ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p770-815

A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração[1]

Mathematical argumentation, the problematic precursor of demonstration

La argumentación matemática, precursora problemática de la demostración

L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration

Nicolas Balacheff[2]
Directeur de recherche CNRS émérite : Equipe MeTAH, Modèles et Technologies pour l'Apprentissage Humain Laboratoire d'informatique de Grenoble Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP
https://orcid.org/0000-0001-7084-3482

Tradução

Saddo Ag Almouloud[3]
Universidade Federal da Bahia
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Méricles Thadeu Moretti[4]
Universidade Federal de Santa Catarina
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

Resumo

Este texto retoma a apresentação feita na conferência CORFEM 2019. Uma primeira parte ajuda a esclarecer os termos explicar, argumentar, provar, demonstrar e suas relações. A segunda parte enfatiza a importância da ligação entre concepções e argumentação. O terceiro, com base em evidências empíricas, aborda a questão do papel da linguagem. Por fim, o retorno às situações de validação permite colocar o problema da argumentação matemática em que termina a apresentação.

Palavras-chave: Argumentação matemática, Problemática da demonstração, concepção, Linguagem.

[1] https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02981131
[2] Nicolas.Balacheff@imag.fr
[3] saddoag@gmail.com
[4] mthmoretti@gmail.com

Abstract

This text takes up the presentation given during the CORFEM 2019 conference. A first part contributes to clarify the terms explain, argue, prove, demonstrate and their relations. The second part underlines the importance of the link between conceptions and argumentation. The third part, about empirical evidence, addresses the question of the role of language. Finally, the return on the validation situations allows to pose the problem of mathematical argumentation on which the presentation concludes.

Keywords: Mathematical argumentation, Problem of demonstration, Conception, Language.

Resumen

Este texto retoma la presentación realizada en el congreso CORFEM 2019. La primera parte ayuda a aclarar los términos explicar, argumentar, probar, demostrar y sus relaciones. La segunda parte subraya la importancia del vínculo entre las concepciones y la argumentación. La tercera parte, sobre las pruebas empíricas, aborda la cuestión del papel del lenguaje. Por último, la vuelta a las situaciones de validación permite plantear el problema de la argumentación matemática sobre el que concluye la presentación.

Palabras clave: Argumentación matemática, Problemática de la demostración, Concepción, Lenguaje.

Résumé

Ce texte reprend l'exposé prononcé lors du colloque CORFEM 2019. Une première partie contribue à préciser les termes expliquer, argumenter, prouver, démontrer et leurs relations. La seconde partie souligne l'importance du lien entre conceptions et argumentation. La troisième, à propos des preuves empiriques, aborde la question du rôle du langage. Enfin, le retour sur les situations de validation permet de poser le problème de l'argumentation mathématique sur lequel se conclut l'exposé.

Mots clés : Argumentation mathématique, Problématique de la démonstration, Conception, Langue.

A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração

Uma problemática: a argumentação

"Sempre chegamos à argumentação com um saber substancial "do que é" a argumentação", observa Christian Plantin (1996, p. 25), no decorrer da introdução de uma síntese na qual coloca em perspectiva as várias abordagens desse conceito. Para além dos usos comuns que contribuem para a diversidade de significados desta palavra, várias áreas contribuem para o seu significado, tais como filosofia, epistemologia, lógica, ciências cognitivas, ciências da linguagem e até a inteligência artificial. Para o tema que hoje me ocupa, o da aprendizagem da prova no contexto das aulas de matemática, reterei principalmente o contributo das ciências da linguagem sem, no entanto, me privar de recorrer a outras disciplinas quando podem colaborar para a compreensão e resolução dos problemas que analisamos.

Nem mesmo nas ciências da linguagem há uma problemática única da argumentação, mas uma diversidade de abordagens que diferem substancialmente, embora sem fronteiras intransponíveis (ibid. p. 12sqq.). Portanto, antes de utilizar esta palavra, é aconselhável especificar seu significado com a maior precisão possível. Não se trata de fazer o trabalho de um linguista, mas de ter uma caracterização eficaz para avançar nas questões que nos colocamos, sem criar um conflito intransponível com as ciências da linguagem; trata-se de circunscrever o objeto de estudo para permitir uma certa teorização, a partir das palavras de Christian Plantin (ibid. p. 27).

No uso comum, o termo argumentação designa tanto a ação de argumentar quanto, por extensão, seu produto. O processo associado é o da manipulação de objetos e relações por meio de uma linguagem e no decorrer de uma interação real ou potencial entre protagonistas que buscam garantir a validade de uma afirmação alvo ou, pelo contrário, se opor e confrontar suas posições. Para distinguir entre o processo e o produto, vou manter o uso do verbo "argumentar" para evocar o primeiro, e o substantivo "Argumentação" para o segundo. Essa distinção será respeitada tanto quanto possível, mas pode não ser quando se trata de obras com diferentes usos, o contexto deve ser suficiente para evitar confusão.

Mais precisamente, partindo das sínteses de Christian Plantin (1990, 1996), considerei a seguinte caracterização:

- Argumentação é um discurso

- Orientado: visa a validade de uma afirmação;
- Crítico: analisa, apoia e defende;
- Intencional: visa modificar um julgamento;

- Argumentar é um processo

- Que instrumenta a linguagem;
- Que muda o valor epistêmico de um enunciado;
- Que modifica a relação com o conhecimento;
- Que estrutura a socialização;

Um contexto: a instituição.

A problemática da validação, fundamento da cultura científica e cívica, permeia toda a educação obrigatória. Ela ocupa um lugar especial na aprendizagem e no ensino da matemática (Balacheff, 2019, pp. 424-427). O relatório apresentado ao governo francês em fevereiro de 2018 afirma isso muito claramente: “A noção de prova está no cerne da atividade matemática, qualquer que seja o nível (apropriadamente, esta afirmação é válida do jardim de infância à universidade)” (Villani & Torossian, 2018, p. 25).

Os programas e seus comentários atestam a presença desse problema utilizando termos cujo significado necessariamente varia, uma vez que demonstrar não pode ter o mesmo significado no ciclo 2 e no ciclo 4, sem que suas relações sejam claramente elucidadas. Os seguintes extratos atestam isso:

Ciclo 2 (MENESR, 2018, Domínio 4)

“O discurso produzido é argumentado e baseado em observações e pesquisas e não em crenças."

Ciclo 3 (MENESR, 2018, Domínio 3)

“A matemática ajuda a construir nos alunos a ideia de prova e argumentação.”

Ciclo 4 (EDUSCOL, 2016, p. 1-2)

Demonstrar: “utilizar um raciocínio lógico e regras estabelecidas (propriedades, teoremas, fórmulas) para chegar a uma conclusão”;

“Meios matemáticos de acesso à verdade“, mostrando “as diferentes etapas de uma prova pela apresentação, escrita de forma dedutiva, das ligações lógicas que a fundamentam.”

“Defender seus julgamentos com base em resultados estabelecidos e seu domínio da argumentação.”

A leitura do relatório de Cédric Villani e Charles Torossian (2018) encontra as mesmas dificuldades. A seção dedicada à “prova” (ibid., p.25-26) faz apelo a formulações como: “abordagem da justificação argumentada”, “formas de argumento específicas da matemática”, “demonstração” cuja intenção entendemos, mas dificilmente as nuances: como distinguir uma argumentação específica da matemática da demonstração? Seriam essas designações equivalentes, como prova e demonstração, sinônimos de acordo com um dos autores que expressa a posição dos matemáticos[5]? Respostas precisas a estas questões são necessárias para a implementação dos currículos e para a prática diária do ensino de matemática.

O texto dos programas articula um componente educacional e um componente didático, não excludentes de outros aspectos, complementares e fortemente vinculados. No componente educacional, o ensino deve conscientizar os alunos sobre a distinção entre crença e conhecimento, apoiando-se em interações sociais regidas pelos princípios do debate científico. No aspecto didático, trata-se de responder à questão da verdade em matemática, com meios

[5] Cédric Villani, à l’occasion d’un bref échange de courriels à propos du rapport sur l’enseignement des mathématiques (30 mars 2018)

adaptados, desde os primeiros aprendizados. O objetivo no final da escolaridade obrigatória é que os alunos compreendam e pratiquem a demonstração como um tipo específico de prova de matemática. Tal ambição requer esclarecer a relação entre prova e demonstração e especificar quais tipos de prova podem ser praticados por alunos e professores em níveis elementares. O problema tomado na perspectiva do ensino e não apenas da aprendizagem revela uma complexidade que não escapa à instituição:

> Não se trata de demonstrar todos os teoremas ou propriedades que aparecem no programa. Para não se desviar da resolução de problemas os alunos que têm dificuldade em introduzir os códigos de escrita de uma demonstração, é importante promover produções espontâneas, escritas ou orais, resultantes das fases de investigação e experimentação. O trabalho de sala de aula inclui assim "tempos de partilha e argumentação que possibilitam a produção de provas e tempo de formatação (demonstrações escritas)" (EDUSCOL, 2016, p. 3-4).

Na próxima seção, volto ao vocabulário utilizado pelos programas e documentos que os acompanham, à luz do que a pesquisa em didática da matemática pode fornecer. Em seguida, abordarei a relação entre prova, argumentação e conhecimento, introduzindo a noção de "concepção". Por fim, estarei interessado no papel e nas características das situações de validação - no sentido da teoria das situações didáticas - para compreender a complexidade do ensino da prova quando a demonstração não faz parte da prática ordinária da sala de aula. Concluirei com uma abertura sobre a questão da argumentação matemática como precursora da demonstração.

Vocabulário

Raciocínio

A competência "raciocinar", ou seja, o raciocínio, constitui o quadro geral em que a instituição se situa, resolvendo e demonstrando. Por raciocínio, quero dizer "[um] processo mental para fazer inferências. [Lembrando] que uma inferência é uma operação mental pela qual se aceita que uma proposição é verdadeira em virtude de sua conexão com outras proposições" (EDUSCOL, 2016a, p. 1). Utilizei uma definição muito semelhante no início do meu trabalho sobre a aprendizagem da prova, ao designar o raciocínio uma atividade intelectual que consiste em obter novas informações a partir de determinadas informações (Balacheff, 1987b, p. 148). Esta formulação era desajeitada na medida em que o problema que se coloca não é modelar as atividades mentais, mas sim caracterizá-las por suas manifestações tangíveis, a fim de poder criar situações adequadas para provocar sua evolução pelo efeito dos retornos específicos que permitiriam, ou seja, situações didáticas no sentido da teoria das situações didáticas (Brousseau, 1998, p. 104-112), quadro no qual me coloquei explicitamente.

Acho mais relevante adotar a definição dada por Raymond Duval que, por um lado, é congruente com os referenciais teóricos em que me coloco e, por outro lado, não introduz uma contradição com uma problemática psicológica:

> O raciocínio "[é] a organização de proposições direcionada para um enunciado-alvo a fim de modificar o valor epistêmico que esse enunciado-alvo tem em um dado estado de conhecimento ou em um determinado ambiente social, e que, por consequência, modifica seu valor de verdade quando certas condições particulares de organização são satisfeitas". (Duval, 1992, p. 52)

Por valor epistêmico devemos entender "o grau de certeza ou convicção associado a uma proposição" (Duval, 1991, p. 254). O papel desse valor é particularmente perceptível durante as trocas em sala de aula ou durante a resolução colaborativa de problemas. Essa definição torna a análise do raciocínio - tanto para o ensino quanto para a pesquisa - um trabalho sobre o discurso e sobre o texto, cujo caráter contextualizado será levado em conta pelo estado de conhecimento, pelos níveis de linguagem e pelas restrições de situação.

