental que cristalizan en varios congresos para promover una reforma de la enseñanza de las matemáticas escolares. Las matemáticas modernas surgen en la década de los 60 como resultado de las reformas propuestas y se inicia un nuevo proceso de debate epistemológico y transposición didáctica.

En España, la situación política y social hace que estas modificaciones se incorporen experimentalmente en la segunda mitad de la década de los 60 y se consoliden definitivamente en el año 1970 en la Ley General de Educación.

La reforma llevada a cabo supuso grandes cambios en todos los niveles educativos que poco a poco han sido revertidos en las sucesivas reformas educativas. En el área de la Geometría esos cambios son aún visibles y siguen siendo objeto de revisión. El carácter deficiente del tratamiento de la Geometría en el sistema de enseñanza actual es señalado por numerosos autores (Alsina Catalá, Fortuny Aymení y Pérez Gómez, 1997; Gascón, 2003 y 2004; Guzmán, 2007). Las razones que arguyen llevan a considerar una reflexión sobre los

aspectos ontológicos y epistemológicos que han afectado a este bloque de las Matemáticas en Educación Secundaria.

Durante el último siglo han sido varias las modificaciones que se han producido en su enseñanza. El punto de inflexión fue marcado por la insigne frase de Dieudonné pronunciada en el coloquio de Royaumont de 1959: “Si je voulais résumer en une phrase tout le programme que j’ai dans l’esprit, ce serait par le slogan: « A bas Euclide! »”<sup>3</sup> (Pauli, 1979), y que supuso un período de inestabilidad en el currículo de Geometría provocando carencias en el conocimiento geométrico alcanzado por el alumnado. Además, un hecho relevante a tener en cuenta es que dichas modificaciones también han influido en la profesión docente, puesto que el paradigma vigente en la formación de parte del profesorado ha dejado de estarlo en el transcurso de su ejercicio profesional.

Finalmente, el carácter axiomático-deductivo propio de la Geometría ha sido subestimado al potenciar el tratamiento aritmético y algebraico de la misma, siendo varios los autores que previenen de esta coyuntura:

¿Qué es más interesante, medir la dimensión de una sección circular de una hoja cuadriculada, utilizando la fórmula que alguien te ha dado sin ninguna explicación (y te ha hecho memorizar y practicar una y otra vez), o escuchar la historia de uno de los problemas más bonitos y fascinantes y una de las ideas más brillantes y poderosas de la historia humana? (Lockhart, 2008, p. 748)

En consonancia con el objetivo de formalizar toda la disciplina matemática surgió la corriente de la matemática moderna, en la que “La geometría elemental y la intuición espacial sufrieron un gran detrimento. La geometría es, en efecto, mucho más difícil de fundamentar rigurosamente” (Guzmán, 2007, p. 23). Se sitúa entonces en la década de los años 60 del siglo XX la raíz de la trascendente transformación de la enseñanza de las Matemáticas en general y de la Geometría en particular. Siendo, por tanto, objetivo nuestro la comprensión y

---

<sup>3</sup> "Si quisiera resumir en una frase todo el programa que tengo en mente, sería con el eslogan: ¡Abajo Euclides!". (Traducción de los autores).

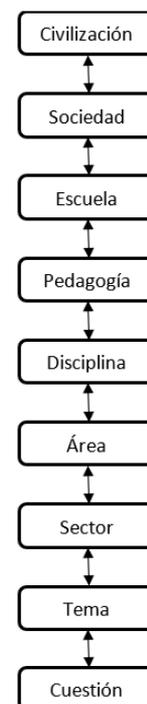
explicación de este fenómeno. En el presente artículo analizaremos las restricciones transpositivas en España en los años 60 y trataremos de ejemplificar el cambio epistemológico que se produjo a través de la legislación y de algunos ejemplos de materiales escolares de la época. El estudio considerará las diferentes dimensiones influyentes en la situación, a saber, la social, la económica y la política, y sus efectos en la enseñanza de las Matemáticas.

### La transposición didáctica y los niveles de determinación

El análisis de la transformación de la Geometría escolar en la década de los 60 no puede restringirse al examen de lo sucedido en la disciplina de Matemáticas. La Teoría Antropológica de los Didáctico (en adelante TAD) postula que no es la disciplina la única fuente de condiciones y restricciones en el tratamiento institucional-escolar de una obra matemática, sino que su ecología se halla influenciada y determinada por otros aspectos que en una primera aproximación podrían tenerse por ajenos a ella. Dichos aspectos, por tanto, exceden el alcance de la disciplina de Matemáticas y las condiciones y restricciones ecológicas se sitúan en los distintos niveles de determinación (Bosch y Gascón, 2007) (véase la Figura 1).

Figura 1.

*Escala de los Niveles de determinación.*  
(Bosch y Gascón, 2007, p. 401)



Sin embargo, la dimensión ecológica no abarca toda la problemática relacionada con la Geometría escolar en el período que nos ocupa. Según Gascón (2011), el estudio ha de considerar también la dimensión *económico-institucional* del problema, es decir, la influencia de la *transposición didáctica* (en adelante TD) en la obra matemática bajo consideración. La TD postula que las obras que son objeto de estudio en una institución no son producto de individuos aislados, sino de la sociedad, y que son las necesidades de esta las que condicionan

el modo en que las dichas obras son construidas y transmitidas en una institución. Así, el conocimiento o las obras que se estudian en una institución vienen determinadas por este proceso de transformaciones sucesivas del saber provocado por la adaptación a las necesidades sociales. La TD registra y explica la transformación del saber desde el *saber sabio*, es decir, el aceptado por la comunidad científica y reunido en las publicaciones de referencia de esta relacionadas con él, al estadio de *saber enseñado*, a saber, el utilizado en la institución escolar.

Chevallard, creador de la TD, la define como:

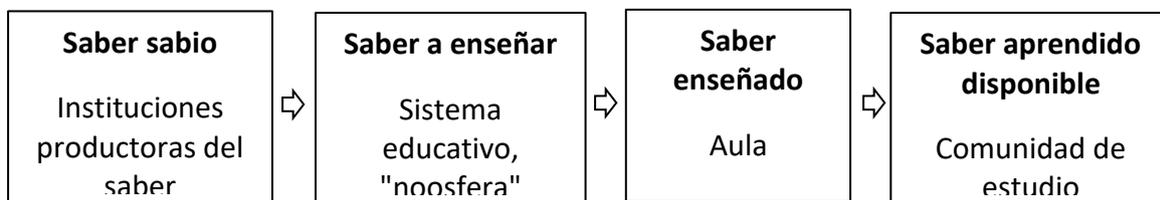
Un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica. (Chevallard, 1985, p. 39) como se cita en (Gómez Mendoza, 2005, p. 87).

La TD considera entonces las relaciones sociales e institucionales como elementos influyentes en el saber finalmente enseñado en una institución escolar. En consecuencia, es la TD la que hay que analizar para vislumbrar el porqué de la inclusión de determinados saberes en la institución o de las reformas llevadas a cabo, es decir, hay que estudiar las transformaciones que han sufrido los saberes de cara a convertirse en necesarios para la sociedad ulterior.

El proceso de la TD conlleva varias etapas esquematizadas en la figura 2.

*Figura 2.*

*Proceso de Transposición Didáctica. Elaboración propia basada en (Chevallard, 1985).*



El primer paso que se lleva a cabo es la selección de los objetos del saber sabio que van a ser estudiados en las diferentes instituciones. Es la sociedad la que determina las necesidades y exigencias al respecto. Tras esta elección, los conocimientos de este saber sufren un primer

proceso de deconstrucción y reconstrucción, siempre con el objetivo final de que el alumnado pueda llegar a construirlos.

