

**Propriedades comutativa e distributiva na proposição davydoviana para o ensino de matemática**

**Commutative and distributive properties in the proposition by Davýdov for mathematics teaching**

**Propiedades conmutativas y distributivas em la proposición de Davýdov para enseñanza de las matemáticas**

**Propriétés commutatives et distributives dans la proposition de Davýdov pour l'enseignement des mathématiques**

Josélia Euzébio da Rosa<sup>1</sup>

Universidade do Sul de Santa Catarina-UNISUL

Doutora em Educação

<https://orcid.org/0000-0001-5738-8518>

Ediséia Suethe Faust Hobold<sup>2</sup>

Universidade do Sul de Santa Catarina-UNISUL

Doutoranda em Educação

<https://orcid.org/0000-0002-8044-4386>

**Resumo**

A investigação, de natureza bibliográfica, foi desenvolvida no contexto da educação matemática, especificamente sobre a organização do ensino das propriedades comutativa e distributiva em relação à multiplicação, proposto por Davýdov e colaboradores. Doutor em Psicologia e seguidor de Vigotski, Davýdov coordenou o processo de elaboração de uma proposta para o ensino de matemática fundamentada na Teoria Histórico-Cultural. A proposta pedagógica foi publicada, na Rússia, por meio de livros didáticos e manuais de orientação ao professor. O objetivo é analisar o modo de organização do ensino de matemática proposto por Davýdov e colaboradores na especificidade das propriedades comutativa e distributiva da multiplicação. A análise possibilitou revelar que essas propriedades são essenciais para a constituição do sistema conceitual da tabuada, o que implica a reorganização do seu ensino, cujo ponto de partida seja a relação entre grandezas discretas e contínuas na inter-relação da aritmética, álgebra e geometria.

**Palavras-chave:** Teoria histórico-cultural, Educação matemática, Multiplicação.

---

<sup>1</sup> [joselia.euzebio@yahoo.com.br](mailto:joselia.euzebio@yahoo.com.br)

<sup>2</sup> [ediseiafausthobold@gmail.com](mailto:ediseiafausthobold@gmail.com)

## **Abstract**

Bibliographical research was developed within the mathematics education context, specifically on the organisation of teaching commutative and distributive properties in relation to multiplication, proposed by Davýdov and coworkers. PhD in Psychology and follower of Vygotsky, Davýdov coordinated the elaborating process of a proposal for mathematics teaching based on the cultural-historical theory. The pedagogical proposal was published in Russia through textbooks and teacher guidance manuals. The aim is to analyse the organising way of mathematics teaching proposed by Davýdov and coworkers in the specificity of commutative and distributive properties of multiplication. The analysis made it possible to reveal that these properties are essential for the constitution of the multiplication table conceptual system, which implies its teaching reorganisation, whose starting point is the relationship between discrete and continuous magnitudes in the interrelationship of arithmetic, algebra, and geometry.

**Keywords:** Cultural-historical theory, Mathematics education, Multiplication.

## **Resumen**

La investigación, de naturaleza bibliográfica, fue desarrollada en el contexto de la Educación Matemática, específicamente sobre la organización de la enseñanza de las propiedades conmutativa y distributiva, con relación a la multiplicación, propuesta por Davýdov y colaboradores. Doctor en Psicología y seguidor de Vigotski, Davýdov coordinó el proceso de elaboración de una propuesta para enseñanza de las Matemáticas basada en la Teoría Histórico-Cultural. La propuesta pedagógica fue publicada en Rusia por medio de libros didácticos y manuales de orientación para maestros. El objetivo es analizar el modo de organización de la enseñanza de Matemáticas propuesto por Davýdov y colaboradores en la especificidad de las propiedades conmutativa y distributiva de la multiplicación. El análisis hizo posible revelar que esas propiedades son esenciales para la constitución del sistema conceptual de la tabla de multiplicación, que implica la reorganización de su enseñanza, cuyo punto de partida sea la relación entre grandezas discretas y continuas en la interrelación de aritmética, álgebra y geometría.

**Palabras clave:** Teoría histórico-cultural, Educación matemática, Multiplicación.

## **Résumé**

La recherche bibliographique a été développée dans le contexte de l'enseignement des mathématiques, spécifiquement sur l'organisation de l'enseignement des propriétés commutatives et distributives en relation avec la multiplication, proposé par Davýdov et ses

collègues. Docteur en psychologie et disciple de Vygotsky, Davýdov a coordonné le processus d'élaboration d'une proposition d'enseignement des mathématiques basée sur la théorie historico-culturelle. La proposition pédagogique a été publiée en Russie à travers des manuels scolaires et des manuels d'orientation des enseignants. L'objectif est d'analyser le mode d'organisation de l'enseignement des mathématiques proposé par Davýdov et ses collaborateurs dans la spécificité des propriétés commutatives et distributives de la multiplication. L'analyse a permis de révéler que ces propriétés sont essentielles pour la constitution du système conceptuel des tables de multiplication, ce qui implique sa réorganisation pédagogique, dont le point de départ est la relation entre les grandeurs discrètes et continues dans l'interrelation de l'arithmétique, de l'algèbre et de la géométrie.

**Mots-clés** : Théorie historico-culturelle, Enseignement des mathématiques, Multiplication.

## **Propriedades comutativa e distributiva na proposição davydoviana para o ensino de matemática**

A educação, de modo geral, cumpre a tarefa não somente de concretizar a concepção de mundo em determinado momento histórico, mas também de transformá-lo e modificá-lo. O propósito da educação, fundamentado nos princípios da teoria histórico-cultural, é o desenvolvimento integral do sujeito em vários aspectos, tais como social, cultural, ético, estético e político. Esses aspectos requerem a apropriação de conceitos científicos e o desenvolvimento do pensamento teórico.

O pensamento teórico não se desenvolve na vida cotidiana, mas em instituições organizadas com esse propósito. Neste sentido, a escola é uma das instituições criadas pela humanidade com o propósito de transmitir conhecimentos científicos sistematizados pelas gerações precedentes às novas gerações e, conseqüentemente, propiciar o desenvolvimento do pensamento.

A apropriação de conceitos científicos, em termos psicológicos, “constitui uma atividade mental de análise, síntese, abstração e generalização” (Rubinstein, 1979, p. 47). Cabe refletir sobre qual tipo de abstração e generalização tem predominado no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos nas escolas brasileiras e sobre se o modo de organização do ensino tem contribuído para desenvolver o pensamento teórico ou empírico.