As “"condições particulares de organização" mencionadas por Raymond Duval são uma referência tanto à estrutura lógica quanto ao padrão particular do discurso de prova. Compreender a natureza e o papel deste padrão é um dos principais desafios no ensino de demonstração. Discutirei alguns aspectos disso na seção sobre os tipos de provas.

Explicação

“Explicação“ não é uma palavra-chave saliente nos textos do programa ou em seus comentários. Por outro lado, junto com “argumentação”, é o termo que mais divide dentro da comunidade científica quando se questiona a distinção entre prova que prova e prova que explica, para usar a formulação de Gila Hanna (1990), que desde muito cedo trouxe esse problemática. Os problemas subjacentes são o de compreender a prova e a sua capacidade de responder à questão do porquê uma afirmação ser verdadeira, além da forma correta de discurso que garante essa validade. É, portanto, a questão da ligação entre prova e conhecimento, mais especificamente a questão da ligação entre o cálculo, que reduz a validade ao cumprimento das regras sintáxicas, e o raciocínio, em que uma parte da exigência semântica permanece.

No que se segue, “explicação” é um termo utilizado para designar um “sistema de relações dentro do qual os dados a serem explicados encontram seu lugar” (Duval, 1992, p. 40). Com efeito, “a questão do valor epistêmico resolvido, surge aquela da construção da coerência ou pertencimento da nova produção ao sistema de conhecimento” (Ibid.). A explicação é, portanto, colocar em relação o enunciado produzido a partir da resolução de um problema com os conhecimentos explicitamente disponíveis: há compreensão se há fechamento para essa conexão.

Raymond Duval (1992) afirmou a existência de uma clivagem entre explicação e raciocínio. O primeiro, escreveu ele, “dá uma ou mais razões para tornar-se um dado (um fenômeno, um resultado, um comportamento, ...) compreensível” (ibid. p.40), enquanto para o segundo “o papel das razões apresentadas é bastante diferente: é para ‘comunicar’ as afirmações que devem justificar sua força de argumento” (ibid. p.41).

Explicação, argumentação, prova e demonstração

Ao apoiar a existência de uma clivagem entre explicação e raciocínio, Raymond Duval induz aquela entre explicação e prova que Gila Hanna rejeita: “uma prova realmente se torna legítima e convincente para um matemático apenas quando leva a uma compreensão matemática real” (Hanna, 1995, p. 42).

De minha parte, vinculei fortemente a explicação e a prova em um esforço de esclarecimento e definição (Balacheff, 1987b, p. 148). Minha escolha deu origem a algumas dificuldades tanto com Raymond Duval, por causa dessa mesma ligação, quanto com Gila Hanna, por causa da disjunção que ela afirmava existir entre a prova que prova e a prova que explica. Volto e esclareço essas distinções aqui com o objetivo de reduzir as contradições. Para fazer isso, temos que voltar ao termo “argumentação”.

A argumentação, especifica Raymond Duval (1992, p. 37), é aceita ou rejeitada de acordo com dois critérios: sua relevância (coerência semântica) e sua força (valor epistêmico “positivo“) (ibid., p. 39); isto é, a força de crença que alguém atribui às suas afirmações por boas ou más razões.

A introdução da distinção entre argumentação retórica e argumentação heurística (ibid., p. 51) aproximou esse significado geral da argumentação de um significado congruente com as demandas da atividade matemática. Com efeito, de acordo com esta distinção, a argumentação retórica visa convencer um interlocutor, enquanto a argumentação heurística orienta a resolução do problema favorecendo escolhas estratégicas ou apoiando a suposta validade de um enunciado pelo único recurso àquele a quem o raciocínio o vincula.

Podemos notar que se Raymond Duval forjou a noção de “valor epistêmico” dos enunciados - força da crença em sua validade - de uma argumentação retórica, ele não propõe um termo particular para o valor daqueles da argumentação heurística. Uma proposta recente de Gila Hanna (2017) oferece a possibilidade de preencher essa lacuna ao retomar a distinção introduzida pelos filósofos Frans Delarivière e Bart van Kerkhove (2017) entre o valor epistêmico que implica a existência de um agente e o valor ôntico, independentemente de qualquer agente. Para esses autores, tratava-se de qualificar o caráter intrínseco ou relativo do valor explicativo de uma prova - essa distinção vale também para a argumentação. Segue o que eles escrevem:

> Uma prova matemática pode ser vista como um argumento pelo qual se convence a si mesmo ou aos outros de que algo é verdade, por isso pode parecer difícil ir além da conversa epistêmica sobre uma prova explicativa. Entretanto, embora o conteúdo de qualquer prova em particular seja fruto do trabalho epistêmico de uma pessoa, ela pode ser separada como um objeto independente de uma mente em particular. Outras pessoas podem ler esta prova e serem convencidas por ela. Isto nos leva à pergunta se mostrar por que um teorema é verdadeiro é uma característica da própria prova ou uma característica de atos, textos ou representações comunicativas. (ibid. p.3)

Isto deve ser comparado com o critério de reconhecimento do caráter heurístico ou epistêmico de um argumento "[que] se deve ou à existência de uma organização teórica do campo de conhecimento e representações em que o argumento ocorre, ou a ausência de tal organização teórica" (Duval, 1992, p. 51). "Uma argumentação heurística requer a existência de uma organização teórica do campo do conhecimento e das representações em que se realiza a argumentação" e "que sejamos capazes de compreender ou produzir uma relação de justificação entre proposições que sejam de natureza dedutiva e não apenas de natureza semântica" (Ibid., p. 52). Assim, a distinção entre argumentação retórica e argumentação heurística se reduz à avaliação do valor epistêmico e do valor ôntico dos enunciados. Podemos, então, adiantar que uma argumentação será admissível no sentido da matemática se o valor epistêmico de seus enunciados for condicionado por seu valor ôntico; é este critério que permitirá que seja reconhecido como uma prova em matemática. A estrutura padronizada das demonstrações é um meio técnico de realizar esta avaliação.

A distinção entre argumentação retórica e argumentação heurística e entre valor epistêmico e valor ôntico de uma afirmação torna possível reformular e esclarecer a oposição entre argumentação e demonstração, que às vezes é tão abrupta como aqui:

> O modelo de raciocínio dedutivo de Duval é a derivação formal, enquanto para nós é apenas um modelo para o produto final, não adequado para a abordagem escolar dos teoremas e da prova. (Boero et al., 2010, p. 17)

Essa discussão me permite voltar e esclarecer o diagrama (Figura 1) que propus em 1988, repetido muitas vezes, para o qual há muito subestimei o risco de mal-entendido.

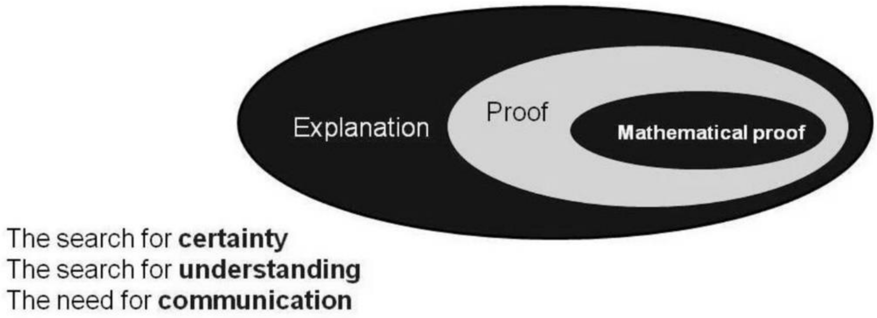


Figura 1

Relação entre explicação, prova e demonstração

Não percebi a importância de voltar a este diagrama ao ler uma primeira versão de uma comunicação que Gila Hanna disponibilizou gratuitamente no Research Gate (Hanna, 2018, f. 3), na qual ela comenta: “Se fosse para assumir a posição de que uma explicação é simplesmente um argumento dedutivo, então todas as provas seriam automaticamente explicações”. Essa observação é legitimamente induzida pela representação proposta, desde que o leitor ignore o texto que a acompanha. Aproveito a versão em inglês deste texto publicado em 2010 abaixo para ficar no contexto de leitura que Gila Hanna foi capaz de fazer:

> Esta estruturação [das relações entre explicação, prova e prova matemática] distinguia entre prova pragmática e prova intelectual, e em ambas identificava categorias relacionadas primeiro com a natureza do saber do aluno e os seus meios de representação disponíveis. A justificativa para esta organização (esboçada [aqui figura 1.]) é o postulado de que o poder explicativo de um texto (ou “discurso” não textual) está diretamente relacionado à qualidade e densidade de suas raízes no aprendiz (ou mesmo conhecimento do matemático). O que é produzido primeiro é uma “explicação“

> da validade de uma declaração da própria perspectiva do sujeito. Este texto pode alcançar o status de prova se receber apoio suficiente de uma comunidade que o aceita e valoriza como tal. Finalmente, pode ser reivindicado como prova matemática se atender aos padrões atuais da prática matemática. Portanto, a pedra angular de uma problemática da prova em matemática (e possivelmente em qualquer campo) é a natureza da relação entre o conhecimento do sujeito e o que está envolvido na “prova”. (Balacheff, 2010, p. 130)

Essas relações entre explicação, prova e demonstração foram esclarecidas a partir da perspectiva do indivíduo empenhado em resolver um problema e validar sua solução. A qualificação de uma explicação como um enunciado não prejulga o valor epistêmico ou ôntico em si de seus enunciados; tal afirmação pode ter o valor ôntico positivo de um teorema em ato (isto é, crença empiricamente baseada em uma invariância observada e objetificada). Permanecendo no quadro de Duval, a passagem da explicação à argumentação é aquela imposta pela necessidade de formular as razões e a sua organização, seja para si ou para outrem. Fazer com que outros aceitem que uma argumentação estabelece a validade de uma solução muda seu status e valor pelo caráter público que adquire. Ela ganha o status de prova. Entre essas provas, algumas têm uma estrutura particular que satisfaz os padrões coletivos, como na matemática os da demonstração.

Tentei desenhar um novo esboço (Figura 2) que pode limitar os mal-entendidos, mas não tenho certeza se um desenho é melhor do que um discurso (longo).

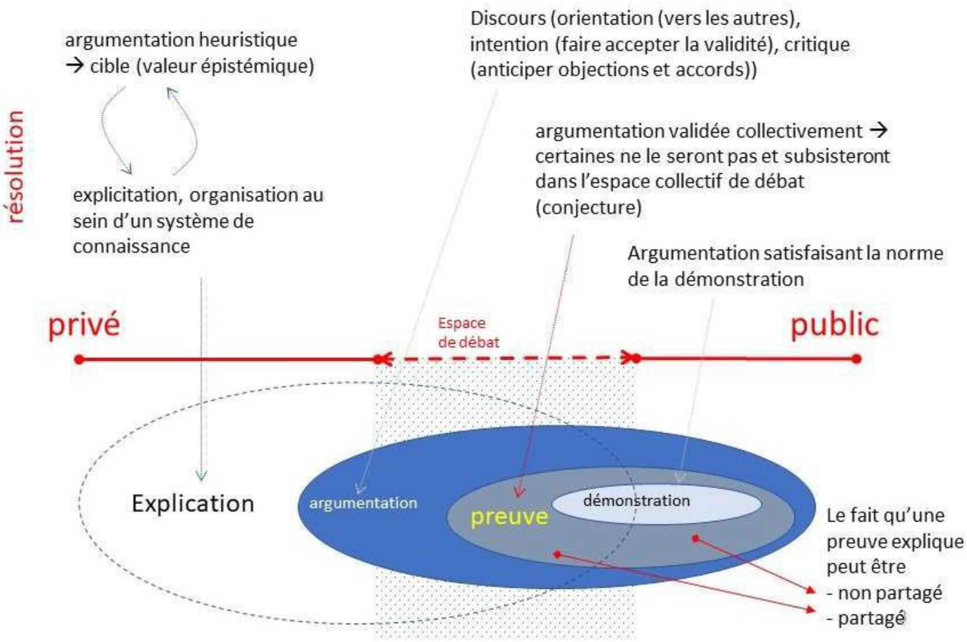


Figura 2[6].