Las transformaciones de los saberes son realizados por entes de diversa naturaleza, a saber, profesorado, clase política, expertos de referencia del área en cuestión, etc. Entendidos como colectivo, todos los individuos implicados conforman la “noosfera” (Bosch y Gascón, 2007). Notemos que la noosfera no actúa aislada de la sociedad en la que se enmarca, y esta última viene determinada por condicionantes históricos y socioeconómicos y por las corrientes de pensamiento y filosofía de la educación dominantes en su época. En consecuencia, las restricciones sobre las transformaciones del saber sabio tienen su origen en ámbitos que a priori pueden parecer ajenos al saber. Son entonces las editoriales, las instituciones educativas y el profesorado los que transforman de nuevo el saber, y, en última instancia, el docente vuelve a contextualizar y a personalizar el saber, llegando así al *saber enseñado*. Finalmente, la comunidad de estudio construye su propio *saber aprendido*.

Como consecuencia de los postulados de la TAD, procedemos a analizar la ruptura epistemológica que supuso la matemática moderna a través de los niveles de determinación en el contexto de la década de los 60 que delimitaron la Geometría escolar en dicha época.

### **Situación social, económica y política**

En primer lugar, señalemos que si bien España, como veremos más adelante, en la década de los 60 tenía unas particularidades que la diferenciaban de otros países, también es cierto que se enmarcaba en una civilización particular, la occidental y, dentro de esta, en el grupo de países marcados por la influencia de los Estados Unidos de América (en adelante EEUU). Esta situación marcó la orientación epistemológica de la enseñanza de las Matemáticas en general y de la Geometría en particular. La época que estamos analizando estuvo marcada por la Guerra Fría, es decir, el enfrentamiento en todos los niveles, político, social, económico, militar, científico, cultural, etc., entre el bloque occidental, guiado por el capitalismo, y el

bloque oriental, definido por el comunismo. Dicho enfrentamiento se reflejó en el interés en establecer la supremacía de un bloque con respecto al otro y se concretó, en particular, en la carrera espacial. Dicha competición conllevaba conseguir conquistar el espacio, es decir, enviar artefactos al espacio con seres humanos. Fue el Programa Sputnik de la Unión Soviética el que primero envió satélites artificiales que orbitaban alrededor de la Tierra y, posteriormente, el Programa Vostok consiguió el siguiente hito enviando a un ser humano al espacio (1961). Si bien en EEUU la nosfera trabajaba en la necesidad de cambiar el currículo de Matemáticas en Educación Secundaria, dicho acontecimiento impulsó a instancias gubernamentales de EEUU a que se tomaran decisiones para incrementar los alumnos de Matemáticas y desarrollar un nuevo currículo de esta materia. Así, los grupos renovadores de la Matemática Moderna pudieron introducir esta tendencia en la enseñanza de las Matemáticas (Klein, 2003). Por contra, en el bloque soviético la introducción de la Matemática Moderna fue menos profunda:

The new curriculum exposed students to elementary set theory and mathematical logic early on. But on the whole, this innovation was moderate by comparison with the reforms that were taking place at the same time in France or Belgium. (Abramov, 2010, p. 100).

Por su proximidad al bloque estadounidense, como veremos más adelante, la influencia de la Matemática Moderna fue notoria en la enseñanza de la Geometría en España.

Sin embargo, en las décadas de los 60 y 70 España estaba inmersa en una situación social, económica y política determinada por el gobierno de Franco. Hechos que marcaron la sociedad española en esa época fueron la ejecución de Julián Grimau, acusado de incurrir en delitos en Barcelona en el transcurso de la Guerra Civil, o la creación del Tribunal de Orden Público (TOP) (Ley 154/1963 sobre creación del Juzgado y Tribunales de Orden Público, 1963). En el Congreso del Movimiento Europeo celebrado en Múnich (1962), en el que participaron 118 asistentes de diversas inclinaciones ideológicas, varios de ellos exiliados tras su regreso a España, se llegó a una resolución que promovía la instauración de instituciones

democráticas en España. En la década de los 60, en el ámbito universitario, parte de su cuerpo docente (como Aranguren o Tierno Galván) fue destituido por su adhesión a la petición de cambios, estudiantes universitarios fueron expulsados y se promulgó la clausura temporal de la Universidad de Madrid (Gómez Oliver, 2008).

A partir de 1957 los gobiernos toman un cariz tecnócrata y abogaron por una estabilización de la economía y del comercio, principalmente fomentados por ministros con dicho cariz: Navarro Rubio en Hacienda, y Ullastres Calvo en Comercio. El crecimiento económico fue notable en poco tiempo y López Rodó fue nombrado Comisario para diseñar los Planes de Desarrollo (Cañellas Mas, 2006).

Entre los años 1962 y 1969 fueron cuatro los gobiernos de marcado carácter tecnócrata que llevaron al régimen de Franco hacia el aperturismo. Según se señala en (Fusi Palafox, 1997) y (Fusi y Calvo, 2009), los hechos que marcaron la situación fueron los que a continuación se enumeran:

Se firmó un acuerdo preferente de comercio tras las negociaciones con el Mercado Común que fueron gestionadas por el Ministro de Exteriores Fernando de Castiella.

Fue promulgada la Ley de Prensa e Imprenta (Ley 14/1966 de Prensa e Imprenta, 1966), impulsada por el Ministro de Información y Turismo, Fraga, que derogaba la censura en el sistema, quedando restringida para aquellos casos de emergencia nacional o de guerra, aunque consideraba la retención de publicaciones y sanciones económicas o penales para aquellos individuos que firmaran publicaciones contrarias al régimen.

Se promulgó la Ley Orgánica del Estado (Ley Orgánica del Estado, número 1/1967, 1967), que, con la intención de mostrar una imagen de liberalización política empleando la nomenclatura de democracia orgánica, fue sometida a referéndum.

Se produjo la conmemoración del aniversario del final de la Guerra Civil por medio de la campaña de los 25 Años de Paz.

Finalmente, Juan Carlos de Borbón fue nombrado como sucesor en la Jefatura del Estado a título de rey (Ley 62/1969 por la que se provee lo concerniente a la sucesión en la Jefatura del Estado., 1969)

Las transformaciones en las dimensiones política, social y económica fueron impulsadas por el Plan de Estabilización (Decreto-ley 10/1959 de ordenación económica, 1959) y el Primer Plan de Desarrollo (Ley 194/1963 por la que se aprueba el Plan de Desarrollo Económico y Social para el período 1964/1967 y se dictan normas relativas a su ejecución, 1963). Las medidas asociadas a estos cambios fueron la devaluación de la moneda, los recortes en el gasto público y la liberalización de las importaciones, apostando de este modo por la libertad económica. Por otra parte, la recepción de ayudas económicas enviadas por la emigración española en Europa contribuyó a la mejora económica del país, así como el crecimiento del turismo, España pasó de 2.863.700 turistas en 1959 a 27.359.200 en 1975 (figura 3).

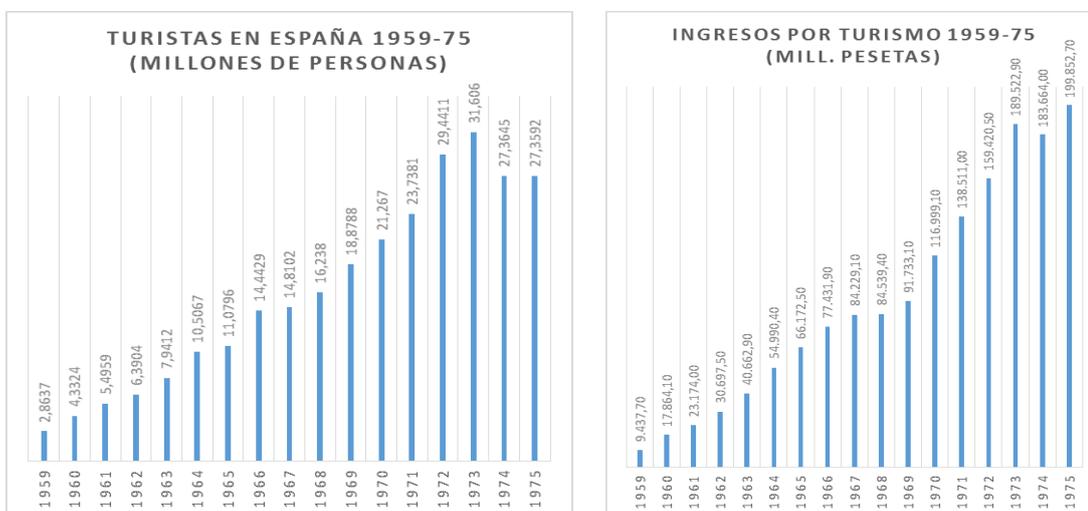


Figura 3.

