Referências teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do *software* Maple

AFONSO HENRIQUES*
JOÃO PAULO ATTIE**
LUÍZ MÁRCIO SANTOS FARIAS***

Resumo
As referências teóricas constituem ferramentas necessárias no desenvolvimento de pesquisas, em particular, em didática da matemática, com o objetivo de fundamentar, compreender e interpretar os fenômenos do ensino e aprendizagem. Neste artigo, centramos uma atenção particular nas referências teóricas da didática francesa que permitiram a realização de estudos de objetos matemáticos, como as Integrais Múltiplas (IM) usando o *software* Maple. Esse é, portanto, um estudo teórico ligado ao trabalho de tese[1] que visou estudar as interações possíveis entre as representações gráficas e analíticas de sólidos nos problemas de cálculo de volume por integrais múltiplas, envolvendo o uso de *softwares* de cálculos avançados (CAS). Na fundamentação teórica da tese, interessamo-nos em estudar as ferramentas relativas a três teorias que apresentaremos aqui, as quais esperamos que venham a ser úteis no desenvolvimento de outras pesquisas.
Palavras-chave: instrumentação; antropologia da didática; registros de representações.

---

* Coordenador do Grupo de Pesquisas em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional – GPEMAC – DCET – UESC.
Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC. Doutor em Didática da Matemática – UJFG-França. E-mail: henry@uesc.br

** Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC. Mestre em Educação Matemática – USP. E-mail: jpattie@uesc.br

*** Université de Montpellier II – França. Doutorando em Didática da Matemática. E-mail: luiz.farias@montpellier.iufm.fr

1 Tese intitulada *Ensino e Aprendizagem de Integrais Múltiplas: análise didática envolvendo o uso do software Maple*. Desenvolvida pelo primeiro autor na universidade supracitada, sob direção de Jean-Luc Dorier, junto à equipe DDM (Didactique des Mathématiques), no período de 2002 a 2006, com subsídio da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). A tese é redigida em francês e está disponível no site http://tel.archives-ouvertes.fr/

Abstract
Theoretical references are necessary tools in the development of research particularly in didactics of the mathematics, with the objective to set up, understand and interpret the education and learning phenomena. In this article, we pay particular attention in the theoretical references of the French didactics that had allowed the studies of mathematical objects such as Multiple Integrals (IM) using the Maple software package. This is, therefore, a theoretical study in connected to the thesis work that aimed at the study of possible interactions between the graphical and analytical representations of solids in calculation problems of volumes by means of multiple integrals, involving the use of (softwares of advanced calculations?) computer algebra systems (CAS). In the theoretical scope of the thesis, we were interested in studying tools related to the three theories presented here that we expect to be useful in the development of other research works.
Keywords: *Instrumentation; Anthropology of the Didactics; Representation Registers.*

1. Introdução

Um dos objetivos essenciais das referências teóricas nas pesquisas sobre educação é permitir fundamentar pesquisas, compreender e interpretar os fenômenos do ensino e da aprendizagem. Nesse contexto, visando o desenvolvimento de uma pesquisa em torno do ensino e aprendizagem das Integrais Múltiplas (*IM*), interessamo-nos em estudar as abordagens teóricas que permitem análises de um dado objeto matemático em vários registros de representações. Fazemos, assim, referência à noção de *registros de representações semióticas*, que foi introduzida em estudos de funcionamento do pensamento (psicologia da aprendizagem) por Duval (1993). Essa abordagem parece-nos interessante, pois nos permite precisar o que chamamos de *representação gráfica* e *representação analítica* de um sólido nos problemas de cálculo de volume por *IM*. Constitui, também, instrumento importante para interpretar esses tipos de representações e as interações entre elas, bem como entre os objetos manipulados pelo *software* Maple e os manipulados pelos estudantes utilizando esse *software*. No entanto, essa teoria, por si só, não é suficiente para estudar, de maneira eficaz, as questões que se colocam no contexto geral da nossa pesquisa, dado considerarmos a dimensão *institucional* como essencial. Encontraremos, nesse último aspecto, um apoio na abordagem antropológica da didática (TAD) desenvolvida por Chevallard (1999). Além disso, por utilizarem o ambiente computacional, nossos estudos teóricos conduziram-nos a considerar a dimensão *instrumental* da aprendizagem em ambientes computacionais. Nesse sentido, encontramos fundamentações em trabalhos de pesquisas em ergonomia cognitiva, relativos à aprendizagem da utilização de ferramentas tecnológicas. Fazemos, assim, referência à teoria da instrumentação proposta por Rabardel (1995). Neste artigo, propomo-nos a apresentar os estudos relativos a essas teorias, na ordem inversa em que aparecem nesta introdução.

2. A teoria da instrumentação

Essa teoria é procedente de trabalhos em ergonomia cognitiva, e refere-se à aprendizagem da utilização de ferramentas tecnológicas.