Relação entre explicação, argumentação, prova e demonstração

O ponto importante é o destaque da existência de uma fronteira entre a esfera privada e a pública. Na esfera privada, a explicação trabalha sobre os objetos e suas relações, é a base da construção da argumentação, que será o meio de convencer da validade da solução de um problema, seja este trabalho garantido ou não do valor epistêmico em valor ôntico. Ultrapassar essa fronteira implica a busca de um consenso, ou seja, de um processo social que, por sua natureza, não pode garantir que os protagonistas individualmente reconheçam o caráter explicativo da argumentação - a prova - aceito coletivamente. Essa incerteza é ainda mais forte no caso da demonstração por causa de seu caráter normativo que tem precedência sobre suas propriedades retóricas.

Concepção e argumentação

Ilustração 1 – onde se trata do desafio do uso comum

Durante os primeiros aprendizados de área e perímetro, muitos alunos tendem a considerar essas duas grandezas como "medidas" que representam a superfície ou o tamanho

[6] Esta versão do esquema se beneficia das observações de Marie-Line Gardes, a quem agradeço.

de uma forma plana (Douady & Perrin-Glorian, 1989, p. 387 e 404). A dificuldade em distinguir com precisão perímetro, contorno, área, superfície e a pegada de uma forma plana é observada até o final do ciclo 3 ou mesmo depois.

Esta confusão é favorecida pelo uso comum da linguagem como, por exemplo, o dicionário a explica: o perímetro é "[a] linha que delimita uma superfície plana" e por metonímia é "[o] comprimento desta linha", a área é antes de tudo um "espaço atribuído a uma atividade ou fenômeno em expansão" e tecnicamente "a superfície de uma figura", enquanto a "superfície" é uma "extensão geometricamente mensurável" (CNRTL, s.d.).

Os significados refletidos nesses usos persistem à medida que o aprendizado progride. Optei por entrar neste campo para analisar a gestão das contradições, numa dialética das provas e refutações, por alunos do 5º e 4º (Balacheff, 1988a, p. 281-320). A tarefa escolhida, retirada de Walsch (1983), diz respeito ao caso do retângulo, uma figura familiar para a qual os alunos conhecem as fórmulas de cálculo de medidas de área e perímetro:

Em uma sala de aula, os alunos trabalham sobre área e perímetro de um retângulo. Aqui está o que alguns deles dizem:

> *David*: Dois retângulos que têm o mesmo perímetro têm a mesma área.
> *Suzanne*: Dois retângulos que possuem a mesma área possuem o mesmo perímetro.
> *Guy*: Se aumentarmos o perímetro de um retângulo, sua área também aumenta.
> *Serge*: Se aumentarmos a área de um retângulo, seu perímetro também aumenta.
> *Brigitte*: Todos os retângulos com uma área de 36cm² têm um perímetro não inferior a 24cm.
> *Louise*: Para qualquer retângulo existe outro que tem a mesma área, mas cujo perímetro é maior.

O que você acha do que cada um desses alunos está dizendo: você concorda ou não? Explique por quê.

Os alunos trabalharam em pares com uma restrição escolhida para promover suas interações: papel sulfite à vontade, mas uma única caneta. Não havia limite de tempo, a média era de 45 minutos. O observador não deve intervir até que os alunos concordem com respostas e explicações comuns. Os trechos a seguir ilustram o lugar dos conhecimentos na construção das argumentações construídas pelos alunos em apoio aos seus julgamentos.

Um par, digamos C&P, aceita a afirmação “dois retângulos que têm o mesmo perímetro têm a mesma área” para a qual oferecem a seguinte justificativa:

> Sim, porque eles têm o mesmo perímetro então são isométricos, senão não teriam a mesma área, porque a área é delimitada pelo perímetro, então, como o perímetro é [o] mesmo, a área é a mesma. (Ibid., p.297)

Essa explicação é explicitamente sustentada pelo princípio comum de que, se duas formas são diferentes, o mesmo ocorre com as medidas associadas.

Outro par, digamos A&C, julga positivamente a afirmação “se você aumentar a área de um retângulo, seu perímetro também aumenta”. Mas ele não vê imediatamente como explicar isso: “É bobo porque é óbvio [...] como você pode demonstrar isso?” (Ibid., p.301).

A&C volta a esta questão da prova após considerar a afirmação “todos os retângulos que têm uma área de 36cm² têm um perímetro não inferior a 24cm.” O que os leva a utilizar as fórmulas de cálculo de medidas de área e perímetro. Sem mudar seu julgamento inicial, eles invocam propriedades aritméticas:

> Quando você aumenta o perímetro, os números você aumenta ... aí, os números que se multiplicam ... que se somam [...] bem, sim, porque quando você aumenta o perímetro, o comprimento e a largura aumentam. Então, quando você multiplica os dois, ele também aumenta. (Ibid. p.302)

Essa explicação está associada a uma utilização explícita das fórmulas de medidas de área e perímetro (Figura 3).

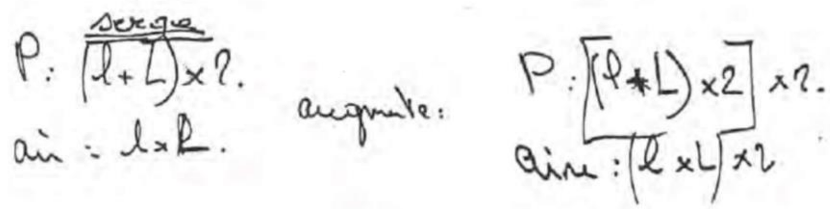


Figure 3. *(ibid. p.303)*

O caso C&P ilustra uma concepção de superfície-contorno que pode ser caracterizada pelo quadro espaço-gráfico em que a atividade se relaciona com o desenho e faz parte de uma “apreensão global por mostrar relações espaciais” (Laborde, 2003, p. 140). Essa atividade está sob o controle do princípio: quanto maiores as formas, maiores as medidas relacionadas.

O caso de A&P ilustra uma concepção de área-perímetro que se desenvolve dentro da estrutura da aritmética simbólica (Balacheff, 2001) em que as fórmulas canônicas fornecem uma representação cuja manipulação e interpretação estão sob o controle de seu referente (ou seja, o que elas modelam). O princípio de uma covariação monotônica crescente de área e perímetro é forte o suficiente para se impor e controlar a manipulação de fórmulas. As trocas, reproduzidas a seguir, entre os dois alunos de outra dupla, C&S, e o texto (Figura 4) que eles produzem, atestam isso:

- - S339 - Lá não seriam mais as mesmas medidas, se aumentarmos o perímetro.
- - S354 - O perímetro a e a área b ... aumentamos o perímetro a, por exemplo +2.
- - C357 - No momento, sua área não está aumentando.
- - S358 - No momento sua área não está aumentando?! [...] Mas se, uh ... se aumentarmos o perímetro, temos que mudar o comprimento e a largura do retângulo ... Não vai funcionar neste caso [...] se você deixar seu a, seu b [...] portanto l A área vai necessariamente mudar... e não sabemos se... aumenta ou se... diminui... mas acho que vai aumentar se somarmos.
- - C368 - Obrigatoriamente? Você já provou isso? Você fez todos os casos ... Tudo, tudo, tudo?
- - S369 - Se adicionarmos é necessariamente ... se adicionarmos não diminuirá.
- - C370 - Ah, sim, porque se você adicionar ao perímetro, você também terá que adicionar à área.
- - S371 - Mas não, se você adicionar ao perímetro, a área não se move.
- - C374 - Você tem que alterar os números
- - S375 / 381 - Vai mudar os números [...] então a área vai mudar.

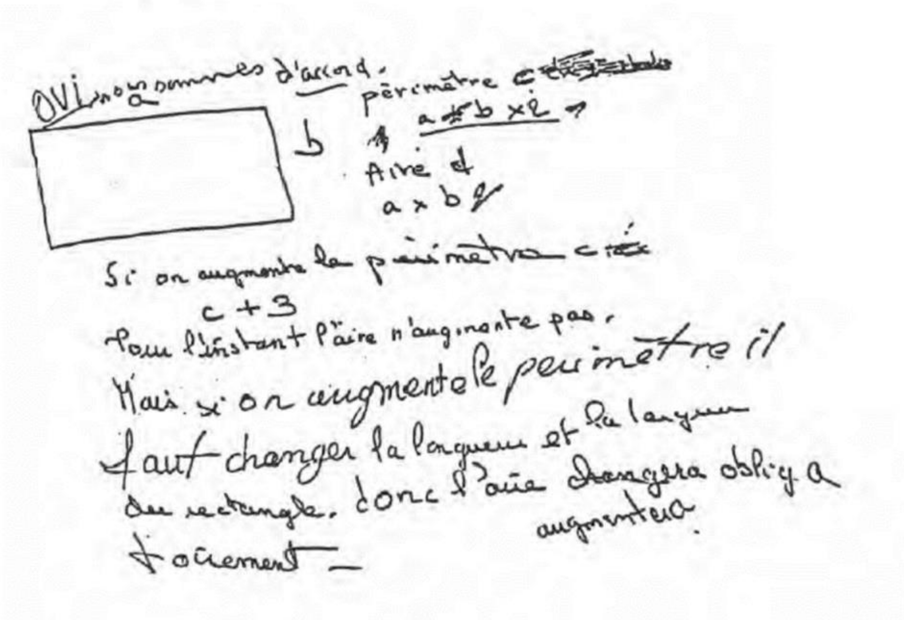


Figure 4 – *(ibid., p.306)*

Os alunos assumem o problema de validação e manifestam sua consciência da lacuna entre o que eles produzem e o padrão de prova desejado na aula de matemática:

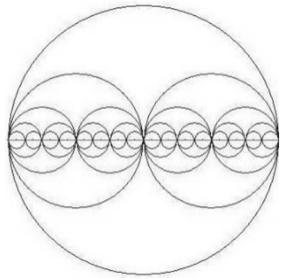
- - L170 - Deve ser demonstrado com letras...
- - O155 / 161 - Teríamos que fazer todas as demonstrações e tudo [...] mesmo assim não dá, não utilizamos os axiomas, tudo isso...
- - L129 - A gente podia fazer enunciados, tudo isso... a gente pode complicar, depende [...] a gente podia colocar frases, talvez fosse melhor,

Esses alunos não conseguem superar as dificuldades que identificam por falta de uma concepção que permita a modelagem algébrica a partir de fórmulas que lhes são familiares.