Datos de evolución turística en España entre 1959 y 1975. (Carreras y Tafunell, 2005, p. 642) en la Figura 2

En cuanto a índices demográficos, se registró un aumento de población, pasándose de los 30.528.539 habitantes según el censo de 1960 a los 34.040.657 en 1970 (INEbase /

Demografía y población / Cifras de población y Censos demográficos / Censos de Población, 2017) y la natalidad se mantuvo en valores altos.

Otros datos que dibujan este período son los señalados por Palomares (2006); entre ellos destacan los siguientes:

Entre 1960-70 aconteció un fenómeno de emigración que conllevó más de dos millones de desplazamientos de zonas rurales a urbanas dentro de las fronteras (Madrid, Barcelona, Bilbao) y algo menos de dos a países de Europa Occidental (Francia, Suiza, Alemania, Bélgica). Este hecho supuso la aparición de diferencias en cuanto a riqueza entre regiones y aparición de barrios obreros en las afueras de las ciudades de acogida.

En los años anteriores al inicio del régimen de Franco, el sector primario había sido preponderante. Esta situación cambió en las décadas siguientes, pasando el testigo al sector terciario o de servicios, el empleador del 40% de la población, empleando el secundario o industrial al 38% y quedando relegado el sector agrícola-ganadero al porcentaje restante de trabajadores.

Los cambios económicos se vieron reflejados en el aumento en la renta per cápita, pasando de 1160 dólares a comienzos de la década de los años 60 a 2841 en 1975.

La industria de consumo manifestó un acrecentamiento en la fabricación de electrodomésticos (de 300 000 frigoríficos producidos en 1966 se pasó a un millón en 1974), en la construcción de vivienda (fuerte edificación privada) y en la producción de automóviles (de 250 000 en 1966 se pasó a 700 000 en el año 1974).

En cuanto al desarrollo de políticas sociales, estas se concretaron en la creación de la Seguridad Social (Ley 193/1963 sobre Bases de la Seguridad Social, 1963), implementando medidas sobre la asistencia sanitaria, las prestaciones por desempleo e incapacidad y las pensiones de jubilación.

Con respecto a los asuntos eclesiales, el Concilio Vaticano II (comenzado por Juan XXIII en 1962 y clausurado por Pablo VI en 1965) supuso una abertura de la institución que desembocó en la promulgación de la Ley de Libertad Religiosa (Ley 44/1967 regulando el ejercicio del derecho civil a la libertad en materia religiosa, 1967).

Globalmente, es la tratada una época en la que tanto la demografía como la economía sufrieron transformaciones importantes que fueron controladas social y políticamente con la implementación de políticas sociales, de cambios gubernamentales y de represión interna. El sistema educativo se vio influenciado por todos estos cambios y reformas puesto que conllevaban implícitamente la necesidad de disminuir el número de individuos analfabetos.

### **Situación educativa**

El análisis del nivel de codeterminación *escuela* indica que en la década de los 60 la tasa de escolarización en España creció significativamente. Este índice lo tomamos como un indicador del grado de alfabetización de la sociedad. Así, consideramos que se produce un incremento en este según atestiguan los siguientes datos:

Atendiendo a los datos proporcionados en (Estadística de la Enseñanza en España. Curso 1969-70, 1971), en 1960, son 3 387 400 los alumnos matriculados en primaria, comprendiendo el nivel de los periodos preescolar y de escolaridad obligatoria. Esto se traduce en que un 51.1% de la población de entre 2 y 13 años (6 628 811 individuos según el censo de 1960 (Población según sexo y edad desde 1900 hasta 2001. Población (1960) por provincias, edad y sexo, 1961) se encontraba matriculada en dicho nivel.

Diez años más tarde, en 1970, el correspondiente dato se incrementa y alcanza el 62.3%, siendo los alumnos matriculados en preescolar 819 900 y los individuos en Educación General Básica (EGB) 3 929 600, según (Estadística de la Enseñanza en España. Curso 1974-75, 1975), mientras que en España la población en la franja de edad entre 2 y 13 años la conforman 7 618 996 individuos según el censo de 1970 (Población según sexo y edad desde 1900 hasta 2001.

Población (1970) por provincias, edad y sexo, 1971). Por otro lado, si atendemos a la matrícula en EGB, el porcentaje de individuos matriculados es del 78.1% de un total de 5 029 517 individuos entre 6 y 13 años (Población según sexo y edad desde 1900 hasta 2001. Población (1970) por provincias, edad y sexo, 1971).

Un lustro más tarde, 1975, en el período de escolaridad obligatoria la cantidad de individuos matriculados es muy próxima al 100% (Estadística de la Enseñanza en España. Curso 1974-75, 1975).

Según se mostró en el análisis de los niveles civilización y sociedad, los años 60 supusieron la etapa desarrollista conducida por ministros tecnócratas. A la par, en el nivel escuela se mostró que el número de estudiantes experimentó un fuerte incremento. Es también en esa década cuando en Europa la educación se orienta en el sentido de la escuela comprensiva, rompiendo el esquema de años anteriores según el cual la mayor parte de los individuos estudiaban únicamente el nivel de primaria, y solamente una minoría cursaba estudios medios o universitarios. Se instaura entonces una ampliación de la duración de la educación básica que afecta a toda la población, creándose una sola vía de dicha educación (Bolívar, 2015). En lo que respecta a España, y para dar respuesta al desarrollo económico señalado en el análisis de la sociedad en cuanto a la necesidad generada de disponer de una población alfabetizada, la gestión dirigida por Lora Tamayo se centra en la educación primaria. Según indica Puelles (2002) en 1964 y 1965 se introducen en todas las materias normas prácticas para verificar que el alumnado ha alcanzado los niveles mínimos establecidos. Por otra parte, el incremento del número de docentes y su formación pueden abordarse como consecuencia del desarrollo económico. En este marco, los estudios conducentes a la obtención del título de maestro son reformados (Decreto 193/1967 por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Enseñanza Primaria, 1967), de modo que ya no se accede desde el Bachillerato Elemental, sino que para poder cursar dichos estudios hay que estar en posesión del título de

Bachiller Superior, y, además, los mejores expedientes tienen acceso directo al cuerpo de funcionarios de maestros.

Los hechos anteriormente expuestos, en cuanto a la enseñanza secundaria, llevan a la publicación del decreto (Decreto 1181/1963 para el establecimiento del Centro Nacional de Enseñanza Media por Radio y Televisión, 1963) que en su preámbulo justifica la creación del organismo para la gestión y desarrollo del Bachillerato Radiofónico en el incremento de la población escolar de enseñanza media, en particular de los alumnos libres.

Según lo expuesto, la década de los 60 supuso para España la necesidad de abordar una reforma educativa. En este marco, surgieron foros de debate y revistas de divulgación, se consolidaron estudios y la formación del profesorado mejoró, todo con el objetivo de permanecer constantemente al tanto de los avances que se producían en el contexto internacional en el área de Matemáticas. El cenit se alcanzó con la publicación del Libro Blanco (La educación en España. Bases para una política educativa, 1969), informe preparatorio de la primera ley general de educación del siglo pasado. En este informe se analizó la situación de la educación en ese momento, estableciendo un déficit de 800 000 plazas escolares en la franja de edad de 6 a 14 años y señalando la situación precaria del sistema educativo:

En resumen: de cada 100 alumnos que iniciaron la Enseñanza Primaria en 1951, llegaron a ingresar 27 en la Enseñanza Media; aprobaron la reválida de Bachillerato Elemental 18 y 10 el Bachillerato Superior; aprobaron el Preuniversitario 5 y culminaron estudios universitarios 3 alumnos en 1967. (La educación en España. Bases para una política educativa, 1969, p. 24).