Estudos como os de Moraes (2008), Rosa e Hobold (2016) e Rosa e Marcelo (2022) apontam que o ensino em várias proposições brasileiras e na prática docente tem contribuído para desenvolver o pensamento empírico, correspondente à lógica formal tradicional (ou clássica). Esse pensamento é desenvolvido a partir da percepção das características externas de determinados grupos de objetos e/ou fenômenos. Por decorrência desse ponto de partida, ocorrem a abstração e a generalização da característica essencial, fundamental, comum a todos os objetos. Ao designar os indícios comuns por meio de palavras, atinge-se o conceito formal (Davýdov, 1982). Tais conceitos, desenvolvidos por meio de abstrações e generalizações fundamentadas na percepção das características externas dos objetos e fenômenos, ele os denomina empíricos. O autor adverte-nos que, atrelado a esse tipo de generalização está o pensamento intuitivo tal como propõem ou entendem a escola e a psicologia por ele denominadas de tradicionais. Pois o pensamento se volta apenas para a aparência externa dos objetos e fenômenos, carece de análise nas relações internas, visto que o conceito empírico resulta da percepção, abstração e generalização das características externamente e diretamente expostas aos órgãos dos sentidos.

A formação de conceitos fundamentada na lógica formal tradicional limita a atenção para os aspectos externos dos objetos e fenômenos. Isso traz implicações na aprendizagem dos estudantes inseridos num determinado contexto escolar que adote tal concepção, dentre as quais, podemos destacar a memorização de algumas noções vazias por parte dos estudantes, apenas para obterem notas nas avaliações escolares. Nesse tipo de memorização há um esvaziamento do conteúdo no pensamento. Este fica limitado às características externas dos objetos analisados no processo de elaboração conceitual, e não na essência, na relação interna, como prevê a lógica dialética. Em consequência, o conteúdo memorizado para a avaliação passa a ter uma data de validade: o dia da prova.

Mudar a lógica enquanto método de conhecimento na prática docente e em livros didáticos resolveria os problemas relacionados à apropriação dos conceitos teóricos? Acreditamos que não é suficiente, mas sua solução passa pela mudança da lógica que sustenta o método de conhecimento adotado na educação escolar.

Do contexto mencionado anteriormente, emerge a necessidade de se repensar, também, os conteúdos e métodos desenvolvidos na educação escolar. É imprescindível romper, de forma concreta e duradoura, com a lógica de internalização dos processos de educação. Não basta apenas conhecimento e consciência, mas vivenciar processos que contribuam para o rompimento da lógica vigente.

Para que o estudante seja criador de si e do seu meio, faz-se necessária a apropriação dos conceitos científicos e, conseqüentemente, o desenvolvimento do pensamento teórico (Davýdov, 1982), haja vista que, com o pensamento teórico desenvolvido, o sujeito busca a essência das coisas, inclusive do que é aparentemente camuflado pelas contradições.

Nesse contexto, o propósito deste estudo é apresentar resultados de uma pesquisa bibliográfica sobre o modo de organização do ensino de matemática apresentado na proposição davydoviana. Na especificidade deste artigo, analisamos a abordagem de Davýdov ao ensino das propriedades comutativa e distributiva da multiplicação.

Vasily Vasilyevich Davýdov, nascido em Moscou, Rússia (1930-1988), dedicou mais de 25 anos de sua vida às pesquisas com o objetivo de formular uma teoria de ensino voltada para o desenvolvimento do pensamento das crianças e jovens (Libâneo & Freitas, 2013). Para ele, a função da escola é ensinar os alunos a “orientarem-se com autonomia na informação científica e em qualquer outra esfera do conhecimento” (Libâneo & Freitas, 2013, p. 315) e desenvolver o pensamento teórico dos estudantes.

Davýdov (Давыдов), juntamente com colaboradores, como Gorbov (Горбов), Mikulina (Микулина) e Savieliev (Савельева), elaboraram e desenvolveram, em caráter investigativo

na Rússia, uma proposição para o ensino de matemática fundamentada na Teoria Histórico-Cultural e a publicaram em livros didáticos, manuais de orientação ao professor, entre outros. Esse material constitui a fonte de dados da investigação que deu origem ao presente artigo. Tratam-se das tarefas correspondentes aos exercícios dos livros didáticos brasileiros para o ensino da multiplicação. Essas tarefas foram extraídas da versão original do livro didático (no idioma russo) do terceiro ano do ensino fundamental (Давыдов et al., 2009). Apresentamos a resolução das tarefas em conformidade com o manual de orientação ao professor, escrito por Gorbov e Mikulina (Горбов; Микулина, 2003), colaboradores de Davýdov, em um livro à parte sob a forma de relato de experiência.

As reflexões sobre a experiência realizada em sala de aula pelo grupo de colaboradores de Davýdov possibilitaram um amplo processo de elaboração e reelaboração da proposta. Esse movimento é refletido nos manuais de orientação ao professor. Sem essas reflexões, não é possível conceber as tarefas apresentadas no livro didático como expressão dos pressupostos oriundos da Teoria Histórico-Cultural, pois, aparentemente, as tarefas davydovianas são semelhantes aos exercícios apresentados nos livros didáticos brasileiros (Rosa, 2012).

No primeiro contato com o material didático davydoviano, detectamos algumas tarefas que indicavam a existência de sistematização das propriedades comutativa e distributiva da multiplicação no livro do terceiro ano do ensino fundamental.

A proposição davydoviana não é apresentada de forma fragmentada por conceitos, como primeiro se estuda adição, em seguida subtração, multiplicação, tabuada e divisão (Davýdov, 1988). Ao contrário, os conceitos são apresentados em um sistema de conexões internas, tais como relações de multiplicidade/divisibilidade, todo/partes. No sistema de conexões, um conceito contribui para o desenvolvimento do outro. Tomamos como exemplo a relação todo/partes, uma das conexões internas dos conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão. Se o todo em análise é constituído por partes, e cada parte com a mesma medida, esta conexão interna está relacionada ao conceito de multiplicação, interconectado com sua operação inversa, a divisão. Além disso, esta conexão está presente em outros conceitos como tabuada, equação, progressão aritmética, função, entre outros, conformando, assim, um sistema integral com base na relação essencial: a relação entre grandezas.

Durante a investigação, adotamos os seguintes procedimentos metodológicos: inicialmente identificamos a orientação metodológica apresentada no manual de orientação ao professor, correspondente às tarefas apresentadas no livro didático. Na sequência, procedemos ao estudo concomitante das tarefas com as orientações, base para a identificação de que Davýdov e colaboradores desenvolvem as propriedades comutativa e distributiva a partir de um

sistema conceitual (conceito de número, relação de multiplicidade, divisibilidade, relação parte-todo, adição, subtração, entre outros). Porém, para o presente artigo, selecionamos apenas três tarefas referentes às propriedades matemáticas e as reproduzimos com a resolução proposta no manual de orientação ao professor (Hobold, 2014). A análise possibilitou revelar que o ensino da multiplicação proposto por Davýdov e equipe, por meio da relação essencial entre as propriedades comutativa e distributiva da multiplicação, é desenvolvido com base na relação entre grandezas discretas e contínuas na inter-relação das significações aritméticas, algébricas e geométricas que conformam o sistema.

