EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p872-950

A devolução de um problema e a construção de uma conjectura, o caso da soma dos ângulos de um triângulo 1

Devolution of a problem and construction of a conjecture, the case of the sum of the angles of a triangle

Devolución de un problema y construcción de una conjetura, el caso de la suma de los ángulos de un triángulo

Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture, le cas de la somme des angles d'un triangle.

Nicolas Balacheff2
Directeur de recherche CNRS émérite : Equipe MeTAH, Modèles et Technologies pour l'Apprentissage Humain Laboratoire d'informatique de Grenoble Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP
https://orcid.org/0000-0001-7084-3482

Tradução

Saddo Ag Almouloud[3]
Universidade Federal da Bahia
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Méricles Thadeu Moretti[4]

Universidade Federal de Santa Catarina
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

Resumo

Este estudo faz parte do projeto de pesquisa que conduzi durante os anos 80 sobre as concepções de prova em matemática de alunos do ensino fundamental antes do ensino de prova matemática [em francês: demonstração]. A primeira parte deste projeto resultou na identificação de diferentes tipos de provas que os alunos podem mobilizar. A segunda parte investigou o princípio de design de situações que poderiam apoiar uma evolução das concepções dos alunos

1 Versão em inglês traduzida, editada e ampliada de Balacheff N. (1987) Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture, le cas de la somme des angles d'un triangle. Cahiers de Didactique des Mathématiques n°37. Paris: IREM - Universidade de Paris VII. In: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01117320/file/2020%20Balacheff%20-%20Translation%20-%20NB1987%20Cahier%20DIDIREM%2039.pdf
2 Nicolas.Balacheff@imag.fr
3 saddoag@gmail.com
4 mthmoretti@gmail.com

de provas susceptíveis de servir como uma base para o ensino de provas matemáticas; este artigo relata dois estudos de caso realizados neste projeto. Ele detalha os princípios de design, a implementação e a análise de uma sequência de situações destinadas a gerar debate sobre provas e refutações. Ele assume o desafio de rejeitar as provas empíricas para abrir o caminho para as provas intelectuais em que o ensino poderia fundamentar a introdução da prova matemática. Esta tradução do relatório inclui comentários, notas (Nota2020) e novas referências para facilitar a leitura e compreensão do leitor contemporâneo.

Palavras-chave: Devolução, Triângulo, Soma dos ângulos de um triângulo, Concepção de prova.

Abstract

This study is part of the research project I conducted during the 80s on junior high school students' conceptions of proof in mathematics before the teaching of mathematical proof [in French: démonstration]. The first part of this project resulted in the identification of different types of proofs students may rely on. The second part investigated the principle of design of situations which could support an evolution of students' conceptions of proofs likely to serve as a basis for teaching mathematical proof; this paper reports on two case studies carried out within this project. It details the principles of design, the implementation, and the analysis of a sequence of situations aimed at generating debate on proofs and refutations. It takes up the challenge of rejecting empirical proofs to open the way to intellectual proofs on which teaching could ground the introduction of mathematical proof. This translation of the report includes comments, notes (Note2020) and new references to facilitate the reading and understanding of the contemporary reader.

Keywords: Devolution, Triangle, Sum of the angles of a triangle, Conception of proof.

Resumen

Este estudio forma parte del proyecto de investigación que llevé a cabo durante los años 80 sobre las concepciones de los estudiantes de secundaria sobre la demostración en matemáticas antes de la enseñanza de la demostración matemática [en francés: démonstration]. La primera parte de este proyecto dio como resultado la identificación de los diferentes tipos de pruebas en las que pueden basarse los estudiantes. En la segunda parte se investigó el principio de diseño de situaciones que pudieran apoyar una evolución de las concepciones de los estudiantes sobre las pruebas que pudieran servir de base para la enseñanza de la prueba matemática; este artículo informa sobre dos estudios de casos realizados dentro de este proyecto. Detalla los principios de diseño, la puesta en práctica y el análisis de una secuencia de situaciones destinadas a generar un debate sobre las pruebas y las refutaciones. Se asume el reto de rechazar las pruebas empíricas para abrir el camino a las pruebas intelectuales en las que la enseñanza podría fundamentar la introducción de la prueba matemática. Esta traducción del informe incluye comentarios, notas (Nota2020) y nuevas referencias para facilitar la lectura y la comprensión del lector contemporáneo.

Palabras clave: Devolución, Triángulo, Suma de los ángulos de un triángulo, Concepción de la prueba.

Résumé

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche que j'ai mené dans les années 80 sur les conceptions de la preuve en mathématiques des élèves du collège avant l'enseignement de la preuve mathématique [en français : démonstration]. La première partie de ce projet a permis d'identifier les différents types de preuves sur lesquels les élèves peuvent s'appuyer. La seconde partie a permis d'étudier le principe de conception de situations pouvant favoriser une évolution des conceptions de la preuve chez les élèves, susceptibles de servir de base à l'enseignement de la preuve mathématique ; cet article rend compte de deux études de cas réalisées dans le cadre de ce projet. Il détaille les principes de conception, la mise en œuvre et l'analyse d'une séquence de situations visant à générer un débat sur les preuves et les réfutations. Il relève le défi de rejeter les preuves empiriques pour ouvrir la voie aux preuves intellectuelles sur lesquelles l'enseignement pourrait fonder l'introduction de la preuve mathématique. Cette traduction du rapport comprend des commentaires, des notes (Note2020) et de nouvelles références afin de faciliter la lecture et la compréhension du lecteur contemporain.

Mots clés : Dévolution, Triangle, Somme des angles d'un triangle, Conception de la preuve.

Uma Situação de validação é um dos conceitos estruturantes da Teoria das Situações Didáticas. Aqui estão suas características principais: "O esquema didático de validação motiva os alunos a discutir uma situação e favorece a formulação de suas validações implícitas, mas seus raciocínios são muitas vezes insuficientes, incorretos, desajeitados. Eles adotam falsas teorias, aceitam provas insuficientes ou falsas. A situação didática deve levá-los a evoluir, a revisar suas opiniões, a substituir sua falsa teoria por uma verdadeira. Essa evolução também tem um caráter dialético; uma hipótese deve ser suficientemente aceita - pelo menos provisoriamente - até mesmo para mostrar que é falsa". (Brousseau, 1997, p.17)

Projetando uma situação de validação no sétimo grau

A pesquisa aqui apresentada visa analisar as restrições que pesam sobre o design e a implementação de uma situação em que os alunos, que ainda não aprenderam o conceito de prova matemática[5], têm que fazer uma conjectura e lidar com o problema de prová-la ou refutá-la. O quadro geral é fornecido (1) pela teoria das situações didáticas (Brousseau, 1986)[6], cuja relevância para a pesquisa sobre a aprendizagem da prova matemática nessas séries escolares mostrei em outro lugar (Balacheff, 1987)[7], e (2) as teses epistemológicas de Imre Lakatos (1976) sobre a dialética das provas e refutações.

"O contrato didático é a regra do jogo e a estratégia da situação didática. É a justificativa que o professor tem para apresentar a situação. Mas a evolução

Quanto às outras noções matemáticas, o aprendizado da prova matemática pode ser abordado com uma perspectiva construtivista, mas requer não perder de vista a dimensão social que

5 Nota2020: esta expressão é adotada como uma tradução da "demonstração" em francês que denota em um nível elementar uma prova.
em conformidade com o esquema euclidiano de prova.

6 Nota2020: a *Teoria da situação didática* está agora disponível para o leitor inglês em um livro publicado por Kluwer/Springer (Brousseau, 1997).

7 Nota2020: não há tradução adequada para o inglês deste artigo, o leitor anglófono pode consultar (Balacheff, 1988).

da situação modifica o contrato, o que permite que novas situações ocorram. Da mesma forma, o conhecimento é o que se expressa pelas regras da situação didática e pelas estratégias. A evolução dessas estratégias requer produções de conhecimentos que, por sua vez, permitem o desenho de novas situações adidáticas. O contrato didático não é um contrato pedagógico geral. Depende muito do conhecimento específico em jogo.” (Brousseau, 1997, p.31)

desempenha um papel importante nas provas matemáticas; especialmente no que diz respeito às consequências do contrato didático. Especificamente, é neste ponto que se centra este relatório sobre a concepção e a observação de uma determinada sequência didática no sétimo ano (alunos de 12-13 anos).

Um requisito fundamental da situação de validação que queremos projetar é que os alunos sejam responsáveis pela formulação da conjectura. Na verdade, se o professor a afirmasse, esta formulação perderia imediatamente seu verdadeiro caráter de conjectura para os alunos.

Eles só seriam capazes de considerá-la uma afirmação verdadeira e não somente altamente plausível. Além disso, o problema pode ser encontrar uma prova consensual e não estabelecer a veracidade de uma afirmação. Vamos lembrar que o status de conjectura para uma afirmação matemática é muito forte. Não é mera especulação, mas uma declaração sobre a verdade da qual uma comunidade se compromete. Portanto, deve ter sido formulada por ela e um consenso deve ser formado sobre essa formulação. Isso não significa, entretanto, que a classe como um todo deva ter uma posição única sobre sua validade; a pesquisa pode se concentrar tanto em provas quanto em contraexemplos. A complexidade de se conseguir tal situação reside no que se espera da socialização: não se trata apenas de os alunos se apropriarem do problema individualmente, mas também de garantir o compartilhamento de seu significado.

A posição clássica nos anos 80 era considerar os erros como indicadores de equívocos. Este termo costumava vir com expressões como "teoria ingênua", "conceitos privados", "crenças" ou "matemática da criança". Essas visões minimizaram os alunos como conhecedores racionais e impediram o reconhecimento de que sua maneira de saber esteja situada com limites que os erros evidenciam, mas com o conhecimento verdadeiro de qualquer maneira (Confrey, 1990). Daí a escolha de utilizar o termo concepção para denotar todas as formas possíveis de conhecer e compreender um conceito matemático, seja ele certo ou errado, elementar ou avançado. Em meados da década de 90, projetei o modelo cK¢ como uma proposição para caracterizar concepções matemáticas (Balacheff, 1995, 2013)

O conceito de teorema em ato designa as propriedades das relações apreendidas e utilizadas pelo sujeito em uma situação de resolução de problemas, entendendo-se que isso não significa que ele seja capaz de

O problema, se não pode ser formulado pelo professor, pode advir do confronto dos alunos com uma situação específica que tem um potencial no que diz respeito à conjectura visada. Consideramos com Ernst Mach (1908) que a fonte de um problema é "a discordância entre pensamentos e fatos, ou a discordância de pensamentos entre si" (ibid., p. 254). Então, o desafio é garantir que tal discordância seja percebida pelos alunos e claramente reconhecida para que o problema possa ser formulado. Uma situação favorável para isso é aquela em que os alunos têm concepções errôneas ou incompletas, mas estáveis, apoiadas em teoremas em ação (Vergnaud, 1981, 1990)[8], cujos confrontos com fatos ou outras concepções conduzem efetivamente a questionamentos. Essas concepções devem permitir expectativas explícitas que possam ser discutidas para serem confirmadas ou refutadas.

A formulação de uma conjectura pode ser muito complexa devido às construções conceituais, ao reconhecimento dos objetos de conhecimento e às relações que requer. No nível que nos interessa, a sétima série, desejamos minimizar o impacto desses problemas

8 Nota2020: ver (Vergnaud, 2009) em inglês.

explicá-las ou justificá-las (Vergnaud, 1981, p. 220)	de formulação, a partir do uso da linguagem natural ou de representações simbólicas.

Em linha com essas reflexões, selecionou-se o teorema da invariância da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Por um lado, a ideia da possibilidade de tal invariante não deve deixar de desafiar a concepção difundida neste nível escolar de que o valor desta soma deve depender do "tamanho" do triângulo; o desenho da situação deve permitir esse confronto. Por outro lado, formular a afirmação: "a soma (das medidas) dos ângulos de um triângulo é 180°", é de baixa complexidade linguística; deve estar ao alcance dos alunos da sétima série.

Por fim, essa propriedade está sujeita a vários tipos de provas em termos de conteúdo e níveis, dos quais uma amostra é evocada a seguir. Essa riqueza permitiu considerar todo o processo, desde a construção da conjectura até o seu estabelecimento como um teorema, plausível em quaisquer classes.

Comentários preliminares sobre uma abordagem clássica

Outra origem da escolha do caso da soma dos ângulos de um triângulo é uma observação de seu ensino relatada por dois alunos de mestrado[9] em minhas aulas de didática de matemática em 1983. Eles observaram uma aula da sétima série sobre este teorema seguindo um esquema clássico, que consiste em apoiar a afirmação da conjectura com base em uma abordagem puramente prática, em seguida, pedir aos alunos que admitam a veracidade dela porque não podem estabelecer a prova. Aqui está o que relataram esses alunos de mestrado:

> *"O professor faz com que cada aluno desenhe um triângulo e meça os ângulos com um transferidor. Aparecem várias dificuldades diferentes:*
> *- as crianças não sabem colocar o zero de seus transferidores;*
> *- eles não entendem porque o transferidor deve ser alinhado em um lado do triângulo;*

9 F. Barrachin e P. Bouchet.

- se o triângulo é menor que o transferidor, eles não entendem porque os lados do triângulo devem ser estendidos para ler o ângulo.
[...] o professor soma os ângulos e todos escrevem o resultado no quadro. Os próprios alunos percebem que os resultados costumam ficar em torno de 179 °, 180 °, 181 °, 182 °, com predominância de 182 °. O professor pede que aqueles que encontraram uma soma mais distante do que 180 ° (165 °, 228 °, ...) repitam as medições.
A próxima lição começa com uma repetição da lição anterior: os alunos começam o mesmo trabalho novamente. Desta vez, todos eles encontram uma soma dos ângulos entre 178 ° e 184 °, e o resultado médio é 182 ° [...] (ouvimos vários alunos dizerem a seus vizinhos enquanto eles mediam os ângulos, que eles tinham que encontrar 182 °).
[...] Em seguida, o professor avisa que a soma dos ângulos de um triângulo é de 180 °, daí a forte reação dos alunos. São céticos e invocam os seguintes argumentos: "não encontramos 180 ° medindo", "se o triângulo é grande, deve ser mais", "ano que vem saberemos que é 183°". O primeiro argumento é o que apareceu com mais frequência."

Tal abordagem de ensino é bastante comum: após algumas medições, revela-se o fato de que o resultado deveria ser 180°, com ou sem a apresentação de uma prova. A base dessa abordagem é uma compreensão simplista da relação entre ação e pensamento que espera o surgimento natural da conjectura a partir da observação de algumas medições. Mas, como mostra a sequência de ensino relatada acima, as coisas não são tão simples. As concepções dos alunos, que não são suficientemente consideradas aqui, resistem fortemente à sua transformação. A ideia de que qualquer "quantidade" associada a um triângulo é uma função crescente do seu "tamanho", como é comumente observado para a área e o perímetro, constitui um verdadeiro conhecimento que aqui se coloca como um obstáculo. Além disso, o contrato didático, e com ele a ideia dos alunos da existência de respostas convencionais ou ad hoc, cria um obstáculo de outro tipo, levando-os a regular sua conduta com base em pistas que não são intrínsecas ao conhecimento em jogo. Depois, surge o problema do significado do teorema para os alunos quando ele é afirmado como tal, em particular, a questão de como ele ocupará seu lugar entre seus conhecimentos anteriores e, em última análise, a questão do status da prova que pode ser fornecida pelo professor.

Um objetivo do projeto de pesquisa aqui apresentado é mostrar como uma análise didática lança luz sobre essa complexidade e traz elementos de resposta quanto às condições de construção de uma conjectura em sala de aula e seu estabelecimento como teorema.

Concepções de ângulo e provas do teorema

Definições matemáticas e concepções de ângulo

As principais definições

Um estudo histórico do conceito de ângulo estaria além do escopo deste projeto de pesquisa. Considerando o nível de escolaridade visado, o objetivo se limita a identificar as principais características desse conceito, apontando alguns marcos históricos.

Deixo deliberadamente de lado as definições e considerações algébricas das medições dos ângulos, bem como os conceitos de ângulo orientado ou ângulo vetorial; o levantamento é limitado à geometria plana elementar. Da mesma forma, deixei de lado a discussão da confusão às vezes percebida entre as noções de ângulo e medição de ângulo.

Em seguida, quatro tipos principais de definições podem ser distinguidos: ângulo como a inclinação de duas linhas entre si, ângulo como uma figura formada por duas semirretas, ângulo como uma região do plano e ângulo assimilado à rotação.

- **O ângulo, inclinação entre si de duas retas**

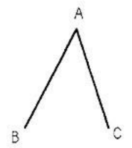
Esta é a definição clássica dos elementos de Euclides. Várias formulações diferentes podem ser encontradas nas muitas traduções de *Os Elementos*, citamos aqui uma clássica:

> o ângulo plano é a inclinação mútua de duas linhas coplanares que se encontram sem serem colineares (Heath, 1956, p. 153)

Esta definição exclui ângulos planos e incentiva a considerar apenas ângulos menores que 180º. A definição dos elementos foi submetida a críticas e passou por várias reformulações (por exemplo, Heath, 1956, p. 176 sqq).

-O ângulo, figura formada por duas semirretas

Essa definição remonta a Aristóteles (Smith, 1925, p. 277). Aqui está, por exemplo, uma formulação de uma edição francesa tardia dos elementos de Legendre:



> A figura formada por duas linhas retas que se cruzam AB e AC é denominada ângulo. O ponto A é o vértice do ângulo; as linhas AB e AC são os lados do ângulo. (Legendre, 1875, p.2*)*

Hilbert propôs uma formulação mais precisa:

> Seja α qualquer plano arbitrário e h, k quaisquer dois meios-raios distintos situados em α e emanando do ponto O de modo a formar uma parte de duas linhas retas diferentes. Denominamos o sistema formado por esses dois meios-raios h, k ângulo e o representamos pelo símbolo ∠ (h, k) ou ∠ (k, h). (Hilbert, 1899, p. 9)

Hilbert observa que "esta definição exclui ângulos planos e côncavos" (ibid.), Então ele introduz as noções de dentro e fora de um ângulo.

Essa definição dominou a educação matemática na França antes da Primeira Guerra Mundial (Berdonneau, 1981, p. 215 sqq). Ela reapareceu sob a definição do ângulo adotada pela reforma do currículo francês de 1970 para as classes da nona série, o ângulo geométrico - em oposição ao ângulo do senso comum - sendo definido como uma classe de pares isométricos de linhas semirretas de mesma origem (Berdonneau, op. cit.).

- O ângulo, região do plano

Dois tipos diferentes de definição relacionados à concepção do ângulo como uma região do plano podem ser distinguidos. Um tipo que qualificamos de dinâmico, como a definição de Henrici:

> A parte de um lápis de meio-raios, descrita por um meio-raio girando em torno de seu ponto final C de uma posição a para outra b, é denominado ângulo. O centro C do lápis é denominado VÉRTICE, e o primeiro e as últimas posições a e b do raio descritivo são os LIMITES do ângulo. (Henrici, 1879, p. 47)

e um tipo estático como a definição de Louis Bertrand[10]:

> Duas linhas AB, CD que se cruzam em um plano, formam quatro partes ASD, DSB, BSC, CSA, que são ângulos: um ângulo é, portanto, uma parte do plano que tem como limite duas linhas que se encontram e terminam em seu ponto de encontro. As linhas retas AS, SD que limitam um ângulo ASD são suas pernas; seu vértice S, é seu ponto de intersecção; seu tamanho é o próprio tamanho da porção do plano que é limitada por suas pernas. (Bertrand, 1812, pp. 4-5)[11]

Esta concepção do ângulo atingiu o seu auge com a introdução da noção de setor angular no ensino da "Matemática Moderna"; o ângulo foi então definido como uma classe de setores sobreponíveis.

- ângulo, rotação

Embora Sir Thomas Heath (1956, p. 177) sugira Carpo de Antioquia como um de seus precursores, essa definição não vingou realmente no ensino. Na época do debate modernista sobre a renovação do ensino da matemática, ela foi defendida por alguns matemáticos. Notavelmente, Gustave Choquet, após considerar as diferentes concepções do ângulo, propôs

> identificar ângulos por rotações em torno de um ponto O; depois, mostrar que a escolha de O não importa. (Choquet, 1964, p. 97)

Na verdade, a partir do início do século XX, podia-se notar "que quase todos os livros-texto que dão definições diferentes das do grupo 2 [ângulo como rotação] acrescentam algo que aponta para uma ligação entre um ângulo e a rotação: uma indicação marcante de que a natureza essencial de um ângulo está intimamente ligada à rotação" (Heath, 1956, p. 179).

O que Georges Papy (1967, p. 289) expressou em um atalho impressionante por:

"ANGULO = ROTAÇÃO que perdeu seu CENTRO!"

10 Nota2020: Bertrand de Genève, quoted by (Fourrey, 1938, p. 44).
11 Nota2020: Minha tradução livre do francês.

Uma noção difícil[12]

"A noção de ângulo é sem dúvida a que levanta mais discussões e dificuldades no ensino da geometria", escreveu Gustave Choquet (1964, p. 96). Embora haja um reconhecimento unânime dessas dificuldades, não há consenso sobre as soluções que podem ser trazidas para superá-las, particularmente no que diz respeito à definição. Isto é evidenciado, por exemplo, pela abundância de formulações que podem ser encontradas nos manuais escolares em uso ao longo do século XX, que são todas tentativas de resolver este difícil problema de ensino (c.f. esp Berdonneau, 1981, pp. 215-224)[13].