### **Ley General de Educación de 1970**

La conocida como Ley Moyano (Ley de Instrucción Pública, 1857) fue la última ley con objeto de reforma global de la educación anterior al período objeto de análisis. Diversas reformas parciales habían sido promulgadas, pero no es hasta el final de la década que nos ocupa, en 1970, cuando se aprueba una nueva ley que reordena globalmente el sistema educativo (Ley 14/1970 General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa,

1970) (en adelante LGE), es decir, una ley que redefine los niveles de escuela y pedagogía. En su preámbulo realiza una propuesta de un sistema educativo universal. Asimismo, tiene en cuenta la formación laboral de los individuos, la igualdad de oportunidades y la formación permanente. Todo ello, son pinceladas de una ley de educación moderna y cambiante con respecto a lo establecido anteriormente.

El sistema educativo nacional asume actualmente tareas y responsabilidades de una magnitud sin precedentes. Ahora debe proporcionar oportunidades educativas a la totalidad de la población, para dar así plena efectividad al derecho de toda persona humana a la educación y ha de atender a la preparación especializada del gran número y diversidad de profesionales que requiere la sociedad moderna. Por otra parte, la conservación y el enriquecimiento de la cultura nacional, el progreso científico y técnico, la necesidad de capacitar al individuo para afrontar con eficacia las nuevas situaciones que le deparará el ritmo acelerado del mundo contemporáneo y la urgencia de contribuir a la edificación de una sociedad más justa constituyen algunas de las arduas exigencias cuya realización se confía a la Educación. (Ley 14/1970 General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa, 1970, p. 12525).

Entre los objetivos que se propone la presente Ley son de especial relieve los siguientes. Hacer partícipe de la educación a toda la población española, basando su orientación en las más genuinas y tradicionales virtudes patrias; completar la educación general con una preparación profesional que capacite para la incorporación fecunda a la vida del trabajo; ofrecer a todos la igualdad de oportunidades educativas, sin más limitaciones que la de la capacidad para el estudio; establecer un sistema educativo que se caracterice por su unidad, flexibilidad e interrelaciones, al tiempo que se facilita una amplia gama de posibilidades de educación permanente y una estrecha relación con las necesidades que plantea la dinámica de la evolución económica y social del país. Se trata, en última instancia, de construir un sistema educativo permanente, no concebido como criba selectiva de los alumnos, sino capaz de desarrollar al máximo la capacidad de todos y cada uno de los españoles. (Ley 14/1970 General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa, 1970, p. 12526).

La justificación de la LGE refleja el nivel social en los niveles de pedagogía y escuela, recogiendo el “clamoroso deseo popular de dotar a nuestro país de un sistema educativo más justo, más eficaz, más acorde con las aspiraciones y con el ritmo dinámico y creador de la España actual” (Ley 14/1970 General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa, 1970, p. 15526).

La ley estructuraba el sistema educativo preuniversitario en tres etapas: una obligatoria y gratuita, la Educación General Básica (en adelante EGB), compuesta por 8 cursos académicos

y una franja de edad de los 6 a los 14 años; la segunda etapa, que ya no era obligatoria y estaba conformada por tres cursos de Bachillerato Unificado Polivalente; y, finalmente, la Educación Secundaria se completaba con el Curso de Orientación Universitaria.

En cuanto a los estudios universitarios, estos quedaban organizados en tres ciclos: diplomatura, de tres cursos académicos, licenciatura, que suponía dos cursos académicos más, y doctorado.

La promulgación de la LGE también supuso la fundación de nuevos centros escolares y la contratación de profesorado. Todo ello condujo, como ya se indicó arriba, a la escolarización del 100% de los individuos en edad de escolaridad obligatoria.

... el gran esfuerzo realizado en el decenio 1964-74 en el ámbito de la escolarización. Efectivamente, el grupo de edad 6-14 años pasó de una tasa de escolarización del 87,3% al 100%, el tramo 14-18 años de un 10,05% a un 40,8%, y el de 18-22 años de un 7,6% a un 16,4%. (Puelles, 2000, p. 34).

Los apartados anteriores nos permiten comprender las restricciones existentes en los niveles civilización, sociedad y escuela. Sin este análisis preliminar es muy complicado entender como se produjo el cambio epistemológico y vislumbrar las dificultades particulares del caso español para introducir con éxito el modelo propuesto por la matemática moderna para las Matemáticas escolares.

### **Las Matemáticas Modernas**

La principal transformación en la *disciplina* de Matemáticas entre los años 1960 y 1975 fue la consolidación de la reforma conocida como Matemática Moderna. Este nuevo enfoque epistemológico y didáctico es el origen de los sucesivos cambios experimentados por la educación matemática en el último medio siglo. En este artículo hemos intentado enmarcar su desarrollo fijando el contexto específico español. Debido a su fuerte influencia, abordamos aquí en qué consistió y sus contribuciones más destacadas.

Observando los distintos saberes definidos por la Transposición Didáctica, se constata un alejamiento entre el saber sabio y el saber escolar en Matemáticas en el período que comprende la segunda mitad del siglo XIX y la primera del XX. Fueron muchos los avances en las Matemáticas, y, en relación con la Geometría, cabe señalar los siguientes (Sierra, 2008):

El saber sabio geométrico se expandió considerablemente gracias a Hilbert, Bolyai y Lobachevski, que definieron las geometrías no euclídeas. La tradicional definición de Geometría cambió y el aumento de la abstracción en esta área complicó la transposición didáctica de la Geometría en Educación Secundaria en tanto que se planteaba la cuestión de trasladar a la Geometría escolar la fundamentación de la Geometría sabia.

La crisis de los fundamentos de la disciplina condujo al intento de emplear el concepto de estructura como marco epistemológico común a todas las áreas de las Matemáticas. Hilbert o Russel trabajan bajo este enfoque y a mediados del siglo XX se adhiere a él el grupo Bourbaki. Era este un grupo de alumnos franceses de escuelas normales cuyo objetivo era replicar el espíritu de los Elementos de Euclides, a saber, redactar una obra de referencia con los principales conocimientos matemáticos existentes tanto en la matemática clásica como en la matemática moderna (Warusfel, 1971).

El marco epistemológico común se sirve de la creación de un único constructo explicativo, la teoría de conjuntos, que será incluida en los programas oficiales de la época.

En particular, este enfoque estructuralista y de fundamentación de la disciplina condujo al Análisis Matemático a desarrollar una construcción formal del conjunto de los números reales.

Con estos avances en el saber sabio, se produce un claro envejecimiento del saber enseñado y se abre una brecha entre saber sabio y saber enseñado. Para salvarla, como se ha señalado, se propone un enfoque de características similares al que surgió a partir de los Elementos de Euclides en la matemática clásica. En el siglo XX, se establece como fuente la

formalización de las matemáticas llevada a cabo por el grupo Bourbaki en un movimiento liderado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) y el Grupo Belga de Pedagogía de la Matemática (CBPM). Diversos autores se adhieren a este movimiento; tal es el caso de Papy, que expone:

Los progresos realizados a lo largo del último siglo la han modificado y humanizado en sus fundamentos y hoy la hacen más familiar, más inteligible, más precisa, más accesible, más interesante.

Hoy es posible proceder en forma totalmente distinta, hacer participar a los principiantes en la construcción activa del edificio matemático a partir de situaciones simples y familiares.

Los cinco primeros capítulos introducen al lector en el universo de la matemática actual que constituye la teoría de conjuntos. Se trata, por supuesto, de una exposición ingenua y descriptiva, que se ha querido, sin embargo, presentar de manera tal que un estudio posterior de más hondura no exija ningún reacondicionamiento fundamental. (Papy, 1968, p. 9).