Ilustração 2 – onde é uma questão de limite

Vincent e Ludovic são dois alunos do ensino médio. Eles não têm dificuldades particulares em matemática. Eles se ofereceram para participar de um experimento organizado por Betina Pedemonte para estudar a unidade cognitiva entre a resolução de problemas e a prova (Pedemonte, 2002, p. 157). O problema era o seguinte:

Seja um segmento AB e C seu ponto médio. Construímos a circunferência com centro C e diâmetro AB. Esta construção se repete com o segmento AC e seu ponto médio, o segmento CB e seu ponto médio. Obtemos duas circunferências com diâmetros AC e CB, respectivamente. Continuamos a dividir os segmentos resultantes em duas metades e construímos nessas partes circunferências com diâmetros esses segmentos. Como o comprimento total dos perímetros muda de uma subdivisão para outra? Como a área total dos círculos muda de uma subdivisão para outra?



Sem hesitar, os dois alunos expressam, utilizando as fórmulas habituais, o perímetro e a área das figuras das primeiras fases de construção. Em seguida, eles conjeturam que o perímetro é constante e que a área decresce para zero. Mas Vincent nota:

41. “A área é sempre dividida por 2... então no limite? O limite é uma linha, o segmento de onde partimos...”,

E ele continua:

42. Vincent: Cai no segmento ... se os círculos são tão pequenos.
43. Ludovic: Hum… mas sempre será 2πr.
44. Vincent: Sim, mas quando a área tende a zero será quase igual...
45. Ludovic: Não, acho que não.
46. Vincent: Se a área tende para zero, também o perímetro tende para... não sei...
47. Ludovic: Terminei a primeira demonstração.

Vincent e Ludovic colaboram ativamente e parecem compartilhar a matemática envolvida nesta situação, porém os controles que implementam são de naturezas diferentes. Ludovic trabalha na estrutura algébrica definida por Régine Douady (1986); a verificação cobre o cumprimento das regras de álgebra elementar. Vincent, por outro lado, trabalha no quadro da aritmética simbólica em que o controle vem de um confronto constante da expressão literal com o que se observa no espaço gráfico da folha. Os dois alunos entenderam o problema da mesma forma, ambos manipulam a representação simbólica, respeitando a sintaxe dos escritos literais, mas os controles que mobilizam são fundamentalmente distintos.

Conhecimento, concepção, argumentação

Temos a experiência pessoal e diária de implementar o mesmo conhecimento, ou melhor, o que reconhecemos como tal, de diferentes formas, dependendo da situação e do contexto. Assim, a representação de um número decimal não é tratada da mesma forma, dependendo se representa um preço a ser pago em dinheiro ou a medida de um comprimento com restrições de precisão. O conceito de “concepção“ é útil para explicar essa diversidade, designando por essa palavra o corpo de um conhecimento em situação. Poderemos, assim, dar conta de um conhecimento descrevendo as concepções que o compõem, cada uma sendo atestada empiricamente pela especificidade de sua conexão com uma situação, um problema ou uma tarefa particular. Essa diversidade é transparente quando dominada, sendo a ativação de uma concepção baseada em critérios de relevância e eficácia em uma dada situação. Por outro lado, é problemática quando a ativação é inadequada e leva a erros ou implementações caras.

Era costume falar de “misconcepção” na década de 1980 para designar essas instâncias “faltosas” de conhecimentos. Esta posição levou a pensar a aprendizagem em termos de correção de erros[7], mais do que em termos de evolução do conhecimento. Essa crítica faz parte dos fundamentos da didática da matemática:

> O erro não é apenas o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso que acreditamos nas teorias empiristas ou behavioristas de aprendizagem, mas o efeito do conhecimento prévio, que teve seu interesse, seus sucessos, mas que, agora, se revela falso, ou simplesmente inadequado. (Brousseau, 1976, p. 171)

Especificado um conjunto de problemas, uma concepção pode ser caracterizada por um sistema de representação, um conjunto de operadores e uma estrutura de controle que permite julgar, escolher e decidir (Balacheff, 2017, 1995; Balacheff & Margolinas, 2005). Se a diferença dos sistemas de representação é um bom indicador das diferentes concepções, sua identidade é insuficiente para aquelas das concepções que poderiam explicar a atividade de dois alunos. Assim, o caso de Vincent e Ludovic (cf. ilustração 2) ilustra como o uso compartilhado da expressão literal de área e perímetro permite a colaboração dos dois alunos - desempenha o papel de um mediador semiótico (Mariotti & Cerulli, 2001) - embora suas

[7] Este significado de misconcepção permanecerá dominante internacionalmente até a década de 1990, ele irá evoluir (Confrey, 1990), mas ainda carrega o peso de sua história hoje.

concepções sejam essencialmente diferentes; esta diferença tem sua origem nas estruturas de controle que determinam seus julgamentos.

As estruturas de controle regulam a atividade de resolução de problemas desde os primeiros momentos até o momento final da decisão de seu bom fim. Assim, a validade de uma solução depende fundamentalmente de concepções. As condições mínimas (Pedemonte, 2005, p. 331) para que a sua validade matemática seja garantida é que existam teoremas correspondentes aos operadores e um quadro - no sentido de Douady - que possam substituir a concepção e fornecer a base teórica, isto é, objetos e um sistema de dedução e princípios aceitos (Mariotti et al., 1997).

As abordagens cognitivas para a aprendizagem de demonstração enfatizaram a dificuldade de dominar a lógica subjacente e tornaram o tempo dessa aprendizagem dependente do tempo que a psicologia do desenvolvimento identificou na evolução do pensamento racional. É assim que os antigos programas prescreviam o ensino da demonstração a partir da quarta série, e que nos países anglo-saxões esse ensino só poderia aparecer mais tarde:

> Crianças ou novatos não pensam inicialmente dedutivamente. “[…]” É apenas muito mais tarde - geralmente no nível universitário - que a prova formal axiomática surge em termos de definições e deduções formais. (Tall et al., 2012, p. 15)

O que as pesquisas recentes nos dizem sobre a atividade matemática dos alunos, e dos matemáticos ao longo da história, nos permite apresentar duas objeções:

- A racionalidade matemática dos alunos é forjada desde o primeiro aprendizado, permitindo-lhes entrar em um problema de validação muito antes de os objetos matemáticos serem formalizados.

- A validação da solução de um enunciado depende dos meios de representação, conexão e processamento dos objetos em jogo, bem como dos meios de controle associados.

Além disso, a resolução e validação não são fases distintas da atividade de resolução de problemas, mas momentos conectados e intrincados que requerem julgamentos, escolhas e decisões que dependem de representações e conexões entre os objetos em jogo. A atividade argumentativa traz elementos cuja transformação e reorganização darão aqueles de uma explicação ou mesmo uma prova. Essas ligações emergem de uma unidade cognitiva de teoremas (Boero, 2017, p. 99) que pode ser rompida, caso as condições mínimas estabelecidas por Bettina Pedemonte não sejam atendidas.

No entanto, os alunos fazem propostas que é necessário compreender e situá-las em relação uns aos outros, quer tenham um significado aceitável para uma avaliação matemática, quer constituam um ponto de partida para suscitar uma evolução das concepções subjacentes.

Tipo de argumentação e de prova

Provas empíricas e intelectuais

A dependência mútua de concepções, sistemas de representação e sistemas de validação torna necessário distinguir diferentes tipos de prova para poder modelar possíveis evoluções e suas condições. Essa necessidade é classicamente afirmada no contexto de um problema cognitivo (Tall, 1998, p. 196). Porém, se o desenvolvimento da criança é um dos determinantes dos níveis de validação - sabemos pela obra de Jean Piaget - eles não são os únicos, longe disso. Devemos ir além das questões cognitivas (Balacheff, 1990), levando em consideração, pelo menos, a economia específica das situações de validação e a natureza das concepções disponíveis.

A tipologia de provas que propus no final dos anos 1980 tem sido frequentemente utilizada para interpretá-la como uma série de "estágios", o que não é. As observações, nas quais se baseou, atestaram que os alunos aceitam uma espécie de prova de acordo com o que suas concepções permitem construir e sua percepção da situação. Essa dependência é particularmente evidente quando se trata de contraexemplos (Balacheff, 1987b, p. 166 e seguintes). Na verdade, muitos tipos de provas podem ser identificados no curso da resolução de um problema ou no curso do debate contraditório. As apostas da interação social ou da situação podem provocar o apagamento da argumentação em favor de um discurso de persuasão.

Na verdade, um tipo de evidência é menos uma informação sobre o aluno do que sobre o aluno em uma situação em um determinado ponto de sua história matemática.

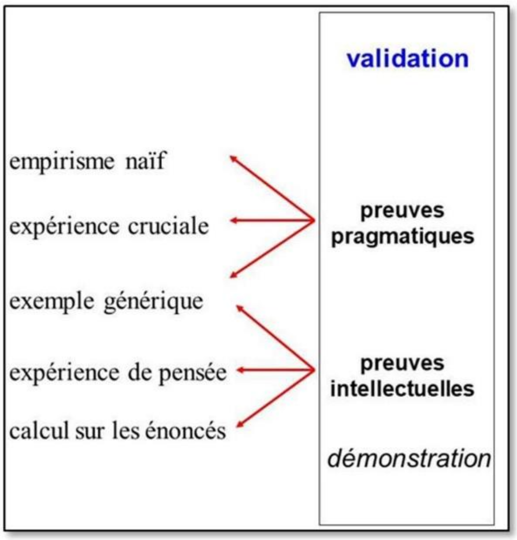


Figure 5.

Tipos de provas e categorias às quais eles podem ser relacionados.

A figura 5 resume os tipos de provas e lembra as duas categorias às quais eles podem ser relacionados.

A mudança do empirismo ingênuo para a demonstração pode, em uma fórmula rápida, descrever o movimento do aprendizado da prova na matemática. Esta passagem das provas pragmáticas às provas intelectuais necessárias para ir em direção à demonstração é também a de uma problemática pragmática a uma problemática teórica e, portanto, de uma evolução da leitura das situações em que a atividade matemática se desenvolve e do estatuto dos conhecimentos mobilizados.

O exemplo genérico

O exemplo genérico consiste em explicar as razões da validade de uma asserção pela realização de operações ou transformações em um objeto presente não por si mesmo, mas como um bom representante de uma classe de objetos que compartilham as mesmas características.

A formulação destaca e vincula as propriedades e estruturas características da classe de objetos, permanecendo ligada ao nome próprio e à exposição de um de seus representantes, sem depender de suas propriedades singulares.

Buscando estabelecer sua conjectura sobre o cálculo do número de diagonais de um polígono (Balacheff, 1988a, p. 124-131), dois alunos (4ème, 1982), em primeiro lugar, expressam sua conjectura utilizando o hexágono que tem em seu projeto valor de exemplo genérico que é reforçado por "ele", depois evoluem para uma formulação que emerge das marcas do particular (Figura 6).