A principal dificuldade deve-se ao desenvolvimento pelo aluno de uma concepção de ângulo que consiste na sua identificação com o desenho que o representa no papel ou no quadro. O ângulo é então concebido como dois segmentos com um vértice comum e apoios distintos. Com tal concepção, dois desenhos que diferem apenas no comprimento dos segmentos que os compõem aparecem como representando dois objetos diferentes. Essa concepção é muito difundida e resistente. Pode-se pensar que deriva das próprias definições utilizadas, como a definição de Legendre citada acima. Por esse motivo, alguns livros tentam prevenir o possível erro afirmando que:

> o tamanho de um ângulo depende apenas de sua abertura e não do comprimento de seus lados, que, teoricamente, deveriam ser considerados ilimitados. (in Précis de géométrie - Thuret, 1934)

12 Nota2020: Compreender a dificuldade de aprendizagem do ângulo tem uma longa história, ainda é um desafio para a pesquisa em educação matemática (por exemplo, Devichi & Munier, 2013; Tanguay & Venant, 2016).

13 [9] Nota2020: vale a pena notar o comentário de Gustave Choquet: "[...] note que fomos capazes de construir convenientemente grande parte da geometria sem nunca falar em ângulos .... O abuso de ângulos em nosso ensino é devido a razões históricas: por um lado, os ângulos estão entre os termos primitivos da axiomática de Euclides, e por muito tempo o postulado dos paralelos foi afirmado na forma angular; por outro lado, os continuadores de Euclides acreditavam ser necessário, uma vez que eles tivessem entendido bem as noções de ângulo orientado e ângulo de retas, fazer um uso universal injustificado delas". (ibid., p.97 - tradução livre DeepL).

Esse tipo de observação praticamente desapareceu dos livros didáticos recentes[14], nos quais o ângulo é definido como uma classe de equivalência de setores angulares ou pares de semirretas de extremidades comuns.

Mas, essa concepção permanece presente no final do ensino fundamental e no início do ensino médio, fato bem conhecido dos professores. No entanto, parece ser pouco estudado.

Geoff Giles (1981, p. 11) atesta a presença dessa concepção em metade dos 4.881 sujeitos examinados na tarefa de classificar um conjunto de ângulos de acordo com seu tamanho. Para sua própria pesquisa, Gillian Susan Close (1982, pp. 120, 122) propôs um questionário sobre ângulos para 87 estudantes ingleses de 11 a 12 anos, na educação regular, incluindo os itens abaixo. Ela obteve 53 respostas falsas para o item 1 e 49 respostas falsas para o item 2.

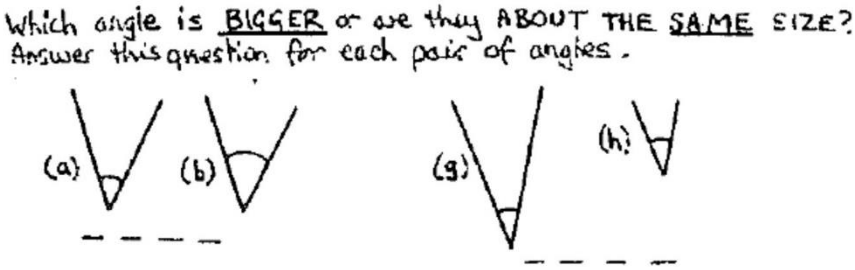


Figura 1

Na língua francesa comum, a palavra "*angle*" (ângulo) é sinônimo de moeda (canto), que se refere a uma região relativamente bem definida; pode-se, sem muita ambiguidade, fixar um encontro "*au coin de la rue*" (trad. na esquina), então não virá à mente colocar-se em outro lugar que não seja nas proximidades do cruzamento correspondente. Da mesma forma, em matemática, trabalhando com formas, se um aluno for solicitado a mostrar um ângulo de um polígono, ele ou ela deverá apontar para uma região bastante precisa; a prática habitual levará à suposição de que o ponto A da figura abaixo está num ângulo do polígono mostrado, mas não o ponto B.

14 Nota2020: o leitor não deve esquecer que essas palavras foram escritas no início dos anos 80.

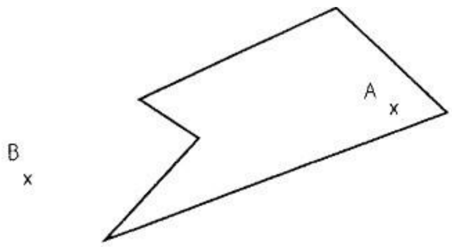


Figura 2.

O uso diário e o significado matemático de “ângulo” estão um pouco em contradição. Na ausência de um estudo semelhante ao de Gillian Susan Close, esta observação leva-nos a supor que, tal como os jovens estudantes ingleses, os estudantes franceses da sétima classe terão uma concepção que favorece a identificação do ângulo à sua representação gráfica.

Comprovações do teorema sobre a soma dos ângulos de um triângulo

Este projeto é parte do meu estudo de provas que os alunos podem propor antes que a prova matemática lhes seja ensinada. Eu distingui duas categorias principais: prova pragmática versus prova intelectual. As provas pragmáticas utilizam ações eficientes baseadas na manipulação de objetos concretos, enquanto as provas intelectuais baseiam-se nas formulações de propriedades e de suas relações. As provas pragmáticas tratam fundamentalmente da ação concreta, as provas intelectuais tratam fundamentalmente do discurso.

Nesta seção, nos baseamos em alguns exemplos históricos, mas, como na seção anterior, o objetivo é simplesmente definir o contexto e testemunhar a complexidade da noção de ângulo, fornecendo exemplos de provas e debates que efetivamente surgiram na matemática ou na educação matemática.

Depois de descrever as provas pragmáticas que pudemos identificar, apresentaremos as provas intelectuais, agrupando-as em duas categorias de acordo com os tipos de concepções de ângulo que as sustentam: a inclinação entre duas linhas ou rotação.

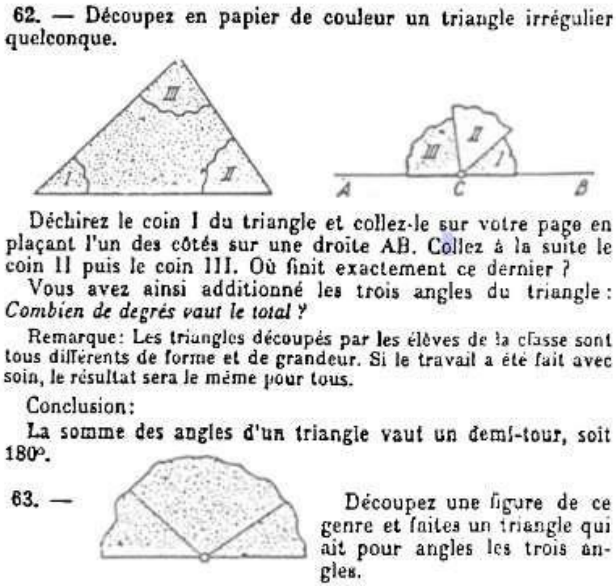
Provas Pragmáticas

Medição

Um primeiro tipo de prova pragmática, enquadrando-se na categoria de empirismo ingênuo, consiste em realizar medidas e cálculos para alguns triângulos e concluir que a propriedade observada nesses poucos casos será sempre verificada. O uso de tal prova deve ser facilmente desqualificada, destacando a incerteza inevitável da medição.

Corte

Uma prova pragmática clássica consiste em desenhar um triângulo no papel, rasgá-lo para separar os três cantos e, em seguida, juntá-los de forma adjacente, conforme mostrado na figura abaixo.



62. — Découpez en papier de couleur un triangle irrégulier quelconque.

Déchirez le coin I du triangle et collez-le sur votre page en plaçant l'un des côtés sur une droite AB. Collez à la suite le coin II puis le coin III. Où finit exactement ce dernier ?

Vous avez ainsi additionné les trois angles du triangle : *Combien de degrés vaut le total ?*

Remarque : Les triangles découpés par les élèves de la classe sont tous différents de forme et de grandeur. Si le travail a été fait avec soin, le résultat sera le même pour tous.

Conclusion :

La somme des angles d'un triangle vaut un demi-tour, soit 180°.

63. — Découpez une figure de ce genre et faites un triangle qui ait pour angles les trois angles.

Figura 3.

Fonte:*Enseignement de la Géométrie* (Grosgurin, 1926) -Livro para a quinta série

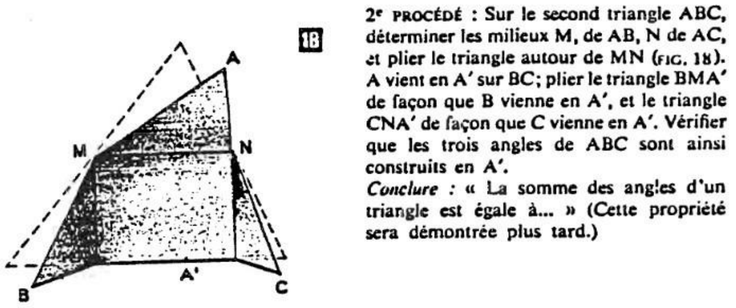
> O empirismo ingênuo qualifica um tipo pragmático de prova que consiste em extrair da observação de um pequeno número de casos a certeza da verdade de uma afirmação**.**

Deve-se notar que, como a anterior, essa evidência se enquadra na categoria de empirismo ingênuo e está tão sujeita a erros práticos quanto à utilização de mensuração; os recortes dos alunos são na maioria das vezes incertos, e suas montagens aproximadas.

Pode-se propor que, por um lado, as noções de “ângulo” (ou seja, canto) e “ângulos de um triângulo” dos alunos podem não ser idênticas, e que, por outro lado, os alunos podem não estar convencidos de que o corte garanta a conservação das propriedades de triangulo”.

Dobraduras

Um triângulo, tendo sido desenhado numa folha de papel, é recortado e depois dobrado, como mostra a figura seguinte: levar o vértice A para o seu lado oposto, dobrando os pontos médios (que podem ser determinados por dobragem) dos lados adjacentes a ele, depois dobrar os *cantos* do trapézio resultante para dentro.



2ᵉ PROCÉDÉ : Sur le second triangle ABC, déterminer les milieux M, de AB, N de AC, et plier le triangle autour de MN (FIG. 18). A vient en A′ sur BC; plier le triangle BMA′ de façon que B vienne en A′, et le triangle CNA′ de façon que C vienne en A′. Vérifier que les trois angles de ABC sont ainsi construits en A′.
Conclure : « La somme des angles d'un triangle est égale à... » (Cette propriété sera démontrée plus tard.)

Figura 4.

Fonte: (*Mathématiques 6°*, 1969) E. Rich series, Hatier

O ângulo, inclinação de uma semirreta sobre a outra

As origens

Acredita-se que o teorema sobre a soma dos ângulos de um triângulo seja pitagórico, não apenas a prova geral é atribuída a ele mas também sua descoberta. De acordo com Geminus, citado por Heath:

> Os antigos investigaram o teorema dos dois ângulos retos em cada espécie individual de triângulo, primeiro no equilátero, novamente nas isósceles, e depois no triângulo escaleno, e depois os geômetros demonstraram o teorema geral de que em qualquer triângulo os três ângulos interiores são iguais a dois ângulos retos.(Heath, 1921, p. 135)

Estamos interessados aqui em relatar a tentativa de reconstruir esta abordagem proposta por Sir Thomas Heath em sua tradução de *Os Elementos* de Euclides (Heath, 1956, pp. 316-

322), seguindo Henkel e Cantor aos quais ele se refere. Tendo lembrado que triângulos equiláteros ou hexágonos regulares foram utilizados para pavimentação, ele continua:

> ficaria claro que seis ângulos iguais a um ângulo de um triângulo equilátero são iguais a quatro ângulos retos e, portanto, que os três ângulos de um triângulo equilátero são iguais a dois ângulos retos. [...] Em seguida, se inferiria, como o resultado do desenho da diagonal de qualquer retângulo e observação da igualdade dos triângulos formando as duas metades, que a soma dos ângulos de qualquer triângulo retângulo é igual a dois ângulos retos e, portanto, (os dois triângulos retângulos congruentes sendo então colocados de modo a formar um triângulo isósceles) que o mesmo é verdadeiro para qualquer triângulo isósceles.

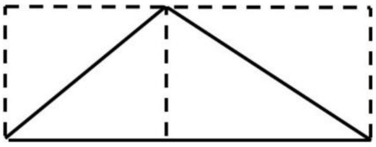


Figura 5.

> Restava apenas a última etapa, ou seja, observar que qualquer triângulo poderia ser considerado a metade de um retângulo (desenhado como indicado na figura a seguir) ou simplesmente que qualquer triângulo poderia ser dividido em dois triângulos retângulos, de onde se inferiria que, em geral, a soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos. (ibid., pp. 318-319)

Deve-se acrescentar que o próprio Heath considera essa reconstrução altamente especulativa (ibid., p.319).

Prova de Euclides

A prova mais clássica é a dos Elementos de Euclides (Livro 1, proposição 32). Aqui está a tradução de Heath (1956, pp. 316-317):

> Em qualquer triângulo, se um dos lados for produzido, o ângulo externo é igual aos dois ângulos interno e oposto, e os três ângulos do triângulo são iguais a dois ângulos retos.
> Seja ABC um triângulo e um lado dele BC seja produzido para D;
> Eu digo que o ângulo externo ACD é igual aos dois ângulos internos e opostos CAB, ABC e os três ângulos internos do triângulo ABC, BCA, CAB são iguais a dois ângulos retos.
> Para que CE seja traçado a partir do ponto C paralelo à reta AB, então, como AB é paralelo a CE e AC caiu sobre eles, os ângulos alternados BAC, ACE são iguais um ao outro.
> Novamente, como AB é paralelo a CA e a linha reta BD caiu sobre eles, o ângulo externo ECD é igual ao ângulo interno e oposto ABC.

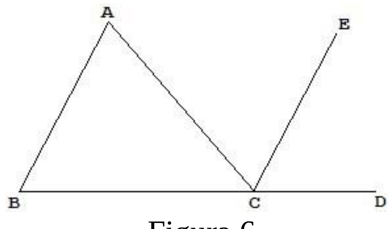


Figura 6.

> Mas o ângulo ACE também foi provado igual ao ângulo BAC; portanto, todo o ângulo ACD é igual aos dois ângulos internos e opostos BAC, ABC.
> Deixe o ângulo ACB ser adicionado a cada um; portanto, os ângulos ACD, ACB são iguais aos três ângulos ABC, BCA, CAB.

Mas os ângulos ACD e ACB são iguais a dois ângulos retos; portanto, os ângulos ABC, BCA, CAB também são iguais a dois ângulos retos. Portanto etc.

Q. E. D.

Uma **experiência do pensamento** é um tipo de prova intelectual que invoca a ação, internalizando-a e desprendendo-a de sua realização sobre um determinado representante. Ela permanece marcada pela temporalidade anedótica, mas as operações e relações subjacentes à prova são explicitadas de outra forma que não pelo resultado da sua realização.

Alexis Claude Clairaut, um famoso matemático do século 18, procurou ligar as provas euclidianas à intuição, como escreveu no prefácio de seu *Elemens de Géométrie*: "Evito cuidadosamente dar qualquer proposição na forma de um teorema; ou seja, aquelas proposições em que se demonstra que tal ou qual verdade é sem mostrar como se conseguiu descobri-la." (1741, p. Vij do prefácio)15. Ele então ofereceu uma explicação "intuitiva" das origens dessa prova. Ele assume a forma de uma experiência do pensamento que implementa a concepção de ângulo como a inclinação uma para a outra de duas linhas16:

Como na prática é importante, como já dissemos, que os ângulos sejam medidos exatamente, não devemos nos contentar em apenas tomá-los, mesmo com os instrumentos mais perfeitos, ainda temos que encontrar uma maneira de verificar suas medidas, para fazer a correção, se necessário. No entanto, este meio é simples e fácil. Voltemos ao triângulo ABC. Sentimos que o tamanho do ângulo C deve resultar do tamanho dos ângulos A e B; porque à medida que aumentamos ou diminuímos estes ângulos, a posição das linhas CA, BC mudam, e consequentemente, o ângulo C, que estas linhas fazem entre elas. Agora, se este ângulo depende do tamanho dos ângulos A e B, deve-se assumir que o número de graus contidos nos ângulos A e B deve determinar o número de graus contidos nos ângulos C, e que assim pode ser usado como uma verificação das operações realizadas para determinar os ângulos A e B, já que será certo que os ângulos A e B foram medidos corretamente, se, medindo posteriormente os ângulos C, se verificar que contém o número certo de graus em relação ao tamanho dos ângulos A e B.

Para saber quanto se pode concluir da magnitude dos ângulos A e B a partir da magnitude do ângulo C, vamos examinar o que acontece neste ângulo, se as linhas AC, BC, se aproximam ou se afastam mais. Suponha, por exemplo, que BC, girando em torno do ponto B, se afasta de AB, para se aproximar de BE, fica claro que enquanto

15 Nota2020: DeepL tradução livre, aqui está o original em francês: "j'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorème; c'est à dire de ces propositions où l'on démontre que telle ou telle vérité est sans faire voir comentar est parvenu à la découvrir."

16 [12]Nota2020: Indiquei erroneamente no relatório original que Heath (1956, p.321) atribuiu tal ideia a Proclus. Na verdade, Heath mencionou a ideia de Proclus de explorar a noção de ângulo como a inclinação uma da outra de duas linhas para fornecer uma prova independente de paralelos que não era o objetivo de Clairaut.

> BC estava virando, o ângulo B se abre continuamente; & que, ao contrário, o ângulo C se aproxima cada vez mais; o que nos leva, antes de mais, a presumir que, neste caso, a diminuição do ângulo C é igual ao aumento do ângulo B, e que a soma dos três ângulos A, B, C, é sempre a mesma, qualquer que seja a inclinação das linhas AC, BC, na linha AE.17 (ibid., pp. 63-64)

Clairaut continuou afirmando que "essa suposta indução carrega consigo sua prova matemática" (ibid.), e então forneceu a prova clássica dos elementos.

Essa prova de Euclides é a mais clássica encontrada nos livros escolares franceses até a reforma da Nova Matemática. As figuras abaixo esboçam as principais variantes da prova encontrada nos livros didáticos (o desenho à direita ilustra aquele atribuída à escola pitagórica):

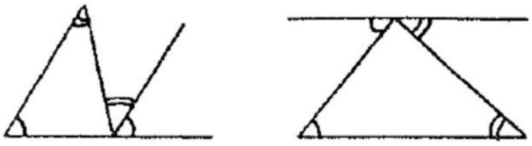


Figura 7.

Novos livros didáticos de matemática em francês introduziram uma noção de ângulo geométrico - classe de equivalência de um par de raios sobrepostos da mesma origem - e sua medida, o "*écart*" (magnitude da menor rotação que mapeia um dos raios no outro). No entanto, as provas correspondentes utilizando transformações geométricas (veja abaixo) são

17 Nota2020: Tradução livre DeepL, aqui está o original em francês: " Comme il importe dans la pratique, ainsi que nous l'avons déjà dit, que les angles soient exactement mesurés, il ne faut pas se contenter de les prendre, même avec les instruments les plus parfaits, il faut encore trouver le moyen de vérifier leurs mesures, pour en faire la correction, s'il étoit nécessaire. Or ce moyen est simple et facile. Reprenons le triangle ABC. On sent que la grandeur de l'angle C doit résulter de celle des angles A & B ; car qu'on augmentât, ou qu'on diminuât ces angles, la position des lignes CA, BC changeroit, & par conséquent, l'angle C, que ces lignes font entre elles. Or si cet angle dépend de la grandeur des angles A & B, on doit présumer que ce que les angles A & B renferment de degrés doit déterminer le nombre de degré que doit renfermer l'angle C, & qu'ainsi il pourra servir de vérification aux opérations qu'on aura faites pour déterminer les angles A & B, puisqu'on sera sûr qu'on aura bien mesuré les angles A & B, si, en mesurant ensuite l'angle C, on lui trouve le nombre de degrés qui lui conviendra relativement à la grandeur des angles A & B.
Pour trouver comment de la grandeur des angles A & B, on peut conclure celle de l'angle C, examinons ce qui arriveroit à cet angle, si les lignes AC, BC, venoient à se rapprocher, ou à s'écarter l'une de l'autre. Supposons, par exemple, que BC tournant autour du point B, s'écarte de AB, pour s'approcher de BE, il est clair que pendant que BC tourneroit, l'angle B s'ouvriroit continuellement ; & qu'au contraire, l'angle C se resserre de plus en plus ; ce qui d'abord pourroit faire présumer que, dans ce cas, la diminution de l'angle C égaleroit l'augmentation de l'angle B, & qu'ainsi la somme des trois angles A, B, C, seroit toujours la même, quelle que fut l'inclinaison des lignes AC, BC, sur la ligne AE."

enquadradas pela heurística de Euclides clássica: as transformações permitem “transportar” ângulos adjacentemente em torno do mesmo vértice. Este é um exemplo de transição de provas pragmáticas para provas intelectuais, aqui em um nível bastante elevado de abstração, mas ainda na filiação das concepções e provas mencionadas acima.

