EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p47-77

Reflexões de professores sobre divisão de fração por fração: compreensões e filosofias

Teachers' reflections on fraction-by-fraction division: comprehensions and philosophies

Reflexiones de profesores sobre división de fracción por fracción: comprensiones y filosofias

Réflexions des enseignants sur la division fraction par fraction : compréhensions et philosophies

Bernadete Verônica Schaeffer Hoffman[1]
PMV/SEME - Secretaria Municipal de Educação de Vitória
Mestre em Educação
https://orcid.org/0000-0001-8906-5537

Jaqueline Magalhães Brum[2]
Universidade Federal do Espírito Santo
Doutora em Educação
https://orcid.org/0000-0001-5528-1098

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner[3]
Universidade Federal do Espírito Santo
Doutora em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0001-9841-6191

Resumo

Neste texto, apresentam-se resultados de uma investigação qualitativa colaborativa, realizada em 2020 e 2021, em um grupo de professores sobre conhecimentos necessários ao docente que vai ensinar divisão de fração por fração no ensino fundamental. A metodologia utilizada foi a reflexão sobre a prática de seis professoras acerca de seus entendimentos e conhecimentos sobre o tema em encontros semanais do grupo. Traz um diálogo entre ensino e aprendizagem, ao buscar a compreensão do conceito e sua transposição didática, com base nas reflexões do grupo e no que pensam autores de educação matemática e à luz da filosofia. Discutem-se alternativas de algoritmos para o acesso ao conceito formal e a relevância deste, ao procurar o entendimento instrumental e relacional de uma tarefa. Uma das autoras tinha usado anteriormente com estudantes de pedagogia tal tarefa avaliativa em 2021. O estudo sugere ser possível ensinar este tema com compreensão, desde que o professor tenha objetivos claros, conhecimento conceitual e pedagógico de como ensinar fração e operações com frações. Ademais, recomenda que o professor considere os limites da contextualização, mas com a consciência de que a matemática

[1] E-mail: bernahoffman@yahoo.com.br
[2] E-mail: jackiemagalhaesbrum@gmail.com
[3] E-mail: profvaniasantoswagner@gmail.com

não se produz em um vácuo. Enfim, mostra como um grupo de seis professoras refletiu sobre os próprios conhecimentos, quando evidenciaram potencialidades e fragilidades no ensino de tal tema.

Palavras-chave: Divisão, Fração, Ensino, Aprendizagem, Reflexões.

Abstract

In this text we present the results of a collaborative qualitative investigation, carried out in 2020 and 2021, with a group of teachers on the knowledge needed by the teacher who will teach fraction-by-fraction division in elementary school. The methodology used was the reflection on the practice of six teachers regarding their understanding and knowledge about the subject in weekly meetings of the group. It brings a dialogue between teaching and learning as it seeks to understand the concept and its didactic transposition, based on the group's reflections and what think authors of mathematics education and in the light of philosophy. Alternative algorithms for accessing the formal concept and its relevance are discussed when looking for an instrumental and relational understanding of a task. One of the authors had previously used such task on an assessment instrument with pedagogy students in 2021. The study suggests that it is possible to teach this topic with understanding, as long as the teacher has clear objectives, conceptual and pedagogical knowledge for teaching fractions and operations with fractions. Furthermore, it recommends that the teacher consider the limits of contextualization, but with the awareness that mathematics is not produced in a vacuum. Finally, it shows how a group of six teachers reflected on their own knowledge, when they highlighted strengths and weaknesses in the teaching of such a topic.

Keywords: Division, Fraction, Teaching, Learning, Reflections.

Resumen

En este texto se presentan los resultados de una investigación cualitativa y colaborativa, realizada en 2020 y 2021 por un grupo de profesores, relativa a los conocimientos que necesitará un profesor que tenga que enseñar la división de una fracción por otra fracción en la escuela primaria. La metodología que se utilizó fue la reflexión sobre la práctica de seis profesoras y su comprensión y su conocimiento sobre el tema en encuentros semanales del grupo. Después de un diálogo entre la enseñanza y el aprendizaje, para buscar comprender el concepto y su transposición didáctica, basado en las reflexiones del grupo y en lo que piensan los autores de la educación matemática y a la luz de la filosofía. Se discuten algoritmos alternativos para acceder al concepto formal y a su relevancia, cuando se busca una comprensión instrumental y relacional de una tarea. Una de las autoras ya había utilizado previamente la tarea en 2021 en una tarea de evaluación de este tipo con estudiantes de pedagogía. El estudio sugiere que es posible enseñar este tema con comprensión, siempre que el profesor tenga objetivos claros, conocimiento conceptual y pedagógico de como enseñar las fracciones y operaciones con fracciones. Además, se recomienda que el profesor considere los límites de la contextualización, con la conciencia de que las matemáticas no deriven en algo insustancial. Finalmente, se muestra cómo un grupo de seis profesoras reflexionó sobre sus propios conocimientos, mostrando las fortalezas y las debilidades en la enseñanza de este tema.

Palabras clave: División, Fracción, Enseñanza, Aprendizaje, Reflexiones.

Résumé

Dans ce texte, nous présentons les résultats d'une recherche qualitative collaborative, réalisée en 2020 et 2021, dans un groupe d'enseignants sur les connaissances nécessaires à l'enseignant qui enseignera la division fraction par fraction au primaire. La méthodologie utilisée était une réflexion sur la pratique de six enseignants sur leur compréhension et leurs connaissances sur le sujet lors de réunions de groupe hebdomadaires. Le texte fait dialoguer enseignement et apprentissage, cherchant à comprendre le concept et sa transposition didactique, à partir des réflexions du groupe et de ce que pensent les auteurs de l'enseignement des mathématiques et à la lumière de la philosophie. Des alternatives algorithmiques sont discutées pour accéder au concept formel et sa pertinence dans la recherche d'une compréhension instrumentale et relationnelle d'une tâche. Un des auteurs avait déjà utilisé une telle tâche évaluative avec des étudiants en pédagogie de la même année. L'étude suggère qu'il est possible d'enseigner cette matière avec compréhension, tant que l'enseignant a des objectifs clairs, une connaissance conceptuelle et pédagogique des fractions et des opérations avec des fractions. De plus, il recommande à l'enseignant de considérer les limites de la contextualisation, mais avec la conscience que les mathématiques ne se produisent pas dans le vide. Enfin, il montre comment un groupe de six enseignants a réfléchi sur ses propres connaissances, lorsqu'ils ont montré des forces et des faiblesses dans l'enseignement d'une telle matière.

Mots-clés : Division, Fraction, Enseignement, Apprentissage, Réflexions.

Neste artigo, trazemos um recorte de estudos feitos por professores sobre frações em 2020 e 2021. Apresentamos alternativas para questões de ensino e aprendizagem envolvendo o conceito de divisão de frações, bem como ponderações sobre a relevância deste conteúdo na escola básica. Dialogamos com a Filosofia da Educação Matemática, que subjaz esses fazeres e saberes, que vão além de entendimentos instrumentais de como fazer cálculos matemáticos (Skemp, 1976, 1987). São reflexões possibilitadas em encontros virtuais, semanalmente, pelo Grupo de Estudo em Educação Matemática do Espírito Santo [GEEM-ES][4], em que nossos conhecimentos e práticas constituem objeto de estudo e pesquisa. O grupo integra o projeto de extensão da Universidade Federal do Espírito Santo, que tem por objetivo a formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática e é coordenado pelas professoras Brum e Santos-Wagner.

Preparar professores para atuarem no ensino de matemática tem sido um grande desafio, sobretudo nos anos iniciais. Pensando nisso, Brum realizou em 2021, com suas turmas de pedagogia na Ufes, atividades que têm por objetivo desafiar o futuro professor a encontrar formas criativas de ensinar matemática que privilegiem a compreensão. O professor que compreende o conceito sabe de onde partir, aonde chegar e como explicar aos seus alunos de várias formas, ao propor atividades matemáticas (Skemp, 1976, 1987; Schulman, 1986, 1987, 2014; Ball, Thames, Phelps, 2008). Ou seja, o professor tem entendimento relacional dos conceitos matemáticos (Skemp, 1976, 1987), tem conhecimento de conteúdo matemático e tem conhecimento pedagógico deste conteúdo (Shulman, 1986, 1987, 2014) e tem conhecimento especializado de ensino de matemática (Ball, Thames, Phelps, 2008). Por isso, sabe escolher caminhos que possibilitem a transposição didática, compreendida aqui como uma atitude na qual

> o professor deve construir situações-problema em que o conhecimento matemático apontado seja recontextualizado e repersonalizado em vista de se tornar um conhecimento do aluno, ou seja, uma resposta mais natural às condições indispensáveis para que esse conhecimento tenha um sentido (Almouloud, 2011, p. 156).

Quando Almouloud (2011) versa sobre recontextualização e repersonalização do conhecimento matemático para a construção de um conceito novo, entendemos que as situações dialógicas criadas entre professor e aluno na sala de aula permitem que este crie, arrisque e

---

[4] Os encontros do GEEM-ES, antes da pandemia, se realizavam semanalmente, por duas horas, de forma presencial.

valide soluções que podem ser generalizadas mediante a mediação do professor. Nesse sentido, o professor precisa ter consolidado o conhecimento matemático que pretende abordar, condição essencial para que saiba como avaliar o que o aluno sabe e não sabe do conceito. Isso requer reflexão sobre o próprio conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo (Shulman, 1986, 1987; Santos, 1993). Na acepção de Ball, Thames, Phelps (2008) e Rojas, Flores, Carrillo (2015) o conhecimento pedagógico de conteúdo é chamado de conhecimento especializado de ensino. Assim, o texto que apresentamos tenta responder às seguintes questões: 1) Por que ensinar divisão de fração a estudantes nos anos iniciais? 2) Que conhecimentos são necessários ao professor que pretende ensinar divisão de fração por fração aos estudantes do primeiro segmento do ensino fundamental? 3) Como os estudos em grupo podem auxiliar o professor em formação continuada a compreender por que, para que e como ensinar frações a estudantes dos anos iniciais?