O ponto de partida dessa teoria é a idéia de que uma ferramenta não é, automaticamente, um instrumento eficaz e prático. Um martelo, por exemplo, é um objeto sem significado, salvo quando se tem algo (apropriado ao instrumento) para aprofundar, inserir, moldar, transformando-o assim em um instrumento útil. Da mesma forma, algumas ferramentas são mais apropriadas que outras, dependendo do tipo de utilização a que se propõe. Um balde, por exemplo, é muito mais adequado à tarefa de "transportar água" do que uma peneira ou uma colher, salvo, neste último caso, se o volume de água necessário for muito pequeno. Essa idéia aplica-se também a qualquer outro objeto que se apresenta como uma ferramenta (em nosso caso, didática), como o computador ou um *software*. O processo de aprendizagem no qual um *artefato* torna-se progressivamente um *instrumento* é chamado *gênese instrumental*. "O sujeito deve desenvolver competências para identificar problemas dos quais um dado *instrumento* é adaptado e, em seguida executá-los por meio desse *instrumento*", afirma Drijvers (2002, p. 218).

Nos últimos anos, numerosos são os pesquisadores em didática que dão atenção a essa perspectiva teórica, tais como Artigue (1998), Lagrange (2002), Drijvers (2002), Trouche (2002), entre outros. Esse último, por exemplo, sublinha que: "Os trabalhos recentes em ergonomia cognitiva oferecem elementos teóricos que permitem compreender melhor os processos de apropriação de calculadoras complexas". Rabardel (1995), no que se refere à formação, em geral, e ao ensino, em particular, propôs essa teoria como uma abordagem para a modelização didática, onde, essencialmente, distingue *ferramenta* (*artefato*) como o que é dado ao sujeito de *instrumento*, que é construído pelo sujeito. Essa construção ou *gênese instrumental* é um processo complexo, aliado às características do *artefato* – suas potencialidades e suas limitações e às atividades do *sujeito* –, seus conhecimentos, suas experiências anteriores e suas habilidades (ibid., p. 195)".

Portanto, não podemos considerar o *instrumento* como algo dado, fornecido. Ao contrário, ele é construído pelo sujeito ao longo de um processo de *gênese instrumental*. A transformação de *artefatos* em *instrumentos* aparece como resultado de processos complexos, que colocam, simultaneamente, em jogo, o *sujeito* com as suas competências cognitivas, o *artefato*, com suas características próprias, e o *objeto* para o qual a ação é dirigida. Estes três pólos (Figura 1), condicionados pelo ambiente de aprendizagem no qual estão inseridos, levaram Rabardel (ibid.) a considerar um *instrumento* como uma entidade mista, formada por dois componentes: por um lado, um *artefato* (material ou simbólico) produzido pelo *sujeito* ou por outros. Por outro lado, um (ou vários) *esquema(s) de utilização* associado(s), resultante(s) de uma construção própria do *sujeito*, autônomo ou de uma apropriação de ESU (esquemas sociais de utilização), estes já formados externamente a ele (ibid., p. 117).

Por conseguinte, a integração de ambientes computacionais (como *softwares* educativos) às atividades matemáticas conduz à construção de *esquemas de utilização* mais ou menos adaptados e mais ou menos eficazes. De acordo com Rabardel, os *esquemas* são multifuncionais. Postos em situações precisas, ajudam a: compreendê-las (sua função "epistêmica"); agir, transformar, resolver (sua função pragmática); organizar e controlar a ação (sua função heurística).

O autor apresenta os esquemas de utilização em três categorias: *esquemas de uso* – correspondentes às atividades relativas à gestão das características e propriedades específicas do *artefato*; *esquemas de ação instrumental* – correspondentes às atividades para as quais o *artefato* é um meio de realização, e *esquemas de atividades coletivas instrumentais* – correspondentes à utilização simultânea ou conjunta de um instrumento num contexto de atividades, respectivamente, compartilhadas ou coletivas.

Para a análise de atividades instrumentais (Rabardel, 1995) e (Verillon, 1996) propõem o modelo SAI (Situações de Atividades Instrumentais) (Figura 1), delineando as relações entre o *sujeito* e o *objeto* sobre o qual ele age. O objetivo essencial é evidenciar a multiplicidade de interações que intervêm nas atividades instrumentais. Além da interação usual *sujeito-objeto* **[S-O]**, outras interações são consideradas, tais como as interações entre o *sujeito* e o *instrumento* **[S-i]**, o *instrumento* e *objeto* **[i-O]** e o

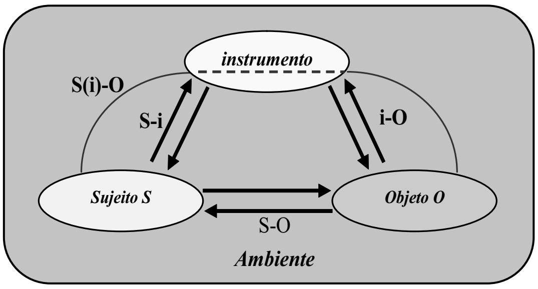


Figura 1

sujeito e *objeto,* pela mediação do *instrumento* [S(i)-O]. Esse sistema é, por sua vez, inscrito num *ambiente* constituído pelo conjunto das condições (potencialidades, limitações, etc.) que intervêm nas atividades instrumentais. Verillon (ibid.) sublinha que esse modelo permite analisar os processos aliados ao uso de *artefatos*. Assim, Rabardel (1995) distingue duas dimensões no processo de *gênese instrumental*: a *instrumentação*, orientada à constituição de esquemas de utilização, e a *instrumentalização*, que se refere à emergência das propriedades funcionais e estruturais do *artefato*. Nessa distinção, Vérillon (1996) explica:

A *instrumentação*[2] consiste na elaboração da relação [S-i]: o *sujeito* deve construir os esquemas, os procedimentos, as operações necessárias para a implementação do *artefato*. Ele pode, por exemplo, considerar, nessa relação [S-i], situações construídas em outros contextos com outros *artefatos* ou, ao contrário, construir novas relações, de maneira a explorá-las ou elaborá-las por imitação.