SOMME DES ÉCARTS DES ANGLES GÉOMÉTRIQUE D'UN TRIANGLE

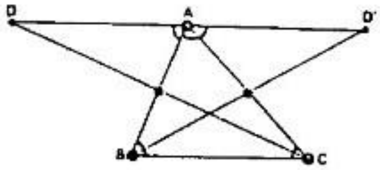


fig. 14

Soit un triangle (A, B, C), désignons par S la symétrie centrale par rapport au milieu de (A, B) et S' la symétrie par rapport au milieu de (A, C) soient :

$$D = S(C) \quad \text{et} \quad D' = S'(B)$$

C et D sont donc dans deux demi-plans différents de bord commun (AB) les secteurs angulaires saillants fermés de bords [A, D) et [A, B) pour l'un et [A, B) et [A, C) pour l'autre sont alors adjacents donc

$$E(\widehat{DAB}) + E(\widehat{BAC}) = E(\widehat{DAC}) \quad \text{avec} \quad \widehat{DAB} = \widehat{ABC}$$

car ils ont des représentants isométriques par S.

Mais de la même manière la symétrie centrale S' permet d'obtenir

$$\widehat{CAD'} = \widehat{ACB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD'} = -\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$$

donc D' et D sont dans deux demi-plans distincts de bord commun (AC) les deux secteurs angulaires saillants fermés de côtés [A, D) et [A, C) pour l'un, [A, C) et [A, D') pour l'autre sont donc adjacents et on a :

$$E(\widehat{DAC}) + E(\widehat{CAD'}) = E(\widehat{DAD'}) = k$$

En utilisant la relatic . E $(\widehat{DAC}) = E(\widehat{BAC}) + E(\widehat{ABC})$ on obtient finalement :

$$E(\widehat{BAC}) + E(\widehat{ABC}) + E(\widehat{ACB}) = k$$

THEORÈME

La somme des écarts angulaires des angles géométriques d'un triangle est égale à l'écart angulaire k d'un angle plat.

Figura 8.

Extraído de (*Mathématiques 3°*, 1972) Queysanne-Revuz Series Fernand Nathan

As críticas de Legendre

Não podemos fechar esta seção sobre a prova de Euclides sem mencionar as críticas de vários matemáticos ao longo da história, que questionaram a base essencial dessa prova, a saber, o quinto postulado de Euclides:

> 5. que, se uma linha reta caindo em duas linhas retas, fizer com que os ângulos interiores do mesmo lado sejam inferiores a dois ângulos retos, as duas linhas retas, se produzidas

> indefinidamente, se encontram naquele lado em que os ângulos são inferiores aos dois ângulos retos (Trans. Heath, 1956, p. 155)

O matemático francês Adrien Marie Legendre, em particular, passou quase trinta anos tentando estabelecer esse teorema sem utilizar o postulado de Euclides, reescrevendo sua prova em cada uma das doze edições de seus Elementos publicados de 1794 a 1823 (Le Rest, 1982, pp. 144–148).

Na primeira edição de seus elementos, Legendre (1794) deu uma prova que posteriormente não foi mais utilizada[18]. Aqui está o esboço de Bkouche (1984)[19] desta primeira prova:

> dá-se um segmento e dois ângulos, o triângulo que se segue é então conhecido e o terceiro ângulo é função dos outros dois (sem ser função do segmento por razões de homogeneidade). Para determinar essa função, Legendre mostra que em um triângulo retângulo, a soma dos três ângulos é duas linhas retas; como qualquer triângulo pode ser dividido por uma altura em dois triângulos retângulos, o resultado é imediato.

Mas Legendre relembrou essa prova em sua nota II para a prova que ele deu na décima segunda e última edição de *Os Elementos*. Aqui estão as ideias-chave desta última prova dada na décima segunda edição[20] da proposição XIX do livro I: em qualquer triângulo, a soma dos três ângulos é igual a dois ângulos retos.

> Legendre começa a partir de um triângulo ABC com AB> AC> BC, então ele constrói o ponto I de BC tal que CI = IB, ponto C’ de AI tal que AC’ = AB e ponto B’ de AB tal que AB’ = 2AI

18 Nota2020: Legendre tinha razões pedagógicas para não a manter: “Esta prova, de que uma parte é analítica e a outra sintética, não deixa nada a desejar em termos de rigor geométrico; mas para ser aceita nos Elementos, o estudo da geometria teria que ser precedido por noções gerais sobre funções, o que exigiria um conhecimento bastante extenso de análise que ainda não foi introduzido no ensino da matemática” (A. M. Legendre, 1833, p. 374).

19 Nota2020: Esta seção foi baseada principalmente no artigo de Rudolph Bkouche de 1984 que agora dificilmente é possível recuperar; a maioria das ideias pode ser encontrada em uma versão atualizada e mais acessível (Bkouche, 2007). Desde então, elementos de Legendre e sua reflexão sobre seus esforços para provar a proposição XIX estão disponíveis on-line, portanto, reestruturei a seção, mas ainda assim gostaria de prestar homenagem a Rudolph Bkouche cujos comentários sobre meu trabalho sempre foram desafiadores.

20 Nota2020: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k9771899n

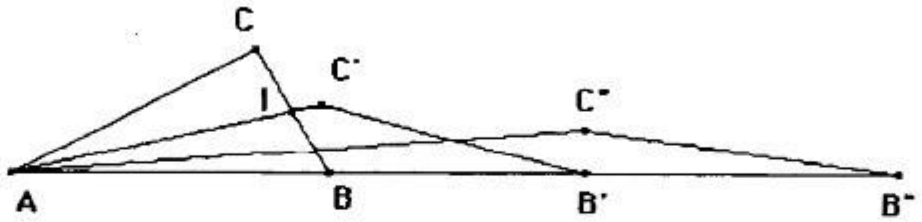


Figura 9.

Sejam A, B, C os ângulos do triângulo ABC e A’, B’, C’ os ângulos do triângulo AC’B’. Legendre mostra por [raciocínio sobre triângulos congruentes][21] que
A + B + C = A’+ B’ + C’ e A’ <(A / 2)
Em seguida, ele aplica a mesma construção ao triângulo AC’B’ e obtém um triângulo AC’B’ cujos ângulos são anotados A”, B”, C” e verifica:
A’ + B’ + C’ = A” + B” + C” e A” <(A' / 2)
Ao “continuar indefinidamente a sequência de triângulos”, chega-se, diz Legendre, a um triângulo abc cujo ângulo a é “menor do que qualquer ângulo dado”. Se construirmos a partir deste triângulo abc o seguinte triângulo a’b’c’, a soma dos ângulos a’ + b’ sendo igual ao ângulo a “vemos que a soma dos três ângulos do triângulo a’b’ c’ é reduzido quase ao único ângulo c’ ”.

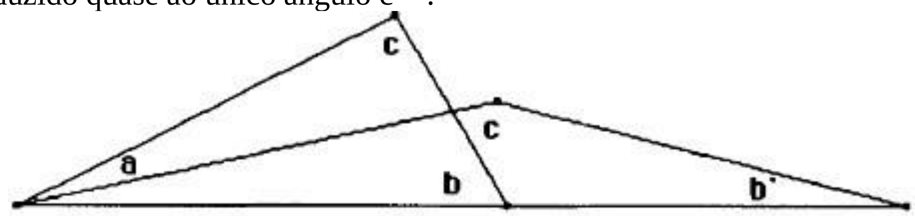


Figura 10.

“Mas é concebível que o triângulo a’b’c’ varie nos seus ângulos e lados de modo a representar os triângulos sucessivos que depois surgem da mesma construção e se aproximam cada vez mais do limite em que os ângulos a’ e b’ seriam zero”. No limite, os pontos a’, b’, c’ estão em linha reta e a soma dos ângulos é reduzida a duas linhas retas. Esta demonstração muito inteligente e visual implicitamente assume que qualquer linha reta pode se estender indefinidamente e tropeça em uma suposição onde o infinito intervém... (Le Rest, 1982, pp. 145-146)

Ângulo e rotação

A prova da propriedade da soma dos ângulos de um triângulo pode ser dada por meio de uma concepção que identifica o ângulo com a rotação. Damos aqui a prova proposta por Gustave Choquet (1964, p. 100), cuja definição lembramos acima. Esta prova utiliza o teorema de Chasles em ângulos orientados, na verdade estabelece uma propriedade mais geral dos polígonos; o teorema que nos interessa surge como corolário.

21 Nota2020: Tradução livre do francês *Legendre montre par les cas d’égalité des triangles.*

59. Somme des angles d'un polygone fermé plan

Soit P un polygone fermé plan de n sommets, c'est-à-dire une suite $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de points de Π, définie à une permutation circulaire près.

On supposera ici que, pour tout i, $a_i \neq a_{i+1}$ (donc aussi $a_n \neq a_1$); on pose alors δ_i = la demi-droite $D(a_i, a_{i+1})$.

On appelle *angle extérieur* de P au sommet a_i l'angle $\widehat{\delta_{i-1}\delta_i}$; on appelle *angle* de P en a_i l'angle $\widehat{a_{i-1}a_ia_{i+1}}$.

Proposition 59.1. La somme des angles extérieurs de tout polygone fermé plan est 0.

Démonstration. En effet, d'après la relation de Chasles

$$\widehat{\delta_1\delta_2} + \widehat{\delta_2\delta_3} + ... + \widehat{\delta_n\delta_1} = \widehat{\delta_1\delta_1} = 0.$$

Corollaire 59.2. La somme des angles de tout polygone fermé plan est 0 *ou* ϖ *suivant que le nombre* n *de ses sommets est pair ou impair.*

En effet soit δ'_{i-1} la demi-droite $D(a_i, a_{i-1})$; on a $\widehat{\delta_{i-1}\delta'_{i-1}} = \varpi$

Donc $\widehat{a_{i-1}a_ia_{i-1}} = \widehat{\delta'_{i-1}\delta_{i-1}} + \widehat{\delta_{i-1}\delta_i} = \varpi + \widehat{\delta_{i-1}\delta_i}$

La somme de ces angles vaut donc $n\varpi + 0 = 0$ ou ϖ suivant que n est pair ou impair (puisque $\varpi + \varpi = 0$).

En particulier la somme des angles d'un triplet (a_1, a_2, a_3) est ϖ; lorsqu'on aura défini la notion d'orientation, on précisera ce résultat en montrant que les trois angles d'un tel triplet ont même orientation.

Figura 11.

Uma prova inspirada na mesma heurística pode ser proposta em um nível elementar, na forma de uma experiência do pensamento como o descrito no trecho a seguir pelo metodologista de Genebra Grosgurin (1926).

58. Passons, dans cette question, de l'expérimentation pure au raisonnement.

On sait que deux angles opposés par le sommet (fig. 1) sont égaux (N° 37).

Prenons un triangle quelconque (fig. 2). Supposons une aiguille de montre en 1. Je la fais tourner de l'angle A (position 2). Puis je la fais glisser de 2 en 3 et tourner de l'angle B — ou plutôt de son égal, opposé par le sommet (position 4). Enfin je la fais glisser de 4 en 5 et tourner de l'angle C (position 6).

Au départ, en 1, l'aiguille pointait vers midi, à la fin vers six heures. Elle a donc tourné[1], tout en parcourant les trois angles, d'un demi-tour[2].

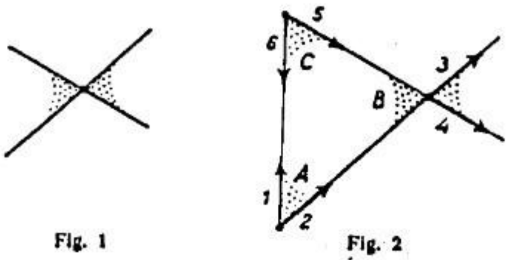


Fig. 1 Fig. 2

Figura 12.

Observações sobre óbvio e intuição

O teorema da soma dos ângulos de um triângulo é frequentemente empregado como exemplo para apoiar teses sobre os fundamentos da obviedade ou sobre a natureza intuitiva de certas provas. Em relação às concepções do ângulo mencionadas acima, dou a seguir dois exemplos que discutirei em uma seção final.

E. Fishbein, a verdade intrínseca

O psicólogo Ephraim Fishbein (1982) estava interessado no papel e no significado da intuição na matemática e, especialmente, em seu ensino e aprendizagem. "Intuição" não tem aqui a conotação misteriosa que tem na linguagem comum, pelo contrário, refere-se a um verdadeiro conhecimento do sujeito:

> uma intuição é uma forma de conhecimento. Ela tem o papel de um programa de ação - mas é uma cognição [...]. Uma intuição não pode ser construída por meras explorações verbais nem pela prática cega de procedimentos de resolução. Uma intuição pode ser elaborada apenas no quadro de situações práticas como resultado do envolvimento pessoal do aluno na resolução de problemas genuínos levantados pelas situações práticas. (Fishbein, 1982, p. 12)

A intuição no sentido de Ephraim Fishbein, portanto, parece ser um conceito muito próximo aos de "modelo implícito" ou "modelo de ação" forjado por Guy Brousseau (1997, p. 10) ou de "conceito em ação" ou "teorema em ação" introduzido por Gérard Vergnaud (2009, pp. 85, 87). As relações entre esses diferentes conceitos não foram estudadas até agora, seria importante que isso fosse feito; em todo caso, este não é o lugar aqui, limitamo-nos a uma análise do uso que Fishbein faz do conceito de intuição em uma reflexão crítica sobre a noção de prova; em particular no que diz respeito à prova do teorema sobre a soma dos ângulos de um triângulo:

> Consideremos novamente o teorema: "A soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos".
> Vamos agora desenhar um segmento AB e as perpendiculares MA e NB ao segmento. Os ângulos MAB e NBA são ângulos retos. Podemos "criar" um triângulo "inclinando" MA e NB. Assim, pode-se perceber que o ângulo APB "acumula" o que é "perdido" pelo ângulo MAB e NBA ao "inclinar" MA e NB.

Claro, esta não é uma linguagem matemática. É antes uma história sobre linhas e ângulos, mas uma história que pode cativar o espírito, que pode se impor como intrinsecamente verdadeira. A mesma história pode ser traduzida na forma de uma prova matemática. Consequentemente, a necessidade formal e a necessidade intrínseca coincidirão.

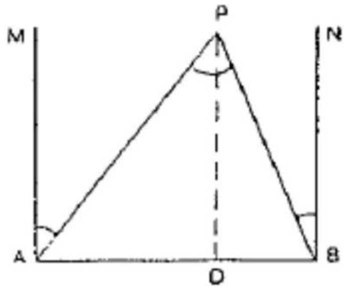


Figura 13.

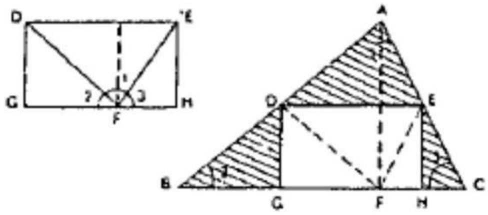


Figura 14.

Eu exibo esse procedimento para um grupo de alunos de mestrado. Um dos alunos apresentou a seguinte técnica que, segundo ele, é mais surpreendentemente intuitiva e fácil de entender. Você corta um triângulo de um pedaço de papel. Deixe ABC ser esse triângulo. Então você dobra os triângulos ADE, DBG e EHC para fazer os ângulos 1, 2 e 3 se ajustarem como na Figura 14. Você pode ver que a soma deles é igual a dois ângulos retos.

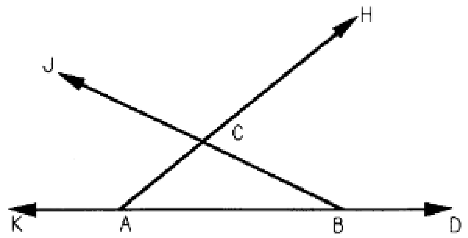
Eu não concordo com a técnica acima pela seguinte razão. Agarrar "intuitivamente" não significa simplesmente "ver". No exemplo com a soma dos ângulos de um triângulo o que você tem que entender não é apenas que, em um caso particular, unindo os ângulos praticamente você terá dois ângulos certos. O problema é perceber intuitivamente por que é que esse efeito constante é necessariamente conservado, imposto, na condição variável de um triângulo não determinado. Intuitivamente, deve ser um problema de compensação. Portanto, a questão não é mostrar praticamente que em um determinado exemplo os ângulos se encaixam como o teorema predito. O que temos que "ver" é que, em condições variáveis, pela forma de compensação, a soma deve ser conservada. E isto eu acho que é mais bem sugerido pelo meu procedimento porque (a) um triângulo aparece como um caso particular numa situação mutável; (b) a compensação que leva a um resultado constante pode ser percebida diretamente; (c) estamos envolvidos comportamentalmente não apenas na coleta de ângulos, mas, ao contrário, num processo de transformação que deixa constante a soma dos triângulos; (d) esta representação pode ser traduzida diretamente em uma prova formal. A prova formal e a interpretação intuitiva são perfeitamente congruentes.(ibid., pp. 17-18)

F. Halbwachs, a transferência de significado

O físico e epistemólogo Francis Halbwachs (1981) buscou a articulação entre "significados e razões como organização inferencial desses significados" (ibid., p. 199). Ele aponta que a razão (R) para uma asserção (A) não reside em sua prova dedutiva ou indutiva; a razão de A não é a sua prova, mas o que permite a sua compreensão em termos da coordenação entre significados. A razão de R não ser a verdade de A, mas seu estado psicológico, no sentido de que o significado de A vai se basear no significado de R, e que a descoberta desse tipo de relação vai fundar uma nova inteligibilidade, e em particular para dar uma nova dimensão à necessidade de A. (ibid., p. 200)

Essa reflexão teórica aplicada à propriedade da soma dos ângulos de um triângulo leva Halbwachs às seguintes críticas e reflexões:

> A demonstração de Euclides, que geralmente é dada no ensino nesta ou naquela forma, é estática e artificial [...] É a aplicação puramente lógica de teoremas anteriores, cuja sequência é perfeitamente convincente. Mas a razão de ser da propriedade escapa, o que mostra que estamos no domínio estrutural (sequência de composição e proposições). Para mostrar como transcender este ponto de vista, vamos dar o que parece ser a "razão":
> O primeiro passo é tornar o problema dinâmico e construtivo, especificando (ou modificando) a noção de ângulo: um ângulo pode ser concebido como uma parte de um plano varrida por uma meia linha girando em torno de um ponto fixo, o que coloca um movimento em primeiro plano. […]
> Dito isto, partimos da meia linha ABD, giramos em um ângulo Â em torno do ponto A (sentido anti-horário) e chegamos a ACH. Depois rodamos num ângulo C em torno do ponto C (sentido anti-horário) e chegamos a BCJ. Por fim, rodamos segundo um ângulo B em torno do ponto B (sentido anti-horário) e chegamos a BAK. Então, adicionamos os três ângulos tomados na mesma direção, e no total passamos da meia linha ABD para a meia linha BAK, ou seja, chegamos na linha de partida, mas com uma mudança de direção, que representa o ângulo plano (ou seja, π ou dois ângulos retos).



« "Raisons" du théorème de la somme des angles »

Figura 15.

> Aqui, ao contrário da prova de Euclides, a passagem dos dados para a conclusão ocorreu fazendo a definição dinâmica do ângulo "trabalhar" [...] Não há mais apenas uma ancoragem lógica de proposições (ou como dizemos "transferência da verdade"), mas ao mesmo tempo e em paralelo transferência de sentido. (Halbwachs, 1981, pp. 201-202)

Sobre a unidade de provas e concepções

As explicações de Fishbein e Halbwachs pretendem refletir a natureza cognitiva e epistemológica fundamental do teorema - como Halbwachs coloca, sua razão de ser. Eles são bastante diferentes porque se baseiam em duas concepções diferentes do ângulo. Na análise de Fishbein, pode-se recuperar a explicação de Clairaut e o ângulo como a inclinação um para o outro de duas linhas; na análise de Halbwachs, o ângulo é identificado com a rotação. Seria legítimo questionar qual dessas explicações está mais intrinsecamente ligada à propriedade.

Na verdade, pode-se imaginar a resposta, que flui diretamente dos fundamentos teóricos de cada um desses dois autores. Em outras palavras, não há prova inerentemente significativa. A significância está relacionada à natureza da relação entre a explicação (ou prova) e o conhecimento do sujeito. Ambas as explicações são significativas, tendo razões para cada um dos autores por causa de sua própria intuição (no sentido de Fishbein). A natureza explicativa de cada uma dessas provas é que elas estão claramente enraizadas na concepção do ângulo dos escritores, Fishbein e Halbwachs, o que é evidenciado por suas análises.

A análise de ambos os autores e de suas diferenças levantam um questionamento fundamental sobre a natureza das relações entre as concepções dos alunos e os fundamentos da prova euclidiana clássica. Em minha opinião, a objeção não é de natureza estática da prova de Euclides, como sugere Halbwachs, mas de que as concepções - o conhecimento apropriado pelos alunos - não permitem constituir as razões no sentido de uma organização inferencial de significados. Formulo a hipótese de que é nessa discrepância entre prova e conhecimento[22] que se encontra o obstáculo à constituição das razões e, portanto, ao entendimento.

No que diz respeito à prova de Euclides, eu sugeriria que a construção auxiliar que ela requer seja "compreendida" assim que se "compreenda" que o teorema da igualdade de certos ângulos determinados por uma secante em um par de paralelos permite uma relação entre os ângulos ou seu "transporte".

É muito positivo que se reconheça a importância da forma operativa do

Provas pragmáticas obtêm esse mesmo transporte cortando ou dobrando.