### **As tarefas davydovianas**

Davýdov (1982) preconiza a possibilidade de apropriação dos conhecimentos teóricos por parte dos estudantes. Para tanto, faz-se necessário organizar o processo de ensino-aprendizagem em conformidade com atividades que impulsionam o desenvolvimento dos estudantes. Davýdov (1982), juntamente com outros pesquisadores, como Elkonin, identificou que a criança, desde o nascimento, passa por etapas de desenvolvimento marcadas por atividades principais, ou seja, atividades que impulsionam o desenvolvimento e a apropriação das objetivações humanas. Assim, por volta dos seis aos dez anos de idade, a atividade principal da criança é a de estudo. Nesse período, surgem nos estudantes as capacidades de reflexão, análise, planejamento, necessidades e motivos de estudo (Davýdov, 1988). A “atividade de estudo deve ser entendida como atividade para a autotransformação do sujeito” (Repkin, 2014, p. 88).

Neste contexto, Davýdov e colaboradores estruturaram uma proposição de ensino em conformidade com a atividade de estudo, composta por tarefas particulares. A orientação metodológica, nesta proposição, é de que as tarefas sejam desenvolvidas pelos estudantes sob a orientação do professor, por meio de seis ações de estudo, quais sejam:

- 1) Transformação dos dados da tarefa de estudo com a finalidade de revelar a relação universal do objeto estudado;
- 2) Modelação da relação universal nas formas objetual, gráfica e literal;
- 3) Transformação do modelo da relação universal para o estudo de suas propriedades em ‘forma pura’;
- 4) Construção de um sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;
- 5) Controle da realização das ações anteriores;
- 6) Avaliação da apropriação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada (Davýdov, 1988, p. 181).

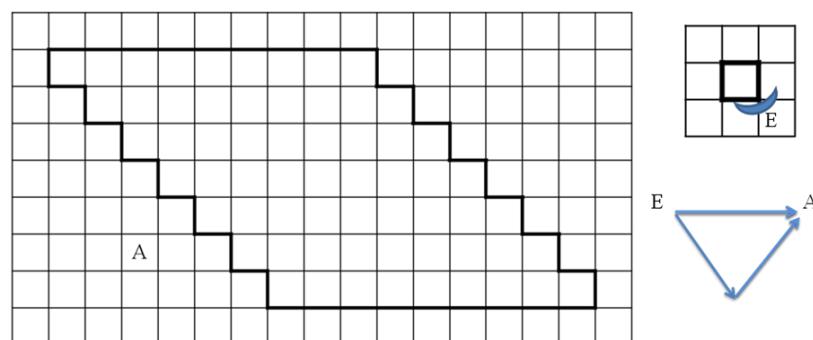
O ponto de partida para o estudo dos conceitos, na proposição davydoviana, são as

relações entre grandezas. Grandezas são as propriedades dos objetos e fenômenos da realidade que permitem determinar seu tamanho: maior, menor, igual, enfim, sua medida. Para cada conceito há uma relação diferente entre as grandezas que lhe dão origem. Assim, no início do processo de ensino e aprendizagem de cada conceito, Davýdov propõe que sejam revelados os elementos que compõem tal relação e como estes se interconectam (1ª ação de estudo). Na sequência, essa relação essencial é abstraída do material sensorialmente dado e modelada na forma objetal, gráfica e literal (2ª ação de estudo). Neste processo, a 3ª ação de estudo é a transformação do modelo com a finalidade de estudar o conceito na sua forma geral e, por fim, a 4ª ação de estudo, é aquela em que são propostas várias tarefas particulares para serem desenvolvidas pelo procedimento geral, dito de outro modo, a reprodução do concreto. As ações de controle e avaliação (5ª e 6ª ações de estudo) são desenvolvidas ao longo do processo de ensino e aprendizagem.

Como mencionado no parágrafo anterior, o ponto de partida para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos é a medição das grandezas, que podem ser discretas ou contínuas (comprimento, largura, volume, massa, entre outras). Porém, quando a unidade de medida é muito pequena em relação ao objeto a ser medido, tem-se a necessidade de criar uma unidade de medida maior, denominada medida intermediária, composta por unidades básicas. Isso torna mais eficaz o controle da variação de quantidades.

Esse movimento também ocorre no estudo das propriedades comutativa e distributiva, em relação à multiplicação, na proposição davydoviana. A unidade de medida intermediária não é dada diretamente aos estudantes, e eles precisam analisar o objeto para, então, determiná-la, como apresentaremos na tarefa 1, a seguir.

Tarefa 1: A presente tarefa compõe-se de *três* etapas distintas (*a*, *b* e *c*). Na primeira parte (item *a*), as medidas genéricas das áreas (*A* e *B*) são apresentadas na figura 1: Eleja uma unidade de medida intermediária e complete o esquema (Давыдов et al., 2009).





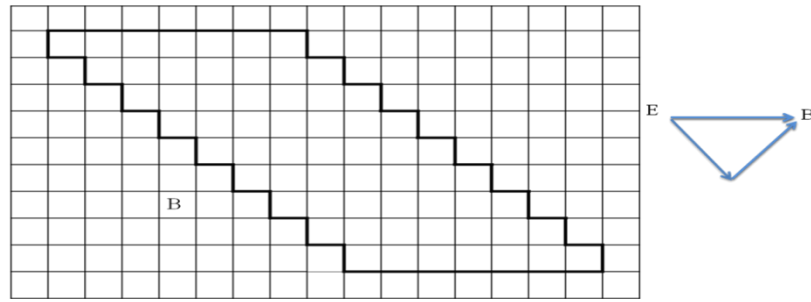


Figura 1.

*Tarefa 1) Propriedade comutativa da multiplicação. Elaboração das autoras com base na proposição davydoviana (Давыдов et al., 2009, p. 11-12)*

A tarefa consiste na medição das áreas das superfícies e no registro das medições no esquema (Figura 2). Este sugere a construção de uma unidade de medida intermediária, visto que a unidade de medida básica ( $E$ ), formada por um quadrado da malha, é *pequena*, se comparada à área total a ser medida. As crianças concluirão, com orientação do professor, que a linha (unidades dispostas na horizontal) pode ser considerada como medida intermediária em ambas as figuras (Горбов & Микулина, 2003).

Na primeira figura (medida  $A$ ), as crianças representarão a unidade de medida intermediária ( $K$ ), composta por *nove* (9) unidades básicas, que se repete por *sete* (7) vezes (Figura 1). Na segunda figura (medida  $B$ ), a medida intermediária ( $L$ ) é composta por *sete* (7) unidades de medida básica, tomada por *nove* (9) vezes. Os alunos devem registrar os números nos esquemas correspondentes a cada área. Os valores desconhecidos são indicados por um ponto de interrogação no esquema de setas (Горбов & Микулина, 2003).