Así, la piedra angular del movimiento de la Matemática Moderna es basarse en la teoría de conjuntos y en las estructuras matemáticas siguiendo el método axiomático para poder progresar en el conocimiento y aprendizaje de la disciplina de manera más eficiente.

En la concepción de Papy y sus colaboradores del CBPM, las estructuras-madre, según las defiende Bourbaki, serían análogas a las herramientas de la industria ya que permiten la economía de pensamiento y evitan la repetición de razonamientos; deben ser introducidas progresivamente según se va construyendo el edificio matemático, ya que presentadas al final cuando está ya construido no tiene ningún sentido. El hilo conductor de todo el proceso es el método axiomático; en la enseñanza del Centro se utilizará el método axiomático progresivo que consiste en que los axiomas no se dan desde el principio sino que se van introduciendo a lo largo de la teoría, de modo progresivo y motivado. (Sierra, 2008, p. 638).

Desde una perspectiva didáctica, se produce un agrupamiento de contenidos y metodología para abordarlos, produciéndose una reforma global del sistema de enseñanza de la disciplina. Sierra (2008) señala que la renovación de la metodología se apoyará sobre los siguientes elementos:

- La idea de que los conceptos fundamentales de la Matemática de nuestro tiempo están en el conocimiento común.
- La necesidad de partir de situaciones pedagógicas adecuadas para refinar de modo progresivo ese conocimiento común hasta convertirlo en conocimiento

matemático. [...]

- Creación de medios pedagógicos esencialmente no verbales como son: lenguaje de cuerdas [...] mediante diagramas de Venn. [...] Lenguaje de flechas [...] grafos sagitales. [...] Bandas dibujadas. [...]
- Pedagogía de la afectividad, con la creación de cuentos matemáticos. (Sierra, 2008, p. 638-369)

Se produce en Bélgica una división en el sistema educativo, considerando la etapa secundaria inferior (de 12 a 15 años) y la etapa secundaria superior (de 15 a 18 años). En lo tocante a las matemáticas:

En el secundario inferior, en la investigación realizada se han considerado cuatro grandes núcleos en torno a los que se puede vertebrar la reforma del CBPM destacando, sin lugar a dudas, la reconstrucción de la geometría afín y métrica en el plano. Los otros tres núcleos son: conjuntos, relaciones y funciones, números naturales y enteros. Ciñéndome a la geometría, hay que señalar que el objetivo de la reforma del CBPM en el secundario inferior es la reconstrucción del edificio geométrico hasta llegar a la estructura de  $\pi_0$  como espacio vectorial euclídeo definido sobre el cuerpo de los números reales. (Sierra, 2008, p. 639).

Por tanto, los cambios alcanzaron también el *área* de la Geometría con el objetivo de definir el plano como un espacio vectorial euclídeo sobre el cuerpo de los números reales, es decir, son las estructuras algebraicas las que organizan las obras geométricas que han de construirse en el aula. Para ello, se procedió a introducir, según el orden temporal, los siguientes elementos: los axiomas de incidencia y orden y el estudio de las traslaciones; definición de la estructura del plano como espacio vectorial real, y construcción al unísono del cuerpo de los números reales; alcanzando, finalmente, la construcción de la estructura de espacio vectorial euclídeo y el trabajo con dicho espacio.

En cuanto a la etapa superior de la secundaria, se distinguen tres áreas en la sección científica: Álgebra Lineal, Análisis y Aritmética, quedando el área de Geometría enmarcada en la de Álgebra Lineal. De este modo, se realiza un estudio de la Geometría Analítica de espacios vectoriales de dimensión finita, del plano vectorial euclídeo, de la geometría del espacio y de las formas bilineales y cuadráticas.

En cuanto a la supresión de la enseñanza de la geometría sustituida por el álgebra [...]

En el fondo de esta polémica subyace una cuestión epistemológica. Dieudonné y Papy no captan el sentido del debate sobre el papel a asignar a la geometría en la enseñanza porque desde su punto de vista dicho problema no existe. Papy está plenamente convencido de que está enseñando geometría porque identifica la geometría con el álgebra lineal en concordancia con la idea de "álgebra geométrica" de Artin (1957), que es fuente de inspiración de su renovación de la enseñanza de las Matemáticas. (Sierra, 2008, p. 644).

Esta inmersión de la Geometría en el Álgebra Lineal tendrá consecuencias más allá de la desaparición décadas más tarde de las Matemáticas Modernas en el currículo.

### **Introducción de las Matemáticas Modernas en España**

España no es ajena al movimiento de las Matemáticas Modernas. Así, se persigue que la enseñanza de la matemática siga un proceso más activo y menos individual, aproximándose a la didáctica imperante en Europa.

Aunque el desarrollo legislativo del cambio epistemológico propuesto por las matemáticas modernas se desarrolló a finales de la década de los 60, las nociones de las Matemáticas Modernas se filtran poco a poco en la educación secundaria, concretamente en Bachillerato, en el intervalo temporal marcado por la celebración de los dos congresos internacionales patrocinados por la OCDE ya mencionados, a saber, el de Royaumont de 1959 y el de Dubrovnik de 1960. Según se indica en (Sierra, 2008), dichas nociones comprenden los conjuntos, las operaciones fundamentales con conjuntos, el producto de conjuntos, las relaciones binarias, aplicaciones entre conjuntos, concepto de función, la equivalencia, la simetrización de un semigrupo, los grupos, la reversibilidad de las operaciones y el espacio vectorial. No puede sustraerse el lector del viraje en la disciplina y en el área que supone el abandono de los contenidos tradicionales en la matemática escolar y la aparición de los contenidos promulgados por el movimiento de la Matemática Moderna. Dicho cambio y la unificación de los fundamentos en estructuras se concreta en la metodología propuesta en los Cuestionarios del Bachillerato Elemental.

medios de trabajo de la Matemática actual. [...] Resaltar el sentido unitario de la Matemática fundiendo todas las nociones en unidades funcionales basadas en la teoría de los conjuntos, en las ideas de correspondencia y de relación y en las estructuras algebraicas fundamentales. (Orden de 4 de septiembre de 1967 por la que se aprueban los Cuestionarios del Bachillerato Elemental, 1967, p. 13429)

Además, se justifica la distribución de contenidos en cursos por la construcción de dichas estructuras algebraicas, que son la guía del currículo en lugar de:

La distribución de las materias en los distintos cursos se ha hecho procurando agrupar los temas alrededor de ciertas estructuras algebraicas fundamentales, que no se citan explícitamente en ninguna parte del cuestionario, y prescindiendo de la separación entre Aritmética y Geometría.

Por ello, el primer curso se centra en la estructura de semigrupo (números naturales, segmentos).

El segundo curso en la de grupo y anillo (números enteros, segmentos orientados, movimientos, ángulos como giros).

En el tercero aparece la estructura de cuerpo con los números racionales. (Orden de 4 de septiembre de 1967 por la que se aprueban los Cuestionarios del Bachillerato Elemental, 1967, p. 13430).

La fundamentación de la disciplina la convierte en un ente unitario justificado por las estructuras algebraicas, teniendo como consecuencia la separación tradicional entre Aritmética y Geometría en el Bachillerato elemental y entre Álgebra y Geometría en el superior.

El argumento de la idoneidad de la secuencia de contenidos y las orientaciones metodológicas de esta reforma se apoyó en la experimentación previa “durante varios años en numerosos centros oficiales y no oficiales de todo el país” (Orden de 4 de septiembre de 1967 por la que se aprueban los Cuestionarios del Bachillerato Elemental, 1967, p. 13429). Además, la reforma experimental fue divulgada en revistas como Revista de Enseñanza Media y Vida Escolar (Bracho-López, Maz-Machado, Jiménez-Fanjul y Adamuz-Povedano, *et al.*, 2010). El objetivo era implantar una reforma partiendo de las instituciones gubernamentales y descendiendo hasta las aulas, para lo que había que adaptar las instituciones escolares al nuevo modelo empleando para ello vías de información y formación del profesorado.