22 Nota2020: Entendida aqui como uma tradução do francês "*connaissance*", não "*savoir*".

conhecimento, hoje mais do que ontem, é aquela que permite fazer e ter sucesso. Isso não desvaloriza a forma predicativa do conhecimento, aquela que assume a forma de textos, enunciados, tratados e manuais, mas faz mais justiça ao conhecimento adquirido com a experiência. (Vergnaud, 2001, p.287)

As críticas de Halbwachs e Fishbein destacam-se pela discrepância entre o valor predicativo do último teorema - afirmações sobre a igualdade de ângulos - e seu valor operativo (Vergnaud, 2001). Esse valor operativo, ou mesmo esse significado do teorema, é, em minha opinião, construtível pelos alunos apenas em um funcionamento do conhecimento que na maioria das vezes está ausente das práticas escolares.

Pelas mesmas razões, não se pode, como faz Fishbein, rejeitar uma explicação com o único argumento de que ela não considera a natureza intuitiva da propriedade (o que significaria que a propriedade tem uma natureza intuitiva determinada ou intrínseca). Sugiro que a explicação em questão pode não ser significativa para o autor, mas pode ser significativa para o aluno que a propõe, dependendo dos significados que ele atribui ao ângulo ou à propriedade. Encontrei uma prova semelhante em um livro chinês; uma prática familiar de dobradura de papel pode ser a base de seu significado, apoiada por um teorema em ação segundo o qual dobrar ao redor do meio dos lados de um triângulo permite trazer um vértice em seu lado oposto.

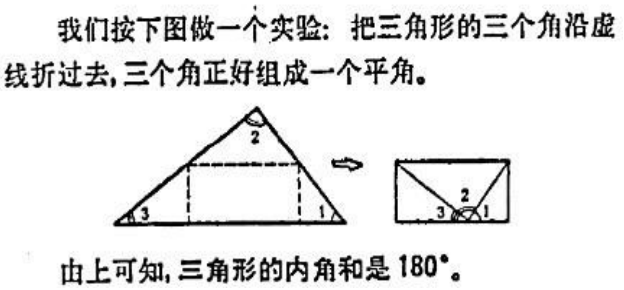


Figura 16.

No entanto, concordo com a observação de Fishbein de que o que traz significado não é o uso da ação, que não é mais intuitiva em si; ao contrário do que Halbwachs parece sugerir. Na verdade, é uma hipótese pedagógica desse tipo, que tende a substituir o dogmatismo da evidência intelectual pelo dogmatismo da evidência pragmática que poderia ser tão sem sentido, dependendo das concepções dos alunos.

Desenho da sequência didática

A primeira parte deste texto delineia a complexidade epistêmica do conceito de ângulo e da comprovação do teorema da soma dos ângulos de um triângulo. Ele fornece alguma base para imaginar o que pode ser esperado dos alunos. A próxima parte enfoca o design, a implementação e a análise de um experimento de ensino. Os princípios de design são aqueles derivados da Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1997, especialmente cap. 1 seção 5 e 6), que constituem a base de uma metodologia de pesquisa conhecida como engenharia didática (Artigue 1992).

Plano geral da sequência

Devolução é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade por uma situação (adidática) de aprendizagem ou por um problema, e aceita as consequências dessa transferência dessa responsabilidade (Brousseau, 1997, p.230)

Nosso objetivo é, portanto, construir uma sequência didática que garanta a devolução aos alunos da responsabilidade de construir a conjectura “a soma dos ângulos de um triângulo é 180 °” e propor uma prova estabelecendo-a.

Espera-se que a concepção inicial dominante em uma sala de aula do sétimo ano seja que “quanto maior um triângulo, maior o valor da soma de seus ângulos”

Tal teorema em ação é provável que seja bastante resistente. Servirá de base para a construção da sequência: a conjectura deve derivar da sua desestabilização. Além disso, será necessário assegurar a desqualificação do uso da medida como meio de provas pragmáticas, a fim de permitir a legítima exigência de provas intelectuais.

A devolução do problema não significa apenas a sua apropriação por cada aluno, mas também que o problema é reconhecido como tal pela turma, que *assume a responsabilidade coletiva* por ele. A sequência deve, portanto, garantir essa socialização.

Finalmente, será necessário assegurar a conclusão do processo em uma duração compatível com as reais restrições de ensino. Na verdade, este é um constrangimento particularmente difícil de satisfazer, tanto em teoria como na prática; o problema levantado é o do encerramento e da institucionalização. Examiná-lo-ei a seguir (ver seção 3.4).

As condições para a gênese da conjectura

Criação e estabilização do meio

> Esta seção requer dois conceitos estreitamente relacionados da Teoria das Situações Didáticas, a saber, uma situação adidática e um meio; ambos não foram totalmente conceituados no início dos anos 80. Uma situação adidática é aquela em que o conhecimento pode ser inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que o aluno pode construí-lo sem recorrer a razões didáticas. No entanto, não pode resolver nenhuma situação adidática imediatamente. No contexto de ensino, o professor projeta uma que o aluno possa manipular. Essas situações adidáticas dispostas com finalidade didática determinam os saberes ensinados em um determinado momento e o significado particular que esses saberes vão ter (resumindo Brousseau, 1997, p.30). Os saberes ensinados pressupõem que seja possível ler situações adidáticas em forma de novos "jogos" que requerem novas respostas, exigindo uma evolução ou ruptura com os que conhece (ibid., p. 57). Para viabilizar a implementação de tais jogos, o sistema didático deve incluir e explicitar outro sistema, distinto do sistema educacional, que representará o meio como uma realidade real ou evocada permitindo o surgimento desses jogos dos quais o aluno é protagonista. "O meio é o sistema que se opõe ao sistema ensinado, ou melhor, ao sistema previamente ensinado." (ibid., p.57)

Em primeiro lugar, o desafio é encontrar as condições nas quais a medição dos ângulos de um triângulo e a manipulação desses números possam ser introduzidas sem a necessidade de explicitar e explicar o objetivo didático que se pretende alcançar.

No nível escolhido - a sétima série – e, na época deste estudo, o segundo período do ano letivo de 1983-84 - a continuação das aulas sobre os ângulos fornece um possível contexto natural e favorável.

Atividades para medir os ângulos de um triângulo podem ser facilmente introduzidas, pois é comum o professor renovar situações, tornando-as um pouco mais complexas ou mudando seu contexto. Portanto, não há necessidade de justificar esta introdução de outra forma. Além disso, iniciar a sequência com tarefas de medição ajuda a garantir que os instrumentos e técnicas correspondentes tenham sido suficientemente dominados e utilizados de antemão: utilização do transferidor, técnica para medir os ângulos de um triângulo (possível extensão dos lados), manipulação dos números obtidos. Esta atividade inicial permitirá ao professor verificar se os alunos têm uma base sólida para a ação.

Esta situação inicial é apresentada da seguinte forma:

- *- O professor pede a cada aluno que desenhe um triângulo, meça seus ângulos e some os resultados;*

- *- O professor justifica esta atividade, explicando que o objetivo é continuar o estudo da utilização do transferidor e da medição dos ângulos;*
- *No final desta atividade, o professor enumera e anota os resultados no quadro, em forma de histograma. Ele pede que os alunos comentem.*

Neste ponto, todos os resultados propostos pelos alunos são aceitáveis e podem ser acolhidos sem distinção. Na verdade, eles são o resultado de medições realmente realizadas e não o valor “verdadeiro” da soma dos ângulos de um triângulo. A diversidade não tem um significado particular neste contexto: aos olhos dos alunos, pode resultar do fato de terem sido desenhados diferentes triângulos, mas alguns alunos podem sugerir que existem incertezas nas medições.

Ao entrar em uma situação adidática, os alunos mobilizam concepções que se mostraram eficientes, senão úteis, em situações que já conheciam. Essas concepções funcionam como “teorias” implícitas. O termo situação de ação denota uma situação didática que permite o aparecimento dessas teorias, cujo status em sala de aula não é a priori definido (por exemplo, Brousseau p.162)

Os comentários são solicitados abertamente. De certa forma, eles estão lá apenas para “completar” esta primeira atividade; na verdade, seria muito difícil mover-se sem a transição da conclusão do histograma para a próxima atividade. Estes comentários podem estar relacionados com a dispersão dos valores apresentados no gráfico, nomeadamente pela menção do intervalo numérico em que se encontram.

No que diz respeito ao objetivo buscado, a situação assim construída não constitui uma situação de ação, sua função é apenas criar e estabilizar o contexto em que o problema se agiganta; não visa mobilizar concepções específicas potencialmente relacionadas a ela.

Conhecer a soma dos ângulos de um triângulo

Após a primeira atividade, é necessário diferenciar o que é devido à incerteza de medição do que é explicado pelas concepções dos alunos na diversidade dos resultados obtidos. Para isso, toda a turma deve ser confrontada com a medição dos ângulos de um mesmo triângulo, como um incentivo para que os alunos se engajem em suas concepções sobre a relação entre o tamanho de um triângulo e a soma das medidas de seus ângulos.

Portanto, a segunda situação é apresentada da seguinte forma:

- *- O professor dá a cada aluno uma cópia do mesmo triângulo;*

- *- pede a cada aluno que faça uma aposta na soma das medidas dos ângulos deste triângulo e que a escreva numa folha de papel que será recolhida;*
- *- O professor pede a cada aluno que meça os três ângulos de um determinado triângulo e, em seguida, calcule a soma dos resultados dessas medições;*
- *- No final desta atividade, o professor enumera e anota no quadro, em forma de histograma, os resultados obtidos;*
- *- Para cada aluno, os resultados são comparados com as apostas e ele ou ela é convidado a comentá-los;*
- *- O professor pede comentários sobre o histograma.*

O triângulo proposto é grande o suficiente, ocupando a totalidade de uma folha de papel A4, e “normal” o suficiente[23], para encorajar o engajamento do teorema esperado em ato; na verdade, espera-se que o primeiro triângulo que os alunos desenham raramente ocupe mais da metade de sua folha.

Para decidir sobre sua aposta, eles podem usar a percepção visual simples para avaliar a medição dos ângulos - algo que eles podem ter praticado em sala de aula, particularmente no reconhecimento de ângulos de 45 ° ou 90 ° - ou podem considerar o triângulo proposto como um objeto, considerando sua forma e seu tamanho, comparando-o com seu triângulo inicial. É deste último procedimento que podem sair apostas em números significativamente maiores do que os obtidos na primeira atividade.

O comentário exigido de cada aluno na comparação da sua aposta com o resultado obtido pretende chamar a atenção para a possível discrepância entre estes dois números.

Agora, a situação assim alcançada tem as características de uma situação de ação: permite a mobilização das concepções que irão intervir como modelo de ação ou decisão nas próximas atividades. Nenhuma questão de validação foi ainda levantada: a discrepância entre aposta e medida pode legitimamente parecer contingente, ligada à escolha particular dos triângulos; não aparece necessariamente como um problema.

23 Note2020: digamos, um escaleno prototípico..

Os comentários sobre o histograma solicitados à turma devem levar a explicitar e compartilhar a exigência de que todos os alunos devem ter encontrado o mesmo resultado para o mesmo triângulo. As diferenças que devem aparecer podem ser explicadas por incertezas de medida; incertezas que são específicas do instrumento ou devidas à prática. O professor enfatiza este requisito expresso coletivamente.

Uma possível conjectura

Nesta fase da sequência, a conjectura sobre a invariância da soma das medidas dos ângulos de um triângulo não tem razão para ter sido formulada. Pode estar presente na mente de alguns alunos, mas certamente não é compartilhado pela classe.

A este ponto da sequência, estão reunidas as condições para a sua gênese:

- *- Foram solicitadas as concepções dos alunos que estarão na origem da conjectura e constituídas no contexto matemático em que esta conjectura irá emergir;*
- *- O fato de a incerteza das medições ter sido reconhecida, o problema de saber a soma dos ângulos de um dado triângulo se coloca.*
- *- A desqualificação da medição como meio de conhecer essa soma legitimará a exigência de prova intelectual da conjectura cuja formulação se espera em decorrência da próxima situação.*

A devolução do problema

A emergência de um invariante

A terceira situação visa formular o problema da invariância da soma das medidas dos ângulos de um triângulo e, a seguir, dar origem à conjectura sobre a igualdade dessa soma a 180°. A devolução do problema à classe significa que os alunos devem apropriar-se dele individualmente, mas também que ele seja colocado sob a responsabilidade coletiva. Essa socialização é condição para um debate produtivo sobre a prova na comunidade de classe.

Para induzir à conjectura, na verdade os alunos devem realizar medições e cálculos para vários triângulos. Mas como o número de experimentos que podem ser realizados durante o período de aula é muito limitado, apenas alguns casos podem ser examinados, portanto, a escolha dos triângulos é muito importante. Além disso, esses experimentos só fazem sentido se os alunos engajarem suas concepções: a conjectura e o problema de sua prova surgirão, em nível individual e da classe, do confronto de concepções segundo as quais a soma dos ângulos de um triângulo depende da forma do triângulo versus os resultados das medições que colocam essa soma em torno de 180°. Para isso, foram escolhidos três tipos de triângulos (ver figura 17), com a forte expectativa de que sua forma e tamanho favoreçam o confronto esperado:

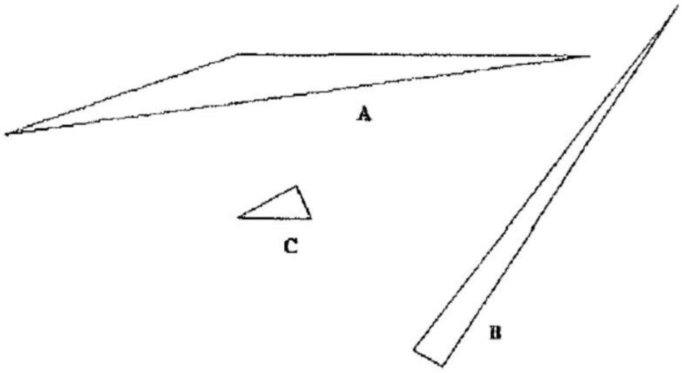


Figura 17.

- *- Os triângulos A e B foram escolhidos pela combinação provocativa da forma dos ângulos e do tamanho do triângulo. No caso do triângulo A, ambas as características (triângulo grande, ângulo grande) apontam na mesma direção, solicitando a ideia de que a soma dos ângulos deve ser grande o suficiente, para o triângulo B, ao contrário, essas características (triângulo grande, ângulo agudo) apontam para uma forma que pode tornar problemática a avaliação da soma. O contraste das formas pode ser um obstáculo para decidir que os triângulos teriam a mesma soma de ângulos. Além disso, as formas desses triângulos são incomuns o suficiente para que se possa esperar que as apostas que serão feitas não sejam evidentes e conduzam os alunos a um raciocínio não trivial que envolve suas concepções.*
- *O triângulo C é significativamente menor do que os triângulos A e B, por isso pode dar origem a apostas muito abaixo de 180°.*

Denominei uma situação de tomada de decisão uma situação que exige a implementação de processos de validação sem exigir a produção explícita e pública de evidências (c.f. situação de decisão Balacheff, 1988, p.33 sqq).

A fim de estimular a explicitação de concepções e a emergência de conflitos epistêmicos, organizamos a atividade dos alunos em equipes: a cada equipe, livremente decidida pelos alunos em critérios de afinidade, solicita-se a concordância de uma avaliação a priori da soma dos ângulos para cada um dos triângulos. A exigência de uma aposta única para o grupo dá conta das condições de uma situação de tomada de decisão. Não é a produção de uma prova comum que se exige, mas a produção de uma decisão possivelmente baseada em uma variedade de critérios.

O confronto de pontos de vista deve levar à proposição de explicações a partir das concepções de cada um.

Assim, os alunos trabalhando em equipes de três ou quatro (dependendo do tamanho da turma), a terceira situação é introduzida da seguinte forma:

- *O professor entrega a cada equipe uma folha de papel com os mesmos desenhos dos três triângulos;*
- *O professor pede a cada grupo que faça uma aposta na soma das medidas dos ângulos de cada um dos triângulos, e depois escreva a aposta num papel que será recolhido;*
- *Em seguida, o professor pede aos grupos que meçam os ângulos de cada triângulo e calculem a soma dos números obtidos;*
- *No final desta atividade, o professor enumera e escreve os resultados propostos no quadro, sob a forma de um histograma para cada triângulo;*
- *Para cada equipe, os resultados são comparados com as apostas, o professor pede comentários.*

O censo das medidas, com a produção de um histograma para cada um dos triângulos, é a ocasião para cada um dos grupos comparar as apostas com os resultados das medidas e cálculos. O comentário solicitado, tal como nas situações anteriores, pretende ajudar a explicitar as concepções e evidenciar a possível contradição entre apostas e resultados.

Em seguida, o professor pergunta aos alunos se eles têm alguma observação particular a fazer, depois de examinar os três histogramas, e à luz dos comentários que acabam de ser feitos. Uma questão tão aparentemente bastante aberta é justificada pela exigência de “senso comum”, possivelmente implícita, que cada um dos triângulos deve ter um valor preciso para a soma das medidas de seus ângulos; isso dá sentido à pergunta do professor.

Saber qual é a soma dos ângulos de um triângulo é um problema que deve se impor aos alunos.

Formulação da conjectura e devolução do problema e sua prova

Após a terceira situação, dois casos podem surgir:

1. O valor 180° é notável, mas os alunos continuam a argumentar que é possível encontrar um triângulo com uma soma dos ângulos diferente;

2. a conjectura é expressa por alguns alunos ou grupos de alunos e é inequivocamente compartilhada por toda a classe.

Neste último caso, a já reconhecida insuficiência da utilização de instrumentos para determinar a soma das medidas dos ângulos deve permitir ao professor verbalizar o problema da prova, mas não tendo, no entanto, que dizer nesta fase se a conjectura é verdadeira ou falsa.

O mais provável, porém, é que a robustez das concepções iniciais garantirá a presença na classe de posições a favor e contra a validade da proposição. Espera-se, portanto, que a turma se encontre no primeiro caso.

Para que 180° seja considerado uma conjectura ...

- *O professor pede aos alunos duvidosos que tentem construir um triângulo cuja soma das medidas dos ângulos seja muito diferente de 180°.*
- *Para aqueles que argumentam que isso é impossível, pede para que estabeleçam a igualdade de 180° como necessária.*

Não tomando partido, o professor deixa a possibilidade de a proposição em questão constituir-se em conjectura sob a responsabilidade da turma.

Estudos experimentais de classe in vivo são difíceis de realizar e gerenciar. O principal desafio é entender até que ponto os dados coletados são (ou não) contingentes ao tempo e contexto específicos do experimento. O papel da análise a priori que faz parte da engenharia didática é antecipar os limites de sua robustez aos eventos contingentes que podem ocorrer durante o próprio

É claro que existe o risco[24] de que, como resultado de tal processo, os alunos recebam bem o fato de que 180° é a soma dos ângulos de um triângulo, com convicção suficiente para não sentirem necessidade de provas. No entanto, espera-se que as tensões que terão se mantido entre os dois "campos", a favor e contra a conjectura, justifiquem a insistência do professor para que se busque a prova. De qualquer forma, em minha opinião, esse risco parecia, a priori, bastante limitado.

Em ambos os casos, os alunos encontram-se em uma situação de validação em que cabe a eles produzir uma (ou mais) provas da conjectura, ou refutá-la. Nesta fase, para os alunos, o professor não parece ser o responsável pela validade da conjectura, sua responsabilidade na sequência nunca foi definida de outra forma

[24] Nota2020: a análise de risco de uma situação didática assume o desafio da reprodutibilidade da engenharia didática (por exemplo, Arsac et al., 1992; Artigue, 1986).

experimento. Esta seção 3 é um exemplo de tal análise.

que a de renovar as situações e garantir que o objetivo de conhecimento seja mantido.

Realizando a situação

Possíveis cenários para uma conclusão

Devolução e institucionalização são duas "negociações" que marcam, por assim dizer, a abertura e o fim de uma situação adidática. "Na institucionalização, [o professor] define as relações que podem ser permitidas entre o comportamento ou produção 'livre' do aluno e o conhecimento cultural ou científico e o projeto didático; ele fornece uma maneira de 'ler' essas atividades e lhes dá um status." (Brousseau, 1997, p.56)

Fazer da "devolução" uma característica-chave do desenho da sequência levanta a questão das consequências de transferir a responsabilidade pela verdade para a classe. Não é possível garantir a *priori* uma resposta definitiva a esta questão, pelo menos dentro do estado atual da base de conhecimentos em educação matemática[25]. No entanto, é possível vislumbrar possíveis "fins" e discuti-los à luz dos conhecimentos construídos pelos alunos. Uma questão central nesta discussão é a institucionalização e sua implicação epistêmica.