A *instrumentalização* diz respeito à construção das relações {i-O}. O *sujeito* atribui ao *instrumento* uma possibilidade de agir sobre o objeto O e constrói as propriedades funcionais que permitem a realização dessa possibilidade de ação. Essa ação pode, eventualmente, ser diferente daquela prevista inicialmente pelo autor do *artefato*.

Em nossa pesquisa, o *objeto* O é um *objeto* matemático, denominado Integrais Múltiplas (*IM*), o *sujeito* S é um estudante de uma instituição do ensino superior e o *instrumento* i é um *software* relativamente conhecido, o Maple. A modelização, por *instrumentação* e *instrumentalização* vai descrever a forma pelo qual o *instrumento* influi na constituição da relação [S-O] do *sujeito* com esse *objeto*. Essa relação denotada [S(i)-O] aparecerá em todas as situações nas quais o Maple estiver disponível. Nesse caso, o *instrumento* não pode ser considerado, definitivamente, neutro em relação ao cálculo

2 Nessa dimensão, o sujeito adapta seu problema aos recursos do artefato. E, na *instrumentalização*, o sujeito modifica as propriedades do artefato, para resolver seu problema.

das *IM*. Ou seja, o *instrumento* não se integra naturalmente nas atividades do *sujeito*. Além disso, para realizar certas atividades com auxílio de um *instrumento*, é também necessário desenvolver competências sobre as *técnicas instrumentais*. De acordo com Lagrange:

> A utilização de recursos computacionais [em especial do *software* Maple] multiplica as possibilidades de um estudante agir na resolução de problemas: as abordagens numéricas ou gráficas são mais fáceis e potencialmente mais eficazes do que as que utilizam o único tratamento com papel/lápis [...]. As técnicas utilizadas com os novos recursos, que chamaremos *técnicas instrumentais,* não se reduzem apenas ao "apertar de teclas". Nas suas variedades, elas podem ser vistas como elementos fundamentais no "trabalho de técnicas" que podem garantir a conceitualização. (2002, pp. 152 e 169)

Desse modo, para analisar os recursos do ambiente computacional *Maple* e compreender como tais recursos podem contribuir no estudo das interações possíveis entre as *representações gráficas* e *analíticas* de sólidos num problema de cálculo de volume por *IM*, é importante considerar as duas dimensões (*instrumentação*, *instrumentalização*), bem como as *técnicas instrumentais* executáveis nesse ambiente. Nessa perspectiva, é necessário analisar os comandos disponíveis no *software* e as suas sintaxes. Pois elas, seguramente, intervêm na constituição de *esquemas de utilização* nos cálculos das *IM*.

Essa análise deve permitir a melhor identificação das *potencialidades* e dos *entraves* que o utilizador do Maple pode encontrar na implementação dos objetos matemáticos em questão. Nesse tipo de análise, Trouche (2002) distingue três tipos de *entraves*, que concorrem na pré-estruturação da ação do sujeito e que devem ser analisados, não de maneira geral, mas em relação a um dado tipo de problemas:

Entraves internos (no sentido de entraves físico-eletrônicos) ligados de maneira intrínseca ao material: trata-se de informações que podem ser acessíveis ou não, mas que o *sujeito* não pode alterar utilizando as únicas funcionalidades do *artefato*; não aparecem nem como objetivo, nem como resultado, ao longo da realização de um exercício (ibid., p. 197).

Entraves de comandos ligados à existência e à forma, ou seja, à sintaxe, dos diferentes comandos: trata-se de informações que são acessíveis na interface e que o sujeito pode utilizar ou alterar com certos limites, para obter um resultado (ibid.).

Entraves de organização, ligados à organização do teclado e do monitor, ou seja, à estruturação das informações e dos comandos disponíveis: trata-se também neste caso, de informações que são acessíveis na interface e que o sujeito pode utilizar ou alterar com certos limites para obter um resultado; elas aparecem como elementos de uma técnica de realização de um tipo de exercício (ibid., p. 199).

Relativamente ao cálculo de uma *integral dupla* ou *tripla*, o *software* Maple pode realizar certos procedimentos (tais como mudança de variáveis, cálculos de primitivas de integrais iteradas, etc.) internamente, fornecendo automaticamente o resultado, sem que sejam detalhadas as diferentes etapas possíveis. O estudante poderá aceitar tal resultado ou recusá-lo sem ter os elementos de controle que podem lhe permitir compreender como tal resultado foi arquitetado. Além disso, tais procedimentos são muitas vezes inacessíveis e o sujeito não pode alterá-los diretamente. No entanto, uma reorganização possível do processo de instrumentação pode, *a priori*, permitir ao sujeito obter algum controle sobre o resultado, bem como uma análise crítica das funcionalidades dos recursos do *software*. Portanto, podemos analisar o papel de certos *entraves* de *softwares* educativos a partir das três tipologias evocadas por Trouche.