Para respondermos aos questionamentos, relatamos diálogos e reflexões de professoras participantes do GEEM-ES, ao resolverem uma das questões da avaliação escrita envolvendo divisão de fração por fração. Tal tarefa entre outras tinham sido aplicadas aos estudantes de pedagogia da Ufes pela professora Brum e, posteriormente, foram trazidas ao nosso grupo. Desta forma, o texto mostrará como recontextualizamos e repersonalizamos o que sabíamos e o que não sabíamos desse conteúdo, evidenciando potencialidades e fragilidades. Ou seja, ampliamos nossos entendimentos e conhecimentos de divisão, provocando mudanças em nossas estratégias de como ensinar o tema. Isso nos provocou a ponderar e dialogar, durante os anos de 2020 e 2021, sobre compreensões realizadas no grupo acerca de frações (Santos e Rezende, 1996), e se aprofundaram em 2021 e 2022 em estudos presentes na literatura sobre seu ensino e aprendizagem (Vaz, 2016; Guerra, Santos da Silva, 2008; Junior e Wielewski, 2021). Ao mesmo tempo, fizemos uma reflexão sobre a própria prática à luz da filosofia, pois toda prática esconde um pensar sobre o que fazer, como e por quê (Skemp, 1976, 1987; Ernest, Skovsmose, Bendegem, Bicudo, Miarka, Kvasz, Moeller, 2016; Shulman & Shulman, 2004). Por isso, concordamos com Bicudo, Monteiro e Baier (2019), ao afirmarem que

> o filosofar abre horizontes, favorece a crítica, caminha para além do fazer e do como fazer para o porquê fazer e para os modos pelos quais se faz. Sendo assim, pesquisar em, com e na Filosofia da Educação Matemática é manter-se no movimento de pensar as atividades que se desenvolvem quando se faz Educação Matemática, sejam elas sobre a pesquisa, ensino ou aprendizagem; bem como sobre as que ocorrem na vivência cotidiana ou que são concernentes às políticas públicas da Educação (p. 2).

As provocações desses autores corroboram nossas preocupações enquanto formadoras de professores que atuam na sala de aula. Logo, para nos mantermos nesse movimento do pensar sobre nossas ações pedagógicas e sobre como estamos preparando professores em exercício e futuros professores, que ensinam matemática, na escola básica estudamos vários autores. Apresentamos leituras sobre transposição didática, conhecimento científico e conhecimento ensinado; conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo/conhecimento especializado de ensino; e conhecimento dos fins propósitos e valores da educação e de sua base histórica filosófica. Ainda, trazemos alguns apontamentos teórico metodológicos sobre ensino, aprendizagem e avaliação de frações na escola básica e o que pensam alguns autores sobre o assunto. Durante o estudo, procuramos compreender esse ensino e aprendizagem à luz da Filosofia da Educação Matemática, apresentando nossa maneira de compreendê-la e fazê-la, enriquecida pelas discussões do grupo. Sobretudo, com a humildade de reconhecer que não basta ao professor saber o conteúdo e saber ensiná-lo. É preciso motivação e sensibilidade para perceber a beleza da matemática que está em tudo, desde as coisas mais simples do fazer cotidiano. Mathias, sobre isso afirma:

> [...] Eu vejo a essência do conceito (...) na urgência das palavras de um poeta, após ele tê-las escrito na intenção de perturbar seus leitores. A vejo nas notícias de jornal, na variação do tempo e das coisas, em sensações. A vejo a ponto de não mais saber quando ela deixou de ser o que é no livro de cálculo, ou na cabeça do poeta (Mathias, 2015, p. 3)

Assim, nosso desafio também é evidenciar o que há de belo em aprender e ensinar divisão de fração por fração a partir de nossas compreensões, reflexões e diálogos no GEEM-ES. E finalizamos o texto com discussões e reflexões sobre algumas respostas aos nossos questionamentos de pesquisa.

Apontamentos teóricos

Harouani (2015), ao versar sobre o porquê do ensino de matemática nas escolas, afirma que, muitas vezes, nem alunos nem professores sabem dizer por que estudamos a matemática que ali é oferecida. Ele diz que isso não é por falta de esforços das academias, que propõem pedagogias novas, metodologias adequadas com visões de formação cidadã. Ainda, assim, talvez "a matemática escolar não tenha nada a ver com utilidade; talvez seja principalmente um produto de um sistema educacional cujo objetivo principal não é aprender, mas socializar e certificar seus alunos" (Harouani, 2015, p. 10. Tradução nossa)[5]. Vivenciamos situações em

[5] […] Perhaps school math has nothing to do whit usefulness; perhaps it is primarily a product of an education system whose main purpose is not learning, but socializing and certifying students (Harouani, 2015, p. 10).

escolas em que essa afirmação faz sentido (Hoffman, 2012). Muitas vezes, professores preocupavam-se em vencer o programa e esqueciam a aprendizagem do estudante, que, quando questionado sobre o porquê de estudar matemática, sempre nos respondia: “para ser alguém na vida” ou “para arranjar um bom emprego”. É como se professores e alunos apenas cumprissem um ritual da sociedade, ignorando a matemática da rua, em que feirantes usam raciocínios e cálculos distantes do que vivenciamos na escola (Nunes, Carraher & Schliemann, 2011).

O pesquisador Harouani (2015) menciona os textos dos problemas escolares que podem não ter sentido nenhum para os estudantes, corroborando o que Lopes (2008) questiona sobre o estudo de frações na escola básica. Deveríamos mesmo ensinar frações às nossas crianças? E Lopes (2008, p. 2) complementa o questionamento: “devemos ensinar frações do jeito que sempre ensinamos?” Certamente a resposta seria “não”. Comentando Peter Hilton (1980)[6], que chama de aplicações enganosas situações-problema que tentam criar o contexto para o uso de frações, Lopes (2008) as qualifica como “pseudopráticas”, pois são distantes do mundo das crianças e totalmente sem sentido. Como exemplo, cita uma situação, encontrada em material didático de 2007: “João comeu 3/17 avos de um bolo, seu irmão comeu 5/9 do que restou. Quanto sobrou para sua irmã?” (Lopes, 2008, p. 4). Ainda encontramos situações semelhantes, inventadas pelos professores ou em material didático para justificarem o uso das operações com frações.

Desse modo, constitui-se um desafio para professores de pedagogia formar futuros professores que conheçam o conteúdo matemático e dominem o conhecimento pedagógico desse conteúdo/conhecimento especializado de ensino. Sobretudo em tempos de aulas não presenciais, como vivemos durante a pandemia em 2020 e 2021, em que professores e professoras tiveram que enfrentar seis grandes desafios, a saber: a) aprender a usar plataformas; b) preparar aulas diferentes; c) criar formas para interagir com os alunos; d) procurar maneiras de fazer conexões com outros saberes; e) procurar contextualizar e validar práticas docentes; e f) motivar os estudantes. Essas novas demandas exigiram e exigem esforço e criatividade dos professores brasileiros e estrangeiros. Isso confirma o que dizem Harouani (2015) e Lopes (2008), pois o uso de frações é desafiador por tratar basicamente de um conteúdo aplicável ao mundo dos adultos. Contudo, como pesquisadoras de nossa prática, concluímos que isso não significa que o conteúdo não possa ser aproximado do mundo da criança, pensando em situações de vivência e sugerindo pesquisas com familiares sobre a aplicação dos números

[6] Palestra proferida por Peter Hilton no ICME IV, em 1980, em Berkeley, EUA, sob o título “Do we still need fractions in the elementary curriculum?”.

fracionários. Mediada pelo professor, a criança encontrará aplicações nos hodômetros de automóveis que medem o combustível, nas receitas caseiras e em medidas como metros, litros e quilogramas. Estas últimas permitem a exploração sistemática e simultânea de frações e números decimais. Quando o professor tem objetivos claros, entende e sabe como ensinar frações, poderá conduzir um debate para a compreensão de frações de números discretos em situações sociais, conforme explica Lopes:

> Frações de uma coleção discreta, como 1/2, 2/3, 3/4 e 3/5, aparecem em capítulos da constituição federal ou do regimento de parlamentos estaduais ou municipais, como referências para aprovar leis ou mudar a constituição. Há um contexto em que o cálculo de 3/5 de 513 ou 2/3 de 81 não é artificial; com dois terços dos votos dos deputados federais pode-se iniciar um processo de impeachment do Presidente da República; 1/3 dos ministros do tribunal de contas são escolhidos pelo presidente da República, 2/3 pelo Congresso Nacional (Lopes, 2008, p. 6).

Pensemos nos ricos debates que hoje, em 2022, na atual conjuntura política do país, exemplos como os citados acima proporcionariam para a compreensão de frações de quantidade e suas implicações sociais dentro da visão de uma matemática humanista[7]. Imaginemos os efeitos dessa discussão quando se tenta aprovar Propostas de Emenda Constitucional (PEC) cuja mudança alterará a vida das famílias, sob os mais variados pretextos. Afinal, ensinar matemática é saber que ela não acontece no vazio. Sobre isso Ernest e colegas assim se expressam:

> [...] os objetivos, metas, propósitos, fundamentos, etc., para o ensino de matemática não existem em um vácuo, são pertencentes a pessoas, sejam indivíduos ou grupos sociais Uma vez que o ensino da matemática é uma atividade social generalizada e altamente organizada, seus objetivos, metas, propósitos, fundamentos, e assim por diante, precisam estar relacionados com grupos sociais e a sociedade em geral, reconhecendo que existem [sic] múltiplos e divergentes objetivos e metas entre diferentes pessoas e grupos (Ernest, 1991, apud Ernest et al, 2016, p. 3. Tradução nossa)[8] .

Imaginemos a criança, esclarecida sobre o que significa a constituição, sobre o número de deputados necessários para aprovar uma emenda, fazendo cálculos na prática e discutindo o assunto com a família. Essa é a matemática que pode sair das academias e ganhar a escola de forma transdisciplinar, pois ser “professor é muito mais do que ensinar conteúdos, é educar por

---

[7]Filosofia que compreende a matemática como criação humana, feita pelo homem e para o homem (D’Ambrósio, 2006).

[8] […] the aims, goals, purposes, rationales, etc., for teaching mathematics do not exist in a vacuum, belonging to people, whether individuals or social groups (Ernest 1991). Since the teaching of mathematics is a widespread and highly organised social activity, its aims, goals, purposes, rationales, and so on, need to be related to social groups and society in general, while acknowledging that there are multiple and divergent aims and goals among different persons and groups (Ernest, 1991, apud Ernest et al, 2016, p. 3).

meio deles” (Mathias, 2015, p. 3). O professor engajado compreende seus alunos intelectualmente, socialmente, culturalmente e pessoalmente numa perspectiva de desenvolvimento global e histórico (Shulman & Shulman, 2004). Os debates neste estudo excederam o processo de avaliação envolvendo frações com compreensão do conceito e nos provocaram a pensar na aplicabilidade e pré-requisitos necessários para a sua abordagem com base nos quatro níveis de conhecimento comentados por Shulman (2014). Quando o professor conhece o conteúdo, conduz a sala de aula como uma orquestra, consciente dos passos a serem dados, para ir e vir trabalhando em qualquer campo do conhecimento. Recontextualizando o que o autor diz sobre o ensino da língua inglesa, pensamos em como seria na resolução de um problema: 1) denotação – a decodificação do enunciado; 2) conotação – a compreensão do enunciado; 3) interpretação – o entendimento relacional do enunciado na construção do conceito; e 4) aplicação da avaliação – a generalização e aplicação do conceito em outras situações, percebendo conexões e lendo o mundo por meio deles (Shulman, 2014). Para alcançarmos habilidades em tais níveis, analisamos o nosso conhecimento como professores e formadores de professores, refletindo sobre três categorias da base do conhecimento, segundo Shulman, (2014):

> • conhecimento do conteúdo; [...]
> • conhecimento pedagógico do conteúdo, esse amálgama especial de conteúdo e pedagogia que é o terreno exclusivo dos professores, seu meio especial de compreensão profissional; [...]
> • conhecimento dos fins, propósitos e valores da educação e de sua base histórica e filosófica (Shulman, 2014, p. 206).