Três tipos de cenários podem ser imaginados, o último oferecendo uma alternativa:

i. Os alunos concordaram com uma prova da conjectura. Em seguida, resta ao professor endossá-la. Isso pressupõe que a evidência é aceitável de seu ponto de vista. Deve-se renovar a relação "normal" entre o professor e os alunos, que foi suspensa para permitir a transferência do problema: se a prova não for aceitável, o professor deve negociar a sua rejeição ou modificação;

ii. Os alunos não chegaram a um acordo, então o professor deve intervir para reconhecer as provas aceitáveis e rejeitar as outras. Haverá necessariamente uma negociação, possivelmente em duas direções: uma, para que sejam aceitas as refutações das falsas provas (e tirar as consequências), e outra, para que as diferentes provas sejam aceitas;

iii. Os alunos não chegam a uma solução, então o professor deve encontrar uma

25 Nota2020: nem é possível nos dias de hoje a dificuldade mencionada por Andreas J. Stylianides (2007, p. 15), observada em relatos do gênero que estudei.

saída. Existem duas possibilidades para isso:

a. Ou o professor propõe uma prova da conjectura. Para ser aceita pela turma, esta prova tem de considerar as concepções de ângulo que os alunos mobilizaram e as direções de pesquisa que seguiram. Da mesma forma, o nível de prova deve ser consistente com o nível em que os alunos possam ter tentado: exemplo genérico, experiência de pensamento ou provas geométricas dedutivas clássicas. Este enraizamento nos seus esforços para resolver o problema é uma condição para que a prova proposta seja aceita: a contrapartida implícita da devolução do problema é que a solução do problema seja "razoavelmente" mantida ao alcance da turma.

b. ou o professor se propõe a aceitar a conjectura como verdadeira, deixando em aberto o problema de sua prova. Esta parece ser a posição clássica às vezes adotada em sala de aula: "quando mais avançado, você vai provar ... este ano, vamos admitir ...". No entanto, aqui a situação é radicalmente diferente do que costuma ser, no sentido de que a proposição em questão não foi apenas induzida acidentalmente após algumas observações, mas foi construída como uma conjectura, questionada e problematizada. Sua verdade potencial foi debatida. É a produção de uma prova, após um esforço importante para encontrar uma que é adiada. A proposta do docente assume um valor prático (a investigação deve terminar num período aceitável) e não de princípio (como afirmação de que "os alunos não conseguem compreender").

Acreditamos que esta última opção é bastante improvável, a menos que haja uma classe que seja, digamos, "muito fraca". Da experiência do pensamento à prova matemática estão disponíveis vários tipos de prova, baseados em diferentes concepções do ângulo ou diferentes significados da conjectura. Esta gama de provas, que consideramos abaixo, torna possível esperar um número suficiente de formas positivas para encerrar a sequência.

Uma gama de provas

Na época em que esta sequência didática foi projetada, havia poucos elementos baseados em evidências para antecipar quais provas poderiam ser construídas pelos alunos. Este estado da arte da investigação em educação matemática não foi um verdadeiro desafio, na medida em que o leque de provas possíveis é bastante amplo, tanto em termos de tipos, no sentido das estratégias de resolução de problemas, como no que se refere às várias concepções do ângulo, e em termos de níveis. Além disso, a restrição de construtibilidade de uma prova pelos próprios alunos não é condição sine qua non para o "sucesso" da sequência.

Sem repetir a análise das possíveis provas já apresentadas, evocarei aqui algumas que poderiam ser utilizadas para encerrar a sequência.

É implausível que evidências pragmáticas sejam propostas pelos alunos: a utilização da medição é desqualificada pela construção da sequência; quanto à corte e dobradura, são estranhas às práticas usuais das classes francesas no nível considerado. O experimento crucial não parece ser uma forma adaptada à prova desse teorema particular; entretanto, tal prova poderia ser utilizada para rejeitar a alegação de que seria possível construir um triângulo cuja soma dos ângulos está muito longe de 180°.

Também parece improvável, no nível do sétimo ano francês, que uma prova "euclidiana" ou baseada em ângulo como se rotação fosse proposta pelos alunos. No entanto, tais provas podem ser fornecidas pelo professor, em um nível apropriado, se forem consistentes com as concepções de ângulo dos alunos e os tipos de pesquisa que realizaram. Para as provas euclidianas, as apresentações clássicas são conhecidas, pois para referência ao ângulo de rotação, pode-se sugerir um experimento de pensamento do tipo proposto por Grosgurin (Figura 1), ou a versão abaixo de um livro polonês:

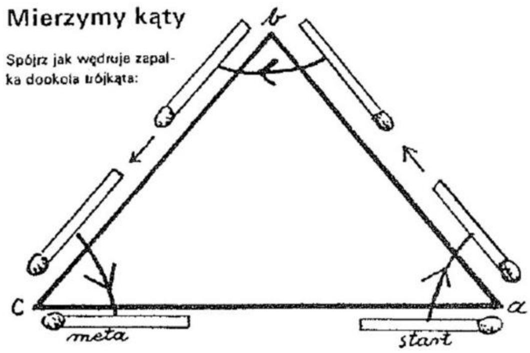


Figura 18.

Em termos das provas intelectuais que os alunos poderiam produzir por si próprios, pode-se pensar na prova intelectual baseada na premissa de que um triângulo retângulo é "metade" de um retângulo. A fonte dessa evidência, do ponto de vista heurístico, é a ideia de buscar um vínculo com o fato adquirido de que a soma dos ângulos de um retângulo é 4 vezes 90°, portanto 360°. Qualquer triângulo pode então ser considerado "decomposto" em triângulos retângulos, traçando-se uma de suas alturas; os alunos podem considerar ambos os casos de altura dentro do triângulo[26] (Figura 19).

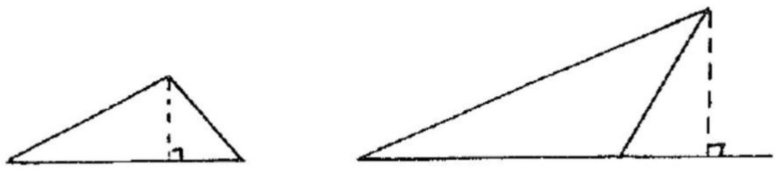


Figura 19.

Análise experimental e implementação

Observações preliminares

A realização de pesquisas experimentais em didática, assim como em educação matemática em geral, esbarra em várias dificuldades, além de restrições específicas ao objeto de estudo[27]. Não me deterei nesses aspectos da pesquisa, mas vale a pena mencionar que elas podem ter condicionado o acesso à observação e, portanto, seu próprio design.

26 Nota2020: curiosamente Adrien Marie Legendre considerou e criticou essa ideia, que generalizou com a seguinte proposição: Se houver apenas um triângulo em que a soma dos ângulos é igual a dois ângulos retos, deve-se concluir que em qualquer triângulo, a soma dos ângulos será igual a dois ângulos retos (A. M. Legendre, 1833, p. 375).
27 Nota2020: desde a engenharia didática (Artigue, 1992).

Não existe um observatório ou laboratório de observação didática que permita a implementação (às vezes importante) da organização experimental e a coleta de dados no ensino fundamental. Tal lugar existia, na França, na Escola Primária da Escola Jules Michelet em Talence, associada ao IREM de Bordéus[28]. Esta ferramenta excepcional para a pesquisa experimental em didática é o produto da vontade corajosa de um pesquisador: Guy Brousseau. Noutros locais, a possibilidade de experiências depende essencialmente da colaboração generosa de professores, alunos e diretores que estão atentos e interessados no desenvolvimento da investigação.

Esta situação precária tem consequências materiais óbvias, mas também mais ocultas, algumas a nível teórico. Nem sempre é possível que o professor esteja totalmente envolvido no projeto de pesquisa, o que seria um funcionamento normal. Isso levanta o problema essencial de sua introdução aos objetivos e problemas do experimento, o de sua apropriação dos diferentes aspectos das situações didáticas a serem implementadas e sua motivação. Isso só pode ser resultado de uma negociação que envolve as próprias concepções do professor a respeito dos processos de aprendizagem, do funcionamento didático, mas também da avaliação da relevância da proposta de organização das atividades.

A implementação de uma experiência em sala de aula é, em primeiro lugar, de responsabilidade do professor. Esta não é apenas uma exigência ética, mas também uma condição inerente ao próprio objeto da pesquisa. A pesquisa experimental didática, portanto, só é possível se a organização experimental for compatível com as práticas profissionais do professor e o funcionamento da instituição de ensino. A organização experimental deve ser capaz de ocupar seu lugar em um processo de ensino que vai além dela, que começou antes

28 Nota2020: veja o “O centro de observação: a École Jules Michelet em Talence” (Brousseau, 1997, Apêndice).

dela e continuará depois dela. Além disso, sua duração deve ser compatível com a organização escolar e a programação curricular prevista ao longo do ano letivo.

Nesta pesquisa, o experimento consistia em não ocupar mais do que duas sessões regulares em sala de aula (cerca de 55 minutos); deve-se reconhecer que o teorema da soma dos ângulos de um triângulo, que não estava incluído naquela época no currículo da sétima série, não poderia razoavelmente ocupar mais tempo. A observação foi realizada em duas escolas de ensino fundamental, D e E, na área de Grenoble, com professores voluntários[29]. Toda a sequência foi gravada em vídeo, não havia outros observadores na sala de aula além do operador de câmera. As análises que apresentamos foram feitas a partir da transcrição completa das gravações em vídeo.

Uma observação em uma sala de aula ordinária

Uma primeira observação ocorreu em uma turma "normal" da sétima série de 25 alunos da escola secundária D em março de 1983. O cenário da sequência foi discutido em detalhes com o professor. Observei e filmei duas sessões de cerca de 50 minutos cada.

Crônica da sequência

(D1) A atividade do aluno é apresentada com referência às atividades atuais.

> Professor (1)[30]: *Hoje continuaremos o trabalho que temos feito até agora: medir ângulos. Aqui está o que estou pedindo: vocês vão desenhar um triângulo, cada um desenha um triângulo em seu caderno ... então cada um meça cada um dos ângulos desse triângulo. Quando terminar, você adicionará essas três medidas. Então farei um registro dos resultados.*

Quando os alunos começam a trabalhar, o professor os visita. Completa as instruções com alguns comentários dirigidos à turma, com o objetivo de especificar alguns pontos práticos que possam ter sido identificados na visita aos alunos:

> Professor (4): *Você dá a medida em graus, de cada um dos ângulos.*

29 Nota2020: a abordagem ética na década de 80 era respeitosa, mas não tão formal quanto hoje, então essa tradução segue os padrões atuais, não mencionando a localização das escolas nem os nomes dos alunos.
30 Nota2020: este número entre colchetes localiza o enunciado nas transcrições.

Professor (9): *Se você não consegue ver muito claramente, estenda os lados.*

Algumas das intervenções pretendem chamar a atenção da turma para pontos considerados importantes em relação às dificuldades de alguns alunos. Na verdade, é o diálogo iniciado com um dos alunos que se torna público:

“O tamanho do transferidor”:

Professor (11): *Se não temos o mesmo transferidor, não temos a mesma abertura[31]?*
A classe (12): Se, se ... obrigado.
Professor (13): Nós medimos em que unidade [...] em grau. O grau no seu ... é uma pergunta interessante [para a classe] o grau no transferidor de Kar é o mesmo que o grau no transferidor de Murielle?
A classe (14): Mas é claro.
Kar (15): Bem, como um é maior que o outro, não vamos chegar ao mesmo lugar.
Professor (16): Eu realmente não entendo o que você quer dizer. Se um é mais alto que o outro...?
Kar (17): Se um for mais alto que o outro, não será o mesmo que aquele ali.
Professor (18): É a distância entre os dois médios-direitos que você mede, Kar, quando você mede com um transferidor? É o comprimento que você mede?
Kar (19): Não.
Professor (20): Esta é a abertura do ângulo. Se eu desenhar um ângulo como este [no quadro negro], muda este ângulo quando eu estendo os lados?
A classe (21): Não.
Professor (22): É sempre o mesmo ângulo. Não é o comprimento aqui que você mede, Kar, é a abertura do ângulo [o professor ilustra com um gesto no quadro negro].

“Designação dos ângulos”:

Professor (23-24) [a X]: Você escreve AB igual a 120° [à classe] se você nomeou os vértices do triângulo que você pode chamá-los ... se você nomeou os vértices do triângulo A, B, C, como você pode chamar os ângulos?
A turma [com o professor] (25): A-B-C ... [Professor: como os...?] .... vértices.
Professor (26): O que geralmente é chamado de AB?
A classe (27): Os segmentos.
Professor (28): Segmentos antes, então não é possível designar um ângulo com esta notação, não é?

31 [28] Em francês: *écartement.*

As intervenções com os alunos visam encorajá-los a trabalhar ou redefinir as instruções; como, por exemplo, para um aluno que desenhou três ângulos independentes em sua folha de papel, em vez de um triângulo.

(D2) A coleção de resultados é exibida como um histograma.

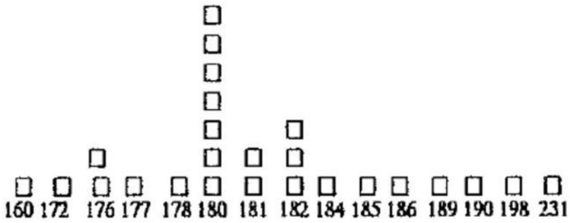


Figura 20

O professor aceita todos os resultados de forma neutra, sem comentários. No entanto, as propostas 160° e 231° provocaram fortes reações na turma, enquanto os demais resultados foram recebidos de forma bastante indiferente. O aluno que propôs 231° mudará seu resultado para 180°, que o professor aceita com sentimento misto.

O professor então convida a turma a fazer comentários, simplesmente repetindo as frases, "mostrando-as" à turma, por assim dizer. Em alguns casos, uma sentença ou correção é passada:

San (84): Tudo acontece entre 150 e 200.
Estudante (92): Há muitos 180.
Professor (93): Esse é um ponto interessante.
Estudante (97): A cada 180, eles têm um ângulo plano.
Professor (98): 180° corresponde a um ângulo plano.
Estudante (99-100): Existem vários triângulos, não têm os mesmos ângulos, mas têm a mesma soma.
Professor (101): Você acha que eles têm a mesma soma?
Estudante (102): em torno de 180.

(D3) A transição para a próxima situação é baseada nesta última observação.

Professor (103): Entre os alunos que encontraram 180, todos eles desenharam o mesmo triângulo?

Um aluno (104): Não, talvez não, hein?

O professor então apresenta a seguinte atividade:

Professor (105): Isto é o que lhe vou pedir para fazer agora. Você escolheu o seu triângulo e mediu os ângulos deste triângulo. Bem, desta vez vou dar-vos a todos o mesmo triângulo. Vocês vão fazer o exercício novamente, mas com o mesmo triângulo para todos vocês.
Estudante (106): Para ver se encontramos o mesmo.

Seguindo esta última observação, ambas as visões “sim” ou “não” são expressas. Em particular um aluno diz: “sempre há um ou dois milímetros que escapam” (Estudante 117). O professor então termina a instrução:

Professor (124-140): Você vai fazer uma aposta antes de começar... você aposta na soma dos ângulos deste triângulo... nas folhas pequenas que eu distribuo, você anota a aposta. E se possível, se você tiver uma razão, você indica-a ... Eu apanho os lençóis antes de começares a medir... fazes cada um por ti, não com o teu vizinho, se possível... não fazes batota, dás as medidas que encontras. Você não faz batota para caber nas suas apostas.

(D4) Quando os resultados são recolhidos pelo professor, cada medição é confrontada com a aposta.

Cada aluno é convidado a fazer um comentário. Abaixo estão os pares (aposta, medida) seguidos do comentário do aluno (às vezes repetido pelo professor quando o aluno é inaudível):

Isa (143): (180, 180) - *Você deu uma olhada.*
Mur (150): (180, 180) - *[ela avaliou todos os ângulos]*
Seb (152): (270, 180) - *O ângulo parecia-me maior do que quando medi.*
Chr (158): (260, 180) - *Parecia maior para você do que quando você mediu.*
San (162): (180, 180)
Flo (164): (180, 182) - *Você está dois graus fora.*
San’ (166): (250, 181) - *Já o grande triângulo e, em seguida, um ângulo que era grande [A classe ri]*
Fra (174): (180, 180)
Yan (174): (180, 180) - *Visão rápida.*
Dav (175): (260, 163) - *Este ângulo influenciou você.*
Jea (185): (220, 180) - *Porque o ângulo ... é um pouco maior que o ângulo reto.*
Barra (193): (160, 180) - *Vi que havia dois pequenos ângulos, então disse que é menor que 180.*
Carro (197): (180, 180)
Kar (198): (180, 180)
Dom (199): (250, 180) - *O triângulo é muito grande ... e o outro era pequeno.*
Lud (207): (180, 180)
Kar '(209): (180, 180)
Phi (213): (180, 180) - *Há um ângulo reto e dois agudos.*
Phi '(217): (180, 180) - *Você diz que tem que ser 180. [Sala de aula agitada]*
Val (221): (184, 181) - *Os três ângulos não têm o mesmo grau.*
Eri (222): (440, 180) - *O triângulo parecia grande para você. [A turma ri]*
Abd (225) (185, 180)

Kar "(227): (180, 180)
Rac (229): (180, 180)
Ald (231): (180, 180) - *Mas eu pensei que era um ângulo reto e os outros dois eram 45 °*.

No quadro negro, o professor construiu o histograma à medida que as medições eram coletadas:

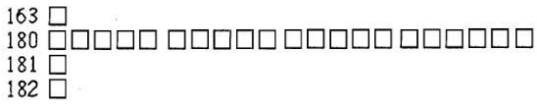


Figura 21.

Os alunos são então convidados a comentar.

Aluno (237): *Se você os colocar juntos, formará um ângulo plano*.
Aluno (240): *163 é surpreendente.*
Aluno (243): *440 é um grande erro*.
Aluno (245): *Porque um ângulo vai até 360.*

Aluno (246): *Mas a soma!*
Aluno (251): *Se ultrapassar 360, os ângulos devem ser obtusos*.
Isa (257): *Deve haver pelo menos um ângulo reflexo*.

Essas observações não consideram que todos os alunos tenham o mesmo triângulo. O professor intervém para fazer com que a classe se concentre neste ponto:

Mestre (258-260): *Alguém disse que deveríamos encontrar a mesma coisa. Então, todos acham a mesma coisa? [A turma: não!] Seria normal encontrar a mesma coisa ou não*?

A classe expressa opiniões mistas sim/não, com alguns alunos compartilhando pensamentos mais precisos:

Dom (263-267): *O triângulo pequeno pode ser igual ao grande, mas são apenas os ângulos que você deve olhar; não é o comprimento ... o que me chocou foi o tamanho.*
Professor (272): *Devemos absolutamente todos encontrar o mesmo resultado?*
Aluno (275): *Com medições muito precisas.*
Aluno (281): *Eles devem ter perdido o transferidor*.
Professor (284): *Eles leem até 1 grau.*

Após essa troca, e sob pressão de alguns alunos, o professor pede a Dav (que encontrou 163°) que refaça suas medidas: “olha só, porque tem gente que pensa que está colocando errado o transferidor” (Professora 287). O aluno confessa “ter lido mal” (Dav 298).

(D5) A primeira sessão termina aqui com o docente que indica que o trabalho terá continuidade na próxima sessão, dois dias depois.

(D6) A segunda sessão abre com o anúncio da continuação da atividade de medição dos ângulos de um triângulo.

Professor (300-5): Vamos continuar o trabalho de medir os ângulos de um triângulo e a soma destas três medidas... desta vez - desta vez vou dar-vos três... terão os mesmos três triângulos, e terão de medir os ângulos e somá-los. Você também, antes, como da última vez, terá que fazer uma aposta na soma das medidas de cada um dos triângulos. E outra pequena peculiaridade é que você não vai trabalhar sozinho, você vai trabalhar em grupos de três [...] eu vou te dar os três triângulos primeiro e você tem que fazer uma aposta, então não comece logo a levar os transferidores [...] você faz uma aposta para cada triângulo, para o grupo, se você não concordar, você discute.

O professor acompanha a atividade de cada grupo visitando-os, mas sem intervir, principalmente nos seus debates. Cada grupo fornece os resultados de suas medições e, em seguida, é confrontado com as apostas que fez.

(D7) São solicitados comentários sobre a correspondência das apostas com as medidas.

O relato abaixo indica os pares (aposta, medida) para cada um dos triângulos A, B, C, seguidos do comentário do grupo de alunos (às vezes repetido pelo professor quando o aluno é inaudível):

Grupo *(311) - (130, 180) (130, 177) (130, 180) (130, 180)*
Tínhamos que apostar, apostávamos ... grande abertura ... tinha uns pequeninos, então podia ser igual aos outros ...
Grupo *(335) - (200, 180) (180, 180) (180, 180) (180, 180)*
Nesse ângulo, aquele grande ali que nos enganou ... pensei que já estava 180 graus.
Grupo *(349) - (175, 184) (130, 177) (30, 180)*
O triângulo era pequeno ... então você pensou em 30 para este triângulo ...
Grupo *(370) - (180, 180) (180, 180) (180, 180) (180, 180)*
Grupo *(376) - (180, 180) (180, 181) (180, 180) (180, 180)*
Grupo *(386) - (180, 182) (180, 177) (180, 180) (180, 180)*
Grupo (390) - (180, 180) (180, 180) (60, 180)
Era pequeno.
Grupo *(398) (180, 180) (180, 180) (180, 180) (180, 180)*

Enquanto coleta os resultados, o professor constrói os histogramas no quadro-negro:

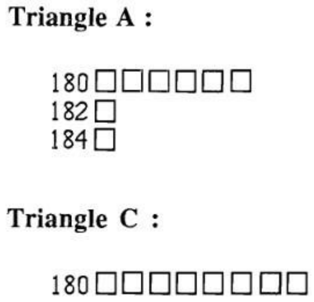


Figura 22.