Relativamente às duas distinções do processo de *gênese instrumental* sublinhadas por Rabardel (1995), a dimensão de *instrumentação* é orientada à constituição de esquemas de utilização. De acordo com o autor, o processo de *instrumentação* requer a mobilização de conhecimentos matemáticos. As situações e os meios organizados em torno de um *artefato* requerendo estratégias instrumentais possuem a capacidade de contribuir na aquisição de conhecimentos.

Assim, podemos enfatizar que a construção dos *esquemas de utilização* na realização de certos exercícios de *representação gráfica* de funções de duas variáveis e de *cálculo* de *integrais* necessita, além do desenvolvimento de competências sobre os comandos do *software* e as suas sintaxes, da mobilização dos objetos matemáticos visados. Por exemplo, a realização de uma *representação gráfica* de dois planos perpendiculares (no Maple) a partir de certas funções de duas variáveis, requer do *sujeito* a construção de um *esquema* de representação gráfica. Vários desses *esquemas* são possíveis e colocam em jogo diferentes conhecimentos matemáticos que requerem competências da parte do *sujeito* sobre a utilização de recursos adequados desse *software*. Nesse contexto, os exercícios propostos aos alunos, as técnicas disponíveis para resolvê-los e as suas justificativas tecnológica-teóricas dependem de um conjunto de dados relativos à *instituição* na qual as representações gráficas em 3D são objetos de estudo. Nesse sentido, "A questão da aprendizagem matemática (quer seja por técnicas *papel/lápis* ou *instrumentais*) coloca-se em termos de *relações pessoais* e *institucionais* a dados, objetos e seus desenvolvimentos articulados", afirma Artigue (1998, p. 9).

Assim, podemos afirmar que o estudo das práticas dos objetos do saber, em particular o cálculo das *IM* e a utilização de um *software* como o Maple, na *instituição* onde vive esse objeto, torna-se essencial. Encontramos nesse aspecto uma fundamentação na teoria antropológica da didática (*TAD*) desenvolvida por Chevallard, que apresentamos a seguir.

> A *TAD* ajuda-nos a pensar a dimensão técnica e instrumental do trabalho matemático, que, nas análises didáticas, é freqüentemente deixada no segundo plano, em proveito de análises de natureza mais conceitual. (1992, p. 9)

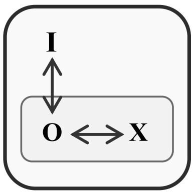
3. A teoria antropológica da didática

Essa abordagem, desenvolvida por Chevallard (1992), inscreve-se no prolongamento da teoria da *transposição didática*. Ela considera os *objetos* matemáticos, não como existentes em si, mas como entidades que emergem de sistemas de práticas que existem em dadas *instituições*. Esses sistemas ou praxeologias são descritos em termos de *exercícios* específicos daquele objeto, das *técnicas* que permitem resolvê-los e através dos *discursos* que servem a explicar e justificar as técnicas. Essas técnicas podem ser caracterizadas do ponto de vista instrumental.

Segundo Chevallard, a didática de ciências, como todas as didáticas, inscreve-se no campo da antropologia social, ou seja, o campo do estudo do homem. Da mesma maneira que existe uma antropologia religiosa ou uma antropologia política, cujos objetos de estudos são, respectivamente, a religião ou a política, Chevallard (1992) propõe elaborar uma antropologia didática, cujo objeto de estudo seria a didática, a fim de estudar, por exemplo, fenômenos acerca do comportamento do aluno diante de um problema matemático. O ponto de partida dessa abordagem é que "*tudo é objeto*". O autor distingue, no entanto, os tipos de objetos específicos, a saber: *instituições* (**I**), *pessoas* (**X**) e as *posições* que ocupam as pessoas nas instituições. Ocupando essas posições, essas pessoas tornam-se *sujeitos* das instituições – sujeitos ativos que contribuem para a existência das *instituições*. O conhecimento – e o saber, como certa forma de organização de conhecimento – entra então em cena com a noção de *relação* que desenvolvemos a seguir.

3.1 Relação pessoal, relação institucional

Um objeto **O** do saber existe na medida em que uma pessoa **X** ou uma instituição **I** o reconhece como existente. A figura ao lado esquematiza as relações entre os termos primitivos (*instituição*, *objeto do saber* e *pessoa*) que Chevallard explica como segue:



Um objeto **O** existe para uma pessoa **X** se existe uma relação pessoal, denotada R(**X, O**), da pessoa **X** ao objeto **O**. Isto é, a relação pessoal **O** determina a maneira como **X** conhece **O**. De maneira análoga, define-se uma relação institucional de **I** a **O** denotada R(**I, O**) que exprime o reconhecimento do objeto **O** pela instituição **I**. **O** é, assim, um objeto da instituição **I**. Essas relações podem também ser representadas da seguinte maneira.