O trabalho de Wielewski (2008) sobre pensamento instrumental e pensamento relacional, dialogando com Skemp (1989)[9], esclarece para nós as categorias de conhecimento de Shulman (2014). Parafraseando Wielewski (2008), ao comentar as ideias de Skemp (1989), se buscarmos um ensino que almeje compreensão, diremos que este só será possível quando promovido de forma que não possibilite apenas uma aprendizagem por hábito. Ou seja, precisa ser uma aprendizagem inteligente em que o aprendiz estabeleça relações entre estruturas de conhecimento adquiridas por experiências e vivências que ele percebe de forma pessoal. Cabe, então, ao professor criar oportunidades para que o estudante faça conexões que acessem essas estruturas, pois um bom ensino é aquele que projeta o aprendiz para adiante do estágio mental em que se encontra (Vygotsky, 1993,2007). Assim, o professor precisa refletir sobre o próprio conhecimento matemático que possui e avalia-lo. Ademais precisa analisar a sua capacidade de

[9] Skemp, R. (1989). Mathematics in the primary school. London: Routledge.

fornecer situações de ensino e aprendizagem que provoquem a formação de estruturas mentais do estudante a fim de auxiliá-lo a criar o próprio entendimento.

Em Wielewski (2008), achamos um esquema que mostra modos de construir a aprendizagem, baseado em Skemp (1989). Trazemos o esquema, pois sintetiza o caminho da construção do pensamento relacional, aquele que não é o pensamento instrumental por hábito, repetitivo e circunstancial.

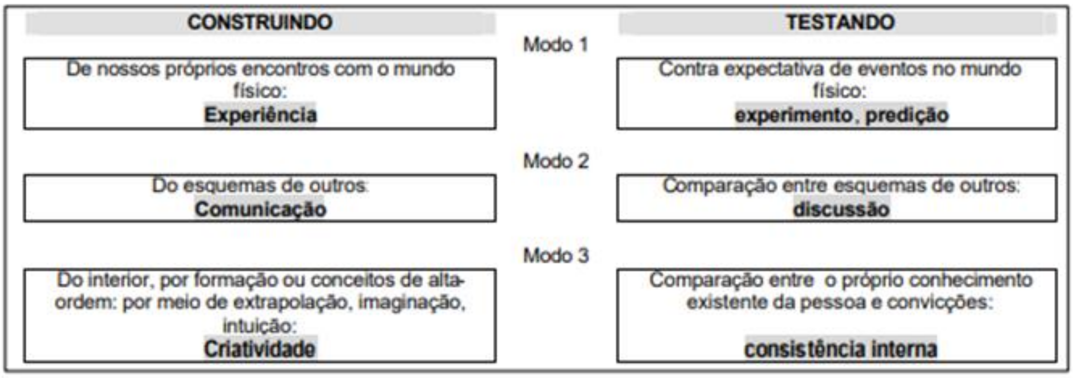

Figura 1:

Esquema Construindo e Testando adaptado de Skemp, apud Wielewski (2008, p. 66).

O esquema acima resume os modos de estruturar pensamentos que devem estar presentes de forma interligada na formação tanto do professor quanto do aluno quando querem entender conceitos. Exemplificando, ao construir os entendimentos sobre divisão de fração, preciso perguntar-me segundo o esquema da Figura 1: (i) O que já sei sobre esse assunto com base em minha experiência? R: Posso fazer experiências de acordo com as minhas expectativas. (ii) O que outros dizem sobre isso? R: Posso buscar na literatura ou na interação com professores novas informações e discutir pontos de vista. (iii) A partir das experiências, estudos e diálogos com outros professores o que posso fazer? R: Posso daí em diante tirar novas conclusões, extrapolar o conteúdo e criar novas estratégias, comparando-as e validando-as. Assim, pensarei sobre o que eu sei e o que não sei, em processo de autoavaliação e reflexão acerca do próprio pensamento antes e depois do estudo (Santos, 1993, 1997). Em outras palavras, desenvolvendo práticas metacognitivas em que penso e reflito sobre os conhecimentos que possuo ou não (Santos, 1993, 1997).

A partir desses estudos reflexivos, o professor escolherá uma maneira de tornar um conteúdo aprendível seja pelo diálogo, pela instigação ao aluno ou pela representação visual. Esta última muito utilizada por nós neste trabalho como forma de "ver" o que acontece na divisão de fração por fração. Pois a representação geométrica induz o aprendiz a utilizar a "criatividade, impulsionada pelo processo de visualização", que "é o desenvolvimento de uma sensibilidade que pode ampliar os modos de conhecimento e as formas de abordar o desconhecido" (Cifuentes & Santos, 2019, p. 19).

Apontamentos metodológicos

A metodologia utilizada foi a pesquisa qualitativa colaborativa sobre a própria prática possibilitada pelo grupo de participantes do estudo em um movimento em que a ação e a reflexão caminham lado a lado (Fiorentini & Lorenzato, 2007). A seguir, mostramos a questão IV, proposta por Brum, objeto deste estudo. Apresentamos e dialogamos sobre resoluções pelos algoritmos convencionais e depois relatamos formas alternativas para a construção do conceito de divisão de fração por fração. Após, discutimos a relevância do conteúdo, possíveis conexões entre saberes que o texto do problema aborda e reflexões possibilitadas pela nossa prática, dialogando diretamente com os autores já citados.

A estratégia para coletar dados foi distribuir seis questões avaliativas entre o grupo formado por dez professores em ambiente virtual. Cada membro mostrou a solução da questão numericamente e sugeriu outros algoritmos. Depois, cada participante fez a sua exposição, explicando aos demais a sua forma de pensar e os conceitos envolvidos na questão. Em um terceiro momento, cada membro do grupo foi desafiado a pesquisar e relatar como ensinaria a seus alunos uma das questões, buscando, na literatura disponível, novas compreensões sobre o conteúdo abordado. Segue a questão IV, disparadora deste estudo, com análise das informações produzidas:

> 4) Linda tinha 4 2/3 metros de tecido. Ela está fazendo roupas de bebê para o bazar. Cada padrão de vestido precisa de 1 1/6 metros de tecido. Quantos vestidos ela poderá fazer com o tecido que tem? Resolva e depois reflita: para uma criança que não tenha entendido, como você explicaria por desenho? [...] (Adaptação do acervo de Brum – Pedagogia – UFES, 2021).

A professora Brum nos desafia a explicar por desenho, o que remete ao trabalho de Cifuentes e Santos (2019) em que chamam esse tipo de representação de visualização geométrica. Os autores defendem o método por tornar visível o que acontece na estruturação de um conceito. Concordamos com esse pensamento porque é uma ponte entre o visível e o abstrato. É uma das formas de concretização em matemática que mais temos utilizado em nossa experiência porque, de fato, é um saber histórico utilizado em qualquer situação. Representamos para ver, para rever, relembrar ou resgatar em momentos posteriores. Logo, é uma das melhores ferramentas de auxílio à mente de cada pessoa para recordar, internalizar ideias e entendimentos de conteúdos matemáticos (Santos, 1997), servindo como transposição didática (Almoloud, 2011).

Por ausência de alguns membros, tivemos a participação de seis professoras produzindo os dados desta questão. Cinco no dia do encontro em que essa questão foi discutida e mais uma em contatos telefônicos após o encontro. Desses participantes, três são professoras licenciadas em matemática e pós-graduadas em Educação Matemática e três possuem outras licenciaturas (entre as quais duas mestrandas em Educação Matemática e uma com mestrado concluído). Tentaremos responder às seguintes questões: 1) Por que ensinar divisão de fração a estudantes dos anos iniciais? 2) Que conhecimentos são necessários ao professor que pretende ensinar divisão de fração por fração aos estudantes do primeiro segmento do ensino fundamental? 3) Como os estudos em grupo podem auxiliar o professor em formação continuada a compreender por que, para que e como ensinar frações a estudantes dos anos iniciais?

Para respondermos aos questionamentos, dialogamos com os autores já citados no texto, refletindo sobre nossos conhecimentos matemáticos e conhecimentos pedagógicos matemáticos/conhecimentos especializados de ensino para ensinar divisão de fração por fração. Analisamos as imagens de tarefas realizadas e diálogos construídos com as professoras, as quais identificamos com as iniciais de seus nomes. E para melhor compreensão do leitor grifamos algumas evidências de respostas em itálico.

Resoluções e discussões

Iniciamos a discussão com a minha solução, Hoffman, e, em seguida, trazemos mais três resoluções de outras participantes, para ilustrarmos alguns indícios de respostas aos questionamentos do estudo. Para resolver a questão IV, pensando em como aprendi a resolver problemas envolvendo frações e números mistos no curso de Madureza Ginasial pelo Instituto Universal Brasileiro (início da década de 1970), numericamente apliquei uma operação de divisão: $4\frac{2}{3} \div 1\frac{1}{6}$. Traduzindo o pensamento matemático expresso na operação, *perguntei por já ter entendido as ideias de divisão: quantas vezes cabem 1* $\frac{1}{6}$ *em 4* $\frac{2}{3}$*?* Em seguida, apliquei o algoritmo memorizado em que transformei os números mistos em frações impróprias, depois inverti o segundo termo, que representa o divisor, transformando a fração em seu inverso e multipliquei: $4\frac{2}{3} \div 1\frac{1}{6} = \frac{14}{3} \div \frac{7}{6} = \frac{14}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{54}{21} = 4$; logo, obtive como resposta 4 vestidos. Conforme vemos, até aqui, tinha empregado um algoritmo em que não houve a menor preocupação em explicitar o que eu compreendia do conceito. *É uma prática que evidencia entendimento instrumental, pois identifica inteiros e frações maiores do que o inteiro, e o cálculo em si não passa de conhecimento por hábito* que, segundo Skemp (1976, 1987), pode ser usado de forma automática e pode ser esquecido. No entanto, quando expliquei a ideia conceitual de divisão, pensando em quantas vezes o divisor cabia no dividendo, já se evidencia em meus argumentos o conhecimento pedagógico/conhecimento especializado de ensino sobre divisão que estou aprofundando e reconstruindo no GEEM-ES (Bazet & Silva, 2015; Hoffman, Oliveira, Souza, 2015).