(D8) O professor convida os alunos a comentarem os resultados obtidos que são apresentados na lousa:

Kar (406): *Muitos deles encontraram 180 para C.*
Aluno (408): *Bem, todos ...*
Aluno (410): *Em todos os triângulos que medimos, é cerca de 180...*
Aluno (411): 170 e 180.
Aluno (414): *Para o B existem diferenças assim porque ele é menor e você tem que estender as linhas retas e ...*
[o professor aponta que é o C que é o pequeno triângulo]
Alunos (419-421): *OC é igual à figura grande, são os mesmos ângulos [comentários dos alunos resumidos pelo professor].*

Como não houve outros comentários, o professor reabriu o debate estimulando intervenções que levassem à formulação da conjectura:

Professor (425): *Agora, se eu lhe desse um triângulo de minha escolha ... você estaria disposto a apostar na soma das medidas dos ângulos desse triângulo ...*
A classe (426): *sim, sim.*
Professor (427): *Alguém pode me desenhar um triângulo cuja soma dos ângulos esteja muito longe de 180°?*
Classe (428): *não, não.*
Professor (429): *por exemplo, 150 ° ... quem poderia desenhar um?*
Aluno*: Talvez.*

Alguns alunos afirmam que encontrou-se 187°, mas outros apontam que isso está relacionado a erros de medição (Aluno 434-5). Um deles (Aluno 436) expressa que "se formos muito precisos, é obrigatório [que a medição seja 180°]". ***O professor exerce um pouco mais de pressão para incentivar o aparecimento da controvérsia da qual, na confusão das intervenções, podem-se ver algumas pistas:***

Professor (437): *Você diz "é obrigatório". Você diz que é obrigatório, mas tem certeza, certeza, certeza de que está perfeitamente 180° quando vê os resultados?*

Os alunos expressam opiniões mistas: sim-não

Reconhecendo essa incerteza, o professor lembra o pedido de um triângulo, cuja soma dos ângulos seria 150° ou, na falta disso, uma prova de que a soma é sempre 180°. Um aluno então propõe um triângulo, cuja soma dos ângulos é 4°:

Aluno (450): *... de 4 ...*
Professor (451): *Não entendo do que você está falando, você desenhou um triângulo?*
Mesmo aluno *(452): Sim, e no total tenho 4 ...*
Professor (453): *4 graus, a soma dos ângulos 4 graus, verei.*
Aluno (463): *Encontrei 6 graus.*
Professor (464): *6 graus, deixa eu ver ... é ... me mede aquele ali ... aquele ali ... é quase um ângulo ...*
Karen (465): *Certo ...*
Professor (466): *Em ângulo reto, como diz Karen ... isso aí, aí ... aquele ...*
Mesmo aluno (467): *Oh, sim ...*
Professor *(468, aceitando um aluno de volta): Em sua opinião, um triângulo não pode ultrapassar 180°.*
Aluno (469-71): *Um pouco mais ... quando errou na medida.*
Aluno (476-78): *Você pode desenhar qualquer coisa ... será igual a ... 180 ... um pouco mais um pouco menos ...*
Aluno (480): *Você pode colocar menos uniforme, você pode fazer triângulos menores ... eu acho*
Aluno (487): *Não é o triângulo, são os ângulos que contam.*

Lud apresenta uma explicação que ele preparou. Ele é mal compreendido, mas tenta explicar:

Lud (500): *Se encontrarmos medidas diferentes [de 180°] é porque ... os ângulos estão medidos erroneamente. Os setores dos ângulos continuam ao infinito e sempre encontraremos 180° na soma dos ângulos dos triângulos.*

A aula barulhenta é dividida entre "sim" e "não", quando toca a campainha que marca o final da sessão. Com alguma confusão, um aluno afirma ter encontrado um triângulo cujos ângulos somam 130°.

(D9) O professor conclui, revisando a atividade e anunciando que ela continuará durante a próxima sessão (que só poderia acontecer duas semanas depois por causa do feriado da Páscoa):

Professor (511): *encontramos triângulos, cujos ângulos somam 177° e 187°. Bem, tente me encontrar triângulos cuja soma dos ângulos esteja muito longe disso; se for* *possível. Se você não consegue, veja se consegue concluir algo, ou tente me mostrar algo. Tente continuar este trabalho.*

Análise da sequência

Por ser um seguimento natural de atividades semelhantes na medição de ângulos, a fase de criação do contexto geométrico (D1) desempenha bem o seu papel. Os alunos se envolvem na atividade sem comentários. Por outro lado, as intervenções do professor são inúmeras, visam evitar erros ou dificuldades que sejam potenciais entraves ao desenvolvimento da sequência. Consistem em compartilhar coletivamente a observação de algumas das dificuldades dos alunos, destacando-as e tratando-as como informações de interesse geral (observações sobre o tamanho do transferidor, a designação dos ângulos).

Quando os resultados são propostos (D2), o professor recebe-os sem comentários. De fato, estes resultados podem ser considerados aceites, se se apreciar a neutralidade do professor no contexto das relações normais na sala de aula: a tarefa é apenas uma tarefa técnica, o professor está encarregado de suas responsabilidades habituais. Mas quando os alunos são convidados a comentar, a atitude do professor é menos neutra; algumas das suas observações podem até ser pistas para outras atividades (por exemplo, o professor 93). No entanto, isto não teve consequências, como mostra a observação seguinte.

O fato notável é que "a classe" reagiu fortemente a certos valores propostos como a soma dos ângulos de um triângulo: 160° e 231°. Entretanto, notamos que sete alunos propuseram valores muito distantes dos 180° (mais de 200°). Estas reações aparentemente fortes podem vir do grupo de alunos que obtiveram um resultado próximo dos 180°; este grupo é maioritário (há 18 alunos entre 176° e 182°) e pode considerar-se a si mesmo como representando a normalidade.

Essas ideias de “norma” e “conformidade” foram emprestadas da Escola de Palo Alto, especialmente de minhas leituras da tradução francesa de “How real is real?” de P. Watzlawick (1976)

Um comportamento de conformismo, ligado à produção de uma “norma” a partir das primeiras medições coletadas durante esta primeira atividade, pode explicar por que de sete resultados iguais a 180° durante a primeira fase, passamos a 18 apostas em 180° durante a segunda fase (D3 e D4). Isto não significa que este valor fazia sentido em termos da sua substância - ou seja, o reconhecimento do carácter necessário do invariante.

O diagrama da Figura 23 mostra a distribuição das apostas na segunda atividade:

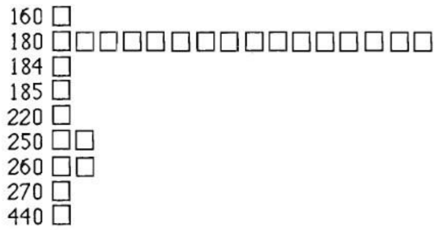


Figura 23.

As apostas acima de 180 ° baseiam-se na presença de um ângulo “grande” no triângulo proposto ou na comparação do tamanho do triângulo com o triângulo previamente desenhado pelos alunos. Por outro lado, nem todas as apostas acima de 180 ° significam que este valor foi reconhecido como o valor a priori da soma dos ângulos de um triângulo (cf. por exemplo Isa 143, Yan 174, Ald 231). O caráter necessário de 180° é reivindicado por apenas um aluno (Phi’ 217). Ele provoca agitação na classe, cuja origem não é identificável, mas que indica que “a questão dos 180°” poderia ser objeto de debate.

Apenas um valor, que é 440°, é rejeitado por manifestações ruidosas da “classe”. Não é o valor da soma dos ângulos de um triângulo que está em jogo aqui, mas a consideração de qual é um valor possível da medida de um ângulo. Conforme demonstrado pela troca que se seguiu (Ele 245-257), na visão de alguns alunos esse valor não poderia ultrapassar 360°; e por assim dizer que ele se aplica à soma dos ângulos que foi definida como a justaposição sem sobreposição dos setores angulares.

O problema de decidir sobre o valor da soma dos ângulos do triângulo dado não é levantado, embora tenha sido mencionado por um aluno como um objetivo plausível da atividade (Ele 106). É o professor que o traz de volta (Professor 272). Os poucos comentários feitos pelos alunos mostram que a ideia de incerteza de medição está presente na aula, mas não está institucionalizada; o fim iminente da sessão pode tê-lo impedido.

No final desta sessão (D5), o professor indica que o trabalho terá continuidade, mas sem especificar qual trabalho é. ***Implicitamente e com clareza suficiente, é um trabalho sobre a medição dos ângulos de um triângulo. O chão está pronto, mas a conjectura ainda não está formulada.***

A terceira fase (D6 e D7) mostra que a concepção que liga o tamanho de um triângulo ao valor da soma de seus ângulos é forte o suficiente para resistir ao debate coletivo diante de casos bastante "perturbadores". O comportamento de conformismo possivelmente adotado na fase anterior é fortemente abalado, podendo-se notar em particular um grupo que aposta 180° para A e B, mas não para C, considerado muito pequeno (Grupo 390), ou outro que não aposta 180° para A, porque tem um ângulo obtuso (Grupo 335).

Nesta situação, a classe se divide em dois grupos:

- - Quatro equipes (ou seja, cerca de 12 alunos) não chegaram à conjectura de que 180° é a soma dos ângulos de um triângulo. No entanto, para dois deles 180° é de alguma forma um valor privilegiado (Grupo 335 e 390); para outro existe uma certa ideia de invariância combinada com a consideração do tamanho dos triângulos, um compromisso que levou à aposta de 130° para cada um dos três triângulos (Grupo 311).

- - Quatro outras equipes parecem estar convencidas de que a soma dos ângulos de um triângulo é 180°.

O fato de 180° ser o resultado efetivamente obtido na maioria dos casos (18 medidas das 24 realizadas) indica um possível consenso sobre este valor; é bem provável que os alunos primeiro encontrassem valores próximos a 180°, e depois os corrigissem.

Se o precursor de uma conjectura está presente, testemunhado por declarações de vários alunos, ela ainda não foi identificada como tal e o problema de sua prova não foi levantado.

O incentivo do professor (D8) gerou um impasse. A intervenção (Prof 437) visava fazer com que pelo menos um aluno levantasse o problema da prova que poderia então ser retomada e institucionalizada. Na verdade, o obstáculo neste ponto pode ter sido um forte consenso na classe sobre a validade do resultado em questão; os alunos não entendem desde o início o que se espera deles. O desafio de encontrar um triângulo de 150° tem o peso da autoridade do professor e, portanto, abala as concepções mais frágeis. O sucesso desse incentivo - alguns alunos buscaram triângulos cuja soma dos ângulos está muito longe de 180° - justifica o professor introduzir a exigência da prova como parte de uma alternativa - fornecer um exemplo ou prova de que isso é impossível - que pode preservar a devolução à classe da responsabilidade de formular a conjectura e o problema de sua prova (D9). Desta forma, a autoridade do professor torna-se uma ferramenta para a devolução bem-sucedida, o que, no entanto, implica uma abdicação (momentânea). Mas voltarei a este ponto, que parece contraditório, na conclusão deste estudo.

O encerramento da situação não poderia ocorrer durante a sequência observada. Quando os alunos voltaram das férias da Páscoa, todos desistiram de construir um triângulo, cuja soma dos ângulos seria diferente de 180°. O professor encerrou então a sequência, trazendo a “prova pitagórica”, tendo o estudo dos ângulos com lados paralelos sido efetuado nas aulas anteriores. Sem observação, não há elementos suficientes para avaliar o status dessa prova para os alunos, então o problema da institucionalização permanece.

Uma observação em uma sala de aula experimental

O experimento foi realizado em uma escola secundária que seguia os princípios de uma abordagem inovadora cunhada por Marc Legrand (2002): "o debate científico em sala de aula", cujo pressuposto básico [é] que os alunos não podem nem enunciar conjecturas nem propor provas, a menos que tenham sua própria opinião sobre o que é cientificamente razoável e o que não é. O aluno que deseja participar [...] é convidado a falar diretamente com os outros alunos da seguinte forma um tanto iconoclasta: "Eu acho que essa ideia é válida ... que esse argumento prova ou contradiz uma ideia defendida por mim ou por outro ... e aqui estão minhas razões." … Durante tal debate, o papel do professor é responder pelo aspecto científico do debate, mas não atestar a verdade nem a validade dos resultados e argumentos que são propostos. Somente no final do debate o professor institucionaliza os resultados, fornecendo as definições e teoremas apropriados e identificando resultados atraentes, mas errados, o tipo de erros recorrentes que precisam ser corrigidos continuamente. Essas regras são explicitadas; portanto, eles são conhecidos dos alunos desde o início de seu envolvimento nesta prática inovadora.

Uma segunda observação ocorreu em uma turma da sétima série de 23 alunos do ensino fundamental em janeiro de 1984, que já estava engajada em um projeto inovador voltado para a renovação das relações entre professor e alunos, e entre os próprios alunos, a fim de criar "as condições para o debate científico em sala de aula" (Legrand, 1986)[32]. Este projeto foi conduzido pelo grupo de pesquisa "Learning and Reasoning" do IREM de Grenoble (1985). O cenário da sequência foi precisamente discutido com a professora. Observamos e filmamos duas sessões de cerca de 50 minutos cada.

O professor responsável pela turma, integrante do grupo de pesquisa IREM, aplicou a sequência com outro integrante desse grupo. Os alunos, portanto, tiveram simultaneamente dois professores naquele dia. Esta situação não era excepcional, correspondia a uma forma de trabalho coletivo do grupo de investigação IREM ao qual os alunos estavam habituados. Na verdade, tudo aconteceu como se houvesse apenas um professor em sala de aula, mas duas vozes: cada uma se esvaindo diante das intervenções da outra. Os fenômenos específicos de nosso estudo não parecem

32 Para uma apresentação em inglês dessas ideias e trabalhos, consulte Legrand (2002). Marc Legrand inspirou o projeto do grupo de pesquisa IREM e foi um pensador influente para a evolução do ensino da matemática, com especial interesse pelo ensino superior.

ser impactados por esta presença de duas cabeças, então eu tomei a decisão de apresentar esta observação e sua análise "fundindo" as vozes de ambos em uma voz: a do professor.

Por outro lado, a abordagem pedagógica original do grupo de pesquisa do IREM, por meio de suas constantes referências às regras do "debate científico" (Legrand, 1993, pp. 124-142), torna essa aula um lugar especial. Nossa hipótese era que a diferença com uma "classe ordinária" diz respeito principalmente às condições de devolução, aqui potencialmente facilitadas, mas que as condições epistêmicas de construção da conjectura não seriam modificadas.

Crônica da sequência

(E1) A atividade é introduzida no início, sem nenhuma referência particular às atividades das aulas ministradas anteriormente. No entanto, segue-se às sessões dedicadas ao estudo dos ângulos e sua medição:

> Professor (1)*: vocês vão desenhar um triângulo nos seus cadernos ... muito diferente um do outro ... do tamanho que vocês quiserem, da forma que quiserem. E grande o suficiente, porque vão medir os ângulos do triângulo e não deve ser muito pequeno [...] desenhei várias formas [no quadro], mas cada um faz um único triângulo [...] Uma vez que vocês os desenharam, denominem vértices A, B e C.*

Os alunos fazem as formas solicitadas, mas com uma tendência muito marcada, para alguns, de se conformarem com as desenhadas no quadro. O professor intervém para que os alunos se distanciem destes exemplos:

> Professor (2-3*): Desenhei dois triângulos no quadro negro, há muitos que se sentem obrigados a desenhar dois triângulos ... vocês desenham um triângulo, mas com a forma que quiserem. Eu coloquei duas formas no quadro, mas vocês podem ...*

Em seguida, o professor conclui a instrução da tarefa:

> Professor (3-11): *Depois de fazer isso [desenho], vocês denominam A, B e C ... os três vértices do triângulo ... e então os medem e, em seguida, ao lado dos seus triângulos, vocês escrevem as medidas ... bem, quando vocês mediram os três ângulos ... eu acho que todos descobriram ... vocês adicionam as três medidas juntas.*

Um exemplo (Figura 24) de apresentação é exibido no quadro negro:

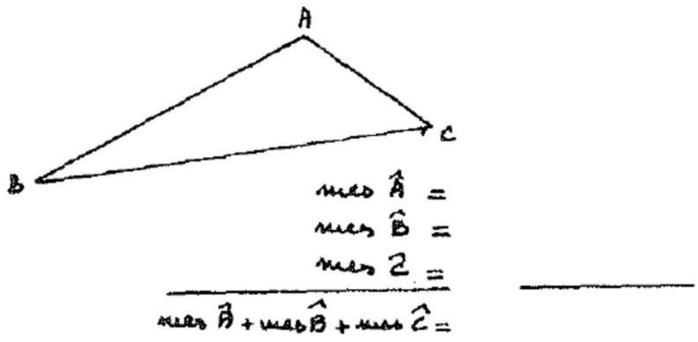


Figura 24.

Alguns alunos têm dificuldade em utilizar o transferidor, o professor dá conselhos e depois faz uma apresentação para a turma:

Professor (10): *Observem cuidadosamente as medidas que encontraram. Se correspondem a ângulos agudos ou obtusos. Ontem aprendemos a reconhecê-los olhando para eles [...] para você olhar suas medidas.*

(E2) Um histograma (Figura 25) mostra os resultados

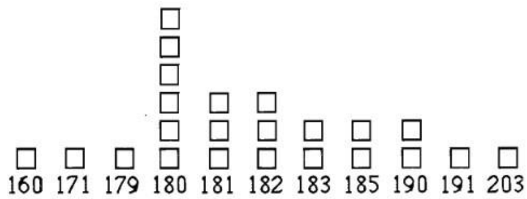


Figura 25.

O professor recebeu esses resultados sem comentários particulares, exceto por duas propostas que foram rejeitadas:

Aluno (15*): Eu, senhor, tive 185,5 ...*
Professor (16)*: 0,5 próximo né ... com os erros de ... eh, é difícil ... então ...*
Aluno (18)*: 180,5*
Professor (19): *180,5 você me deu o quê? 180, o que você acha entre 180,5 e 180 ... ou 185,5 e 185*
Aluno *(20): Arredondamento.*
Professor *(*21*): E arredondando por quê? Porque é mais simples ou tem um ...*
Aluno (22): *Para fazer o cálculo.*
Aluno (23*): É um pouco complicado de fazer.*
Professor (24)*: É um pouco complicado, é verdade que complicaria um pouco a nossa vida. Você não tem nenhuma outra razão para, hum ... arredondar, não ...*

Além disso, dois resultados provocam reações na classe: 163° e 203°. Um aluno pergunta:

> Aluno (27-31)*: Como ela achou o 203 [...] porque quase sempre está na casa dos 180º.*

Um debate começa sem que o aluno desafiado tenha respondido diretamente à

pergunta*:*

> Aluno *(32): Ele pode ter pegado um grande triângulo ...*
> Um aluno (35*): Eu também fiz um grande triângulo [e obtive um resultado próximo de 180 °]*
> Aluno (36): *Não é isso, deve ter se enganado porque se você fizer um triângulo grande na parte superior, automaticamente na parte inferior ficará menor,*
> Aluno (42*): Diz que se o triângulo é grande na parte superior, deve ser pequeno na parte inferior. Não sei se é verdade ... Pode ser perfeitamente grande porque quanto maior, maior aumenta a medida*
> A classe (43) *[protestando]: Não!*
> Um aluno (45-46)*: Todos os triângulos que fizemos lá, são 180 de ... quando você os soma ... 203 é um exagero demais.*
> Aluno (49*): Acho errado porque ele diz que o triângulo é grande; mas se você o tornar grande no topo, no fundo será pequeno.*
> Aluno (53*): Acho que ele tem um ângulo agudo e acho que mediu errado. Quando ele tirou [o transferidor] do outro lado, então ao invés de dar para ele, eu não sei ... 30, dá 150 ...*
> Professor (58): *Não é impossível, porque quando eu passei ... muitos de vocês colocaram ... o seu zero, você colocou no 180, aliás deu um ângulo ...*
> *Aluno (59): Estou dizendo que o que ele falou ... que o triângulo é maior, dá um número maior, não é verdade porque eu ... ele fez um triângulo maior que o do Dav, e acho que é menor...*
> Professor (62*): Então, não teria nenhuma relação [ou seja, o tamanho e o resultado].*

(E3) O professor faz um balanço do debate e passa para a próxima atividade

> Professor (64*): Alguns de vocês acham que deveria ser sempre igual [...] mas há outros que não concordam; bem, alguns de vocês dizem que se ele encontrou algo diferente pode ser porque ele cometeu um erro, e então há outros que dizem, bem, dependendo se você faz um triângulo maior ou menor, bem, os ângulos vão mudar. E, no momento, nem todos concordamos, nem todos dizemos a mesma coisa.*

Um aluno pede que seja verificado o resultado de 203°, mas o professor resiste,

invocando o contrato de "debate científico" explicitamente estabelecido nesta aula:

> Professor (68): *Já expliquei que se vocês dois ou três estivessem pensando alguma coisa e toda a turma pensasse o contrário, você não precisava desabar e dizer: não, não, deve ser igual aos outros. Você pode muito bem-estar certo três contra os outros. Portanto, o fato de ele ser o único que encontrou 203 não prova automaticamente que ele é o único que estava errado.*

O professor apresenta a próxima atividade:

Professor (79 - 81): Ok, então agora vamos dar a todos o mesmo triângulo. Nós os fotocopiamos, vocês vão fazer a mesma coisa novamente, medir os três ângulos novamente, e somar as três medidas novamente [...] vocês tentam de novo num relance ... Eu peço que não o meçam... Eu dou um pedaço de papel onde cada um escreve seu nome e seu primeiro nome [...] no papel está escrito "Aposto que a soma dos ângulos de um triângulo vale: ...", e vocês o completa. Vocês não falam em voz alta [...] para este triângulo [...] vocês olham atentamente para o triângulo à sua frente ... à primeira vista vocês tentam descobrir quanto cada ângulo faz e quanto vale a soma.