R(X,O)	relação pessoal de **X** a **O** ⇔ **X** conhece **O**
R(I, O)	relação institucional de **I** a **O** ⇔ **I** conhece **O**

Segundo Chevallard (1989),

> Todo saber é ligado ao menos a uma instituição, na qual é colocado em jogo, em um dado domínio real. O ponto essencial é, portanto, que um saber não existe in vácuo, num vazio social. Todo conhecimento aparece, num dado momento, numa dada sociedade, ancorado numa ou numas instituições.

A relação pessoal de uma pessoa a um objeto de saber só pode ser estabelecida quando a pessoa entra na instituição onde existe esse objeto. Assim, do ponto de vista da abordagem antropológica, consideramos, por exemplo, as Integrais Múltiplas como objeto **O** do saber e o curso de Matemática como instituição **I** onde existe **O**.

No que diz respeito à integração de novas tecnologias no ensino da matemática, também é possível nos questionarmos sobre o reconhecimento dos *instrumentos tecnológicos* pelas instituições. Nesse contexto, propomo-nos estudar o *instrumento*, particularmente o Maple, como objeto da instituição, da maneira que segue.

3.2 Relação institucional a um instrumento

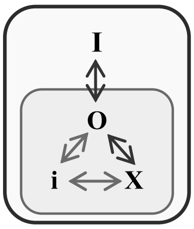


Figura 2

Suponhamos que o objeto **O**, ao qual se refere Chevallard, seja o mesmo objeto do saber ao qual Rabardel (1995) faz referência nas *situações de atividades instrumentais* (*SAI*), e que o *instrumento*, que denotamos por **i**, seja oficialmente reconhecido pela *instituição* **I** onde existe o objeto **O**. Se o ensino, a aprendizagem de **O** e o *instrumento* **i** encontram-se em **I**, e nesse encontro há intenções de **I** que se traduzem por práticas existentes nessa instituição, através de *técnicas instrumentais* de **i** ou de *técnicas tradicionais papel/lápis* utilizadas para se trabalhar com **O**, então, podemos falar da *relação institucional e pessoal a um instrumento* **i**. A Figura 2 esquematiza essas relações, levando em conta os três termos primitivos considerados por Chevallard, que agora passam a interagir com o *instrumento* ao qual Rabardel se refere, quando **i** se torna um *instrumento* da *instituição* **I**. O que se pode traduzir da seguinte maneira:

Um *instrumento* **i** existe oficialmente para uma *instituição* **I** se existem as relações denotadas R(**I**,**i**) e R(**I**,**O**), respectivamente, da *instituição* **I** ao *instrumento* **i** e da *instituição* **I** ao objeto **O**, que se traduzem por práticas existentes nessa instituição, seja ou não por meio de *técnicas instrumentais* de **i**. Assim, à luz da *teoria antropológica* e da *instrumentação*, podemos falar, por exemplo, da *relação institucional às Integrais Múltiplas* utilizando o ambiente computacional Maple, que denotamos por R(**I**,**i**)•R(**I**,**O**) ou simplesmente R[**I**,(**i**,**O**)], assegurando assim a utilização oficial de **i** nas práticas desenvolvidas em torno de **O**, em **I**.

Da mesma maneira, um *instrumento* **i** existe para uma *pessoa* **X** se existe uma relação denotada R(**X**, **i**) da *pessoa* ao *instrumento* **i** e a relação pessoal de **X** a **O** denotada R(**X**,**O**) que determina a maneira como **X** conhece **O**. Nesse caso, falamos da *relação pessoal às Integrais Múltiplas* utilizando o *instrumento* **i**, denotada R[**X**,(**i**,**O**)]. Ou seja:

R(**I**, **i**)•R(**I**, **O**) = R[**I**,(**i**,**O**)] :	relação institucional ao instrumento: se i e O se encontram na instituição **I** em torno do ensino e aprendizagem de **O** com **i**.
R(**X**, **i**)•R(**X**, **O**) = R[**X**,(**i**,**O**)] :	relação pessoal de **X** a **O** por mediação do instrumento **i**.

Além dos conceitos próprios das *relações institucionais* e *pessoais* aos *objetos do saber* e/ou aos ambientes computacionais de aprendizagem, é conveniente destacar a natureza ou as práticas de ensino dos *objetos* nas *instituições*. Para isso, é importante apelar à outra vertente da *TAD*.

3.3 A abordagem praxeológica

Uma *relação institucional* é, em particular, diretamente ligada às atividades institucionais que são solicitadas aos alunos. Ela é, de certa maneira, caraterizada por diferentes tipos de *exercícios* que os alunos devem efetuar e por razões que justificam tais tipos de exercícios. A *relação institucional* a um objeto (**R(I,O)**) é, portanto, descrita por um conjunto de práticas sociais que funcionam numa instituição envolvendo esse objeto do saber.