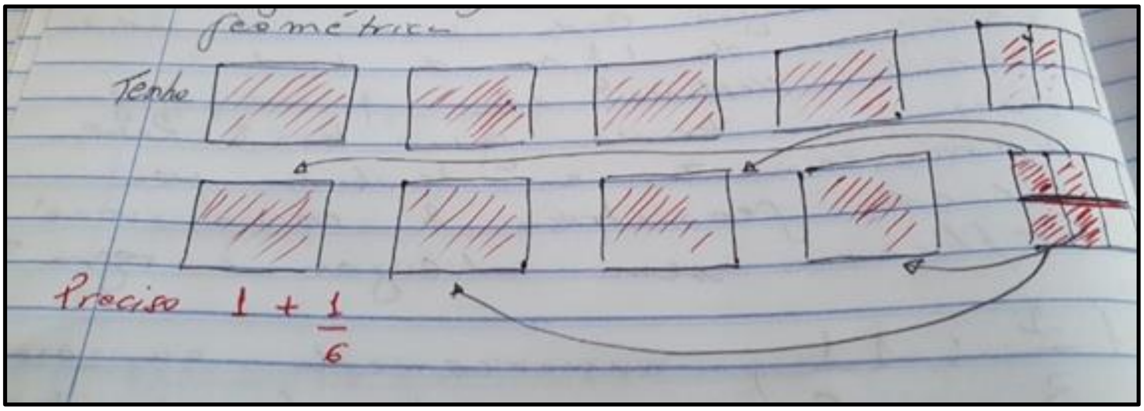

Figura 2.

Representação geométrica de Hoffman

Mas a professora Brum desafiou-nos a mostrar geometricamente o que acontece nessa divisão com a indagação: para uma criança que não tenha entendido, como você explicaria por desenho? Essa indagação está de acordo com o pensamento de Cifuentes & Santos (2019). Se Linda tem quatro metros inteiros, mais dois terços e precisa de um metro inteiro e um sexto para fazer os vestidos de bebês, podemos fazer a representação que vemos na Figura 2. A representação do que tem e do que precisa para cada vestido mostra que inicialmente a cada vestido cabe um metro inteiro, mas resta pensar na distribuição de $\frac{2}{3}$. *Ao redividi-los, para que se tornem equivalentes a* $\frac{4}{6}$, *visualizei ser possível redistribuí-los, fazendo corresponder mais* $\frac{1}{6}$ *a cada inteiro, e terei* $4 \times 1\frac{1}{6}$; logo, Linda pode fazer 4 vestidos. É um raciocínio bem simples e acessível às crianças quando já possuem a compreensão de equivalência de frações. Portanto precisa de algum tipo de entendimento relacional sobre frações equivalentes, de mesmo valor numérico ou mesma medida. Aí podemos mostrar que, para cada vestido, pensamos na medida exata do que preciso $1\frac{1}{6}$, em relação ao tecido todo, que mede $4\frac{2}{3}$, ou seja, pensamos em representar visualmente $1\frac{1}{6}$ de $4\frac{2}{3}$. Mas, para isso ser possível, é preciso transformar terços em sextos, usando a ideia de equivalência de frações. *Na minha resolução geométrica, usei visualmente a ideia de distribuição de um inteiro, inicialmente, e depois, como já usei a ideia de equivalência, distribuí* $\frac{4}{6}$ *intuitivamente. Isso evidencia entendimento relacional* (Skemp, 1976, 1987, Santos-Wagner, 2008), *pois consegui simplificar o conteúdo a ser ensinado por* *meio da visualização* como dizem Cifuentes e Santos (2019).

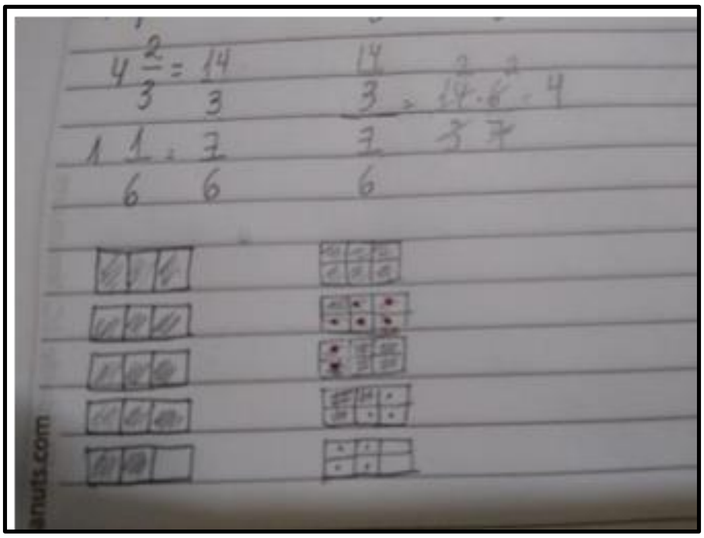

Figura 3.

Resolução possível de AD

A colega AD aplicou um raciocínio ainda mais rápido e realizou o cálculo numérico pela simplificação, como vemos na Figura 3.

Transcrevendo a operação $\frac{14}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{1} = 4$. A professora AD usou o algoritmo de maneira semelhante ao meu. *Transformou os números mistos em frações impróprias, inverteu o segundo termo, transformando-o em sua fração inversa, simplificou as frações e multiplicou, conforme ensina a regra prática, já internalizada pelo hábito* (Skemp, 1976, 1987; Santos-Wagner, 2008). Ao lhe perguntarmos por que resolveu dessa forma, respondeu que aprendeu a resolver pelo método rápido e prefere ensinar pelos algoritmos numéricos. *Parece que possui um entendimento instrumental do conteúdo, mas não podemos afirmar se teria o conhecimento pedagógico/conhecimento especializado de ensino (*Shulman,1987, 2014; Ball, Thames, Phelps, 2008) *e entendimento relacional do conteúdo, para explicar os porquês dessa prática* (Skemp, 1976; 1987). Ela identifica no problema uma ideia de divisão, arma a operação e a resolve pelos procedimentos que aprendeu. Sua representação geométrica, no entanto, é mais didática do que a mostrada na Figura 2, pois ela transforma terços em sextos pelo princípio da equivalência: 4 $\frac{2}{3}$ se transformam em $\frac{28}{6}$. Em seguida, usa cores e ícones diferentes para mostrar que cabem 4 vezes $\frac{7}{6}$ em $\frac{28}{6}$; logo, 4 vestidos. *Explora e demonstra a ideia de medida ou cotas, mostrando conhecimento pedagógico do conteúdo de divisão/conhecimento especializado de ensino* (Shulman, 1987, 2014; Ball, Thames, Phelps, 2008). Evidencia crescimento profissional desde sua participação no GEEM-ES, há cerca de doze anos (Hoffman, Oliveira, Souza, 2015).

Quando Brum pediu que resolvêssemos geometricamente e explicássemos uns aos outros de várias formas, forçou-nos a rever o que entendíamos e que conhecimentos já possuíamos ou não sobre frações, números mistos, equivalências de frações e divisão (Santos, 1993, 1997). Dois participantes não apresentaram, naquele momento, uma solução que pudesse ser visualizada geometricamente. Questionados sobre o porquê, admitiram não ter familiaridade com o conteúdo e sentir dificuldades em abordá-lo. *Uma das colegas que*, antes das exposições, *disse que não compreendia a questão acrescentou que, após a visualização da resolução com desenhos feitos pelos participantes do grupo, compreendeu melhor*. Isso está diretamente ligado ao que Cifuentes e Santos (2019, p. 2) afirmam: "o notório engessamento do ensino de matemática pode estar relacionado com uma concepção docente de matemática como sendo uma ciência rígida, totalmente lógica e algorítmica, cuja principal finalidade é a aplicação". Isso corrobora os textos de Skemp (1976, 1987), Shulman (1986, 1987, 2014), (Ball, Thames, Phelps, 2008) e Lopes (2008), comentados anteriormente.

Em nossa experiência, vimos na escola a adoção do cálculo algorítmico sem nenhuma preocupação com a visualização, exploração da criatividade ou compreensão do contexto e do conceito envolvido. Na maioria das vezes, os professores repetem os métodos pelos quais aprenderam, sem questionamentos nem reflexões sobre a compreensão do conceito. E acreditamos que esse fato está diretamente ligado às dificuldades que alunos enfrentam em estudos subsequentes, bem como à maneira como se relacionam afetivamente com a disciplina. Quando ensinamos o algoritmo sem o entendimento relacional, apenas pelo conhecimento do hábito, conforme Wielewski (2008) afirma, comentando Skemp (1989), estamos desenvolvendo uma aprendizagem que possivelmente o estudante não retém. *A tomada dessa consciência pelas professoras, que resolveram a questão IV, da falta de nossos conhecimentos sobre divisão de fração foi uma das aprendizagens do grupo até aquele momento* (Santos, 1993, 1997).

Outras resoluções com demonstração geométrica: aprendizagens no grupo

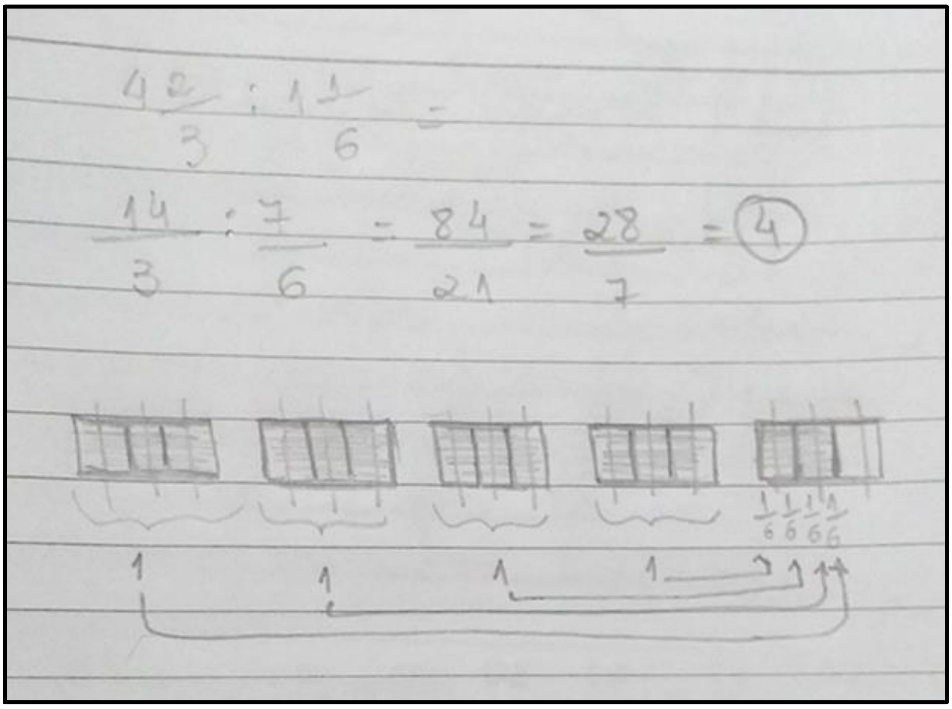

Figura 4.