(E4) Quando os resultados foram coletados, dois histogramas foram plotados na lousa, um para as apostas, outro para os resultados das medições e a soma.

O professor não comparou a aposta com o resultado de cada um dos alunos.

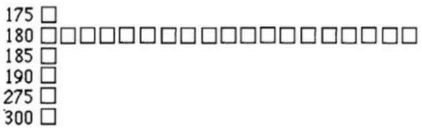


Figura 26.

Histograma de aposta

Este histograma não leva em consideração alguns comentários adicionais escritos pelos alunos em sua folha de papel no momento da aposta. Sete alunos apostam 180°, mas três deles adicionam o comentário "no máximo 180°" e outros três adicionam o comentário "180° em média"; a aposta para 175° foi justificada, por assim dizer, por informações adicionais: "o primeiro é 35°, o segundo 90 e o terceiro 40".

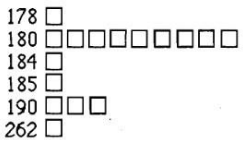


Figura 27.

Histograma de medições

Os alunos riem do resultado 262°, o professor então intervém para lembrá-los novamente da regra sob a qual a classe está funcionando:

Professora (85): *Vocês sabem que já foi dito várias vezes que quando alguém fala algo estranho vocês não riem porque não é interessante ... ela tem razão, se acontece.*

Neste ponto a campainha toca o final da sessão, a próxima sessão ocorre após um intervalo de cerca de dez minutos.

(E5) Quando a aula é reiniciada, foram montadas equipes de três ou quatro alunos.

No quadro estão os três histogramas da “primeira experiência”, como diz o professor, o histograma de apostas e medição da “segunda experiência”. A nova tarefa é então dada, o professor não pede apenas meras observações sobre os resultados apresentados, mas comentários elaborados:

> Professor (86-88): *Em cada grupo vocês discutem silenciosamente para que não ouçamos ... o que vocês querem dizer sobre isso e depois em dois minutos compartilhamos o que vocês discutiram entre si [...] para vocês discutam gentilmente dizendo “bem, com essas experiências queremos dizer outra coisa”. Você lembra que não concordamos muito ... vocês tentam discutir isso entre vocês e se você concorda, você tenta pensar em uma frase que vai permitir que você explique para os outros.*
>
> Alguns grupos fornecem as seguintes frases que o professor escreve na lousa:
>
> *(A) Olhando para o quadro, podemos ver que a média é de quase 180°.*
> *(B) Discordamos porque dois pensam 190° e dois pensam 180°.*
> *(C) Independentemente do triângulo, a soma dos três vértices é sempre 180°.*
> *(D) Qualquer que seja o triângulo, a soma nunca excede 180°.*
> *(E) Qualquer que seja o tamanho do triângulo, a soma dos ângulos é 180°.*
>
> Embora nem todos os grupos forneçam uma frase, o professor abre a discussão:
>
> Professor (115): ***Há frases escritas no quadro negro com as quais não concorda de todo... pode dar uma razão para não concordar***.

As reações já haviam ocorrido quando as frases foram propostas, sobre a frase (A) que um aluno havia dito: “O que você sabe sobre isso?” (Estudante 104). Os autores de (E) rejeitam a frase (B) em nome da sua própria afirmação, mas o professor considera isso insuficiente e passa a palavra aos alunos que afirmam ter uma prova:

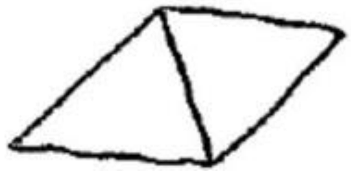


Figura 28.

Aluno (122): *Sim, tenho provas porque um triângulo ... é na verdade uma volta em U*
Aluno (126) [*desenho no quadro-negro]: Eu acho que um triângulo aí, é 180°, é meia volta, e se tivermos este também é uma volta completa*

Aluno (122): *Sim, tenho provas porque um triângulo ... é na verdade uma volta em U*
Aluno (126) *[desenho no quadro-negro]: Eu acho que um triângulo aí, é 180°, é meia volta, e se tivermos este também é uma volta completa*.

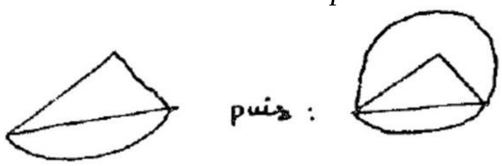


Figura 29.

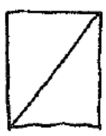
O professor intervém novamente, mas desta vez para sair do debate sobre as frases (B) e (E) em que não houve unanimidade:

Professor (139): Bem, neste momento há uma proposta de algumas pessoas que dizem que é 180 e nos deram uma explicação, a que chamaram prova: porque em um triângulo faz uma meia volta e se eu fizer duas meias voltas ou um meio círculo por baixo faz uma volta completa. Há outras frases no quadro negro com as quais você não concorda... você pode explicar melhor?
Classe (140): C.
Professor (141): O que diz a frase C?
Classe (140): C.
Professor (141): *O que diz a frase C?*

Um aluno lê o texto de (C) no quadro negro.

Professor (143*): O que você acha desta frase? Você diz que nem sempre é 180, é uma média. Então, você tem algo para explicar que ... dá para convencer ... tem uma equipe que fala em média, é você, tem quem sempre fala. Você diz, eu não concordo com aqueles que sempre dizem isso. Você pode ... algo para tentar convencê-los, em que você confia para ...*
Aluno (144): *O transferidor não é muito preciso. Não temos que encontrar 180 ...*

Outro aluno propõe uma prova para 180, o professor lhe pede que a apresente no quadro negro:



Estudante (150)*: Um quadrado, se contarmos os ângulos, 4 de 90° é 360°, é isso. E um triângulo de 180° [ele desenha as duas metades do retângulo como mostrado em frente e as mostra], então um triângulo é de 180°.*
Estudante (151): Ah, sim, isso é o que queríamos explicar,

Os alunos anotam a prova:

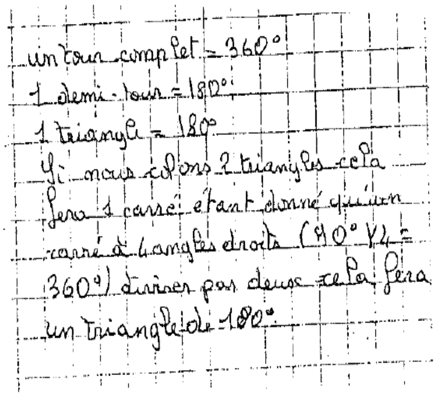

un tour complet = 360°
1 demi-tour = 180°
1 triangle = 180°
Si nous collons 2 triangles cela
fera 1 carré étant donné qu'un
carré à 4 angles droits (90° x4 =
360°) diviser par deux cela fera
un triangle de 180°.

Figura 30.
Prova do estudante (150

Transcrição:

Uma volta completa = 360° 1 meia volta = 180°
1 triângulo = 180°
Se colarmos 2 triângulos, formaremos 1 quadrado. Dado que um quadrado tem 4 ângulos retos (90° x4 = 360°) divididos por dois, isso fará um triângulo de 180°.

Mas alguns alunos ainda não concordam, o professor os convida a tentar convencer os colegas, aos quais eles respondem:

Aluno (159): *Encontramos 190 porque medimos,*
Professor (161): *E cada vez que você encontrou 190 ... no primeiro triângulo e no triângulo que lhe foi dado?*
Aluno (162): *Sim, medimos ...*

O professor não insiste, mas faz um balanço da situação naquele momento e se propõe a ir mais longe:

Professor (163)*: Existem argumentos que foram desenvolvidos, por exemplo: fizemos a medição várias vezes ... chegamos a 190, então ele acredita. E aí tem um certo número de vocês que veio na frente da aula dar explicações para convencer os outros [...]. Vamos tentar ir um pouco mais longe, vamos fazer mais alguns experimentos para chegar ao fundo disso, porque nem todos concordamos no momento.*

(E6) O professor apresenta a próxima atividade; os alunos permanecem em equipes como na fase anterior:

Professor (163-168): *Então a gente vai distribuir os triângulos e mais uma vez vocês não medem [...] vocês não utilizam os seus transferidores [...] ainda peço para colocar o seu nome e, em seguida, o que vocês acham da soma de cada um desses triângulos. Aí vocês vão responder dizendo o que vocês acham ... quando vocês chegam a um bom* *acordo entre vocês, aí vocês apresentam essa resposta [...] se você não concorda, aí você fala: a gente não concorda, tem dois que pensam assim, tem dois que pensam assim [...] e você não mede, eh [...] você pode dar nomes aos triângulos, chamar de A, B, C para diferenciá-los.*

Os alunos demoram bastante para decidir sobre uma aposta e executar as medidas.

(E7) Em seguida, solicita-se que cada grupo dê o resultado de suas medições.

Desta vez, os resultados são comparados com as apostas. Abaixo estão os pares (aposta, medição) para cada um dos triângulos A, B, C, seguido pelo comentário do grupo de alunos (às vezes repetido pelo professor quando os alunos são inaudíveis):

Grupo (169) - (190, 190) (180, 180) (165, 165)
Quero dizer ... as medidas do grande, pequeno e pontiagudo ... são muito próximas.
Grupo (195) - (180, 180) (180, 180) (180, 180) (180, 180)
São todos 180, qualquer que seja a forma em que estejam ... isso é confirmado por suas medidas?
[…] Sim.
Grupo (180) - (180, 180) (180, 180) (180, 180) (180, 180)
Eles não concordam, eles falam que é de 190 a 180 ... é a mesma posição de antes [...] então você concordou em 180, suas medidas o que eles falam [...] eles confirmam o que você disse
Grupo (184) - (180, 180) (180, 180) (180, 180) (180, 180)
Grupo (185) - (180, 180) (180, 180) (180, 180) (180, 180)

Apenas os resultados das medições são mostrados na tabela, eles são anotados sem um histograma sendo desenhado. O professor não questionou todos os grupos, dois não estão listados na lousa; sua aposta foi encontrada em sua folha; para um “A soma é 190°. 180°” para o outro “São 180° ”.

O professor convida os alunos a comentarem os resultados obtidos:

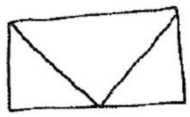
Alunos (192): *Se os compararmos ... o E [estas são as medidas mostradas acima] ... eles dizem que os triângulos são 180° e comparados com o A ... pensamos que eles devem confiar no tamanho*.

Essa posição, reformulada, é submetida à turma. A turma parecia aceitar, mas o professor então apontou que não havia unanimidade:

Professor (197): *Parece que aqui há opiniões diferentes, há quem diga 180, há quem diga 190 ... encontraram maneiras de convencer os outros do que pensam?*

Professor (199): É180*, é sempre a mesma coisa, você fala que é 180: é metade de uma forma geométrica*
Aluno (200): *Senhor, um triângulo já é a metade de uma forma geométrica ... porque dizem que é a metade.*
Professor (203): *Então, você diz, o que isso tem a ver com falar de formas geométricas, uma vez que um triângulo já é uma forma geométrica?*
Professor (205): *Você olha com atenção para ver se o primeiro desenho que é feito no quadro negro. Se é o mesmo que dissemos antes.*

Em seguida, o professor relembra a prova anterior.



Aluno (206): *Sim! ... é diferente porque são três em vez de dois ...*
Aluno (211*): Este é maior do que aqueles dois. Se os colocarmos um ao lado do outro, será igual a este*

(E8) Fim da sessão

O professor intervém com um longo comentário, incluindo citações das tentativas dos alunos de fornecer uma prova.

Professor (214): *Não sei ... Vou dar um pouquinho da minha opinião. Eu vejo uma diferença entre as duas coisas que estão lá, é que tem um retângulo, ele cortou ao meio e aí ele tirou um triângulo. Este triângulo não tem algo um pouco peculiar?*
Aluno (215): *Sim, senhor, tem um ângulo reto.*
Professor (216*): Tem um ângulo de 90°. E aqui, ele tem algo um pouco diferente, em seu método ... aqui, o que mostra neste caso particular? Se houver um triângulo que tem um ângulo de 90°, então você sempre pode fazer uma espécie de retângulo, e então o que foi feito aqui parece mostrar que funciona para aquele retângulo ali, e é bastante particular porque tem um ângulo de 90° e você não pode fazer a mesma coisa aqui, então aqui o que mostra o que você acabou de fazer ... ouça aqui, há uma proposta no quadro que é diferente do que está lá em cima, você tenta mostrar o que mostra . Você pode explicar melhor ...*

[inaudível]

Professor (216): *Agora volte à sua ideia, é metade de uma forma geométrica. Você disse anteriormente que o próprio triângulo é uma forma geométrica, então talvez isso não nos ajude muito ...*

[inaudível]

Professora (218): *O que eu acho que está acontecendo aqui é que o desenho dela ... olha o desenho aqui ... ela desenhou um triângulo igual ao que te deram ... então ela não precisava ter um ângulo reto ... ela desenhou do jeito que lhe foi dado ... e então ela construiu em torno disso ... então o que ela quer dizer aqui, é que esses quatro ângulos aqui são ângulos retos, então o que você pode deduzir sobre seu triângulo inicial. Você pode dizer algo sobre seu triângulo inicial ... por que desta vez cortamos o triângulo em três partes?*

[inaudível]

(E9) O professor então encerra a sequência, deixando em aberto o problema da decisão sobre a validade da conjectura.

Professor (218): *Então, me parece que nessa altura, no momento, ninguém conseguiu realmente convencer os outros ... ou seja, todos trouxeram seus argumentos que vão em uma direção ... nós voltaremos a isso na próxima vez.*

Análise da sequência

A primeira fase (E1) é introduzida sem nenhuma justificativa particular da atividade, isso certamente é aceitável para os alunos, pois seguem as atividades de medição de ângulos; o professor não precisa justificar o que pode parecer uma simples mudança de "embalagem". A instrução da atividade é apresentada em duas partes, primeiro o desenho do triângulo, depois a medição de seus ângulos e o cálculo da soma desses números. Cada uma dessas fases é acompanhada por intervenções que antecipam erros considerados a priori irrelevantes para os objetivos da situação e que visam evitá-los.

Uma dessas intervenções (Professor 1-3) ilustra um paradoxo do contrato didático (aqui no processo de devolução): para que a atividade "tenha sucesso", os alunos devem produzir algum tipo de triângulos, para os quais o professor lhes mostra exemplos em um esforço para libertá-los dos modelos prototípicos, mas os alunos tendem a reproduzir esses exemplos. Além disso, esta ideia de modelo a seguir, e dada pelo professor, é reforçada pelo layout proposto no quadro (ver § 4.3.2.1, E2) ao qual os alunos devem aderir. Na verdade, essa intervenção pretendia apenas evitar erros contingentes que seriam causados por um gerenciamento de dados inadequado.

A coleta dos resultados (E2) ocorre sem qualquer intervenção particular do professor, nem as reações dos alunos; exceto no caso dos valores extremos propostos: 160° e 203°. Este último valor é discutido. Os alunos

O contrato didático confronta o professor e os alunos com um paradoxo didático. Tudo o que o professor empreende para obter os comportamentos esperados dos alunos tende a privá-los das condições necessárias para a aprendizagem da noção visada: se o professor diz o que quer, não pode mais obtê-lo. Inversamente, se os alunos aceitam que o professor lhes ensine o resultado, eles próprios não o estabelecem e, portanto, não aprendem matemática; eles não se apropriam disso. Se, por

outro lado, recusam qualquer intervenção do professor, então a relação didática é rompida: a aprendizagem implica que os alunos aceitem a relação didática enquanto a consideram temporária. (versão resumida de Brousseau, 1997, p.41)	imediatamente se envolvem em um debate sobre sua aceitação (Aluno 32, Aluno 42) ou rejeição (Aluno 35 e seguintes). Os argumentos para sua rejeição são de dois tipos: argumentos sobre a substância (Aluno 36), argumentos referentes a uma norma que está surgindo (Aluno 45-46). Isso não significa que 180° é reconhecido como a soma dos ângulos de qualquer triângulo, mas sim que a forma que emerge do gráfico do histograma marginaliza os resultados extremos.

O professor faz poucas intervenções, mas eles estão claramente preocupados com a validade das afirmações (Professor 58 e 62). Se o debate continuasse, poderia levar à rejeição da concepção errônea (Aluno 59), levando a primeira fase dessa sequência além do planejado. Esse risco é reconhecido pelo professor, que assume o controle da situação e reconhece uma discordância que preserva os debates de validação que se esperam posteriormente. Mas os alunos resistem a esta ruptura, e é ao relembrar as regras de conduta em vigor na aula (Professor 68) que o professor recupera o controle da situação e permite avançar para a próxima atividade. Nesse contexto, pode-se pensar que, do lado dos alunos, tudo se passa como se resultados muito diferentes de 180° devessem permanecer plausíveis.

A segunda fase (E3) é introduzida, insistindo-se no caráter individual da atividade, aliás o professor dá uma indicação bastante pesada sobre uma possível estratégia para atingir a aposta na soma dos ângulos do triângulo, que consiste em avaliar o valor de cada um dos ângulos (Professor 79-81). Esta sugestão poderia ocultar a concepção errônea que esperávamos mobilizar, de fato o confronto da aposta e da medição pode então simplesmente levar os alunos a pensarem em um erro na avaliação de cada ângulo individual.

Observamos (E4) que as apostas favorecem claramente 180°, o que pode ser um indicativo de comportamentos conformistas; quanto às apostas diferentes de 180°, sua origem é indeterminada e assim permanece, uma vez que esses alunos não são solicitados a comentar a possível discrepância entre sua aposta e o resultado de suas medidas. No entanto, a rejeição por parte do professor da reação irônica da "turma" quando o resultado 262° é proposto, lembra aos alunos que as regras estabelecidas do "debate científico" implicam no respeito a toda produção matemática, a menos que possa ser rejeitada por argumentos intelectuais.

A implementação que se segue (E5) é muito diferente do planejado no cenário inicial, mas condiz com os hábitos coletivos de trabalho dessa turma. Essa divergência não deve alterar significativamente a sequência. Por outro lado, isso não se aplica aos comentários feitos aos alunos conforme o planejado. Estes comentários inserem-se aqui no quadro das regras de "debate científico" em vigor nesta aula, realizadas pelo projeto do grupo de investigação IREM. São entendidos como a produção de afirmações que terão então de ser refutadas ou comprovadas no quadro de uma organização acordada do debate de validação.

Nem todos os grupos produziram declarações, o que é uma consequência tanto da administração do tempo, quanto da atividade dos alunos. Todos os alunos têm que estar ocupados: é difícil fazer com que aqueles que chegaram a uma produção com antecedência esperem.

Os alunos têm dificuldade em formular suas provas, mas também em aceitar ou reter, para um exame efetivo, os argumentos que são produzidos. O professor então toma decisões no manejo do debate, evitando trocas que não consigam abrir espaço para outra. De certa forma, garantindo que as tentativas de prova ou refutação sejam escrutinadas, sem que haja decisão sobre sua validade.

Essa segunda fase da situação acabou não cumprindo a função esperada:

- Afirmações que são conjecturas potenciais, cuja construção estava prevista apenas na fase seguinte, são discutidas desde o início, sem que o seu estado seja esclarecido; podem ser meras especulações.

- O problema de saber a soma dos ângulos do triângulo em exame não é levantado.

Quanto às considerações sobre a precisão das medidas, foram deixadas de lado pelas observações do professor na primeira fase.

A terceira fase (E6) pode, portanto, ter perdido parte de sua função, especialmente se considerarmos que ela interrompe um debate sobre a prova que deveria ter provocado. Observamos (E7) a adoção de fato da conjetura por toda a classe, já que cinco grupos de sete (ou seja, 17 alunos) apostaram que a soma dos ângulos é de 180°, depois "acham" 180° como resultado de medições e cálculos; quanto aos outros dois grupos, parecem adotar a ideia de que o resultado obtido deve ser próximo a 180° (por exemplo, o grupo 169). Neste contexto, em que a turma parece ter chegado a um consenso sobre a invariância da soma dos ângulos de um triângulo, a produção de uma prova é uma resposta às exigências do professor que se baseia nas regras explicitamente em vigor e que enfatiza que não há uma unanimidade rigorosa.

As propostas são feitas, mas não há um debate real entre os alunos: a responsabilidade pela validade da conjectura não é transferida para a classe, ou possivelmente as convicções dos alunos são muito fortes para que eles se envolvam em um processo de validação. As provas são formuladas de maneira desajeitada ou incompleta, sem trabalho significativo em sua formulação. Os alunos são privados dessas formulações pelo professor que assume essa tarefa e, por fim, esvazia a interação desejada de seu significado. Porém, é possível pensar que a proposta de prova baseada na divisão do retângulo em dois triângulos retângulos tenha o apoio da "classe". O impacto da crítica do professor não é claro.

À semelhança do caso anterior, a situação não pôde ser encerrada no final das duas aulas. Na aula seguinte - à qual não compareci - o professor, considerando a prova proposta muito insatisfatória, encerrou a sequência pedindo aos alunos que admitissem a conjectura e adiando a produção da prova. Ele relatou, no entanto, que os alunos geralmente acharam a prova da decomposição de um retângulo convincente. Mas esta não era uma informação precisa o suficiente para concluir sobre o status epistêmico de sua escolha de conclusão para aquela sequência.