De acordo com Chevallard, o *saber matemático*, enquanto forma particular do conhecimento, é fruto da ação humana institucional, e é algo que se produz, se utiliza, se ensina ou, de uma forma geral, que transita nas instituições. Chevallard propôs a noção de *organização praxeológica* ou simplesmente *praxeologia* (como conceito-chave) para estudar as *práticas institucionais* relativas a um objeto do saber e em particular as práticas sociais em matemática. Ele se propôs a distinguir as *praxeologias* que podem se construir numa sala de aula, onde se estuda esse objeto, a analisar a maneira pela qual pode se construir o estudo desse objeto e que pode permitir a descrição e o estudo das condições de realização. A *abordagem praxeológica* é, portanto, um modelo para análise da ação humana institucional. Com efeito, as *praxeologias* são descritas em termos das quatros seguintes noções:

1. (Tipo de) Exercícios	3. Tecnologia
2. (Tipo de) Técnicas	4. Teoria

Essas noções permitem a modelação das práticas sociais em geral e das atividades matemáticas em particular, desenvolvidas a seguir.

Exercício

É adotado o símbolo $\boldsymbol{T}$ para representar um *tipo de exercício* identificado numa praxeologia, contendo ao menos um exercício t. Essa noção supõe um objeto relativamente preciso. *Subir uma escada*, por exemplo, é um *tipo de exercício*, mas *subir*, assim isolado, não o é. Da mesma forma, *calcular o volume do sólido delimitado pela superfície S* é um tipo de exercício;

mas *calcular*, assim isolado, é um *gênero* que requer um determinativo. Assim, *exercícios*, *tipo de exercícios*, *gênero de exercícios* não são dados da natureza: são "artefatos", "obras", "construtos" institucionais, cuja reconstrução em tal instituição é um problema inteiramente objeto da didática.

Técnica

Uma *técnica*, denotada por τ, é uma maneira de fazer ou realizar um tipo de exercícios T. Com efeito, uma *praxeologia* relativa a T, necessita de maneiras de realizar os exercícios $t \in T$, isto é, de uma *técnica,* do grego *tekhnê,* que significa saber-fazer. Assim, para um dado tipo de exercícios **T** existe, em geral, uma única técnica ou ao menos um conjunto de técnicas reconhecidas institucionalmente (com exceção das possíveis técnicas alternativas que podem existir, mas em outras instituições) que permitem realizar $t \in T$.

Tecnologia

A *Tecnologia,* denotada por θ, é um discurso racional (o *logos*) tendo por objetivo *justificar* a *técnica* τ, garantindo que esta permita realizar os exercícios do tipo T. Uma segunda função da *tecnologia* é a de *explicar*, tornar compreensível a *técnica*.

Se a primeira função – *justificar a técnica* – consiste em assegurar que a técnica permita alcançar o pretendido, a segunda função – *explicar* – consiste em expor por que é daquela maneira. É notável que as duas funções, *justificação* e *explicação*, são assumidas diferentemente por uma dada *tecnologia*. Tradicionalmente, no contexto matemático, a função de *justificação* carrega com ela a função de *explicação*, pelo viés das exigências demonstrativas. Exemplo: um aluno memoriza uma determinada *tecnologia* (teorema ou fórmula), chega a resolver certos tipos de exercícios com essa tecnologia, mas, às vezes, não sabe *explicar* o porquê do resultado encontrado.

Teoria

A *Teoria,* representada por Θ, tem a função de justificar e tornar compreensível uma *tecnologia* τ.

Organização praxeológica

As quatro noções: *tipo de exercício* (**T**), *técnica* (τ) *tecnologia* (θ) e *teoria* (Θ) descrevem uma *organização praxeológica* completa [$T/\tau/\theta/\Theta$], decomponível em dois blocos [T/τ] e [θ/Θ], constituindo, respectivamente, o *saber-fazer* [*praxe*] e o ambiente *tecnológico-teórico* [*logos*]. Dessa forma, podemos afirmar que *produzir, ensinar e aprender matemática* são ações humanas que podem ser descritas conforme o modelo *praxeológico*. Nesse sentido, a *organização praxeológica* relativa às atividades matemáticas é uma *organização matemática*.

Segundo Matheron:

> Essa *organização* permite estudar uma mesma noção *matemática* designada com mesmo nome, mas com organização *matemática* de naturezas diferentes, se desenvolvidas no seio de instituições diferentes. Esse ponto de vista ressalta o aspecto ecológico relativo a um objeto O, quer dizer, o aspecto do questionamento da existência real ou da inexistência desse objeto na instituição onde vive uma dada *organização matemática*. Essa dimensão ecológica nos permite questionar: como é ensinado um objeto identificado num livro didático? Que tipo de exercícios (tarefas) a realizar e com que tipo de técnicas disponíveis (ou não)? Qual é a *organização matemática*, e por conseqüência, que tipo de progressão considerar? (2000, p. 52)

Analisar a vida de um objeto matemático numa *instituição*, compreender sua significação para essa instituição, é identificar a *organização matemática* que coloca esse objeto em jogo. Nesse paradigma, nós procuramos estudar a *organização matemática relativa ao cálculo de volumes*, que é um dos objetos reveladores de praxeologia completa de cálculo das integrais (simples e/ou múltiplas) nas instituições do ensino superior.