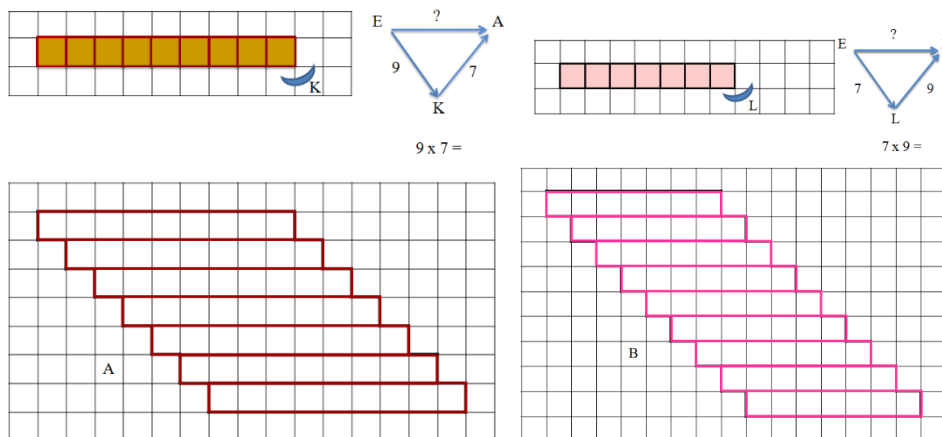


Figura 2.

*Tarefa 1 a) Construção da unidade de medida intermediária. Elaboração das autoras com base na proposição davydoviana (Давыдов et al., 2009)*

De acordo com o registro proposto nos esquemas, ainda se faz necessário determinar a quantidade de unidades básicas que compõem cada figura. Esse valor desconhecido foi representado no esquema com o ponto de interrogação. A operação adequada para determinar o total de unidades básicas, quando se tem o valor da unidade intermediária e quantas vezes ela se repete, é a multiplicação ( $9 \times 7 = \_$  e  $7 \times 9 = \_$ ). Os resultados são registrados nos esquemas (Figura 3).

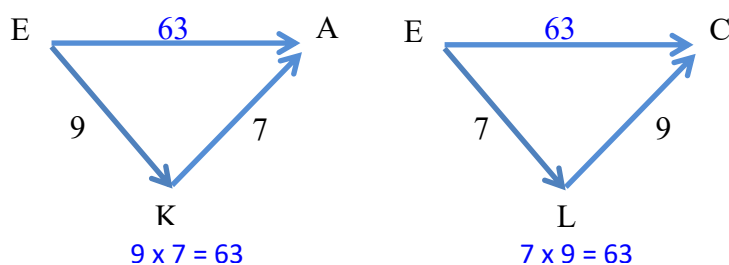


Figura 3.

*Tarefa 1 a) Registro dos valores nos esquemas. Elaboração das autoras com base na proposição davydoviana (Давыдов et al., 2009)*

Tarefa 1 b) Calcule a área da figura apresentada na figura 3, com unidades de medidas intermediárias diferentes, e represente o resultado do processo de medição nos esquemas (Давыдов et al., 2009).

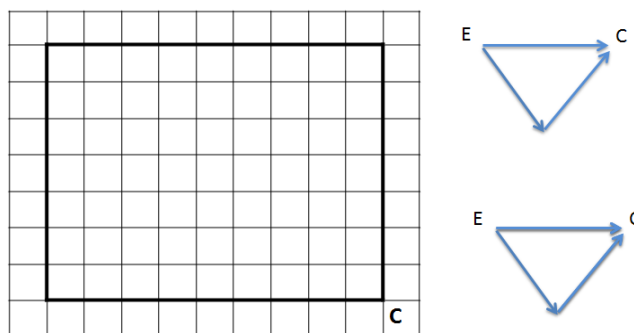


Figura 4.

*Tarefa 1 b) Propriedade comutativa da multiplicação. Elaboração das autoras com base na proposição davydoviana (Давыдов et al., 2009)*

A tarefa consiste em determinar a área da superfície de dois modos diferentes, isto é, de duas unidades de medidas intermediárias distintas: linha e coluna (Figura 4). O professor sugere a divisão da turma em dois grupos para a realização da tarefa. Um grupo utiliza a linha como unidade de medida intermediária e o outro, a coluna (Горбов & Микулина, 2003).

As crianças que adotarem a linha como unidade de medida intermediária fazem a devida representação na malha (L), que é composta por *nove* (9) unidades básicas e se repete por *sete*

(7) vezes na área total. Os números são registrados no esquema, seguidos da operação ( $9 \times 7 = \underline{\quad}$ ), que possibilita o cálculo da área total, conforme a figura 5 (Горбов & Микулина, 2003).

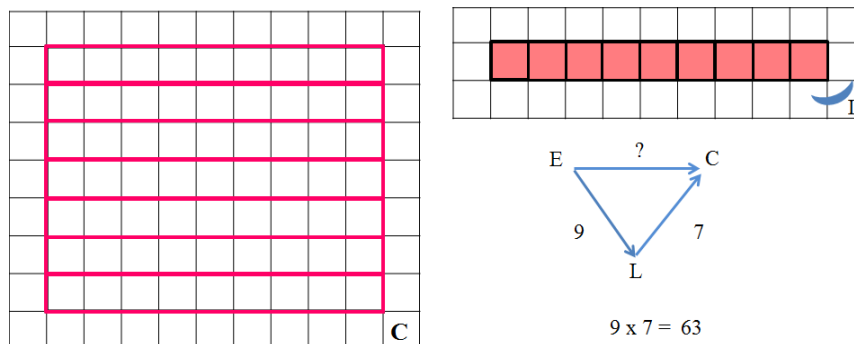


Figura 5.

*Tarefa 1 b) Construção da unidade de medida intermediária – linha. Elaboração das autoras com base na proposição davydoviana (Давыдов et al., 2009)*

As crianças que estabelecerem a coluna como unidade de medida intermediária procedem à medição de forma semelhante àquela que acabamos de expor. Porém, a coluna é composta por *sete* (7) unidades de medidas básicas e se repete por *nove* (9) vezes na área total (Figura 6). Os números são registrados no esquema, seguidos da operação que possibilita o cálculo da área em referência (Горбов & Микулина, 2003).

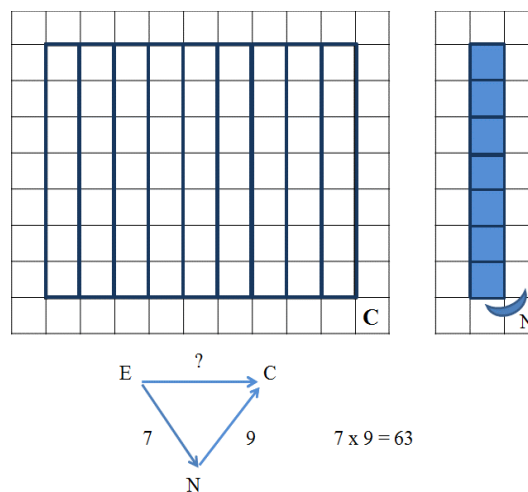


Figura 6.