Comparando as duas observações

As observações ocorreram no contexto de práticas muito diferentes: a de uma classe, digamos, ordinária - no sentido literal do termo - e a de uma classe que é o campo de uma pesquisa-ação, cujos objetivos são as intelectuais autonomias dos alunos e sua iniciação ao debate científico[33].

Tivemos que negociar a implementação do experimento nesses dois contextos, tornando-o aceitável e dando-lhe sentido em relação às práticas profissionais dos professores que o implementaram. Na aula “ordinária” (aula D) o problema principal era a introdução de um novo tipo de interação, tanto com o professor como entre os alunos, cujo ponto crucial era a bem-sucedida devolução à classe do problema de provar uma conjectura. Como salientei mais tarde, a novidade de tal situação por si só poderia ser uma fonte de fracasso na experiência. Pelo contrário, a segunda classe (classe E) pode parecer oferecer um contexto mais favorável, já que os alunos foram sistematicamente introduzidos à noção de conjectura e ao debate de validação, em particular à necessidade matemática e social da prova.

A inicialização da sequência teve lugar de forma semelhante em ambas as classes, quer a ligação com atividades anteriores tenha ou não sido explicitada. Ambos os professores iniciaram intervenções para assegurar uma base prática sólida. Eles ajudaram *a construir e estabilizar o contexto matemático* no qual o problema seria construído mais tarde.

Depois dos resultados terem sido recolhidos, os alunos da turma D fizeram algumas observações. Esta atividade pretendia apenas completar a primeira fase, embora de uma forma

33 Note2020: no sentido de Marc Legrand (2001).

bastante artificial; pode ter aparecido aos alunos apenas como um momento do ritual escolar. Na classe E, por outro lado, começou um debate no qual um resultado que parecia muito diferente dos outros foi rejeitado. Desta forma, o aluno mostrou que realmente aderiu às regras de funcionamento estabelecidas na classe, que o professor lembrou precisamente para terminar a discussão (§ 4.3.1., E3). De fato, o professor quis preservar a sequência, evitando a formulação prematura da conjectura. Pode-se notar que nada impediria que o caso deste resultado fosse totalmente resolvido. De fato, isso só teria o efeito de reforçar um fenômeno que surgiu em ambas as aulas e que não tínhamos previsto: a criação de uma norma assim que as primeiras medidas fossem produzidas: é preciso encontrar em torno de 180°. Os alunos de ambas as turmas se mostraram divertidos quando se afastaram demasiado dela. Mas isto não é de forma alguma, no que diz respeito à "classe", a conjectura cuja construção se procura. Os resultados extremos poderiam ter sido verificados e corrigidos sem risco, se isto fosse a pedido dos alunos.

Este fato notável da criação de uma norma assim que as primeiras medições são examinadas, é revelado pelos acontecimentos que acabam de ser recordados, e confirmado pelo reforço das apostas em 180° na atividade seguinte e ainda mais pela esmagadora maioria de 180° como valor calculado, tanto na classe D como na classe E. Este último indicador é o mais significativo porque implica que houve correções "para 180°" dos resultados inicialmente obtidos. Isto não significa, contudo, que os alunos tenham adquirido a ideia de que a soma dos ângulos de qualquer triângulo é de 180°. Assim, na classe D, 21 dos 25 alunos "acham" 180° para o triângulo proposto, mas durante a terceira atividade e após uma discussão alguns deles concordam num valor diferente para um dos três triângulos (tais apostas são feitas por 12 alunos). O conformismo na origem destas primeiras respostas é essencialmente frágil porque não se baseia no conhecimento. O conformismo não será suficiente para lidar com as seguintes situações em que dará lugar às concepções dos alunos que, embora errôneas, são o *seu* "verdadeiro" conhecimento.

No final desta segunda fase, os objetivos traçados foram alcançados de formas desiguais:

- - Os comentários que os alunos são convidados a compartilhar não conduzem de forma "natural" ao requisito explícito de que todos deveriam ter encontrado o mesmo resultado para o mesmo triângulo, mesmo na aula em que esta questão foi levantada a priori (D3, Aluno 106). Esse problema é levantado pelo professor na classe D para conduzir essencialmente a comentários sobre a precisão das medições, mas não foi apontado pela classe E. Na classe E, o problema da incerteza de medição é "resolvido" desde a primeira atividade sob o professor autoridade. Na verdade, quando são solicitados comentários, os alunos de ambas as classes lidam primeiro com um conjunto de números sem realmente relacioná-lo com a tarefa específica que foi proposta. Na aula E, as regras explícitas de debate exigem que os alunos produzam "uma frase bastante precisa tendendo a identificar 'o fato geral' observado" (IREM de Grenoble, 1985, p. 30), o que contribui para obscurecer o objeto da atividade proposta: medir e calcular a soma dos ângulos de um determinado triângulo.

- - Por outro lado, o objetivo de mobilizar concepções, devido à necessidade de uma decisão a priori para apostar na soma dos ângulos de um triângulo, foi alcançado. Isso é evidenciado na classe D, onde cada aluno é explicitamente confrontado com a possível discrepância entre sua aposta e o resultado da medição e do cálculo. Na classe E, o exame do histograma das apostas mostra que foram mobilizadas concepções errôneas, aliás a sua presença foi atestada desde a primeira fase (§ 4.3.1. E2, Aluno 32). No entanto, esta mobilização não tem oportunidade de ser explicitada, uma vez que os alunos não são confrontados individualmente com a possível discrepância entre a sua aposta e a medida que propõem.

A terceira fase testemunha a força das concepções que vinculam a soma dos ângulos de um triângulo ao seu tamanho. Principalmente na turma D. Na turma E, esta resistência parece ser do fato de apenas um grupo de alunos, embora para os restantes não haja garantia de que não seja a produção de uma resposta acordada: 180° é particularmente destacado nesta turma, e elementos para provar que esta é a soma dos ângulos de qualquer triângulo foram propostos. Em ambas as aulas, esta terceira fase é objeto de importantes trabalhos por parte do professor, visando à construção e o reconhecimento da conjectura, para então colocar o problema da sua comprovação. Mas ambas as aulas evoluem de uma maneira muito diferente uma da outra, principalmente por causa da natureza do contrato didático e sua evolução, mais do que por causa da natureza e evolução das concepções dos alunos:

- *Na classe D*: o trabalho do professor centra-se na construção da conjectura, para a qual dá forte apoio aos alunos que não estão convencidos de que 180° é o valor da soma dos ângulos de um triângulo. Este trabalho visa ao mesmo tempo dar aos alunos a responsabilidade e o dever de dar uma prova, já que a alternativa é produzir um triângulo cuja soma dos ângulos estaria muito longe de 180°, ou produzir a prova de que isso é impossível. Para isso, o professor utiliza sua posição em relação ao conhecimento para dar legitimidade aos alunos que duvidam da validade da conjectura: ficar do lado deles preserva a ideia de plausibilidade igual de ambas as posições. Para usar a expressão de Brousseau (1984b, pp. 189–190)34: o professor "esconde seu conhecimento" para legitimar a busca por um triângulo cujos ângulos somam 150 ° (§ 4.2.1 D8 Professor 429).

- *Na classe E*: o problema da prova se impôs prematuramente em relação à estratégia planejada. Ele só pode aparecer como uma atividade acordada, de acordo com as práticas de

34 Nota2020: Esta é uma referência ao texto de um seminário que Guy Brousseau deu em Grenoble, hoje em dia de difícil acesso. O leitor inglês encontrará essa ideia desenvolvida nas traduções coletadas de Brousseau em relação ao conceito de devolução (Brousseau, 1997, p. 229 sqq).

validação explicitamente em vigor nesta classe. Além disso, o direito explícito *de estar só* contra todos permite que alguns alunos permaneçam em suas posições; as “apostas a serem aceitas” parecem ser nulas. Quer se trate de apostas na terceira fase ou das medidas obviamente e massivamente corrigidas em 180°, ambas as observações nos levam à hipótese de que a afirmação sobre a soma dos ângulos de um triângulo tenha sido desfeita como conjectura: o problema da prova não está enraizado num problema de validade de uma verdadeira conjectura. Além disso, os alunos não se envolvem num debate sobre as várias provas propostas; estão convencidos e demonstram pouco interesse em compará-las ou criticá-las. É o professor que vai levar a cabo este trabalho necessário.

Conclusão

Um elemento de robustez: as concepções do aluno

As observações confirmam a presença e força de uma concepção de uma relação monótona entre formas e medidas[35], que inclui o teorema em ação: “a soma dos ângulos de um triângulo é uma função crescente de seu ‘tamanho”. É esta presença, não necessariamente massiva, e esta resistência, que confere à situação a sua robustez. Estes estudos de caso sustentam a hipótese de que a força desta concepção, “"contra” a qual as situações são construídas, é a garantia fundamental da reprodutibilidade da sequência proposta. De fato, não é tanto a resistência desta concepção, mas o fato de ser construída em torno de um teorema em ação verdadeiro (falso), presente como tal nas decisões no momento das apostas, e empenhado no debate de validação. A construção da conjectura contra esse teorema em ação garante a autenticidade do seu caráter conjectural.

Com efeito, a existência, com base nesta concepção, de uma dúvida sobre a invariância da soma dos ângulos de qualquer triângulo e sua igualdade a 180° diante de uma convicção

35 Nota2020: ela poderia ser esboçada pelo ditado: quanto maior a forma, maiores suas medidas.

contrária, cada vez mais generalizada, permite a constituição do fato da invariância em uma verdadeira conjectura e legitima que o problema de sua prova seja colocado. Por outro lado, a resistência da concepção errônea limita o comportamento do conformismo: tal comportamento é fortemente desestabilizado por uma situação que parece suficientemente diferente daquelas que lhe deram origem. Assim, quando se aposta em triângulos atípicos, a concepção errônea domina. Isto porque os comportamentos conformistas são principalmente os da produção de respostas "esperadas" ou assumidas como tal pelos alunos; eles não refletem conhecimentos autênticos.

O calcanhar de Aquiles da situação: o contrato didático

Como mostra claramente a observação feita na turma E, as situações propostas, e, portanto, o próprio significado dos comportamentos e produções dos alunos, são altamente sensíveis às intervenções do professor. São também muito sensíveis ao *modus vivendi* da turma, cujas características não eram conhecidas de antemão.

Por exemplo, a ideia de que qualquer atividade de aula implica comportamentos ou respostas esperados pelo professor, é muito provavelmente a fonte da criação de uma norma, ou de respostas "conformes" a partir da primeira situação, qualquer que seja a turma observada. Isto é reforçado pela relutância dos alunos em permanecerem à margem do que parece ser o comportamento dominante; o que Watzlawick liga ao desejo de estar de acordo com o grupo, o que pode levar a uma renúncia à realidade para "a satisfação de se sentir em harmonia com o grupo" (Watzlawick, 1976, p. 87).

Aqui está o principal risco de fracasso, porque se a conjectura for produzida como uma declaração acordada, então ela perde a maior parte do seu significado e, assim, a autenticidade do debate sobre a prova fica gravemente comprometida. Já discutimos como isso impede o professor de ser o produtor dessa afirmação, mas também coloca fortes restrições à institucionalização da conjectura construída pelos alunos. Essa construção deve, de fato, levar a um verdadeiro consenso sobre a problemática validade da afirmação resultante da tensão entre os “prós” e “contras”, e depois à designação pela classe da busca de uma prova como tarefa comum; a institucionalização se limita a marcar esse estado, de forma a endossá-lo para a comunidade de classe. O fato de a sequência construída levar a uma situação com as características de uma situação de prova assenta essencialmente na criação deste *desejo coletivo de saber* a que cada um dos alunos aderiria. A exigência de autenticidade deste desejo constitui o elo frágil desta abordagem de concepção, devido à sua sensibilidade às intervenções do professor.

Assim, as regras adotadas na classe E, que regem explicitamente o debate, permitem a regulação da interação social, também contêm em si as fontes de dificuldades em estabelecer uma verdadeira situação de validação. Em particular, o debate contraditório baseado em grande parte na obrigação de convencer, combinado com a legitimidade da solidão na verdade, abre a possibilidade de recusar ser convencido. O debate sobre a prova, cuja aposta é o conhecimento, passa a ser um jogo social, cuja aposta é convencer ou não convencer. A explicitação das regras tem a consequência possível, às vezes essencial, de criar um vazio jurídico: aqui, a ausência de regras que obriguem a admitir que está convencido. Além disso, essa legislação só funciona se for monitorada: as leis tornam os juízes necessários. Satisfazer a lei pode significar, inicialmente, satisfazer o juiz. No nosso caso, a existência de regras explícitas na classe E, embora especificando uma forma “científica” de debater e decidir a validade de um enunciado, pode provocar um deslocamento para a produção de evidências ou argumentos de acordo com sua capacidade de satisfazer o professor antes os requisitos intrínsecos ao problema de validade[36].

36 Nota2020: a partir dessa perspectiva, propus a noção de costume didático, “entendido [...] como um conjunto de práticas obrigatórias [...] estabelecidas como tal pelo seu uso, e que, na maioria dos casos, é estabelecido de forma implícita. O costume regula a forma como o grupo social espera estabelecer relações e interações entre seus membros e, portanto, é inicialmente caracterizado como um produto de práticas sociais” (Balacheff, 1999, p. 25).

Isso não significa que não devam existir regras, pelo menos porque “regras estão prestes a surgir, e especialmente na interação humana, qualquer troca invariavelmente reduz as possibilidades que até aquele momento estavam abertas aos parceiros” (Watzlawick, 1976, p. 94). O problema é a possibilidade, as condições e o significado de torná-los explícitos.

Tampouco é uma questão de desengajamento do professor: a situação não pode funcionar sem ele. A situação precisa do que o professor é, sua posição em relação ao conhecimento. Como aponta Brousseau, o professor é e continua sendo o responsável (1984a, p. 46). Conforme observado, os alunos podem ter posições muito diferentes sobre a validade da propriedade em questão: aqueles que já sabem, aqueles que rejeitam, aqueles que duvidam, aqueles que voluntariamente adotariam uma posição majoritária, aqueles que não estão interessados. Diante de alunos que afirmam que a soma dos ângulos de um triângulo é invariante, outros alunos podem alegar a existência de um caso particular, mesmo que sejam incapazes de produzi-lo. Estamos em uma situação de conflito essencialmente intelectual; nenhum feedback material pode contradizer qualquer uma das posições tomadas. Por outro lado, essa impossibilidade de produzir contraexemplo à propriedade pode dar interesse à busca de provas intelectuais que encerrem o debate. Este problema de prova e refutação só pode ser desenvolvido se a propriedade (ou tese) e sua contradição (antítese) tiverem uma potencialidade reconhecida igual. Devem ser defendidos de forma suficientemente equilibrada na aula para que se estabeleça uma autêntica dialética de validação. É o que o professor permite ao dar legitimidade à busca de um triângulo cuja soma dos ângulos seria diferente de 180°.

A “verdade” torna-se problemática não porque o professor não decida, mas porque ele endossa que é legítimo apoiar ou dar crédito à tese e à antítese. O professor dá uma espécie de

É no âmbito de um dado costume didático que se negocia o contrato didático para obter a devolução de uma situação adidática.

status à incerteza e, ao mesmo tempo, marca o interesse que haveria em “saber”. Isso garante que a afirmação em questão não é mera especulação, mas conjectura.

Se, portanto, a conjectura tem suas raízes no questionamento dos saberes e concepções de cada aluno, este estudo de caso mostra que ela só atinge seu status pleno na negociação social, o que confirma tanto seu interesse quanto seu caráter problemático. Essa negociação inclui processos de devolução e institucionalização em que o professor desempenha um papel central.

Referências

Arsac, G., Balacheff, N., & Mante, M. (1992). Teacher’s role and reproducibility of didactical situations.

Educational Studies in Mathematics, *23*(1), 5–29. https://doi.org/10.1007/BF00302312

Artigue, M. (1986). Etude de la dynamique d’une situation de classe. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(1), 5–62.

Artigue, M. (1992). Didactic engineering. In R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Researh in Didactique of mathematics* (pp. 41–66). La Pensée Sauvage Éd.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2),147–176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Balacheff, N. (1999). Contract and Custom: Two Registers of Didactical Interactions (P. Herbst, Trans.). *The Mathematics Educator*, *9*(2), 23–29.

Balacheff, N. (1988). A study of students’ proving processes at the junior high school level. In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Proceedings of the Second UCSMP International Conference on Mathematics Education* (pp.284–297). National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

Berdonneau, C. (1981). *Quelques remarques sur l’introduction à la géométrie démontrée à travers les manuels en usage dans l’enseignement post-élémentaire en France au vingtième siècle* [3ième cycle]. Paris 7.

Bertrand, L. (1812). *Élémens de géométrie, par Louis Bertrand*. chez J.J. Paschoud, Libraire, rue Mazarine, n° 22, et à Genève, chez le même imprimeur-libraire. http://archive.org/details/bub_gb_vPOOZDSnm0oC

Brousseau, G. (1984a). Le rôle du maître et l’institutionnalisation. *Actes de La III° École d’été de Didactique Des Mathématiques*. III° école d’été de didactique des mathématiques. http://guy-brousseau.com/wp- content/uploads/2012/03/84-11-R%C3%B4le-du-Ma%C3%AEtre.pdf

Brousseau, G. (1986). *La théorisation des phénomènes d’enseignement des mathématiques.* [Thèse de doctorat d’Etat]. Université Bordeaux 1.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Trans.). Kluwer Academic publishers.

Brousseau, G. (1984b). Etudes de questions d'enseignement. Un exemple, la géométrie. *Séminaire de Didactique Des Mathématiques et de l'informatique*, *45*.

Choquet, G. (1964). *L'enseignement de la géométrie* (reprint 1966). Hermann.

Clairaut, A. C. (1741). *Elemens de géométrie* (1753rd ed.). David fils. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k15218356

Close, G. S. (1982). *Children's understanding of angle at the primary / secondary transfer age* [Master of science].

Polytechnic of the South Bank.

Devichi, C., & Munier, V. (2013). About the concept of angle in elementary school: Misconceptions and teaching sequences. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(1), 1–19. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.10.001

E. Rich (Ed.). (1969). *Mathématiques 6°*. Hatier.

Fishbein, E. (1982). Intuition and proof. *For The Learning of Mathematics*, *3*(2), 9–18.

Fourrey, E. (1938). *Curiosités géométriques* (Deuxième édition). Vuibert et Nony éditeurs. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k875649b

Giles, G. (1981). *School mathematics under examination 3: Factors affecting the learning of mathematics*. University of Stirling. https://www.worldcat.org/title/school-mathematics-under-examination-3- factors-affecting-the-learning-of-mathematics/oclc/15789298&referer=brief_results

Grosgurin, L. (1926). *Enseignement de la géométrie. Méthodologie* (1944th ed.). Payot & Cie.

Halbwachs, F. (1981). Significations et raison dans la pensée scientifique. *Archives de Psychologie*, *XLIX*(190), 199– 229.

Heath, T. L. (1921). *A history of Greek mathematics* (1981st ed., Vol. 1). Dover Publications Ltd.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid elements* (Second edition revised with additions, Vol. 1). Dover Publications, Inc.

Henrici, O. (1879). *Elementary geometry: Congruent figures*. Longmans, Green. http://archive.org/details/elementarygeome00henrgoog

Hilbert, D. (1899). *The foundation of geometry* (E. J. Townsend, Trans.; Reprint edition, 1950). The Open Court Publishing Company. https://math.berkeley.edu/~wodzicki/160/Hilbert.pdf

IREM de Grenoble. (1985). *Apprentissage du raisonnement*. UGA, IREM de Grenoble.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations—The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Le Rest, E. (1982). Il faut que j'y pense encore (les axiomes de la géométrie). In Commission inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques (Ed.), *La rigueur et le calcul*. CEDIC-Nathan.

Legendre, A. M. (1833). Réflexions sur les différentes manières de démontrer la théorie des parallèles. *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, *XII*, 367–412.

Legendre, A.-M. (1794). *Éléments de géométrie, avec des notes. Par Adrien-Marie Legendre*. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5720354t

Legrand, M. (1986). L'introduction du débat scientifique en situation d'enseignement. *Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, fascicule 5 « Didactique des mathématiques », 1988-1989* (exp.n°3), 1–16.

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères-IREM*, *10*, 123–159.

Legrand, M. (2001). Scientific Debate in Mathematics Courses. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel.

M. Niss, & A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 127–135). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_12

Legrand, M. (2002). Scientific Debate in Mathematics Courses. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel.

M. Niss, & A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Vol. 7, pp. 127–135). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_12

Mach, E. (1908). *La connaissance et l'erreur*. Flammarion. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k655583 Papy, G. (1967). *Voici Euclide* (Vol. 3). Editions M. Didier.

Queysanne, & Revuz (Eds.). (1972). *Mathématiques 3°*. Fernand Nathan.

Smith, D. E. (1925). *History of mathematics* (Unaltered republication, 1958, Vol. 2). Dover Publications, Inc. Stylianides, A. J. (2007). The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 1–20. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9038-0

Tanguay, D., & Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. *ZDM*, *48*(6), 875–894. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0789-5

Thuret, M. (1934). *Précis de géométrie*. Librairie Fernand Nathan.

Vergnaud, Gérard. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherche En Didactique Des Mathématiques*, *2*(2), 215–231.

Vergnaud, Gérard. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2/3), 133–170.

Vergnaud, Gérard. (2001). *Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance*. 22. Vergnaud, Gerard. (2009). The Theory of Conceptual Fields. . . *Human Development*, *52*, 83–94. Watzlawick, P. (1976). *How real is real?* Random House.