Se percibe la importancia de los cambios y se invierte tiempo, recursos y esfuerzos en dominar los nuevos contenidos. Sin embargo, la ausencia de didactas como Puig Adam hace que los aspectos metodológicos sean pasados por alto.

Aun manteniendo un enfoque euclídeo, según se ha señalado, la educación geométrica en el Bachillerato elemental se vio inmersa en un programa construido a partir de estructuras algebraicas. Esta tendencia se acentuó en el Bachillerato superior. El área de Geometría se integra en libros de texto más generales que abordan toda la disciplina matemática. Por ejemplo, en el manual de bachillerato (Marcos y Martínez, 1970), que concreta el currículo de (Orden de 4 de septiembre de 1967 por la que se aprueban los Cuestionarios del Bachillerato Elemental, 1967), como su propio título indica se produce un movimiento hacia la Matemática Moderna con la inclusión de temas relativos a teoría de conjuntos y relaciones. Las praxeologías que se construyen no son ya basadas en una única técnica concreta y su aplicación, sino que se conjugan varias técnicas. Epistemológicamente, el enfoque es euclideanista y el modelo docente asociado teorícista (Gascón, 2001) construido a partir de las nociones conjuntistas, y la Geometría se mantiene dentro de un modelo no experiencial, hipotético-deductivo, y es propedéutica para el Álgebra Geométrica.

La LGE da continuidad al enfoque epistemológico de las Matemáticas Modernas ya recogido en los cuestionarios anteriores “cuyos procedimientos facilitan la creación de estructuras formales que permiten ser utilizadas en gran número de situaciones distintas” (Comisión ministerial de planes, 1971, p. 26). Así, ya desde primer curso de EGB se introducen las nociones de la teoría de conjuntos. En cuanto a la Geometría, se incorporan algunas nociones topológicas: “Líneas poligonales abiertas y cerradas. Triangulaciones. Composición y descomposición de polígonos. Borde de un polígono.” (Comisión ministerial de planes, 1971, p. 78).

Las orientaciones pedagógicas siguen la construcción de los conjuntos numéricos de acuerdo con las estructuras algebraicas que conforman, y asociados a estas también se incluyen otros contenidos, como los movimientos del plano en quinto nivel.

### El cambio epistemológico en los libros de texto escolares

Para los planes de estudio de secundaria de 1957, 1967 y 1970, mostramos en la Tabla 1 sendos ejemplos del saber a enseñar correspondiente a estudiantes de 13 años. Nótese que en el que responde a la Ley General de Educación no se incluye epígrafe alguno relativo al área de Geometría.

Tabla 1.

*Comparativa de contenidos en los libros escolares de estudiantes de 13 años. A partir de (Marcos y Martínez, 1960), (Marcos y Martínez, 1970) y (Valdés y Marsinyach, 1976)*

<b>Plan del 57 (Matemáticas 3° Bachillerato)</b>	<b>Plan del 67 (Matemática Moderna 3° Bachillerato)</b>	<b>LGE del 70 (Primer curso BUP)</b>
Los números racionales Adición y sustracción de números racionales Multiplicación y división de números racionales Potencias y raíces de los números racionales. Expresiones algebraicas. Monomios. Adición y sustracción de polinomios. Multiplicación de monomios y polinomios. Identidades más notables. División de monomios y polinomios. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas. Fracciones algebraicas. Operaciones con fracciones algebraicas. Ecuación de primer grado. Problemas de primer grado con una incógnita. Sistemas de ecuaciones lineales. Representaciones gráficas. Aplicación de los gráficos a la vida ordinaria y a las otras ciencias. <i>Revisión de la semejanza de figuras planas.</i> <i>Puntos notables en el triángulo.</i> <i>Relaciones métricas en el triángulo rectángulo.</i> <i>Relaciones métricas en el triángulo oblicuángulo.</i>	Relaciones binarias en un conjunto. Relaciones de equivalencia. Relaciones de orden. Funciones y gráficas. Fracciones. Números racionales: adición, sustracción, multiplicación y división y sus propiedades. Trasposición de factores y divisores. Potencias y raíces de números racionales. Fracciones decimales <i>Proporcionalidad de segmentos.</i> <i>Semejanza de triángulos y polígonos.</i> <i>Razón de las áreas y construcción de polígonos semejantes.</i> Ecuación de primer grado. Problemas de primer grado con una incógnita. Aplicación a los problemas de repartimientos proporcionales y de mezclas. Aplicación a la Aritmética comercial. Sistemas de ecuaciones lineales. Inecuaciones. <i>Relaciones métricas en el triángulo rectángulo.</i> <i>Ángulos de la circunferencia.</i>	Combinatoria Probabilidad y Estadística. Del anillo de los polinomios al cuerpo de las razones algebraicas. Hacia el número real. Funciones polinómicas de variable real. Ecuaciones e inecuaciones. Sucesiones de números reales. Progresiones. El cuerpo de los números complejos.

<i>Relaciones determinadas por las bisectrices de un triángulo.</i> <i>Potencia de un punto respecto a una circunferencia.</i> <i>Razones goniométricas.</i> <i>Resolución de triángulos rectángulos.</i>	<i>Razones goniométricas de un ángulo agudo.</i> <i>Resolución de triángulos rectángulos.</i>	
(Marcos y Martínez, 1960)	(Marcos y Martínez, 1970)	(Valdés y Marsinyach, 1976)

La comparación de los contenidos de los tres libros de texto de la Tabla 1 muestra el giro hacia la epistemología propia de las Matemáticas Modernas que se produce a partir del Plan de 1967 al incluirse los epígrafes:

- Relaciones binarias en un conjunto.
- Relaciones de equivalencia.
- Relaciones de orden.

Sin embargo, el giro se produce ya en los últimos envites del Plan de 1957, como muestra el índice de contenidos del libro de texto (MARCOS; MARTÍNEZ, 1967) que incluye como primeros epígrafes los siguientes:

- Teoría de conjuntos.
- Relaciones binarias.
- Correspondencias entre conjuntos (funciones).

Dichos contenidos no aparecían en el Plan de 1957, sin embargo, dicho texto fue aprobado para dicho plan, recogiendo ya el planteamiento de las Matemáticas Modernas, hecho que entendemos que se produjo como una interpretación que daba respuesta a la “Iniciación al método racional” del Programa de quinto curso del Plan de Bachillerato de 1957 (Centro de orientación didáctica de Enseñanza Media, 1957)

En cuanto a los contenidos desarrollados en libros de texto de los diferentes planes, la influencia del cambio de paradigma epistemológico es también evidente. En concreto, la proporcionalidad de segmentos es tratada de modos diferentes en los libros de texto

correspondientes a distintas épocas. Así, en uno correspondiente al plan de 1957 la redacción es:

Razón de dos segmentos es la medida de uno de ellos cuando se toma el otro por unidad. Prácticamente se obtiene midiendo los dos segmentos con una unidad común y dividiendo una medida por la otra.

Dos segmentos son proporcionales a otros dos cuando los números que expresan sus medidas forman proporción.

Así, si  $AB= 6$  cm,  $CD= 10$  cm,  $EF= 18$  cm y  $GH= 30$ cm, se tendrá:

$AB/CD = EF/GH$ , ya que  $6/10=18/30$  (Marcos y Martínez, 1960, p. 154)

En tanto que en otro texto acorde con el plan de 1967 aparece lo siguiente:

Vamos a establecer una correspondencia entre el conjunto  $S$  de los segmentos generales o longitudes y el mismo conjunto  $S$ . Traza dos segmentos  $a$  y  $b$ , representantes de dos clases de segmentos generales,  $a$  y  $b$ . Igualmente, dos semirrectas con el mismo origen  $O$ . Lleva sobre la primera un representante  $OA$  de la clase  $a$ , y sobre la segunda otro representante  $OB$  de la clase  $b$ . Une  $A$  con  $B$ . Toma ahora un segmento general cualquiera  $x$ , y lleva sobre  $OA$ , a partir de  $O$ , un representante suyo  $OX=x$ . Desde  $X$  traza con la escuadra la paralela a  $AB$ .