*Tarefa 1 b) Construção da unidade de medida intermediária – coluna. Elaboração das autoras com base na proposição davydoviana (Давыдов et al., 2009)*

O professor propõe que os grupos apresentem seus registros e a operação (Figuras 5 e 6). Ele lembra que ambos mediram a mesma superfície, por isso as unidades básicas são as mesmas, um quadrado da malha. No entanto, as medidas intermediárias foram compostas de

modos diferentes. O professor orienta as crianças a verificarem que o resultado é o mesmo (Figuras 5 e 6) e finaliza com a análise da composição dos registros, tanto da primeira parte da tarefa quanto da segunda ( $9 \times 7 = 63$  e  $7 \times 9 = 63$ ) (Горбов & Микулина, 2003).

Tarefa 1 c) Utilize a calculadora para determinar a área total das figuras apresentadas nos itens anteriores (áreas com medidas genéricas  $A$ ,  $B$  e  $C$ ) e compare os resultados (Давыдов et al., 2009).

A reflexão que subsidiará a resolução da tarefa é a seguinte: as três superfícies  $A$ ,  $B$  e  $C$  foram construídas com a mesma unidade básica (um quadrado da malha). Contudo, as unidades de medidas intermediárias eram compostas de modo diferente. Na superfície com medida  $A$ , a unidade intermediária era composta por *nove* (9) quadrados e se repetia por *sete* (7) vezes:  $9 \times 7 = 63$ . Em  $B$ , o inverso, *sete* (7) tomados por *nove* (9) vezes, isto é,  $7 \times 9 = 63$ .

Na superfície com medida  $C$ , sua área foi calculada de dois modos diferentes. Primeiro, a linha foi considerada como unidade de medida intermediária, constituída de *nove* unidades básicas. A figura é composta por sete linhas; então, a operação consiste na multiplicação  $9 \times 7 = 63$ . No segundo, a coluna foi tomada como unidade de medida intermediária, com *sete* unidades básicas, o que se traduz em  $7 \times 9 = 63$ , pois havia *nove* colunas. Deste modo, as três superfícies possuem a mesma área:  $A = B = C = 63$  (Горбов & Микулина, 2003).

Será que os produtos compostos por fatores iguais, porém colocados em ordem diferente, são sempre iguais? Sim. O professor sugere verificar a afirmação com a resolução de novas tarefas que são apresentadas no livro didático (Горбов & Микулина, 2003).

A resolução das tarefas sugeridas anteriormente leva à generalização da propriedade comutativa da multiplicação e pode ser expressa na forma algébrica: dados dois números quaisquer  $m$  e  $p$ , tomados em ordem diferente, os produtos serão os mesmos, o que se sintetiza pela igualdade  $m \times p = p \times m$ : o deslocamento dos fatores não altera o produto (Горбов & Микулина, 2003), porém, altera o significado para o multiplicando e o multiplicador.

Os recursos algébricos abrem caminho para a expressão de qualquer operação aritmética, sem que seja necessário operar com as grandezas. Na tarefa em análise, o modelo ( $m \times p = p \times m$ ) que representa a propriedade comutativa da multiplicação decorre da generalização da relação entre as grandezas (áreas, na especificidade deste).

Porém, a reflexão com a utilização dos símbolos propicia o trabalho “com a relação entre as grandezas, sem que esta esteja associada a entes numéricos, geométricos, ou de qualquer outra espécie, o que se destaca como essencial ao conhecimento algébrico, assim como a generalização dessas relações entre as grandezas” (Panossian, 2014, p. 104). A representação

por símbolos sintetiza e possibilita o trabalho com a relação entre grandezas, de modo geral, em tarefas particulares, como apresentamos a seguir (2).

Tarefa 2: Calcule os produtos  $7 \times 2$ ,  $5 \times 2$ ,  $9 \times 2$  e  $6 \times 2$  a partir da propriedade comutativa da multiplicação (Давыдов et al., 2009).

De acordo com Hobold (2014), nesse estágio de desenvolvimento da proposta davydoviana, as crianças ainda não estudaram as tabuadas dos números *cinco*, *seis*, *sete* e *nove*. No entanto, por meio da propriedade comutativa da multiplicação, é possível determinar os produtos com base nos conhecimentos referentes à tabuada do número *dois*:

$$7 \times 2 = 2 \times 7 = 14$$

$$5 \times 2 = 2 \times 5 = 10$$

$$9 \times 2 = 2 \times 9 = 18$$

$$6 \times 2 = 2 \times 6 = 12$$

A tarefa consiste em relacionar, mentalmente, a tabuada do número *dois* a outras tabuadas, por meio da propriedade comutativa. Esta se torna mais um procedimento para a memorização da tabuada, que somente ocorre após o estudo de sua essência. Essa relação, no plano mental, não surge do nada, mas é antecedida por um movimento que envolveu várias relações reais entre grandezas. Como afirmam Núñez e Oliveira (2013, p. 295), a formação das ações mentais e dos conceitos realiza-se “com apoio de objetos externos e, na medida em que são manipulados, passando-se por uma série de etapas, posteriormente são realizadas no plano mental e se tornam propriedade de psique”.

O desenvolvimento das ações mentais é proposto por Davýdov, no contexto do objeto de estudo, por meio das propriedades matemáticas. Nas tarefas anteriores, o ponto de partida foi a análise das relações entre grandezas contínuas, mais especificamente entre áreas. Na tarefa a seguir, as reflexões ocorrem com base na grandeza discreta.

Tarefa 3: A presente tarefa é composta por três etapas (*a*, *b* e *c*). No primeiro item (*a*), as estrelas de quatro pontas estão dispostas em 38 colunas. Cada coluna é composta por três estrelas (Figura 7). Componha a operação para proceder ao cálculo do número total de estrelas (Давыдов et al., 2009).

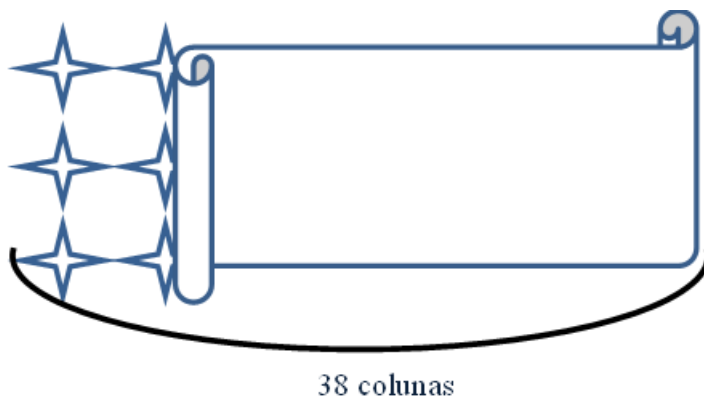


Figura 7.