Resolução da professora HI

Na resolução da Figura 4, fica claro que a professora HI, outro membro do grupo, usa o algoritmo formal da maneira mais simples possível, obtendo pela simplificação o resultado de $\frac{28}{7}$ = 4. *Constatamos que possui familiaridade com a divisão, pois move-se com destreza no campo multiplicativo*. Em seguida, *realiza a demonstração geométrica, transformando terços em sextos pelo princípio de equivalência e faz a distribuição de $\frac{7}{6}$ para cada vestido*. Essa professora, que participa do GEEM-ES desde 2019, deu evidências de aprofundamento de seus entendimentos sobre multiplicação, divisão e frações nos encontros de estudos sobre o livro de Números (Santos & Rezende, 1996). Ela confirmou em 2021 por meio de suas resoluções e explicações para o grupo como está ampliando seu conhecimento pedagógico/conhecimento especializado de ensino de matemática (Shulman, 1986, 1987, 2014; Ball, Thames, Phelps, 2008).

Mas a professora HI, em discussões posteriores, *concluiu que, para um estudante do 5.º ano, pode ser um obstáculo a mais a resolução numérica realizada dessa forma, ao lado da geométrica, pois ele certamente não compreenderá de onde saíram os sétimos obtidos pela simplificação* (Almouloud, 2011; Shulman & Shulman, 2004). *A docente reflete sobre os conhecimentos que ela possui e os repersonaliza, pois pensa no que pode acontecer em sala de aula do 5.º ano ante sua experiência profissional e seu conhecimento dos alunos*. A visualização somente ajudará na formalização se o estudante encontrar sentido nela. Por isso os estudos do grupo concluíram que a representação e exploração da criatividade na resolução de questões matemáticas devem preceder a formalização. Assim como a prática de diálogo entre alunos e entre professor e alunos quando comentam e explicam diferentes resoluções de tarefas.

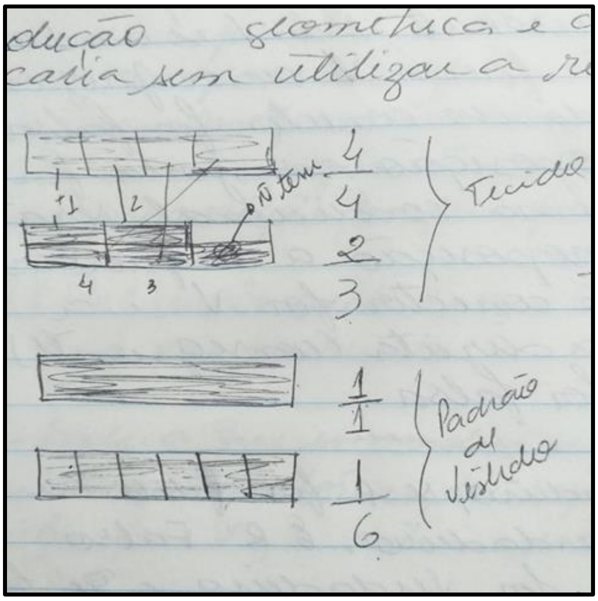

Figura 5.

Primeira resolução da professora SI

A resolução da professora SI apresentada na Figura 5 é interessante, porque separa e representa, com clareza, o padrão de cada vestido em sua mente. Visualmente isso ajuda o estudante a compreender a ideia de medida, do “quantos cabem” ou de cotas, mas a representação do tecido disponível ($4\,\frac{2}{3}$) está equivocada. Quando a professora representa $\frac{4}{4}$, ela possui somente um inteiro. O estudante não visualiza o tecido que deve ser dividido. Parece falta de clareza da professora SI na representação do que são os $4\,\frac{2}{3}$, mas ela explicou que possui pouca familiaridade na demonstração geométrica e se equivocou antes de uma segunda leitura. Foi necessário clarificarmos o conhecimento do conteúdo, para depois pensarmos sobre como torná-lo aprendível (Shulman & Shulman, 2004). *Essa professora sente muito medo em resolver tarefas matemáticas, mas, quando consegue relacioná-las com coisas práticas do cotidiano e de suas experiências, sente-se mais confortável na realização das tarefas e demonstra certo conhecimento intuitivo* (Gómez-Chacón, 2003). Em muitos momentos, repetia que esquecera os procedimentos e precisava rever fórmulas, por isso foram necessários vários exercícios no grupo em que uns formulavam problemas orais mais simples para os outros do tipo: quantos inteiros tenho em $\frac{16}{3}$? Se tenho $3\,\frac{4}{7}$, quantos sétimos tenho no total? Por meio desses diálogos e outros entre as professoras e a professora SI, ela conquistou mais confiança em si mesma e parece ter adquirido algum conhecimento desse conteúdo de frações (Shulman, 1986, 1987, 2014; Shulman & Shulman, 2004; Ball, Thames, Phelps, 2008).

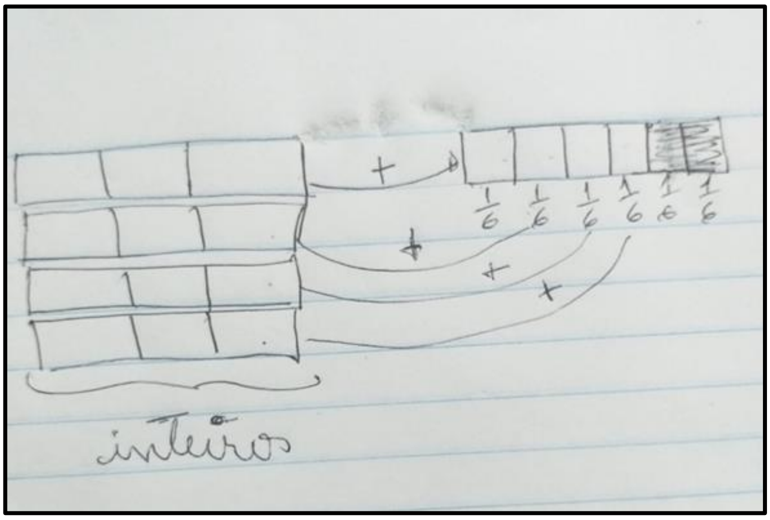

Figura 6.

Segunda resolução geométrica da professora SI

Na resolução da Figura 6, a professora SI refez o seu raciocínio com uma distribuição bem simples e clara. Ela usou o princípio aditivo e distribuiu as partes. Pela experiência que temos com estudantes de 5º ano, acreditamos que essa seria a forma pela qual eles explicariam se tivessem conhecimentos prévios sobre a equivalência de frações. A resolução é parecida com aquela da Figura 4 e de mais fácil visualização e compreensão. *Evidencia como as trocas de ideias influenciaram a professora SI a repensar seus entendimentos sobre a representação dos inteiros em frações* (Skemp, 1976, 1987). Buscávamos, assim, as habilidades destacadas por Shulman e Shulman (2004), quando afirmam que bons professores atuam na perspectiva de formar comunidades de aprendizagem, aprendendo com as próprias experiências e com as de seus pares. Isso requer motivação, reflexão e busca de conhecimento com a coragem de examinar o seu saber e o seu "saber fazer", assumindo as consequências de seus atos.

O saber fazer foi ponto de discussão nessas três representações (Figura 4, 5 e 6). Uma transposição didática eficaz com visualização precisa ajudar a clarificar conceitos, e não os confundir. É preciso ter cuidado para não fazer demonstrações equivocadas que só causariam mais dúvidas ao estudante, que em nada contribuiriam para a sua aprendizagem (Cifuentes & Santos, 2019). As resoluções até aqui demonstram compreensão das duas ideias da divisão: divisão como distribuição e divisão por cotas ou medida (Bazet e Silva, 2015). Mas as representações geométricas ajudariam a explicar a regra prática da divisão de fração por fração? Como partir da visualização para a formalização? A visualização com desenhos, quando bem feita, ajuda o estudante a compreender o que acontece na divisão de fração por fração, *mas a* *regra prática ainda parecia mágica. Até aquele momento do estudo, quatro colegas ainda apresentavam dúvidas* (Skemp, 1976, 1987; Shulman, 1986, 1987, 2014)

Conhecimento necessário ao professor: explicar a regra prática

E se a professora, Brum, nos questionasse sobre como explicar ao estudante o algoritmo numérico? Em outras palavras, por que, em uma divisão de fração por fração, multiplicamos o dividendo pela fração inversa do divisor? E, se o estudante fizer essa pergunta, como a responderemos? Antes de trabalharmos com os alunos a divisão e multiplicação com frações, é imprescindível que já possuam clareza sobre equivalência de frações e compreensão de múltiplos e divisores. Partindo desse princípio, é possível que compreendam a necessidade de transformar os termos das operações com frações nas respectivas frações equivalentes cujos denominadores sejam iguais. Uma vez consolidado esse conceito, entenderão que dividir $4\,\frac{2}{6} \div 1\,\frac{1}{6}$ é a mesma coisa que dividir $\frac{28}{6} \div \frac{7}{6}$. Em seguida, cabe ao professor mediar a compreensão que, nesta operação, o estudante calculará $\frac{7}{6}$ de $\frac{28}{6}$. A ideia da divisão como medida ou cota é outro pré-requisito indispensável neste momento, pois ele está medindo quantas vezes cabe a medida $\frac{7}{6}$ em $\frac{28}{6}$.

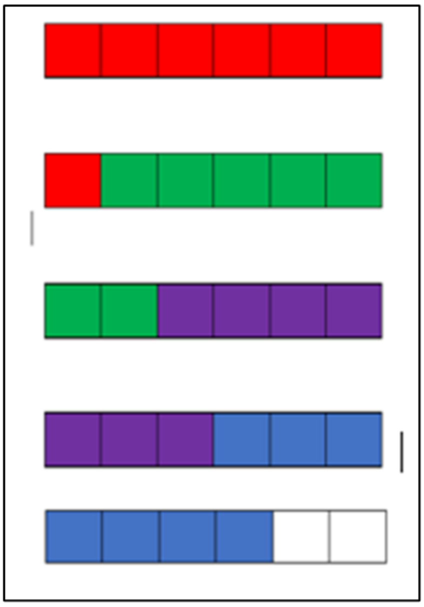

Figura 7.

Representação geométrica com a ideia de medida transcrita pela professora Hoffman

A representação da colega AD na Figura 3 poderia ser transcrita como na Figura 7, usando cores que facilitassem a visualização. Cada cor representa uma medida em que facilmente se compreende que ela cabe quatro vezes; logo, serão 4 vestidos. E como explicar que, na verdade, está multiplicando $\frac{28}{6} \times \frac{6}{7}$? Ouvimos, muitas vezes, que a divisão e multiplicação de fração por fração é fácil, pois essas operações envolvem cálculos simples. O problema é quando desafiamos o estudante e o professor a explicarem o porquê desses procedimentos. Também ouvimos que não é desnecessário ensinar multiplicação e divisão de frações por frações em turmas do 5.º ano, pois os conceitos envolvidos nesse conteúdo somente seriam consolidados no 7.º ano. Será que essas afirmativas procedem? Defendemos que se desenvolvam atividades que preparem estruturas mentais na criança desde cedo, para que a construção do conceito de frações, suas operações e aplicações sejam compreendidas e consolidadas futuramente. Talvez possamos lembrar Lopes (2008), quando chama o ensino de frações na escola de aberrações didáticas em aplicações enganosas, cujo sentido uma criança dificilmente encontra. Mas Shulman e Shulman (2004) nos instigam a pensar que quase tudo é possível, desde que o professor saiba o que está fazendo.