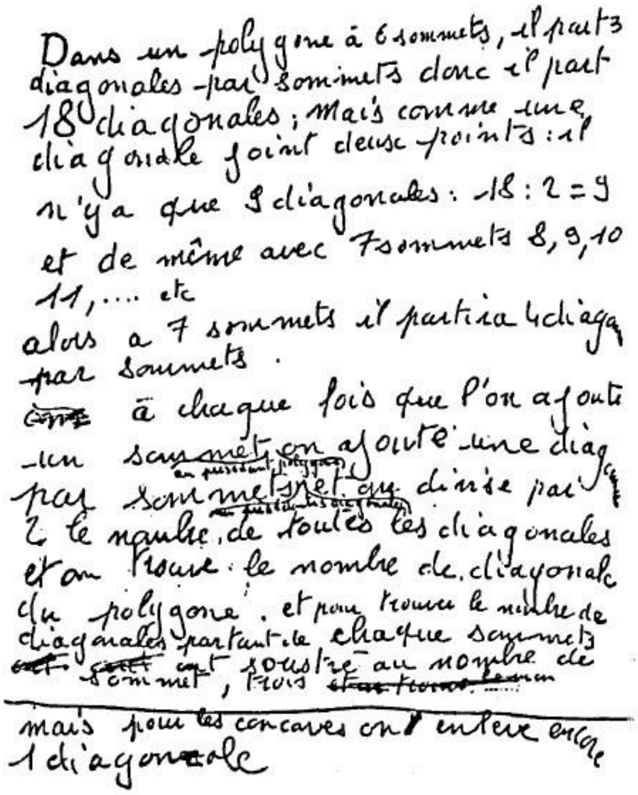

Dans un polygone à 6 sommets, il part 3 diagonales par sommets donc il part 18 diagonales ; mais comme une diagonale joint deux points : il n'y a que 9 diagonales : 18 : 2 = 9
et de même avec 7 sommets 8, 9, 10 11, ... etc
alors a 7 sommets il partira 4 diagonales par sommets.
à chaque fois que l'on ajoute un sommet on ajoute une diag par sommet. on divise par 2 le nombre de toutes les diagonales et on trouve le nombre de diagonale du polygone. et pour trouver le nombre de diagonales partant de chaque sommet on soustrait au nombre de sommet, trois
mais pour les concaves on enlève encore 1 diagonale

Figure 6. *(ibid., p.95)*

O exemplo genérico fica na fronteira entre provas pragmáticas e provas intelectuais. A passagem dessa fronteira é motivada pela tomada de consciência da natureza genérica do caso que sustenta a argumentação. Segue-se uma ilustração (Figura 7)[8] em que se atesta o caráter genérico do exemplo utilizado pelo aluno. A redação proposta por esses alunos completa o

[8] Tiré de (Balacheff, 1978)

movimento em direção a uma representação que leva em conta a generalidade, mas mantendo um controle sobre o curso da escrita que reflete o da construção da solução; assim, podemos entender, portanto, que “a-a = 0”.

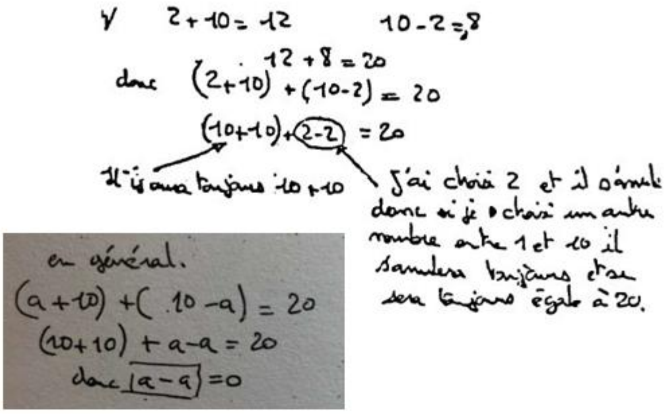


Figura 7.

Ilustração do caráter genérico do exemplo utilizado pelo aluno

A partir do ciclo 3, empenhados na resolução de um problema relacionado com a paridade da soma de dois números cuja paridade é conhecida, os alunos passam de provas empíricas ingênuas para a utilização de um exemplo para expressar a generalidade de sua argumentação. Tomo aqui um exemplo tirado de Teo Kwee Huang & Ng Swee Fong (2017), que ilustra a utilização do exemplo genérico e a possível transição para a experiência mental, à qual retornarei na próxima seção.

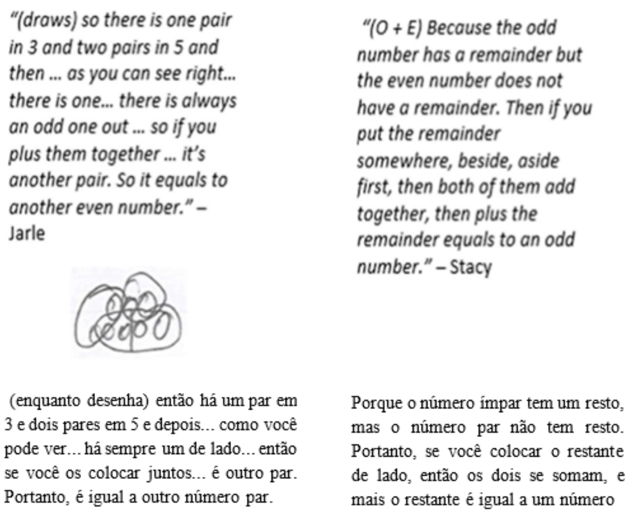


Figure 8

A experiência mental

A experiência mental invoca a ação, separando-a de sua realização em um representante particular (por exemplo, Fig. 9). Vista na perspectiva da evolução da resolução de problemas, faz parte de uma dinâmica de conceituação e modelação. Embora inscritos em um contexto temporal e espacial, indissociáveis da expressão de uma ação, os constituintes fundadores da prova são descontextualizados. A expressão de uma experiência mental enfrenta o desafio da representação dos objetos, de suas propriedades e relações, a da expressão das razões. A generalização está associada a uma representação operatória, ela engaja a evolução de uma argumentação retórica para uma argumentação heurística, que requer aquela do valor epistêmico para o valor ôntico dos enunciados que constituem o discurso.

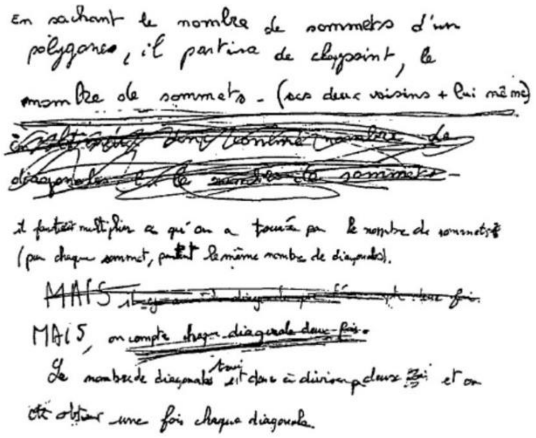


Figure 9

É entre o exemplo genérico e a experiência mental que se dá a passagem das provas pragmáticas às provas intelectuais, o marcador dessa transição é a evolução dos meios de representação e expressão do raciocínio.

O papel da linguagem

A questão da aquisição das representações e formas particulares da linguagem da matemática é de reconhecida importância, mas, na maioria das vezes, sem colocar com precisão e com referência ao conteúdo matemático a questão, técnica, da interação entre o desenvolvimento da linguagem e a conceituação. A matemática não é a única neste ponto, mas tem uma característica que a distingue das disciplinas científicas, devido ao caráter substancialmente abstrato de seus objetos. A história da matemática é pontuada pelas "invenções" de representações cujo caráter instrumental permite a expressão do raciocínio com um rigor que o aproxima do cálculo. A invenção e o desenvolvimento da escrita algébrica são, sem dúvida, o exemplo mais notável.

Para compreender esse papel dos sistemas de representação, linguagem ou não, devemos retornar à história da matemática, situando-nos no contexto técnico e epistemológico dos matemáticos da época. É o que Gilbert Arsac (2013) faz em seu livro sobre o nascimento do conceito de convergência uniforme de uma série de funções de uma variável real. Este trabalho, que não apresentarei aqui[9], mostra o peso da linguagem e a ausência de uma formalização operacional. No início do século XIX, a noção de variável dominava a de função (variável independente versus variável dependente). O raciocínio é orientado por uma concepção cinemática da continuidade e convergência e pelo princípio da continuidade. Falta a notação algébrica do valor absoluto, a continuidade é definida ao longo de um intervalo - não em um ponto - e está intimamente ligada à continuidade do desenho da curva. Além disso, a indisponibilidade de quantificadores torna difícil identificar dependências e a negação dos enunciados que as implicam (por exemplo, descontinuidade como negação de continuidade). A conceituação só poderia avançar com a invenção de uma tecnologia simbólica, utilizando a expressão de Alan Bishop (1988, p. 82 sqq), para, por um lado, apreender e expressar convergências uniformes, como a que conhecemos hoje, e por outro lado, garantir a construção de uma prova que os matemáticos reconhecem como irrefutável ao mesmo tempo que a compreendem. Prova que prova e que explica.

[9] Mais especificamente, tomo a contribuição de Gilbert Arsac sobre a aprendizagem da prova em (Balacheff, 2019) e sobre a ligação entre prova e concepção em (Balacheff, 2017)

Gilbert Arsac mostra que para escapar das reescritas anacrônicas, o conhecimento pode ser caracterizado pela escolha simultânea e vinculada, por um lado, ao problema em jogo, aqui a conservação de uma propriedade durante a passagem ao limite, os sistemas de representação disponíveis, as operações possíveis e meios de validação acessíveis. Assim, diferentes níveis de validação seguem um ao outro desde a argumentação de Cauchy no curso de Análise de 1821 até sua revisão em um relatório pela Academia de Ciências, em 1853. Essa evolução continuou até a formulação contemporânea do critério uniforme de Cauchy, passando da argumentação para demonstração.

Este apelo à história sublinha a relevância da questão colocada pelos professores da equipe académica de Matemática de Bordéus (2003, p. 5): não é preferível deixar o aluno expressar-se na sua própria linguagem? A instituição, conforme indicado no início desta apresentação, certamente dará uma resposta positiva no sentido de "valorizar as produções espontâneas, escritas ou orais, resultantes das fases de pesquisa e experimentação". Talvez seja essa a ideia dos professores autores da questão que desejam utilizar a expressão do aluno para "detectar os elementos positivos de sua fala" (ibid.). Talvez possamos ir mais longe, criando as condições para que a expressão do aluno seja um ponto de partida para o seu desenvolvimento e a compreensão das suas razões.

Controle, prova e validação

O estudo da gênese da prova me levou a perceber que "[...] controles lógicos e semânticos funcionam localmente no curso da elaboração da solução" (Balacheff, 1988a, p. 36). Enfatizar esse caráter local foi uma negligência, enquanto também observei a dependência desses controles das concepções engajadas pelos alunos (ibid., p. 305), seu lugar na escolha de uma estratégia de resolução e seu papel no processo de tomada de decisão final - por exemplo, voltando às definições. Era preciso vincular controle, validação e prova. Claire Margolinas vai nessa direção durante o seu estudo sobre a importância do verdadeiro e do falso na aula de matemática, ao destacar a forte ligação entre controle e validação que a autora expressa na definição que propõe: “nós denominamos de processo de controle o processo de antecipação da validação” (Margolinas, 1993, p. 213).

Claire Margolinas distingue quatro tipos de processo: (1) escolha do método, (2) processo e procedimento de resolução, (3) fim da resolução, (4) interpretação - distinção entre resultado/resposta (ibid., pp. 214-215). Esses processos partem do repertório de meios estratégicos ou táticos, globais ou locais, que permitem julgar, verificar, escolher e validar uma decisão. Todos esses meios, em relação aos sistemas de representação e aos operadores dos quais dependem e dos quais regulam o uso, constituem a “estrutura de controle” que entra na caracterização de uma concepção (Balacheff, 1995, 2017; Balacheff & Margolinas, 2005).