Tarefa 3 a) Estrelas de quatro pontas. Elaboração das autoras com base na proposição davydoviana (Давыдов et al., 2009, p. 17)

A título de exemplificação, tomamos a coluna como unidade de medida intermediária. Assim, são três (3) tomados por trinta e oito vezes (38). O professor registra, no quadro, o esquema e a operação correspondente para determinar o total de unidades básicas ( $3 \times 38 = \_$ ), conforme a figura 8 (Горбов & Микулина, 2003).

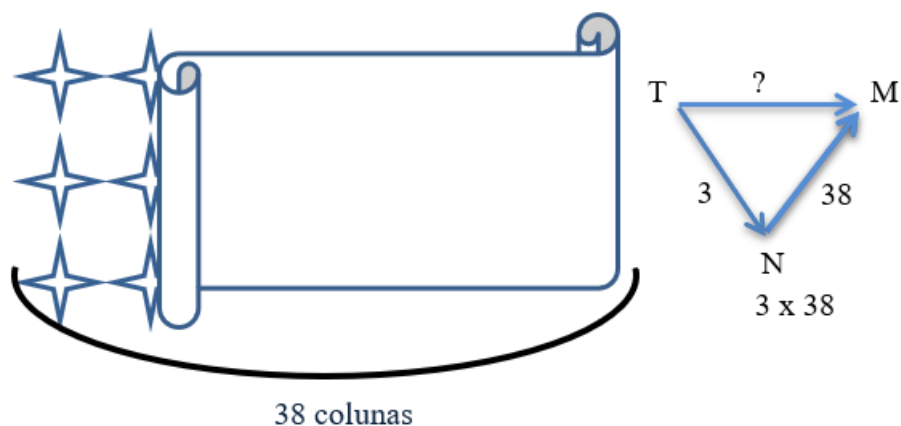


Figura 8.

Tarefa 3 a) Registro do esquema e da operação. Elaboração das autoras com base na proposição davydoviana (Давыдов et al., 2009)

Tarefa 3 b) Estrelas de cinco pontas estão distribuídas em 56 colunas compostas por três estrelas cada (Figura 9). Componha a operação para calcular o número total de estrelas (ДАВЫДОВ et al., 2009).

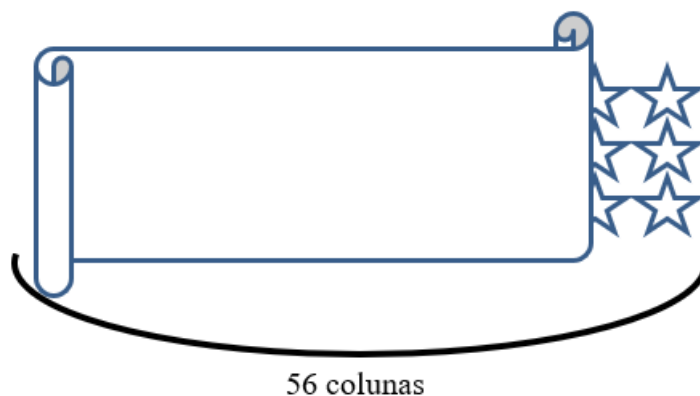


Figura 9.

Tarefa 3b) Estrelas de cinco pontas. Elaboração das autoras com base na proposição *davydoviana* (Давыдов et al., 2009, p.17-18)

Para determinar o valor total de estrelas de *cinco* pontas (Figura 9), o professor sugere que a coluna seja considerada como unidade de medida intermediária. Conclui-se que são *três* (3) tomados por *cinquenta e seis* (56) vezes. O professor e as crianças constroem o esquema no quadro e no caderno, respectivamente, e registram a operação:  $3 \times 56 = \_\_$ , conforme a figura 10 (Горбов & Микулина, 2003).

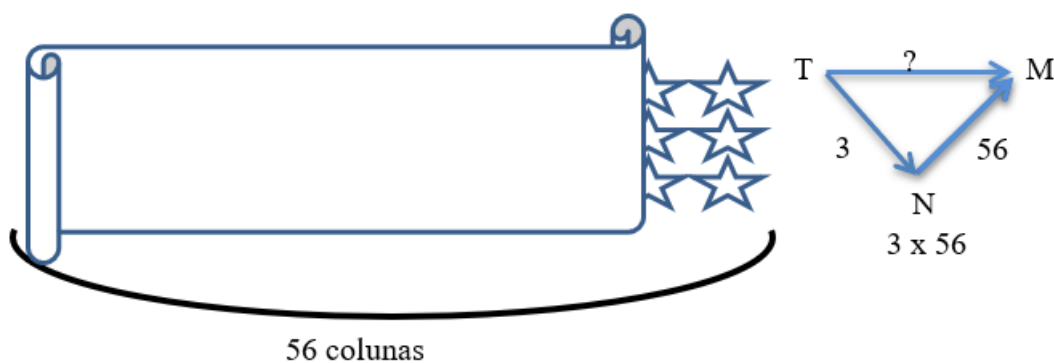


Figura 10.

Tarefa 3 b) Construção do segundo esquema. Elaboração das autoras com base na proposição *davydoviana* (Давыдов et al., 2009)

Tarefa 3 c) Determine o total de estrelas de quatro e cinco pontas (Figura 11) escondidas atrás da tela. Represente por meio de esquemas de setas (ДАВЫДОВ et al., 2009).





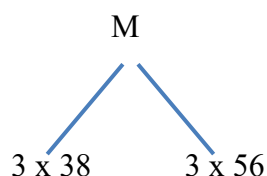


Figura 13.

*Tarefa 3 c) Esquema que representa a soma das partes. Elaboração das autoras com base na proposição davydoviana (Давыдов et al., 2009)*

O professor questiona: este esquema (Figura 13) oferece as condições para determinar o total de estrelas de quatro e cinco pontas? As reflexões devem ser orientadas a fim de se atingir a conclusão de que é possível determinar o inteiro quando se conhece o valor das partes. Neste caso, as partes são  $(3 \times 38) + (3 \times 56)$ . Trata-se do esquema que representa a soma das partes.<sup>3</sup> Dito em outras palavras, o esquema refere-se ao todo dividido em partes. Em cada parte, há o mesmo número de linhas. Assim, para determinar o todo, adicionam-se as partes.

Tarefa 3 d) Determine outra forma de calcular o total de estrelas de quatro e cinco pontas. Represente suas ações por meio de esquema de setas (Давыдов et al., 2009).