Será que o problema dos vestidos de bebê não fará sentido para o aluno? Que tipo de atividades poderia surgir de um texto de resolução de problemas como esse em uma perspectiva mais discursiva? Pensamos em algumas possibilidades que talvez ajudassem: a) levar para a sala roupas de bebês; b) observar o metro e compreender suas divisões decimais em múltiplos e submúltiplos; c) conversar com costureiras ou visitar fábricas de roupas de bebês; d) pesquisar custos e visitar lojas de tecidos e lojas de roupas prontas; e) entrevistar costureiras que fazem a produção em série e comparar o seu ganho com o da loja que vende o produto final; f) conversar sobre os grupos sociais que adquirem essas roupas. Essas atividades acenam para o que Ernest e colegas (2016) chamam de uma matemática vinculada ao que fazemos em sociedade. Com base em atividades como as citadas, pensamos que pode fazer todo o sentido a abordagem da divisão de fração. Compreendemos que nem tudo é possível realizar, mas é sempre possível fazer algumas atividades do exemplo ou outras, para recontextualizar e repersonalizar o conteúdo em questão (Almouloud, 2011). Afinal, não se adquirem peças inteiras de tecido, e as costureiras usam um padrão de medida para cada vestido. O grupo refletiu com maturidade sobre "suas próprias visões do desejável e do possível [...]" (Shulman & Shulman, 2004, p. 261. Tradução nossa.)[10].

Conhecimento de conteúdo e conhecimento pedagógico de conteúdo: a regra prática

Santos e Rezende (1996) afirmam que cabe ao professor decidir em qual momento

[10] [...] "their own visions of the desirable and the possible" (Shulman & Shulman, 2004, p. 261).

introduzirá conceitos relacionados às frações e como fará isso de forma a não criar obstáculos para a compreensão. Nesse sentido, concordamos com Brum, cuja atividade comentada é instigadora, pois sugere que quem precisa ter clareza é o professor. Ele precisa possuir o conhecimento do conteúdo, somente assim poderá ter o domínio do conhecimento pedagógico deste e decidir o melhor momento de ensiná-lo, tornando-o aprendível. A divisão de fração por fração foi uma provocação valiosa, porque oportunizou-nos a olhar para o que sabemos e o que não sabemos sobre esse conteúdo (Santos, 1993, 1997). Durante os estudos, percebemos fragilidades na compreensão do conceito em quatro membros do grupo participante, que preferiam aplicar o algoritmo e memorização do cálculo, porque sentiam-se inseguros para explicar ao estudante a regra prática para além da visualização (Shulman, 1986, 1987, 2014; Ball, Thames, Phelps, 2008).

Santos e Rezende (1996) propõem trabalhar com a proposição de problemas simples e rotineiros, ativando conhecimentos prévios, como sugere o velho mestre Polya (1945/1978). A fim de construírem a base para a compreensão da divisão por frações, sugerem partir do conhecimento das operações com números naturais. Exemplo: “Uma escola recebeu 60 sacos de leite em pó para serem consumidos igualmente em um período de três semanas. Quantos sacos de leite serão utilizados em cada semana?” (Santos & Rezende, 1996, p. 175)

É um problema simples com ideia de distribuição, mas, ao resolvê-lo, o aluno percebe que, calculando os 20 sacos por semana, ele encontrou a terça parte do total 60. Ou seja, $60 \div 3 = 20 = 60/3 = 1/3$ de 60, logo $1/3 \times 60 = 20$. Entretanto, para que o estudante compreenda por que multiplicamos $1/3 \times 60$, precisamos levá-lo a entender que, ao multiplicar por 1/3, está calculando a terça parte “de” 60. Cristiano Muniz (2009, p. 104) afirma que “associar a preposição DE ao contexto multiplicativo é uma ferramenta pedagógica e epistemológica bem fértil, ou seja, $2 \times 7 = 2$ grupos DE 7 [...]”, analogamente, 1/3 de $60 = 20$. É um conceito que precisa ser clarificado para o estudante, que inicia o estudo com as operações com frações, pois estava acostumado a operar no conjunto dos números naturais em que o resultado de uma multiplicação de dois números sempre resulta em um número maior. O raciocínio para quem inicia o conceito de multiplicação por números racionais é contraintuitivo. Por isso, concordamos com Santos (1997): é preciso explorar mais a noção de fração inversa e o seu efeito em cálculos, para que haja compreensão do inverso multiplicativo. Quem é o inverso multiplicativo de 3? E por quê? Todo número natural pode ser escrito em forma de uma fração; logo, 3 é igual a 3/1, ele representa também “uma coisa” que posso dividir em três partes e, para chegar a ela, novamente preciso pensar em três vezes essas três partes ($3 \times 1/3$), ou seja, realizar a operação inversa, por isso posso multiplicar qualquer fração pelo seu inverso e obter como resultado o número 1. Então, por analogia, posso pensar que o inverso de 3 é 1/3, o inverso de 3/2 é 2/3 e assim por diante. A lógica é muito simples, na verdade, qualquer número dividido por ele mesmo dará a unidade, elemento neutro da operação de multiplicação. E esse conhecimento é de grande importância para compreender a regra prática da divisão por frações.

Santos e Rezende (1996, p. 176) seguem a explicação com outra conjectura: “se uma outra escola receber 60 sacos de leite para serem consumidos em meia semana, o que deve ser feito para saber quantos sacos de leite a escola irá utilizar em uma semana?” Os alunos certamente perceberão que o consumo dobrará. Nos exemplos anteriores, sabendo que o consumo de 60 sacos de leite era em duas semanas e, para saber o consumo de leite em uma semana, dividimos por 2 ou multiplicamos pelo seu inverso multiplicativo, que é 1/2: 60 ÷ 2 = 60/2 = 1/2 de 60 = 1/2 × 60 = 30. Então, se olharmos o problema de Santos e Rezende (1996) em que sabemos o consumo de leite em meia semana, faremos 60 ÷ 1/2 ou 60 × 2/1 = 120, utilizando o princípio do inverso multiplicativo, ou raciocinando que o consumo da semana toda é o dobro do que foi consumido em meia semana.

Certamente, teremos de fazer com as crianças vários exercícios, para que compreendam o conceito de fração inversa. Pensamos que não seria possível explicar a uma criança e esperar que ela compreendesse a regra prática de um problema como o proposto por Brum, sem antes levar muitos outros exemplos como os de Santos e Rezende (1996). Até esse momento, as quatro professoras de nosso grupo já passaram a compreender melhor o conteúdo envolvido.

Novas compreensões do algoritmo convencional ao problema proposto

Após trabalhar com os alunos situações mais simples mediante os exemplos citados acima, voltamos ao problema proposto pela professora que pergunta quantos vestidos de bebês posso fazer com $4\,\frac{2}{3}$ m, cuja medida é de $1\frac{1}{6}$ m para cada vestido, talvez os alunos já comecem compreender a razão da inversão da fração que representa o divisor na operação de divisão. Uma explicação mais fácil é mostrar ao estudante que, ao multiplicar qualquer fração pelo seu inverso multiplicativo, o transformaremos em 1, que é elemento neutro na operação de multiplicação. Esse conhecimento explorado ao lado de uma das propriedades da divisão, em que podemos multiplicar ambos os termos de uma divisão por um mesmo número e obter assim o mesmo resultado, é que clarifica, enfim, a regra prática. Ex.: 25 ÷ 5 = (25 × 2) ÷ (5×2). Analogamente, no problema proposto, depois que transformássemos os números mistos em frações impróprias, teríamos $\frac{14}{3} \div \frac{7}{6}$ e, aplicando a propriedade com inverso multiplicativo do divisor, teríamos $(\frac{14}{3} \times \frac{6}{7}) \div (\frac{7}{6} \times \frac{6}{7}) = \frac{84}{21} \div \frac{42}{42} = \frac{84}{21} \div 1 = \frac{84}{21} = 4$. Conforme vemos, transformamos o divisor em elemento neutro 1, restando, na prática, apenas a primeira multiplicação.

Para compreender a regra prática da divisão de fração por fração, há, portanto, um longo caminho a ser percorrido com o aluno. Ele precisa ter clareza do que é uma fração e suas ideias envolvidas; precisa mover-se com destreza no campo multiplicativo, compreendendo que multiplicação e divisão são operações inversas em que uma faz e a outra desfaz; precisa ter clareza da ideia de equivalência e comparação; em outras palavras, precisa ter construído um sentido de número que lhe permita fazer comparações, medições, distribuições equitativas ou medidas com muita facilidade. Então, arriscará também outras soluções menos convencionais. E essa foi também a conquista de nosso grupo.

Todas as professoras envolvidas compreenderam as ideias envolvidas na divisão de fração por fração e o processo de cálculo algorítmico convencional após este estudo. Mesmo assim, duas professoras ainda admitiram que têm alguma insegurança em realizar com o aluno todas as etapas mostradas neste trabalho. Assim sendo, admitiram a necessidade de maior preparação e reflexão sobre como desenvolver uma aula em que explorassem com a turma a divisão de fração por fração (Santos, 1993, 1997; Santos-Wagner, 2008). Logo, devidamente preparadas, não correriam o risco de evitar o conteúdo, por não saberem explicar ao estudante o porquê da inversão do termo que representa o divisor em uma fração. Em Skemp (1976, 1987), encontramos que compreensão significa tanto saber fazer quanto por que fazer, pois ambas as compreensões se fundem, se complementam e se inter-relacionam.

Construir no professor a consciência de que não basta ensinar fórmulas e regras para que a compreensão instrumental e a relacional se encontrem e efetivem nem sempre é bem aceito. Às vezes, preferem ensinar como aprenderam. Isso ficou claro em nosso grupo, quando a professora AD, repetidas vezes, se expressou da seguinte forma: “Eu ensino o caminho mais rápido”, “Na escola era elogiada pela maneira rápida pela qual resolvia os problemas” ou “o aluno quer respostas rápidas e caminhos rápidos para a resolução”. Isso é fato em muitas escolas e corrobora o que Skemp afirma:

> Para muitos, provavelmente a maioria, suas tentativas de convencê-los de que ser capaz de usar a regra não é suficiente não serão bem recebidas. ‘O bem é inimigo do melhor’, e, se os alunos podem obter as respostas certas pelo tipo de pensamento que são usados por eles, não aceitarão gentilmente sugestões de que eles deveriam tentar algo além disso (Skemp, 1976, p. 5. Tradução nossa)[11].

[11] By many, probably a majority, his attempts to convince them that being able to use the rule is not enough will not be well received. ‘Well is the enemy of better,’ and if pupils can get the right answers by the kind of thinking they are used to, they will not take kindly to suggestions that they should try for something beyond this (Skemp, 1976, p. 5).