A noção de *organização praxeológica* e a noção de *relação institucional* proporcionam, a partir de um estudo *ecológico dos livros didáticos* e de *programas* de cursos, ferramentas que podem permitir que se respondam às questões de pesquisa que se colocam no contexto desse quadro. Assim, é importante analisar os livros e os programas na *instituição* considerada, pois eles permitem obter dados oficiais de objetos de ensino.

De acordo com Bessot (1994), existem, nos livros didáticos, indicadores lingüísticos que decompõem o texto do saber ensinado. Um saber (em particular matemático) deve ser observado como um objeto suscetível de transformar-se sob exigências de outros objetos com os quais interage. O estudo de um objeto do saber não deve, por conseguinte, ser conduzido de maneira isolada. Chevallard (1994) teoriza esse fenômeno numa abordagem que ele designou *ecologia de saberes*, baseada em noções provenientes da ecologia, as de *habitat* e de *nicho*.

Nessa abordagem, o *habitat* é definido como o lugar de vida e o ambiente conceitual de um objeto do saber. Trata-se, essencialmente, de objetos com os quais interage, mas também das situações de ensino nas quais aparecem as manipulações e experiências associadas. O *nicho ecológico* descreve o lugar funcional ocupado pelo objeto do saber no sistema ou praxeologia dos objetos com os quais interage.

Essa idéia de interdependência dos objetos de saber é destacada por Bosch e Chevallard (1999) quando sublinham que:

> A abordagem antropológica modela o saber matemático em termos de objetos e de interdependências entre si. Dessa visão voluntariamente unitária do universo matemático onde "todo é objeto" emergiu o questionamento sobre a "natureza" dos objetos matemáticos chamados normalmente "conceitos" ou "noções"... Essa questão retorna ao problema da descrição das práticas institucionais onde o objeto é engajado, problema ao qual é necessário responder em termos de organização praxeológica. (1999, p. 87)

Como já evocamos mais acima, nessa organização, colocamo-nos questões sobre os tipos de *exercícios* e as *técnicas* que compõem praxeologias institucionais (onde é suposto intervir sobre o objeto estudado) e sobre os elementos *tecnológicos* e *teóricos* que descrevem e justificam tais práticas. Nesse contexto, e para retornar às *noções fundamentais da abordagem antropológica*, Bosch e Chevallard, sustentam a idéia de que, nessa organização, a implementação de uma *técnica* para realizar um tipo de *exercício* se traduz pela manipulação de objetos *ostensivos* a partir dos *não-ostensivos*, dos quais trataremos a seguir.

3.4 Os ostensivos e não-ostensivos

As questões da "natureza" dos objetos matemáticos e a da sua "função" na atividade matemática levaram a estabelecer uma dicotomia fundamental entre dois tipos de objetos: de um lado os objetos *ostensivos* e de outro lado os objetos *não-ostensivos*.

- Os *ostensivos*[3] são todos os *objetos* que têm uma natureza sensível, uma certa materialidade, que, com efeito, adquirem para o sujeito humano uma realidade perceptível.
- Os objetos *não-ostensivos* são *objetos* que, como as idéias, as intenções ou os conceitos, existem institucionalmente sem, no entanto, poderem ser vistos, ditos, entendidos, percebidos ou mostrados por si: eles só podem ser evocados ou invocados a partir da manipulação adequada de objetos *ostensivos* associados.

Por exemplo:

> Escrever $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 dydzdx = 1$ (volume do cubo $[0,1]^3$) pode ser visto como uma simples manipulação de objetos *ostensivos*, mas esse cálculo não poderia se efetuar, intencionalmente, sem a intervenção de certos objetos *não-ostensivos* específicos, tal como a noção de *integrais triplas*.
> Em geral, em toda atividade humana há a co-ativação de objetos *ostensivos* e *não-ostensivos.* (Ibid., p. 92)

A ostensividade da qual falam Bosch e Chevallard se refere, mais geralmente, ao conjunto de *sentidos* ou "*significações*", no qual a visão e a audição desempenham um papel privilegiado. Além da perceptividade dos *ostensivos*, o que os caracteriza é o fato de serem "*manipuláveis*" pelo homem. Um som pode ser feito (e percebido), um grafismo pode ser traçado (e lido), qualquer objeto material pode ser manipulado concretamente de diversas maneiras. Chevallard utiliza o termo manipulação para designar os diversos usos possíveis de objetos *ostensivos* pelo homem. É essa manipulação concreta que permite distinguir os objetos *ostensivos* dos *não-ostensivos*. Contudo, esses dois tipos de objetos são unidos por uma dialética que considera os últimos como emergentes da manipulação dos primeiros e, por conseguinte, como meios de orientação e de controle dessa manipulação. Os objetos *ostensivos* constituem, portanto, a parte perceptível da atividade humana, que se percebe mais pelos observadores na realização de uma tarefa do que pelos autores.