Así queda determinado en  $OB$  un segmento  $OY=y$ , representante del segmento general  $y$ .

Pues bien, hagamos corresponder cada segmento  $x$  el segmento  $y$  que así resulta. Esta correspondencia se llama proporcionalidad y se representa así:

$$f x \rightarrow y ; \frac{b}{a}(x) = y$$

(Marcos y Martínez, 1970, p. 126)

La definición de proporcionalidad en el segundo texto se realiza en base a elementos de la teoría de conjuntos, relaciones de equivalencia, etc. En definitiva, se enmarca en la epistemología de las Matemáticas Modernas y permite visibilizar el cambio que eso supuso dentro de las instituciones educativas.

### Conclusiones

Según se deduce de lo expuesto, la década de los sesenta supone un punto de inflexión en las Matemáticas, tanto en el nivel sabio como en el escolar. La causa se encuentra en el movimiento de renovación internacional de las Matemáticas Modernas, concretamente en la noosfera de dicho movimiento. El objetivo del cambio en la transposición fue aproximar los

saberes sabio y enseñado. Sin embargo, la posición ontológica y epistemológica conserva el carácter de verdad universal y necesaria de las Matemáticas y a dichas verdades se llega mediante el método axiomático-deductivo. A pesar de la renovación, la noosfera del movimiento no considera como miembros ni al profesorado ni a psicólogos ni a profesores universitarios de Didáctica de las Matemáticas. En consecuencia, las Matemáticas Modernas no impregnaron el sistema en su totalidad, y fueron poco aceptadas por desconocidas.

Sin embargo, como hemos visto y como señala Rico Romero (1997) la problemática del sistema educativo en España iba más allá de reformar la disciplina de Matemáticas. Es por ello que el movimiento estructuralista no era el que mejor se adecuaba a la situación española:

Con carácter general, podemos afirmar que los esfuerzos de la sociedad española durante estos años por integrarse en el marco europeo y por superar el atraso científico y cultural hacen que muchas innovaciones curriculares se reciban acríticamente y traten de incorporarse a nuestro sistema educativo, sin reflexión propia ni análisis previo sobre la conveniencia de su adaptación a nuestras necesidades específicas; esto es lo que ocurrió con el programa de las Matemáticas modernas. (Rico Romero, 1997, p. 28)

Pese a ello, no hay que obviar que la reforma estructuralista de la disciplina de Matemáticas tuvo consecuencias en las áreas de la misma. Hecho que con posterioridad ha sido revertido en las sucesivas reformas posteriores, de manera que las áreas, sectores y temas correspondientes a Aritmética y Álgebra retomaron su estatus previo a las Matemáticas Modernas. Sin embargo, la marcha atrás en el área de Geometría no ha sido completa, pues dicha área había sufrido una profunda transformación al definirse en el marco de las estructuras algebraicas, de modo que la reforma eliminó su vertiente intuitiva. El efecto de las Matemáticas Modernas en la Geometría escolar queda patente en la siguiente cita:

Como reacción a un abandono injustificado de la Geometría intuitiva en nuestros programas del que fue culpable la corriente hacia la "Matemática Moderna", hoy se considera una necesidad ineludible, desde un punto de vista didáctico, científico, histórico, volver a recuperar el contenido espacial e intuitivo en toda la matemática, no ya sólo en lo que se refiere a la Geometría.

Es evidente que desde hace unos veinte años el pensamiento geométrico viene pasando por una profunda depresión en nuestra enseñanza matemática inicial, primaria y

secundaria. Y al hablar del pensamiento geométrico no me refiero a la enseñanza de la Geometría más o menos fundamentada en los Elementos de Euclides, sino a algo mucho más básico y profundo que es el cultivo de aquellas porciones de la matemática que provienen de y tratan de estimular la capacidad del hombre para explorar racionalmente el espacio físico en que vive, la figura, la forma física. (GUZMÁN, 2007, p. 50)

El análisis de los niveles de codeterminación realizado ha puesto en evidencia ciertos hechos:

1. La Geometría escolar se vio profundamente modificada al sumergirla en el movimiento de las Matemáticas Modernas. Las preocupaciones del saber sabio radicaban en los fundamentos de la disciplina, y la introducción de estos en la Geometría escolar redundó en la desaparición de la Geometría intuitiva al no ser sencilla su fundamentación en niveles elementales.

La geometría, a nivel elemental es difícil de formalizar adecuadamente y así, en este intento, se nos fue por el mismo agujero el pensamiento geométrico, la intuición espacial y la fuente más importante que por muchos siglos ha tenido la matemática de verdaderos problemas y resultados interesantes abordables con un número pequeño de herramientas fácilmente asimilables. (Guzmán, 2007, p. 51)

2. En cuanto al profesorado actual de Matemáticas, hay que considerar que mayoritariamente se formaron en las décadas de los setenta, ochenta y noventa, es decir, siendo las Matemáticas Modernas el paradigma epistemológico dominante. Este hecho provocó en estos docentes una construcción de la Geometría intuitiva bastante escasa, a tenor del análisis expuesto de la legislación y el currículo vigentes en su formación. Como consecuencia, este profesorado de Matemáticas entiende la Geometría vinculada a problemas algebraicos como los provenientes de la trigonometría, el teorema de Pitágoras o los cálculos algorítmicos de áreas y volúmenes. Asimismo, contenidos intuitivos relativos a las transformaciones del plano o la clasificación de figuras planas son gestionados con una metodología eminentemente memorística.

3. A pesar del punto de inflexión recogido en las secciones anteriores, la Geometría ha recuperado parte de su estatus previo a la reforma de las Matemáticas Modernas. El estudio

del saber enseñado en los manuales escolares<sup>4</sup> que responden a legislación posterior a la LGE (Ley 14/1970 General de Educación y Financiamento de la Reforma Educativa, 1970) así lo atestigua, aunque presente algunas inconsistencias como las señaladas por Gascón (2003). Sin embargo, ha sido relegada a los últimos temas de los libros de texto, provocándose el fenómeno de ausencia de esta en la práctica docente diaria excusándose el colectivo en la falta de tiempo para abordar los programas o que, en el mejor de los casos, sea abordada de una manera rápida y superficial.

Según se ha intentado señalar en el presente artículo, la actual situación de la Geometría escolar tiene su origen en el cambio de paradigma del Plan de 1967 (Orden de 4 de septiembre de 1967 por la que se aprueban los Cuestionarios del Bachillerato Elemental, 1967) y en su ausencia en los planes derivados de la LGE (Ley 14/1970 General de Educación y Financiamento de la Reforma Educativa, 1970). Las reformas posteriores no le han devuelto a su estado anterior y la formación del profesorado es muy variada en paradigmas como para unificarla en uno solo. En conclusión, a pesar de que el paradigma de las Matemáticas Modernas ya no está vigente en la Matemática escolar, la Geometría aún sigue afectada por el cambio de epistemología que se produjo en aquella época.

### **Contribución de los autores.**

El trabajo presentado ha sido elaborado en todas sus fases al 50% entre los dos autores firmantes.

### **Referencias**

- Abramov, A. (2010). Toward a History of Mathematics Education Reform in Soviet Schools (1960s–1980s). *En Russian Mathematics Education. History and World Significance.* (p. 87-140). World Scientific.
- Alsina Catalá, C., Fortuny Aymení, J. & Pérez Gómez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO.* Síntesis, 1997.
- Arias, J. M. & Maza, I. (2008 a). *Matemáticas I.* Bruño.

---

<sup>4</sup>Para este trabajo se han consultado los libros (Arias y Maza 2008 a y 2008b; Cólera, García y Santaella, 2008 a y 2008b; Vizmanos, Hernández y Alcaide, 2010 a y 2010b).