Contudo, insistimos, pois, assim como o autor citado e outros já comentados, acreditamos que ensinar com compreensão significa saber fazer e por que fazer, somente assim o professor saberá explicar, de diferentes maneiras, qualquer assunto que se proponha a ensinar. E, ao final do estudo, também a professora AD concordou conosco: *nem sempre o melhor caminho representa o "bem", aquilo que vai nos proporcionar um conhecimento que possa ser aplicado em outras situações ou relacioná-lo a outros conceitos*.

Aprendizagens do grupo: outros algoritmos alternativos

✓ **Dobraduras**

As dobraduras de tirinhas de papel também são de grande utilidade para a compreensão das operações de divisão de fração por fração. Para representar o problema aqui discutido, podemos utilizar quatro tirinhas de papel inteiras e uma dobrada em três partes, mostrando-as aos alunos. Ao mesmo tempo, pedir que nos ajudem a escrever o que representam: 4 2/3. Em seguida, pegar outra tirinha inteira e mais uma dobrada em três partes e redobradas ao meio transformando em seis, que será a nossa medida, novamente pedindo que nos ajudem a escrevê-la, já sistematizando a operação ao lado das tirinhas, como mostra a Figura 8.

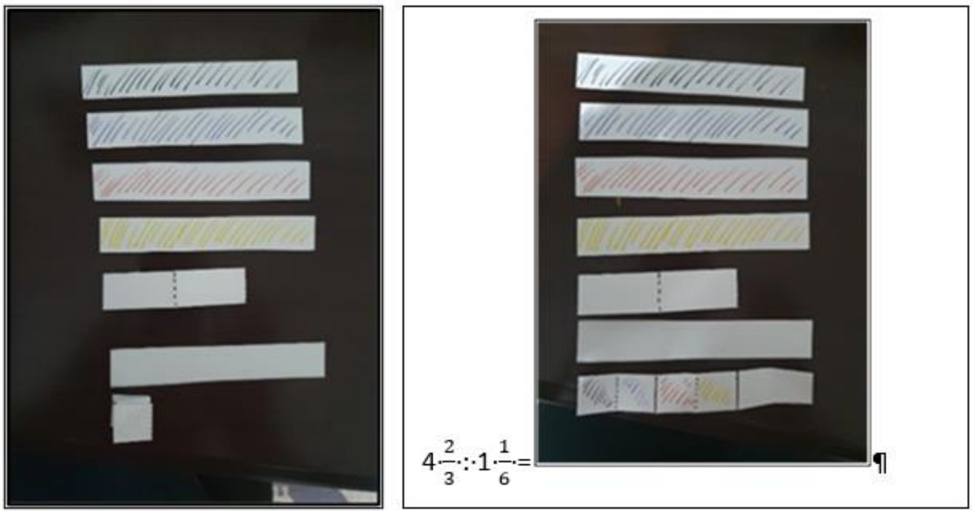

Figura 8.

Etapas da resolução da divisão com dobraduras

Na primeira imagem, vemos as cinco primeiras tirinhas representando o tecido que Linda possui, $4\,\frac{2}{3}$; e, nas duas últimas, vemos a medida de cada vestido, $1\,\frac{1}{6}$. Quantas vezes, é possível sobrepor essa medida de um vestido no tecido todo que possuo? O estudante não terá dificuldades para medir o inteiro. Sua dúvida será considerar mais $\frac{1}{6}$. Com alguma mediação do professor da educação básica, verá que poderá redividir $\frac{2}{3}$ e transformá-los em $\frac{4}{6}$. Abrindo a dobradura e colocando as tirinhas lado a lado, como mostramos na Figura 8, perceberá que a medida cabe quatro vezes. Consideramos essa uma das formas mais didáticas, para que o estudante compreenda o que acontece na divisão de fração por fração. Daí também facilmente vai inferir que cada metro inteiro agora corresponde a $\frac{6}{6}$ e o tecido todo de Linda corresponde a $\frac{28}{6}$.

Trabalhar com dobraduras é uma forma mais lúdica em que o aluno pode usar cores, para ressaltar as dobras, sistematizando as aprendizagens construídas por meio da colagem no caderno e produção de texto anotando as conclusões. Nosso grupo compreendeu a possibilidade de ir além da "aritmetização", em que se privilegiam algoritmos, pois a demonstração quase sempre é possível e o estudante tem necessidade dessa potência do ver, como afirma Lorenzato (2006). A prova é que, em nosso grupo, professoras com longa experiência de sala necessitaram de demonstrações. Essa ideia é corroborada por Cifuentes e Santos (2019), quando afirmam que compreender é tornar evidente o que não é. Portanto, há uma necessidade de ver para compreender. Assim, concebemos a visualização como um recurso de concretização de conceitos, abstratos ou não, dando a eles forma, movimento e trazendo-os para o mundo da nossa intuição, a fim de serem "vistos" por ela.

Mas não somos ingênuos, sabemos, como bem lembra Mathias (2017), que não basta saber o conteúdo e saber ensinar da forma que julgamos adequada. É preciso ponderar a realidade em que nosso aluno está inserido, conhecer o projeto político pedagógico da escola e considerar essas dimensões sócio-históricas. Elas poderão nos indicar a melhor forma de transposição didática bem como a linguagem a ser usada para motivar e encorajar professores e futuros professores a buscarem formas criativas de ensinar matemática que podem encantar o estudante. A forma de transposição didática que pode funcionar com uma turma pode não ser a mesma que funciona na outra.

✓ **Cálculos numéricos**

Sabemos que há embates em que professores defendem que ensinar matemática é instrumentalizar o estudante para que agilize cálculos. Quando defendemos a demonstração concreta, não dizemos que isso não deve ser um dos objetivos, mas acreditamos que sua conquista vem da visualização e ambos, métodos tradicionais e criativos, precisam ser possibilitados. Por isso nosso grupo foi além e, ainda sobre a divisão em questão, sugeriu que, em etapas posteriores, quando o estudante já estivesse familiarizado com as resoluções usando a criatividade, poderíamos perguntar: e, no algoritmo formal, teríamos outras formas de resolver essa operação? Rafael Vaz (2016) mostra a divisão de fração por fração com o uso da própria divisão. Nesse algoritmo, dividem-se numerador e denominador pelo divisor, ou seja, numerador por numerador e denominador por denominador. Vejamos como isso seria: $4\,\frac{2}{3} \div 1\,\frac{1}{6} = \frac{14}{3} \div \frac{7}{6}$. Percebemos que não podemos dividir 3 por 6, então procuramos uma fração equivalente a $\frac{14}{3}$ que nos permitirá fazê-lo; logo, $\frac{14 \times 2}{3 \times 2} = \frac{28}{6}$. Para então, fazermos $\frac{28}{6} \div \frac{7}{6} = \frac{28 \div 7}{6 \div 6} = \frac{4}{1} = 4$.

Um aluno que recebe uma operação parecida para simples treinamento procedimental, sem passar pelas etapas acima descritas, pode tentar resolver a operação pela divisão como mostramos aqui, intuitivamente. E provavelmente o professor dirá que escolheu o caminho incorreto. *Sinceramente, antes desse estudo, certamente quatro participantes do grupo assim agiriam porque desconheciam o algoritmo apresentado por Vaz (2016).*

Quando proporcionamos ao estudante várias atividades em que precisa pensar sobre números e suas regularidades, ele se moverá com facilidade no campo multiplicativo, perceberá as equivalências e poderá escolher o algoritmo que melhor lhe aprouver. *Foi o que aconteceu com nosso grupo. Todos possuem hoje um novo olhar sobre a divisão de fração por fração*.

Qual é a relevância de ensinar divisão de fração por fração a estudantes dos anos iniciais?

Sobre a relevância do conteúdo divisão de fração por fração, o grupo concluiu que todas as atividades que têm por objetivo a flexibilidade do pensamento matemático precisam estar presentes em sala de aula, mas de forma que o estudante experimente, crie, explore, brinque, visualize, questione, estime e aproxime, sem cair no que Cifuentes e Santos (2019) chamam de “aritmetização”. A lógica e a aplicabilidade serão ancoradas na intuição e percepção, logo qualquer conteúdo pode ser explorado em sala de aula, desde que saibamos como fazê-lo, de modo que o estudante se encante. Assim, o domínio de um conteúdo matemático abrirá possibilidades de pensar que podem ser libertadoras, na medida em que buscamos sentido para tal. E, após este estudo, todas as colegas concordaram que é possível ensinar divisão de fração por fração com compreensão. É possível que alunos ainda repitam, como ressalta Lorenzato (2006, p. 91): “eu sei como fazer, mas porque é assim que devo fazer, eu não sei”, pois é um caminho a ser construído, o que não pode acontecer é o professor não saber. A ele cabe enfatizar os porquês e incentivar a curiosidade que é essencialmente humana.

Ao voltarmos à pergunta sobre o porquê de ensinar divisão de fração, diríamos que essa escolha deve ser do professor, considerando seus objetivos, interesses e conhecimentos prévios do aluno. Nunca essa decisão deveria se pautar na limitação de conhecimento de conteúdo e de conhecimento pedagógico do professor/conhecimento especializado de ensino. E nem ser obrigatório mediante a prescrição curricular, as diretrizes ou os manuais didáticos. Nem tampouco desconsiderar o plano político pedagógico da escola. O professor precisa ter, sobretudo, coragem para refletir sobre os conhecimentos que possui e buscar superação na troca de experiências com seus pares. Em Shulman e Shulman (2004), encontramos:

> A aprendizagem prosseguirá de forma mais eficaz se for acompanhada por consciência metacognitiva e análise dos próprios processos de aprendizagem e apoiada pela participação em uma comunidade. Na verdade, este modelo pode muito bem ser aplicado aos processos de aprendizagem de alunos, assim como aos processos de aprendizagem dos professores (Shulman & Shulman, 2004, p. 267. Tradução nossa.)[12]

Assim, ensinar ou não o conteúdo acima discutido deve pautar-se principalmente na reflexão: Eu sei ensinar divisão de fração por fração? O que eu sei e o que eu não sei sobre o tema? Quais são as reais demandas da turma? Em que esse conteúdo contribuirá para desenvolver o sentido de número dos estudantes? O nível de dificuldade envolvido é adequado ou seriam recomendáveis outras atividades mais simples? Como esse conteúdo pode contribuir para que meu aluno se torne mais apto a aprender outros temas, preparando-o melhor para desempenhar o seu papel na sociedade? O que dizem as diretrizes locais e nacionais sobre esse conteúdo? Nosso grupo procurou responder a essas perguntas com coragem e amadureceu nessa pequena comunidade de aprendizagem.