O professor retoma a análise da última tela de estrelas (Figura 10): é possível calcular a quantidade total de estrelas de quatro e cinco pontas com o emprego de outro método? Ele direciona as análises para que as crianças constatem que é possível, sim, determinar o valor do todo por meio de outro procedimento. Mas, para isso, é necessário determinar o número total de colunas  $(38 + 56)$ . Há em comum, nas sentenças  $(3 \times 38)$  e  $(3 \times 56)$ , o fator *três* (3) - a unidade de medida intermediária é a mesma em ambas. O professor constrói o esquema de setas no quadro (Figura 14) e registra os números que representam as ações dos itens *a* e *b* (Горбов & Микулина, 2003).

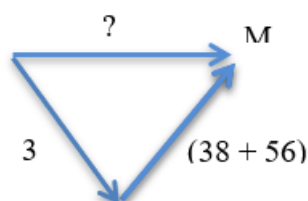


Figura 14.

*Tarefa 3 d): Esquema com setas para o cálculo do total de estrelas. Elaboração das autoras com base na proposição davydoviana (Давыдов et al., 2009)*

---

<sup>3</sup> Esse esquema, na proposição davydoviana, é utilizado na operação de adição e indica o número de partes que constituem o todo. Aos poucos, esse esquema será associado à operação de multiplicação.

Após o registro dos números no esquema, o professor lembra aos estudantes os dois procedimentos para o cálculo do total dos dois tipos de estrelas de quatro e cinco pontas (Figura 15).

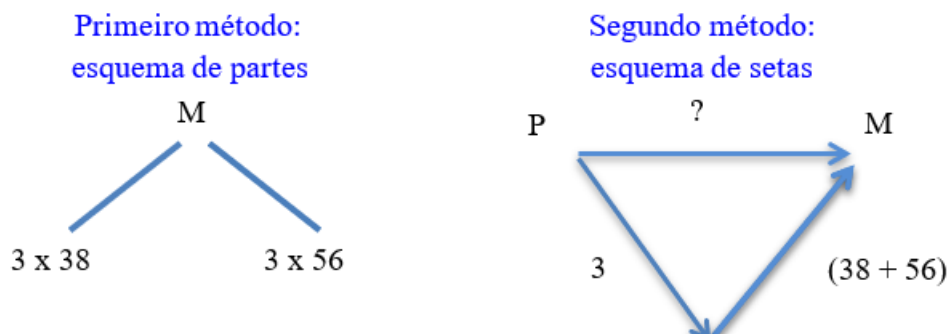


Figura 15.

*Tarefa 3 d) Métodos de cálculo. Elaboração das autoras com base na proposição davydoviana (Давыдов et al., 2009)*

Então, o professor questiona: qual resultado obteremos ao fazer o cálculo pelo primeiro método? E pelo segundo? Qual resultado é maior? (Горбов & Микулина, 2003).

No processo de resolução pelo primeiro método  $(3 \times 38) + (3 \times 56)$ , as crianças determinarão, inicialmente, os produtos dentro dos parênteses e, em seguida, procederão à soma  $(114 + 168)$ , conforme a figura 16:

$$\begin{array}{ccc}
 \overset{\curvearrowright}{(3 \times 38)} & + & \overset{\curvearrowright}{(3 \times 56)} \\
 = 114 & + & 168 \\
 & = & 282
 \end{array}$$

Figura 16.

*Tarefa 3 d) Cálculo do total de estrelas por meio do primeiro método. Elaboração das autoras com base na proposição davydoviana (Давыдов et al., 2009)*

Pelo segundo procedimento, as crianças, primeiro, determinarão a soma dentro dos parênteses  $(38 + 56)$  e, em seguida, o produto  $(3 \times 94)$ , conforme a figura 17:

$$\begin{aligned}
 & 3 \times (38 + 56) \\
 &= 3 \times 94 \\
 &= 282
 \end{aligned}$$

Figura 17.

*Tarefa 3 d) Cálculo do total de estrelas por meio do segundo método. Elaboração das autoras com base na proposição davydoviana (Давыдов et al., 2009)*

O professor e as crianças comparam os resultados (Figuras 16 e 17) e concluem que o valor obtido pelos dois procedimentos é o mesmo, pois se trata da mesma quantidade, porém se diferenciam no método de resolução, conforme apresentamos na figura 18 (Горбов & Микулина, 2003):

$$\begin{aligned}
 3 \times (38 + 56) &= (3 \times 38) + (3 \times 56) \\
 &= 114 + 168 \\
 &= 282
 \end{aligned}$$

Figura 18.

*Tarefa 3 d) Relação de equivalência entre os dois métodos de resolução. Elaboração das autoras com base na proposição davydoviana (Давыдов et al., 2009)*

Assim, para multiplicar um número pela soma, pode-se multiplicar cada termo separadamente e adicionar o resultado ao final. Tal conclusão fundamenta a elaboração da seguinte regra:  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$  (Горбов & Микулина, 2003). Esta consiste na propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma (Caraça, 1959). Tal propriedade está relacionada ao estágio inicial do desenvolvimento do conceito de multiplicação como adição de parcelas iguais. Isto é, quando o todo é composto por várias partes iguais.

Vale destacar que o esquema das partes (Figura 15) está relacionado ao conceito de adição (soma das partes) e pode ser transformado em outro esquema, o de setas, que está ligado à multiplicação. Esse movimento de transformação de modelos contribui para a formação do pensamento teórico, pois reforça a compreensão da relação essencial tanto da adição quanto da multiplicação. Além do mais, esse movimento culmina na propriedade matemática.

As propriedades, em matemática, são uma forma de generalização do conceito aritmético. Este “[...] é considerado como caso particular de um conceito mais geral [algébrico]”

(Vigotski, 2000, p. 372). Operar a partir da fórmula mais geral, como, por exemplo, a propriedade distributiva da multiplicação, significa tornar-se independente de uma expressão aritmética determinada (Figura 18). A álgebra possibilita a generalização e tem, como produto, a tomada de consciência e apreensão das operações aritméticas (Vigotski, 2000).

Davýdov e colaboradores, em sua proposição de ensino, contemplam uma série de propriedades matemáticas que consistem nas raízes conceituais da tabuada e que, no Brasil, são apresentadas apenas ao final do ensino fundamental (Hobold & Rosa, 2017). Em nosso país, o acesso dos estudantes à álgebra geralmente inicia-se por volta do sétimo ano, com a introdução das equações, das letras. Neste sentido, a álgebra é concebida como manipulação de letras. Para Panossian (2012, p. 14), essa concepção estende-se ao longo dos demais anos de escolaridade até o ensino médio e “é fonte de dificuldades dos estudantes, que não compreendem o significado atribuído ao símbolo e mesmo ao conhecimento algébrico como um todo”.

Para a autora em referência, algumas dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem da matemática são decorrentes do modo como o ensino é organizado. Na especificidade do ensino de álgebra, por exemplo, com a forma simbólica no estágio mais formalizado, não se considera o movimento que surge a partir das relações entre grandezas. Assim, “os professores podem destacar suas características, efetuar classificações, desenvolver técnicas e tratá-los apenas de forma empírica, por sua aparência, sem alcançar a essência dessa forma de conhecimento” (Panossian, 2014, p. 263). Na proposição davydoviana, por sua vez, a álgebra surge a partir da relação entre grandezas e avança para a abstração e generalização.