- Arias, J. M. & Maza, I. (2008b). *Matemáticas 2*. Bruño.
- Bolívar, A. (2015). The comprehensive school in Spain: A review of its development cycle and crises. *European Educational Research Journal*, 14, n. 3-4, p. 347-363. <https://doi.org/10.1177/1474904115592496>
- Bosch, M. & Gascón, J. (2007). 25 años de Transposición Didáctica. *En Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones e la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)*. (p. 385-406). Universidad de Jaén, Servicio de Publicaciones.
- Bracho-López, R., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N. Gutiérrez-Arenas, P. & Torralbo-Rodríguez, M. (2010). La investigación en Educación Matemática en la revista Epsilon. Análisis cuantitativo y temático (2000-2009). *Epsilon - Revista de Educación Matemática*, 27, n. 2, p. 9-25.
- Cañellas Mas, A. (2006). La tecnocracia franquista: El sentido ideológico del desarrollo económico. *Studia Historica. Historia Contemporánea*, 24, p. 257-288. <https://doi.org/10.14201>
- Carreras, A. & Tafunell, X. (2005). *Estadísticas Históricas de España: siglos XIX y XX*. Fundación BBVA.
- Centro de Orientación Didáctica de Enseñanza Media. (1957). *Cuadernos didácticos. Plan de bachillerato 1957. Programas de quinto curso: (con orientaciones metodológicas)*.
- Chevallard, Y. (1985). *La Transposition Didactique: Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.
- Cólera, J., Oliveira, M. J., García, R. & Santaella, E. (2008 a). *Matemáticas I*. Anaya.
- Cólera, J., Oliveira, M. J., García, R. & Santaella, E. (2008 b). *Matemáticas II*. Anaya.
- Comisión Ministerial de Planes, (1971). P. d. E. y. E. Educación General Básica: nueva orientación. *Vida escolar*, n. 124-126, p. 5-155.
- Decreto-ley 10/1959 de ordenación económica. Madrid, España, 22 julio 1959, pp. 10005-10007.
- Decreto 193/1967 por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Enseñanza Primaria. Madrid, España, 13 febrero 1967, pp. 1949-1963.
- Decreto 1181/1963 para el establecimiento del Centro Nacional de Enseñanza Media por Radio y Televisión. Madrid, España, 1 junio 1963, pp. 8917-8917.
- Estadística de la Enseñanza en España. Curso 1969-70*. (1971). INE Artes Gráficas.
- Estadística de la Enseñanza en España. Curso 1974-75*. (1975). INE Artes Gráficas.
- Fusi, J. P. & Calvo, F. (2009). *El espejo del tiempo*. Santillana.
- Fusi, J. P. & Palafox, J. (1997). *España 1808-1996. El desafío de la modernidad*. Espasa Calpe.
- Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4, n. 2, p. 129-159.
- Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre la enseñanza de la Geometría en secundaria I. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*, n. 44, p. 41-52.

- Gascón, J. (2004). Efectos del autismo temático sobre la enseñanza de la Geometría en secundaria II. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*, n. 45, p. 13-25.
- Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14, n. 2, p. 203-231.
- Gómez Mendoza, M. A. (2005). La Transposición Didáctica: historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 1, p. 83-115.
- Gómez Oliver, M. (2008). El Movimiento Estudiantil español durante el Franquismo (1965-1975). *Revista Crítica de Ciências Sociais*, 81, p. 93-110. <https://doi.org/10.4000/rccs.652>
- Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, n. 43, p. 19-58. <https://doi.org/10.35362/rie430750>
- INEbase / Demografía y población / Cifras de población y Censos demográficos / Censos de Población. Instituto Nacional de Estadística: Enero 10. 2017.
- Klein, D. (2003). A brief history of american K-12 Mathematics Education in the 20th century. En J.M. Royer. *Mathematical Cognition*. (p. 175-225) .Information Age Publishing.
- La educación en España. Bases para una política educativa*. (1969). Secretaría Técnica. Madrid.
- Ley 14/1966 de Prensa e Imprenta. Madrid, España, marzo 19, pp. 3310-3315.
- Ley 14/1970 General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. Madrid, España, agosto 6, pp. 12525-12546.
- Ley 44/1967 regulando el ejercicio del derecho civil a la libertad en materia religiosa. Madrid, España, julio 1, pp. 9191-9194.
- Ley 62/1969 por la que se provee lo concerniente a la sucesión en la Jefatura del Estado. Madrid, España, julio 23, pp. 11607-11608.
- Ley 154/1963 sobre creación del Juzgado y Tribunales de Orden Público. Madrid, España, diciembre 5, pp. 16985-16987.
- Ley 193/1963 sobre Bases de la Seguridad Social. Madrid, España, diciembre 30, pp. 18181-18190.
- Ley 194/1963 por la que se aprueba el Plan de Desarrollo Económico y Social para el período 1964/1967 y se dictan normas relativas a su ejecución. Madrid, España, diciembre 30, pp. 18190-18198.
- Ley de Instrucción Pública. *Gaceta de Madrid*, Madrid. España, pp. 1-3.
- Ley Orgánica del Estado, número 1/1967. Madrid, España, enero 11, pp. 466-477.
- Lockhart, P. (2008). El lamento de un matemático. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 11, n. 4, p. 739-766.
- Marcos, C. & Martínez, J. (1960). *Matemáticas 3º*. Ediciones S.M..
- Marcos, C. & Martínez, J. (1967). *Matemáticas 5º*. Ediciones S.M..
- Marcos, C. & Martínez, J. (1970). *Matemática Moderna 3º*. Ediciones S.M..

- Orden de 4 de septiembre de 1967 por la que se aprueban los Cuestionarios del Bachillerato Elemental. Madrid, España, septiembre 30, pp. 13421-13447.
- Palomares, C. (2006). *Sobrevivir después de Franco. Evolución y Triunfo del Reformismo, 1964-1977*. Alianza Editorial.
- Papy, G. (1968). *Matemática Moderna*. Editorial Universitaria Buenos Aires.
- Pauli, L. (1979). Le colloque de Royaumont. *Math-École*, 18, n. 90, p. 2-10.
- Población según sexo y edad desde 1900 hasta 2001. Población (1960) por provincias, edad y sexo. (1961). [www.ine.es.https://www.ine.es/jaxi/Tabla.htm?path=/t20/e245/p06/10/&file=1960.px&L=0](https://www.ine.es/jaxi/Tabla.htm?path=/t20/e245/p06/10/&file=1960.px&L=0): Instituto Nacional de Estadística 1961.
- Población según sexo y edad desde 1900 hasta 2001. Población (1970) por provincias, edad y sexo. <https://www.ine.es/jaxi/Tabla.htm?path=/t20/e245/p06/10/&file=1970.px&L=0>: Instituto Nacional de Estadística 1971.
- Puelles, M. (2000). La LOGSE en el Contexto de las Reformas Escolares. *En Informe Educativo 2000. Evaluación de la LOGSE*. (p. 29-51). Santillana.
- Puelles, M. (2002). Evolución de la educación en España durante el Franquismo. *En Historia de la Educación (Edad Contemporánea)*. (p. 329-349). UNED.
- Rico Romero, L. (1997). *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Síntesis.
- Sierra, M. (2008). El centre Belge de Pedagogie de la Mathématique (1958-1973): nota histórica. *Revista Diálogo Educativo*, 8, n. 25, p. 633-645. <https://doi.org/10.7213/rde.v8i25.3733>
- Valdés, J. & Marsinyach, S. (1976). *Entorno I, Matemáticas*. Bruño.
- Vizmanos, J. R., Hernández, J. & Alcaide, F. (2010 a). *Matemáticas 1*. S.M.
- Vizmanos, J. R., Hernández, J. & Alcaide, F. (2010 b). *Matemáticas 2*. S.M.
- Warusfel, A. (1971). *Las Matemáticas Modernas*. Ediciones Martínez Roca.