Os processos de controle fornecem o material para a argumentação heurística que toma forma na fase privada da solução de um problema. Nesta fase, a resolução e a validação encontram-se imbricadas sem que seja necessário que o aluno, ou o grupo de alunos, explique de forma sistemática ou precisa os motivos das ações implementadas. No entanto, essa explicitação é necessária para a aprendizagem da prova. O problema do professor é, portanto, criar as condições que exijam essa explicação. Para isso, as principais alavancas são a criação de um desafio não muito tolerante à incerteza, um contexto de interação social (por exemplo, tomada de decisão coletiva) dando origem à formulação de argumentação em um contexto passível de suportar a contradição, e uma transferência da responsabilidade pela prova para os alunos. O conceito de situação de validação (Brousseau, 1998, pp. 109-110) modela as situações que associam essas três alavancas. O trabalho sobre a validação domina o de resolução ao dar um lugar preponderante aos processos de controle. É difícil evitar torná-los explícitos, em particular no final da fase de resolução. Enquanto a solução é assegurada do ponto de vista de quem a produziu, ela deve ser aceita pelos demais, passando da explicação (privada) à argumentação (pública) para que sejam reconhecidas como prova (institucionalizadas). Durante o debate probatório, a solução defendida pode ser modificada ou mesmo rejeitada. Essa rejeição recoloca em jogo a resolução do problema.

A ideia, muitas vezes assumida, de que há por um lado a resolução do problema e por outro lado a prova (ou demonstração) não está em contradição com a observação do entrelaçamento da resolução e da validação. Mas o discurso divisionista da instituição induz à sua separação na prática do ensino enquanto a resolução não perde de vista a validação. O êxito da fase conclusiva depende da possibilidade de construção de um elo operacional em termos de conhecimento ou de estruturação lógica entre resolução e validação (Garuti et al., 1998; Pedemonte, 2005).

Em resumo, os processos de validação - controle, validação, prova - são construídos sob pelo menos três restrições:

- As *concepções* mobilizadas que caracterizam os operadores, representações e controles disponíveis.
- A *linguagem e sua organização no discurso*, que se distinguirá da representação dos objetos e de seu funcionamento técnico na resolução do problema. Esta linguagem descreve as implementações que ela permite comunicar e analisar.
- A *situação* que suscita as questões de validação mais ou menos fortes que regulam os princípios de economia da lógica ligados a qualquer prática. Dentre essas situações, as que incluem um debate sobre a prova envolvem a pessoa sob o risco de se descolocar do projeto de convencer para o de persuadir.
- O *contrato didático* que, para uma dada situação, determina as responsabilidades do ônus da prova.

Da importância da situação

Ilustração 3 – a soma dos ângulos internos de um triângulo

O teorema da invariância da soma dos ângulos de um triângulo é um dos aprendizados fundamentais da geometria no início do ciclo 4. Uma forma frequente de introduzi-lo é propor uma atividade como por exemplo:

(a) Desenhe um triângulo ABC e meça seus três ângulos.

(b) Calcule a soma dessas três medições. O que notamos?

Essa conjectura parece verdadeira para qualquer triângulo? (Barnet, 2016, p. 201)

Tal introdução perde a oportunidade oferecida por um cenário que problematizaria a conjectura antes do teorema. De fato, antes que o teorema seja conhecido, a maioria dos alunos pensa que quanto maior um triângulo, maior a soma de seus ângulos[10]. É possível contar com essa concepção para despertar a consciência do invariante e, melhor ainda, para despertar o interesse para uma prova intelectual porque a evidência empírica seria desqualificada.

O que segue descreve as linhas principais de uma sequência de situações didáticas para passar da conjectura em um sentido forte, ou seja, há boas razões para pensar que o invariante geométrico é verdadeiro, para a busca de uma prova matemática do teorema: “a soma dos ângulos de um triângulo é 180”. As primeiros utilizações dessa sequência datam de meados da década de 1980, no 5º ano, retomarei a descrição da época (Balacheff, 1987a). O princípio é (1) mobilizar a concepção que deve ser desestabilizada e reconsiderada, (2) obter a formulação da conjectura, (3) desqualificar a utilização de medidas como meio de prova pragmática para permitir a exigência legítima de provas intelectuais.

A primeira situação estabelece a estrutura da atividade. Não procura explicar ou discutir o conceito cuja evolução se pretende, nem suscitar conjecturas.

- - o professor pede que cada aluno desenhe um triângulo, que meça os ângulos,

[10] Veja acima o caso da área e perímetro de um retângulo

depois some os resultados obtidos;

- - o professor justifica esta atividade, explicando que se trata de continuar a estudar a utilização do transferidor e a medição dos ângulos;

- - no final desta atividade, o professor enumera e anota no quadro, em forma de histograma, os resultados obtidos. Ele pede um comentário aos alunos.

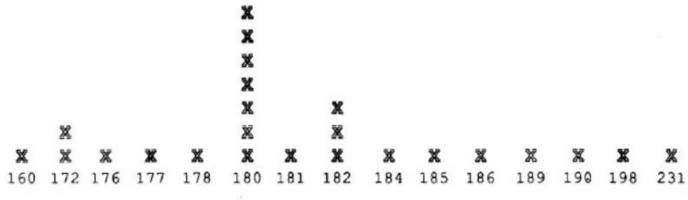


Figure 11.
Exemple d'histogramme à l'issue de lapremière situation

Todos os resultados propostos são aceitos. Com efeito, nesta fase, no sistema de referência dos alunos, a diversidade não tem um significado particular: em seus pontos de vista, o significado reflete a diversidade dos triângulos desenhados. O comentário solicitado existe apenas para "fechar" esta primeira situação, podendo limitar-se a uma observação sobre a dispersão dos valores ou, pelo contrário, sobre a frequência de tal ou tal valor. O professor fica para trás.

Para diferenciar entre o que é devido à incerteza das medições e o que é devido às concepções dos alunos, toda a turma deve ser confrontada com a medição dos ângulos de um mesmo triângulo. Isso é o que a segunda situação consegue:

- o professor dá a cada aluno uma cópia do mesmo triângulo "grande" o suficiente para estimular o engajamento da concepção esperada, de fato, o primeiro triângulo desenhado pelos alunos raramente ocupa mais da metade da página;
- o professor pede a cada aluno que faça uma aposta na soma das medidas dos ângulos deste triângulo e que escreva numa folha que vai recolher;
- o professor pede a cada aluno que meça os ângulos de um determinado triângulo e depois calcule a soma dos números obtidos;

- no final desta atividade, o professor enumera e anota no quadro, em forma de gráfico de barras, os resultados obtidos;
- para cada aluno, os resultados são comparados com as apostas, pede-se um comentário ao aluno;
- o professor pede à turma comentários sobre o histograma.

Para apostar, os alunos recorrem a uma estimativa da medida dos ângulos, que por vezes lhes é exigida para o reconhecimento dos ângulos de 45 ° ou 90 °, e à comparação do triângulo que lhes é proposto com a seu triângulo inicial. É desta última comparação que vêm as apostas em números muito apreciavelmente maiores do que os obtidos na primeira atividade.

Os comentários sobre o histograma devem declarar o requisito de que todos os alunos encontraram a mesma medida para o mesmo triângulo. As diferenças que não deixam de aparecer podem ser explicadas pelas incertezas nas medições; incertezas específicas dos instrumentos ou devido às práticas. O professor a aponta.

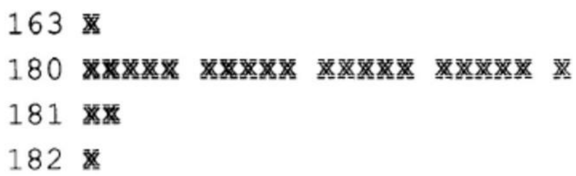
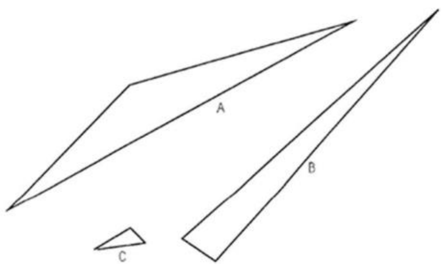


Figure 8.
Exemple d’histogramme à l’issue de ladeuxième situation

Nesta etapa, a conjectura não tem legitimidade, embora alguns (por exemplo, repetidores) possam sugerir isso. Para promover o esclarecimento das concepções e suas discussões, a terceira situação é organizada por meio da constituição de pequenas equipes de acordo com o seguinte esquema:



- o professor distribui uma folha na qual estão desenhados três triângulos;
- pede a cada grupo para formular uma aposta na soma das medidas dos ângulos internos para cada um dos triângulos e depois escrever esta aposta numa folha que será recolhida;
- o professor pede às equipes que meçam

os ângulos de cada triângulo e calculem a soma dos números obtidos;

- no final desta atividade, o professor enumera e anota no quadro, em forma de histograma para cada triângulo, os resultados sugeridos;
- para cada equipe os resultados são comparados com as apostas e um comentário é solicitado pelo professor.

O censo das medidas, com a realização de um histograma para cada um dos triângulos, é a oportunidade para cada um dos grupos comparar as apostas com os resultados das medidas. O comentário solicitado favorece a explicitação de concepções e sublinha a possível contradição entre aposta e medida.

É neste ponto que a conjectura sobre a invariância da soma dos ângulos pode ser formulada como tal e o problema de sua validação ou sua refutação é colocado.

Podemos observar alunos que recusam por muito tempo a conjectura, não podendo imaginar, por exemplo, que um triângulo muito "pontudo" não possa ter uma soma dos ângulos mais em relação à sua forma (o ângulo da ponta é tão pequeno). Para muitos, a busca por provas passa a ser o problema a ser resolvido. O desafio assumido coletivamente é o de construir uma prova que não pode ser empírica porque a utilização do desenho e da medição foi desqualificado.

Em particular, a observação da sequência foi realizada em duas classes, uma sem nenhuma posição particular exibida sobre a questão da prova, a outra que havia sido introduzida em "Regras do debate científico" (Balacheff, 1988b). No primeiro caso, sem sucesso, o trabalho avançou para uma prova intelectual, mas suas características não puderam ser discutidas; à medida que a ação prevalecia, a professora não tinha alavancas para iniciar essa discussão. No segundo caso, os alunos procuram ater-se às regras do debate que alguns instrumentalizam no jogo processual de uma liminar para provar ou refutar; o professor é chamado como árbitro do respeito pelas regras. Em ambos os casos, embora a sequência efetivamente conduza ao problema da prova, o professor é confrontado com o problema da conclusão e da institucionalização, que dificilmente pode se relacionar com outra coisa senão a validade da prova fornecida, enquanto o que é visado é o reconhecimento dos princípios de uma tal prova.

Essa limitação, confirmada pelo trabalho mais recente (por exemplo, Stylianides, 2007), é problema mais importante em que devemos avançar.