O processo de generalização é fundamental para a apropriação do conhecimento sistematizado e o desenvolvimento do pensamento no âmbito escolar. Cabe refletir sobre qual tipo de generalização a organização do ensino e a atividade pedagógica estão ancorados. Pois os modos de ações desenvolvidas durante a resolução das tarefas propostas podem determinar o tipo de pensamento a ser desenvolvido, que para Davýdov pode ser o teórico ou o empírico.

### **Considerações finais**

Na proposição davydoviana, as propriedades comutativa e distributiva da multiplicação são desenvolvidas por meio de ações objetivas, com foco para as relações entre grandezas discretas e contínuas. Toma-se como ponto de partida a relação geral, essencial, que engendra o sistema conceitual dado e adentra nas conexões internas que não são dadas diretamente aos órgãos dos sentidos. Tais conexões têm origem na relação entre as unidades de medida intermediária, a quantidade de vezes que esta cabe na grandeza em medição e o total de unidades básicas.

No decorrer do desenvolvimento das tarefas, a relação essencial da multiplicação é modelada por diferentes meios semióticos, tais como objetual, esquemas, gráfico e literal. A modelação objetual é realizada por meio das grandezas. São utilizadas grandezas discretas (contagem) e contínuas (comprimento, largura, volume, entre outras). Outra modelação consiste no esquema de setas, que indica, no plano abstrato, o movimento percorrido para a elaboração da unidade de medida intermediária, o total de vezes que ela se repete no todo e o total de unidades básicas. E, finalmente, na forma literal, por meio de letras que representam a mesma relação entre grandezas revelada no plano objetual. Esse processo culmina na abstração e generalização algébrica; em outras palavras, em generalização substancial. Não há fragmentação entre aritmética, álgebra e geometria. Estas fazem parte de um movimento conceitual interconectado com sustentação na relação entre grandezas.

Nesse contexto matemático, com base nas propriedades da multiplicação, a tabuada é sistematizada teoricamente. Os modos de ações, tanto do professor quanto do estudante, são fundamentais para a apropriação do conhecimento historicamente produzido e para o desenvolvimento do pensamento dos sujeitos.

Vislumbramos na proposição davydoviana, assim como Rosa, Garcia e Lunardi (2021), possibilidades para repensar os problemas referentes ao ensino e aprendizagem de matemática no Brasil, por possibilitar reflexões em nível teórico dos conceitos matemáticos desde os primeiros anos de escolarização.

Assim, para futuras pesquisas, emergem algumas questões, tais como: quais modos de ações na atividade pedagógica, entendida como atividade de ensino do professor e atividade de aprendizagem do estudante, podem fortalecer o desenvolvimento do pensamento teórico no âmbito escolar? Quais desafios e possibilidades para desenvolver a proposição davydoviana no contexto brasileiro? Como organizar a formação de professores de modo a potencializar o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes? Esses e outros questionamentos fazem parte das nossas pretensões futuras de pesquisa.

### Referências

- Caraça, B. J. (1959). *Lições de álgebra e análise*. Gradiva.
- Davídov, V. V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación teórica y experimental*. Trad. Marta Shuare Moscú. Editorial Progreso.
- Davýdov, V. V. (1982). *Tipos de generalización en la enseñanza*. 3. ed. Editorial Pueblo y Educación.
- Davydov, V. V. et al. (2009). *Matemática*. 3º ano: livro didático e de exercícios do Ensino Fundamental. Vita- Press.

- Gorbov, S. F., & Mikulina, G.G. (2003). *Ensino de Matemática*. 3º ano: livro do professor do ensino fundamental. Vita- Press.
- Hobold, E. S. F. (2014). *Proposições para o ensino da tabuada com base nas lógicas formal e dialética*. [Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade do Sul de Santa Catarina].
- Libâneo, J. C., & Freitas, R. A. M. M. (2013). Vasily Vasilyevich Davydov: A escola e a formação do pensamento teórico- científico. In A. M. Longarezi, & R. V. Puentes (orgs.). *O Ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos* (pp. 315-50). Edufu.
- Moraes, S. P. G. (2008). *Avaliação do processo de ensino e aprendizagem em matemática: contribuições da teoria histórico-cultural*. [Tese de Doutorado em Educação, Universidade de São Paulo].
- Núñez, I. B., & Oliveira, M. V. F. (2013). Ya. Galperin: a vida e a obra do criador da teoria da formação por etapas das ações mentais e dos conceitos. In A. M. Longarezi, & R. V. Puentes (orgs.). *O ensino desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos* (pp. 283-313). Edufu.
- Panossian, M. L. (2012). Entre o movimento lógico-histórico dos conceitos e a Organização do ensino de álgebra: o exemplo das equações. In *Anais da XVI ENDIPE*. Unicamp.
- Panossian, M. L. (2014). *O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra*. [Tese de Doutorado em Educação, Universidade de São Paulo].
- Repkin, V.V. (2014). Ensino desenvolvente e atividade de estudo. *Ensino Em Re-Vista*, 21(1), 85-99.
- Rosa, J. E. (2012). *Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas*. [Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Paraná].
- Rosa, J. E., & Hobold, E. S. F. (2016). Movimento entre abstrato e concreto na proposição davydoviana para o ensino de multiplicação. *Inter-Ação*, 41(1), 143-164.
- Rosa, J. E., & Marcelo, F. S. (2022). Teoria do Ensino Desenvolvimental e Atividade Orientadora de Ensino na sistematização de numeração no contexto da formação inicial de professores. *Revista de Educação Matemática (REMat)*, 10(10), 1-21. <https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/610/502>
- Rosa, J. E., Garcia, M. A. C. N., & Lunardi, M. S. (2021). O desenvolvimento de Situações Desencadeadoras de Aprendizagem por meio das ações de estudo propostas por Davídov: uma articulação entre Atividade Orientadora de Ensino e Teoria do Ensino Desenvolvimental. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, 6, 79-99.
- Rubinstein, S. L. (1979). *O desarrollo de la psicología: principios y métodos*. Editorial Pueblos y Educación.
- Vigotski, L. S. (2000). *A Construção do pensamento e da linguagem*. Trad. Bezerra P. Martins Fontes.
- Горбов, С. Ф., & Микулина, Г. Г. (2003). *Обучение математике*. 3 класс: Пособие для учителей начальной школы (Система Д.Б.Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида. перераб. М.:Вита-Прессб.

Давыдов, В. В. О. et al. (2009). *Математика. 3-Класс*. Москва: Мпрос - Аргус.

Revisado por: Maria Isabel de Castro Lima