Conclusão

A questão de prova proposta pela professora Brum nos fez pensar em várias questões que envolvem o ensino e aprendizagem de frações, sobre o ensino de matemática em geral e sobre resolução de problemas (Santos-Wagner, 2008). A professora foi feliz na proposição porque não caiu no que Lopes (2008) chama de aplicações enganosas ou desonestidade de apresentações, pois o problema sobre vestidos de bebês e suas medidas é um contexto possível e foi de fácil demonstração. Outro ponto alto dessa avaliação foi instigar os futuros professores e a nós a nos questionarmos sobre nossos conhecimentos desse conteúdo. E, antes do estudo, quatro professoras do grupo tinham alguma dúvida ou falta de entendimento relacional e conceitual, mas concordaram que hoje, após este estudo, todas nós temos mais segurança na

[12] The learning proceeds most effectively if it is accompanied by metacognitive awareness and analysis of one's own learning processes, and is supported by membership in a learning community. Indeed, this model may well apply to the learning processes of students as well as it does to the learning processes of teachers Shulman & Shulman, 2004, p. 267)

divisão de fração por fração e no modo pelo qual ensiná-la. Muitos de nós, professores, que ensinamos matemática na escola básica, aprendemos a aplicar algoritmos e a memorizá-los, sem saber o porquê de sua função e muito menos a sua construção histórica. E, assim, nem sempre sabemos como tornar certos conteúdos mais acessíveis a nossos alunos nem mesmo nos questionamos sobre a real relevância ou não destes. Muitas vezes, preferimos deixar o conteúdo para o segundo segmento do ensino fundamental, alegando que a criança não está preparada para compreendê-lo, quando, na verdade, não estamos preparados para ensiná-lo.

O texto de Paul Ernest e colegas (2016) reforça a nossa convicção de que fazer matemática é muito mais do que simplesmente levar para a sala de aula determinado conteúdo para cumprir um programa. Fazer matemática é também buscar subsídios na filosofia e olhar com um novo posicionamento para a matemática escolar, ousar e acreditar que qualquer conteúdo poderá ser ensinado, se soubermos como e quando fazê-lo, pois a filosofia

> [...] fornece ferramentas de raciocínio para questionar o status quo, para ver que 'o que é' não é 'o que tem que ser'; para ver que os limites entre o possível e o impossível são nem sempre onde nos dizem que eles estão. Permite que noções comumente aceitas sejam suposições investigadas, questionadas e implícitas, distorções ideológicas ou não intencionais preconceitos a serem revelados e desafiados. Também, o mais importante, nos permite imaginar alternativas. Assim como a literatura pode nos permitir estar no lugar de outras pessoas e ver o mundo através de seus olhos e imaginação, assim também filosofia e teoria podem dar às pessoas novos 'pares de óculos' através dos quais ver o mundo e suas práticas institucionais renovadas, incluindo as práticas de ensino e aprendizagem matemática, bem como os de pesquisa em educação matemática (Ernest et al., 2016, p. 4. Tradução nossa.)[13]

Trazer essa avaliação aplicada aos estudantes de pedagogia para ser discutida no grupo de professores, no GEEM-ES e no projeto de extensão da UFES, nos proporcionou exercitar esses diferentes olhares, rediscutir as práticas, criar estratégias e trocá-las entre os colegas, fazendo com que uns aprendessem com os outros. A percepção de algumas fragilidades levou-nos de volta aos estudos na busca de novas compreensões. Ademais, as discussões no grupo validaram e clarificaram algoritmos convencionais e não convencionais. Desse modo, todos pudemos perceber que o que torna o ensino de matemática prazeroso é também o uso da criatividade, porque pode despertar o prazer da descoberta e redescoberta.

---

[13] […] It provides thinking tools for questioning the status quo, for seeing that 'what is' is not what has to be'; to see that the boundaries between the possible and impossible are not always where we are told they are. It enables commonly accepted notions to be probed, questioned and implicit assumptions, ideological distortions or unintended prejudices to be revealed and challenged. It also, most importantly, enables us to imagine alternatives. Just as literature can allow us to stand in other people's shoes and see the world through their eyes and imaginations, so too philosophy and theory can give people new 'pairs of glasses' through which to see the world and its institutional practices anew, including the practices of teaching and learning mathematics, as well as those of research in mathematics education (Ernest et al., 2016, p. 4).

Constatamos a necessidade de discutir mais a relevância do conteúdo divisão de fração por fração nos anos iniciais, não para retirá-lo do programa e nem para defender a sua presença na escola básica apenas cumprindo diretrizes, mas para pensar sobre como esse conteúdo pode ser melhor ensinado e por quê. Pensamos que o domínio da divisão de fração por fração trará contribuições para outras aprendizagens, pois exige do aprendiz, um domínio sobre equivalências e ampliação do sentido de número, habilidade que proporciona flexibilidade de pensamento. Diríamos que se trata de um passo importante e libertador para a compreensão de números racionais em sua totalidade em estudos subsequentes. Acreditamos que a valorização do saber matemático se deve dar pela sua beleza, pela sua aplicabilidade social, pela sua capacidade de ler o mundo, pela esperança de capacitar as pessoas para tornarem o mundo melhor. Nesse sentido, sempre é possível tanto encontrar razões para a aprendizagem de qualquer conteúdo quanto ensinar e aprender com criatividade e compreensão.

Referências

Almouloud, S. A (2011). As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo. January, *Educar em Revista*, número especial (Editora UFPR), 191-210.

Ball, D. L., Thames, M. H., Phels, G. (2008) Content Knowledge for Teaching: what makes it special?. *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, november/december., 2008, 389-407.

Bazet, L. M. B.; Silva, S. A. F. da. (2015) *Narrativas sobre o conceito de divisão em grupo de estudos*. (Orgs.). Vitória: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo.

Bicudo, M. A. V., Monteiro, R. P. & Baier, T. (2019). Apresentação dossiê: Filosofia da Educação Matemática. *Revista Educere Et Educare*, v. 15, n. 33, set./dez. 2019, 1-6. Revista de Educação: Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

Cifuentes, J. C., Santos, A. H. dos. (2019). Da percepção à imaginação: aspectos epistemológicos e ontológicos da visualização em matemática. *Revista Educere Et Educare*, v. 15, n. 33, set./dez. 2019, 1-21. Revista de Educação: Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

D'Ambrósio, U. (2006) Etnomatemática e educação. In Knijnik, G. Vanderer, F. & Oliveira, C. J. *Etnomatemática e formação de professores*. (Org.). Santa Cruz do Sul: EDUNISC (pp. 39-72).

Ernest, P., Skovsmose, O., Bendegem, J. P. Bicudo, M. Miarka R. Kvasz, L & Moeller, R. (2016). *The philosophy of mathematics education*. Series editor. Gabriele Kaiser. Faculty of Education, University of Hamburg, Hamburg, Germany. Disponível em https://www.springer.com/series/14352.

Fiorentini, D.; Lorenzato, S. (2007) *Investigação em educação matemática:* percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados.

Gómez-Chacón, I. M. (2003). *Matemática emocional: os afetos na aprendizagem matemática*.

Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed.

Guerra, R. B., Santos da Silva, F. H. (2008). As operações com frações e o princípio da contagem. *Bolema*, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2009, 41-54.

Harouani, H. (2015). *Purpose and education:* the case of mathematics. Doctoral dissertation, Harvard Graduate School of Education. https://dash.harvard.edu/handle/1/16461047

Hoffman, B. V. S. (2012). *O uso de diferentes formas de comunicação em aula de matemática no ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação) Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

Hoffman, B. V. S., Oliveira, A. P. de, Souza, S. R. De. A construção do conceito dedivisão: estratégias próprias na resolução de problemas. In Bazet, L. & Silva, S. A. F. da (Orgs.), *Narrativas sobre o conceito de divisão em grupo de estudos*. (Orgs.). Vitória: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (pp. 63-84).

Junior, J. G. M., Wielewski, G. D. (2021). Potenciais oportunidades formativas com MTSK e pesquisas científicas sobre frações e operações. *REAMEC, Revista da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática*, v.9, n.1, e21003, janeiro-abril, 1-18.

Lopes, A. J. (2008). O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, 1-22, 2008.

Lorenzato, S. (2006). *Para aprender matemática.* Campinas, SP: Autores Associados.

Mathias, C. (2017) Formação ou deformação inicial de professores? Uma crítica aos cursos de Licenciatura em Matemática. *Revista Thema*. v.14, n. 2, 5-8.

Mathias, C. (2015) Trocando em miúdos. Ser professor é uma arte de fim social *Jornal dá Licença.* Ano XX, n. 65. out. nov. dez., 3. Universidade Federal Fluminense.

Muniz, C. A. (2009). Diversidade dos conceitos das operações e suas implicações nas resoluções de classes de situações. In: Guimarães, G. & Borba, R. (Org.). *Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização.* Recife: SBEM, (pp. 101-118).

Nunes, T., Carraher, D., Schliemann, A. (2011). *Na vida dez, na escola zero*. 16. ed. São Paulo, Cortez.

Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas*. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência. (Trabalho publicado originalmente em 1945 em inglês: How to solve it.).

Rojas, N., Flores, P., Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema,* Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, 143-167, 2015.

Santos, V. M. P. dos (1993). *Metacognitive awareness of prospective elementary teachers in a mathematics content course and a look at their knowledge, beliefs and metacognitive awareness about fractions*. Tese (Doctoral of Philosophy) – Department of Curriculum and Instruction (Mathematics Education) in the School of Education, Indiana University. Publicado por Associação de Professores de Matemática, Coleção Teses. Lisboa: APM, 1996.

Santos, V. M. P. dos (1997). (Coord.) *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática:* métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Santos, V. M. P. & Rezende, J. F. R. (1996). *Números*: linguagem universal. Rio de Janeiro: Editora Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Santos-Wagner, V.M. (2008). Resolução de problemas: Uma abordagem no processo educativo. *Boletim Gepem*, n. 53, julho/setembro, 2008, 43-74.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2 (Feb. 1986), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reforms. *Harvard Education Review*, 57(1), 1-22.

Shulman, L. S. (2014). Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. *Cadernos Cenpec*. São Paulo. v. 4, n. 2, 196-229. dez. 2014.

Shulman, L. S.; Shulman, J. H. (2004). How and what teachers learn: a shifting perspective. *Journal of Curriculum Studies*, v. 34, n. 2, 257-271.

Silva, S. A. F. da. (2009). *Aprendizagens de professoras num grupo de estudos sobre matemática nas séries iniciais*. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Skemp, R. (1987). *The Psychology of learning mathematics*. Expanded American Edition. New York: Routledge. (Antes New Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates).

Vaz, R. F. N. (2016). Divisão de frações: explorando algoritmos não usuais. *Educação Matemática em Revista*. Sociedade brasileira de educação matemática. n. 52, jul. 2016, 58-66.

Vygotsky, L. S. (1993). *Pensamento e linguagem*. Tradução: Jeferson Luiz Camargo. Revisão técnica: José Cipola Neto. São Paulo: Martins Fontes. (Publicado pela primeira vez no Brasil em 1987.).

Vygotsky, L. S. (2007). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. Organizado por Michel Cole et al. Tradução: José Cipolla Neto; Luiz Silveira Menna Barreto; Solange Castro Afeche. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes. (Publicado pela primeira vez no Brasil em 1984.).

Wielewski, S. A. (2008). *Pensamento instrumental e pensamento relacional na educação matemática*. Tese de doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP. https//:www.livrosgratis.com.br.