Situação de validação no sentido da teoria das situações didáticas

As características da situação em que o aluno se encontra determina especialmente os níveis elementares, se ele assume ou não a responsabilidade pela validade da solução de um problema. Assumir essa responsabilidade, ou seja, não a deixar para o professor ou delegá-la a outro aluno, é o motor da aprendizagem da prova, seu papel, seus métodos e critérios, suas formas. A teoria das situações didáticas modela tais situações para compreendê-las e concebê-las. Não vou apresentar em detalhes o conceito de situação de validação, vou simplesmente relembrar a ideia que Brousseau teve quando a forjou no final dos anos 60 porque dá um direcionamento à reflexão que devemos conduzir hoje para ir ao encontro das ambições dos programas:

> O aluno deve estabelecer a validade de uma afirmação, deve dirigir-se a si mesmo como sujeito a outro sujeito passível de aceitar ou recusar suas afirmações, pedir-lhe que forneça provas do que está apresentando, e fazer outras afirmações contra ele. Essas trocas ajudam a tornar as teorias matemáticas explícitas, mas também a estabelecer a matemática como um meio de testar aquelas que concebemos. Um processo de prova é construído em uma dialética de validação que leva o aluno a utilizar de forma espontânea as figuras de retóricas e depois a abandoná-las. As relações que o aluno deve ser capaz de estabelecer para isso são específicas dessa dialética. (Brousseau, 1998, p. 127)

O modelo de uma situação de validação é um jogo social em que o que está em jogo é a validade de uma afirmação que deve poder ser explicitamente defendida ou rejeitada pelos protagonistas em pé de igualdade quanto à legitimidade de reivindicar a validade ou de refutála. As trocas requerem o compartilhamento de um sistema de representação, linguagem e/ou não linguagem, e uma referência (saberes, meio material, recursos documentais).

Uma *situação de validação* orientada para a aprendizagem explícita da prova deve incluir a necessidade de reconhecer a necessidade de regras, de enunciá-las e de pactuar coletivamente, bem como de um acordo sobre a estrutura do discurso e seus critérios de aceitação. A situação de resolução de problemas sobre a qual a situação de validação é construída deve gerar não apenas o debate da prova, mas também sobre a natureza e a legitimidade dessa prova. Para isso, cada aluno tem como “antagonista”[11] o meio “contra o qual” está resolvendo o problema e os demais alunos, “contra os quais” defende a validade de sua solução ou a legitimidade de sua refutação de uma solução defendida por outro aluno.

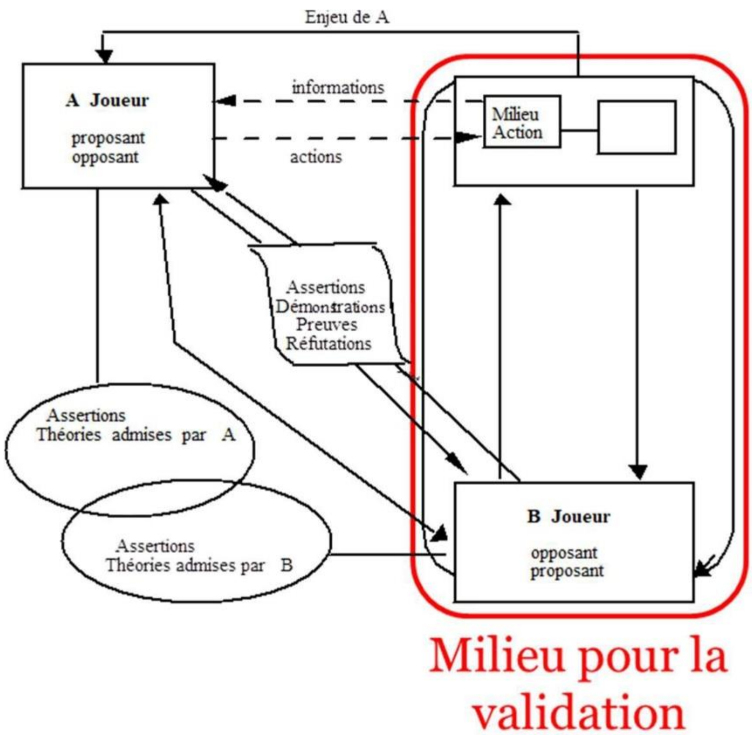


Figura 12.
Esquema inicial das situações de validação

O esquema (Figura. 12) retoma o esquema inicial das situações de validação (ibid., p.110) explicitando, no modelo do jogo com dois jogadores alternadamente proponentes e

[11] Retomo aqui os termos usados por Guy Brousseau (Brousseau, 1998, p. 93) para definir o ambiente no sentido da teoria das situações didáticas.

oponentes, do ponto de vista do “jogador A”, o meio para a validação que inclui o meio para a resolução do problema, e o “jogador B”.

Assim, a interação social é necessária em situações em que o objeto é a aprendizagem explícita da prova, o ambiente material não é suficiente (Margolinas, 1993, p. 84). Neste jogo de validação, a competência linguística é o instrumento da dialética do verdadeiro e do falso, inclui técnicas específicas dos registros semióticos da matemática (por exemplo, escrita algébrica, representação e codificação de objetos geométricos) e figuras retóricas da disciplina. Além da aprendizagem de técnicas, a aprendizagem da prova envolve a aculturação às práticas discursivas.

Da argumentação ferramenta à prova objeto

Durante seu curso intitulado “Racionalidade e demonstração matemática”, ministrado na quinta escola de verão de didática da matemática, Marc Legrand formulou a hipótese segundo a qual “Não é mais razoável esperar ser capaz de introduzir indutiva e naturalmente os alunos ou estudantes na racionalidade matemática, a partir de uma pedagogia centrada nas situações-problema, do que acreditar que eles acabarão ingressando nessa racionalidade graças a uma pedagogia da simples mostração” (Legrand, 1990, p. 386). Essa hipótese é sustentada tanto pela prática docente quanto pela pesquisa experimental, que apresentam muitas dificuldades em localizar o papel do professor e seus meios. As situações de “debate científico” (Legrand et al., 2011) buscam fornecer uma resposta operacional para sair do que parece ser um dilema tanto para o ensino quanto para a instituição. Baseiam-se num forte empenho por parte do professor, que inicia situações tendo uma “consistência epistemológica”, uma “boa adequação com a natureza dos saberes a ensinar [... e ...] ao meio dos conhecimentos efetivamente disponíveis para os alunos/estudantes” (ibid. p. 115), e seu relativo afastamento como árbitro de trocas até o momento de uma institucionalização necessária “para ordenar a desordem que o debate inevitavelmente introduz e para introduzir e explicar o que nenhum debate pode fazer, apresentar e/ou explicar a um custo razoável." (Ibid., p.116).

O que Marc Legrand designa, e no qual insiste, é o conjunto de regras do debate para a aceitação da prova e, correlativamente, da refutação na matemática. Para explicitar essas regras, devemos *passar da argumentação, ferramenta de validação* baseada em regras tácitas, *para o debate sobre a argumentação como objeto, cujas características explícitas condicionam sua admissibilidade como prova*. Em outras palavras, a questão da validade da solução do problema precisamente em jogo deve ser superada para dar lugar ao dos critérios de verdade, que nada mais são do que lançar as bases para a produção do conhecimento matemático.

As dificuldades em ensinar a demonstração muitas vezes levaram a favorecer o ensino das regras de produção da prova e as formas de sua formulação, reduzidas ao aprendizado da lógica. Assim, a aquisição do esquema fundamental do modus ponens ($A, A \rightarrow B \vdash B$) e suas condições de uso parece ser o objetivo principal. Essa prioridade coloca em segundo plano o fato de que a validação de um enunciado não deriva sua legitimidade apenas do estatuto dos enunciados mobilizados pelo problema considerado, mas do conjunto daqueles aos quais estão vinculados dentro de um conjunto estruturado; uma teoria que deve ser reconhecida para tal. Com todos os cuidados que o uso desse vocabulário exige, o que está em pauta é o ingresso dos alunos em uma problemática teórica.

A comparação do ensino na França e em outros países confirma esta observação: a natureza localmente organizada dos conhecimentos envolvidos na produção de uma prova em livros escolares franceses contrasta com a organização quase axiomática no Japão (Miyakawa, 2016, seção 3.3.3), o que não exclui a existência e o uso de um repertório de teoremas que constituem o saber oficial (Knipping, 2003, p. 6/10), mas é outra coisa.

A referência a um referencial teórico explícito como contexto da atividade matemática está presente em uma série de estudos, mas não foi tematizada até a proposta de definir “teorema matemático” como o sistema de relações mútuas entre três componentes: um enunciado, sua prova e a teoria dentro da qual esta prova faz sentido (Mariotti et al., 1997, pp. 182-183).

Além do domínio das competências de raciocínio (lógica), a aprendizagem da prova em matemática envolve a tomada de consciência do que a diferencia da argumentação natural adquirida por meio das interações sociais diárias, e uma ruptura epistemológica para entrar em um problema teórico cuja natureza é essencialmente diferente daquela de conhecimento comum.

Modelar as situações que possibilitem lidar com essa ruptura continua sendo o principal problema que enfrentamos. Tais situações devem atender às condições para que a argumentação, o cerne da resolução de problemas, seja tomada como um objeto para compreender e aprender o que é uma prova em matemática. A aprendizagem ocorrerá em uma dialética da prática e da teoria no sentido da dialética ferramenta-objeto conceituada por Régine Douady em que, deve ser lembrado, o objeto é mais do que a soma de suas características lógicas e discursivas:

> Por objeto, entendemos o objeto cultural tendo seu lugar em um edifício maior que é o saber dos matemáticos, em um determinado momento, socialmente reconhecido. O objeto é definido matematicamente, independentemente de seus usos. O status de objeto permite a capitalização do saber e, portanto, a extensão do corpo de conhecimentos. Também permite o reinvestimento em novos contextos que podem estar muito distantes do contexto original. (Douady, 1992, p. 134)

Conclusão: a argumentação, um precursor problemático

Controle, prova e demonstração são três regimes de validação, cujos respectivos pesos variam ao longo do continuum que vai desde a resolução de um problema até a comunicação de sua solução, de acordo com um padrão decretado pela instituição. Suas interações mútuas e sua dependência das concepções subjacentes, que os tornam possíveis e suscitam sua evolução, constituem um sistema cuja natureza determina a da própria matemática.

Nas últimas décadas, a doutrina institucional tem procurado estabelecer uma relação com a matemática mais próxima das características epistemológicas da disciplina. Assim, a aquisição de saberes é complementada - ou talvez contextualizada - por aquela de "competências" entre as quais os currículos atuais se referem à busca, raciocínio e comunicação. Poderia a definição bastante ampla e não redutível a técnicas dessas habilidades permitir o surgimento de uma atividade que dá profundidade ao discurso matemático e poderia dar vida na sala de aula a uma verdadeira pequena sociedade matemática? Retomando, para formular essa questão, as palavras de Guy Brousseau (1998, p. 111). Claro, não existe uma resposta acabada e rápida. No entanto, os resultados de pesquisas tanto do ponto de vista epistemológico como da engenharia de situações efetivamente praticadas ou concebidas com fins experimentais constituem uma base sólida para a construção de um programa científico que permita dar resposta a elas.

Quando Guy Brousseau utiliza as expressões que tomo emprestado acima, ele está se referindo a "situações de prova". Esta expressão é encontrada apenas três vezes na obra de referência "Théorie des Situations Didactiques" (Brousseau, 1998, p. 43, 111 e 313), em particular na seção dedicada ao esquema de validação explícita (ibid., p.109 sqq). Como sabemos, é o conceito de "situação de validação" que se mantém como um dos conceitos fundadores da teoria. Para as questões que aqui consideramos, parece necessário, mas insuficiente: as situações de prova devem ter as características de situações de validação com a restrição adicional de criar as condições para uma necessidade intrínseca de análise, certificação e institucionalização dos meios da prova no contexto coletivo da sala de aula. Essas condições e os meios de criá-las ainda não foram determinados, em particular porque se sabemos com bastante precisão o que é uma prova em termos do objetivo de aquisição no final do ciclo 4. Por outro lado não há caracterização precisa e compartilhada que pode servir de referência no curso da escolaridade anterior, do 2º ciclo.

Assim, dois temas principais devem estruturar o programa científico por vir: a caracterização da argumentação matemática e as formas de institucionalização das provas antes do momento muito particular da afirmação da demonstração como “meios matemáticos de acesso à verdade” como os comentários colocam.

Uma argumentação matemática deve ser pelo menos potencialmente admissível segundo os padrões da aula de matemática, ou seja, ser aceito como prova pela classe e confirmado pelo professor. Este é apenas um esclarecimento mínimo, levando em consideração a dimensão social. Proponho partir, no que diz respeito ao conteúdo e à forma, da hipótese de Andreas Stylianides (2007, p. 291), em que os termos “prova” e “argumento matemático” parecem sinônimos, o que costuma ser o caso. Na literatura anglo-saxônica:

> Prova é um argumento matemático, uma sequência conectada de afirmações a favor ou contra uma afirmação matemática, com as seguintes características: 1. Ela utiliza afirmações aceitas pela comunidade de sala de aula (conjunto de afirmações aceitas) que são verdadeiras e disponíveis sem justificativa adicional; 2. Emprega formas de raciocínio (modos de argumentação) que são válidas e conhecidas por, ou dentro do alcance conceitual da comunidade de sala de aula; e 3. É comunicado com formas de expressão (modos de representação de argumento) que são apropriadas e conhecidas, ou dentro do alcance conceitual da comunidade de sala de aula.[12]

O interesse desta proposta é destacar três dimensões que correspondam razoavelmente a três problemas que deverão ser resolvidos para que haja uma caracterização operacional. A primeira característica levanta a questão da criação de uma referência, cuja forma deve ser modelada e as condições de criação especificadas; corresponde ao primeiro termo, *teoria*, do trio definidor do teorema matemático no sentido de Alessandra Mariotti. A memória institucional é uma premissa disso, mas não é suficiente na medida em que apareceria apenas

[12] Prova é um argumento matemático, uma sequência conectada de afirmações a favor ou contra uma afirmação matemática, com as seguintes características: 1. Ela usa afirmações aceitas pela comunidade de sala de aula (conjunto de afirmações aceitas) que são verdadeiras e disponíveis sem justificativa adicional; 2. Emprega formas de raciocínio (modos de argumentação) que são válidas e conhecidas por, ou dentro do alcance conceitual da comunidade de sala de aula; e 3. É comunicado por formas de expressão (modos de representação de argumento) que são apropriadas e conhecidas, ou dentro do alcance conceitual da comunidade de sala de aula.

como um repositório de recursos. A segunda e a terceira características distinguem dois aspectos da argumentação, sua natureza (modo de argumentação) e sua expressão (representação argumentativa). Essas duas características estão de fato, como tentei mostrar, emaranhadas no processo de produção da argumentação. Os numerosos problemas que levantam incluem, em particular, o da dependência do raciocínio (modo de raciocínio) em sua expressão, que não pode ser abstraída dos conhecimentos que lhes estão subjacentes - pense, por exemplo, no caso do exemplo genérico e aquele de experiência mental.

Embora as raízes históricas da demonstração lhe deem legitimidade (Arsac, 1987), o conceito de argumentação matemática será um conceito didático e não a transposição de um saber matemático. Não se pode concebê-lo como uma transposição da demonstração, exceto para considerar que a função "social" desta, no seio da comunidade científica, seria constitutiva dela. Este seria um erro epistemológico e teórico: embora o produto da atividade humana esteja sujeito à certificação no final de um processo social, a demonstração independe de uma determinada pessoa ou grupo. A padronização da prova em matemática, além do caráter institucional de seu referencial (a saber matemático), exigiu sua despersonalização, sua descontextualização e sua atemporalidade. No entanto, a argumentação é intrinsecamente relacionada a um agente, individual ou coletivo, e dependente das circunstâncias de sua produção. Trata-se aqui de uma dificuldade evidenciada pelo vigor dos debates sobre a admissibilidade de provas "sem palavras", ou de exemplos genéricos.

As características da argumentação matemática não devem apenas distingui-la de outros tipos de argumentação, mas garantir a possibilidade de transição para a norma da demonstração, mas também ser operacional quando se trata de arbitrar as proposições dos alunos e, possivelmente, institucionalizá-las para organizá-las e capitalizá-las na sala de aula. A argumentação matemática não pode escapar das exigências da institucionalização, e o reconhecimento de seu caráter matemático não pode ser reduzido a um julgamento apenas de sua forma. Como, por exemplo, arbitrar o caso do exemplo genérico que equilibra o geral e o particular, cujo equilíbrio se encontra no final de um debate contraditório em busca de um acordo menos prejudicado por compromissos?

Finalmente, as provas são tanto a base quanto a organizadora dos conhecimentos. No decorrer do aprendizado, elas ajudam a consolidar sua evolução e a equipar sua organização. No ensino, elas legitimam os novos saberes e os constituem como um sistema: saberes e provas relacionados fazem a teoria. A função de institucionalização das situações de prova coloca a validação explícita sob a arbitragem do professor que é, em última instância, o fiador de seu caráter matemático. Essa dimensão social, no sentido de que o funcionamento científico depende de uma organização construída e aceita, está no cerne da dificuldade do ensino da prova em matemática.

Referências

Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration : Essai d'épistémologie didactique. *Recherches endidactique des mathématiques, 8*(3), 48.

Arsac, G. (2013). *Cauchy, Abel, Seidel, Stokes et la convergence uniforme : De la difficulté historiquedu raisonnement sur les limites*. Hermann.

Balacheff, N. (1987a). *Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture* (Nº 39 ; Cahier dedidactique des mathématiques). IREM de Paris VII.

Balacheff, N. (1987b). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies inMathematics, 18*(2), 147-176.

Balacheff, N. (1988a). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* [Doctorat ès-sciences]. Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach of the psychology of mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 2-8.

Balacheff, N. (2001). Symbolic Arithmetic vs Algebra the Core of a Didactical Dilemma. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Éd.), *Perspectives on School Algebra* (p. 249-260). Springer Netherlands.

Balacheff, N. (2010). *Bridging knowing and proving in mathematics An essay from a didactical perspective*. 36.

Balacheff, N. (2017). CK¢, a model to understand learners' understanding – Discussing the case of functions. *El Calculo y Su Ensenanza, IX (Jul-Dic)*, 1-23.

Balacheff, N. (1995). Conception, propriété du système sujet/milieu. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin- Glorian (Éd.), *Actes de la VII° Ecole d'été de didactique des mathématiques* (p. 215-229). IREM de Clermont-Ferrand.

Balacheff, N. (2019). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. In J. Pilet &

C. Vendeira (Éd.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018* (p. 423-456). ARDM et IREM de Paris - Université de Paris Diderot. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02333720

Balacheff, N. (1988b). Le contrat et la coutume, deux registres des interactions didactiques. In C. Laborde (Éd.), *Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques* (p. 15-26). La Pensée Sauvage.

Balacheff, N. (1978). Une utilisation et une étude de la classification proposée par A. W. Bell pour l'étude des preuves formulées par des élèves. *Publications du séminaire de pédagogie des mathématiques.* 1-22.

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). CK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Éd.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 1 – 32).

Barnet, C. (Éd.). (2016). *Maths Cycle 4: Vol. 5°*. Hachette éducation.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.

Boero, P. (2017). Cognitive unity of theorems, theories and related rationalities. *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 99-106. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01873224

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Éd.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for thePsychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 179-209). PME.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherchesen didactique des mathématiques, (1983) 4*(2), 164-198.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990).*

La Pensée Sauvage.

CNRTL. (s. d.). *Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales* [Outils et ressources pour une traitement optimisé de la langue]. Consulté 28 janvier 2020, à l'adresse https://www.cnrtl.fr/definition/

Confrey, J. (1990). A review of the research on students conceptions in mathematics, science, and programming. In: Courtney C. (ed.) *Review of research in education. American Educational Research Association 16*, 3-56.

Delarivière, S., Frans, J., & Van Kerkhove, B. (2017). Mathematical Explanation: A Contextual Approach. *Journal of Indian Council of Philosophical Research*, *34*(2), 309-329.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Douady, R., & Perrin-Glorian, M.-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(4), 387-424.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233-261.

Duval, R. (1992). Argumenter, prouver, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, *31*,37-61.

EDUSCOL. (2016). *Mathématiques—Raisonner*. MENESR-DGESCO; http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf

Équipe académique Mathématiques. (2003). *Initiation au raisonnement*. Académie de Bordeaux. http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/pedaclg/dosped/raisonnement/brochure_init_raison/brochure_intro.htm

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulties of proof. In A. Olivier & K. Newstead (Éd.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, p. 345-352).

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 42-49.

Hanna, G. (2017, septembre 22). Connecting two different views of mathematical explanation. *Enabling Mathematical Cultures*. Enabling Mathematical Cultures, Mathematical Institute, University of Oxford. https://enablingmaths.wordpress.com/abstracts/

Knipping, C. (2003). Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement – analyses comparatives des classes allemandes et françaises en 4èmeIntroduction. *Bulletin de l'APMEP*, 10.

Laborde, C. (2003). Géométrie–période 2000 et après. *Proceedings of the EM–ICMI Symposium Geneva*, 20-22.

Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 365-406.

Legrand, M., Lecorre, T., Leroux, L., & Parreau, A. (2011). *Le principe du « débat scientifique » dans un enseignement*. IREM de Grenoble.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. La Pensée Sauvage.

Mariotti, M. A., Bussi, M. G. B., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen (Éd.), *Proceedings of the 21st PME Conference* (Vol. 1, p. 180-195). University of Helsinki.

Mariotti, M. A., & Cerulli, M. (2001). *Semiotic mediation for algebra teaching and learning. 3*, 8.MENESR. (2018). Cycle 2. *Bulletin officiel de l'éducation nationale, 30 (26-07-2018)*, 30.

Miyakawa, T. (2016). Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: The cases of French and Japanese lower secondary schools. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(2), 37-54.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse du rapport enrte argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(3), 313-347.

Plantin, C. (1990). *Essai sur l'argumentation*. Éditions Kimé. Plantin, C. (1996). *L'Argumentation*. Seuil.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics*, *38*(3), 289-321.

Tall, D. (1998). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some? In

Z. Usiskin (Éd.), *Developments in School Mathematics Education Around the World* (p. 117-136). Reston, Virginia:NCTM. https://pdfs.semanticscholar.org/d850/5fa1c58102b6a8e1ba3618f99cf3824ebe30.pdf

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y.-H. (2012). Cognitive Development of Proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Éd.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 15, p. 13-49). Springer Netherlands.

Teo Kwee Huang, & Ng Swee Fong. (2017). *Relational understanding triumphs over instrumental understanding: The case of Singapore primary four children's understandings of odd and even numbers.* [Poster]. Educational Research Association of Singapore.

Villani, C., & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* (La documentation française, p. 96) [Rapport public]. Ministère de l'éducation nationale. https://www.ladocumentationfrancaise.fr/rapports-publics/184000086/

Walsch, W. (1983). *Mathematische Aufgaben für die Klassen 6 bis 10.* Volk und Wissen VolkseigenerVerlag.