Para Bosch e Chevallard (1999):

> [...] na análise do trabalho matemático, os objetos *ostensivos* fazem parte do real empírico acessível por significação. Por contraste, a

3 Do latim *ostensu* "que se pode mostrar, que se patenteia, representar com insistência".

> presença de tal ou qual *não-ostensivo* numa prática determinada, só pode ser induzida ou suposta a partir de manipulações de *ostensivos* institucionalmente associados [...]. A intervenção dos *não-ostensivos* na "*praxis*" manipulativa de objetos *ostensivos* pode proporcionar aos *não-ostensivos* o estatuto de condição de uma manipulação adequada dos instrumentos *ostensivos*. (Ibid., pp. 92-93)

Assim, de acordo com os autores, um objeto ostensivo é, sobretudo, considerado como um possível *instrumento* da atividade humana. Ou seja, como uma entidade que permite, em associação com outros, conformar técnicas que permitem realizar certos exercícios ou trabalhos. Como a *abordagem antropológica* descreve o *saber matemático* em termos praxeológicos compostos de tipos de exercícios, de técnicas (que constituem a *praxis* ou "saber fazer"), de tecnologias e de teorias (que constituem o "*logos*" ou "*saber*"), Bosch e Chevallard insistem no fato de que essas organizações praxeológicas são perceptíveis por meio dos objetos *ostensivos* que compõem *exercícios*, *técnicas*, *tecnologias* e *teorias* através das diferentes maneiras de ativá-los. Esse trabalho com ostensivos deve, ao mesmo tempo, ser eficaz, legível e compreensível. Tudo isso contribuirá para proporcionar aos ostensivos seus valores instrumentais e semióticos. Nesse contexto, os autores vêem, no plano do desenvolvimento da matemática, "novas criações ostensivas, novas maneiras de manipular os ostensivos antigos", mas também a perda de certas maneiras de falar, de escrever ou de efetuar certos gestos. Tal "evolução ostensiva" não se realiza nunca de maneira uniforme e universal, mas depende estritamente dos *instrumentos* e das condições *ecológicas* que eles são capazes de criar para fazer viver determinadas praxeologias (ibid., p. 113).

As novas criações *ostensivas*, bem como as novas maneiras de manipular antigos *ostensivos* dos quais falam Bosch e Chevallard, podem ser vistas no âmbito da integração das tecnologias contemporâneas no ensino da matemática. Nesse sentido, Lagrange (2000), interessando-se pelos *objetos* novos (que os ambientes computacionais introduzem nas situações de ensino e de aprendizagem), questiona-se sobre as relações entre os objetos manipulados por um *software* e os objetos *ostensivos* e *não-ostensivos* do trabalho matemático. A complexidade dessas relações permite questionar a forma como os estudantes podem apropriar-se de tais objetos. O autor mostra, então, como os trabalhos recentes integram a teoria cognitiva dos *instrumentos* para abordar esta questão. Além disso, assinala a importância atribuída ao *tratamento* de registros de representação semiótica e as conversões entre registros em situações de utilização de um ambiente computacional em atividades matemáticas. Segundo ele

> [...] a abordagem de Raymond Duval é nomeadamente uma conceitualização que coloca adiante o trabalho intra e inter-registro na análise de atividade matemática. O estudo das exigências de funcionamento cognitivo ligadas ao *tratamento* num registro e as conversões de um registro em outro, em situações de utilização de um ambiente computacional é de grande interesse. (1996, p. 58)

Conforme sublinhamos anteriormente, a noção de registro de representação semiótica vai permitir-nos precisar o que chamamos de *representação gráfica* e *analítica* de um sólido. Ela vai igualmente permitir-nos determinar as ferramentas para interpretar esses tipos de representações (e suas coordenações) em relação aos objetos manipulados pelo *software* Maple e aos manipulados por um aluno utilizando esse *software*. Recorremos precisamente a essa abordagem pelo fato de que, no estudo das Integrais Múltiplas, quando realizamos o cálculo de volumes, fazemos referências aos sólidos. Esses são representáveis em vários registros, em particular os registros gráfico e analítico. Do ponto de vista matemático, destaca-se bem que os dois registros vão interagir nas práticas institucionais sobre os cálculos de volumes. E, do ponto de vista didático, a noção de registro pode ser capaz de nos fazer compreender melhor essa interação no trabalho matemático sobre o cálculo de volumes por Integrais Múltiplas. Propomo-nos, assim, a estudar a abordagem proposta por Duval, que apresentaremos a seguir.

4. A noção de registros de representação semiótica

Na matemática, os objetos não são acessíveis, a não ser através de suas representações. Esse termo, "representação", tem, às vezes, seu significado de certa forma distorcido dentro da área. De fato, o termo é muitas vezes utilizado naturalmente sob sua forma verbal, na qual representar assume o significado de "simbolizar" ou até mesmo "descrever".

Uma *expressão*, uma *noção*, um *símbolo* representam objetos matemáticos tais como um *número*, uma *função*, um *ponto*, um *círculo*, o que significa dizer que os objetos matemáticos não devem jamais ser confundidos com suas representações. Toda confusão implicará uma perda de compreensão e, conseqüentemente, os conhecimentos adquiridos se tornam inutilizáveis no seu contexto de aprendizagem. A distinção entre um *objeto* e sua *representação* é, portanto, um ponto estratégico na compreensão da matemática. Esses princípios, entre outros, levaram Duval a se interessar pelo estudo de *representações semióticas* de objetos matemáticos. Segundo ele,

> [...] existe um paradoxo cognitivo do pensamento matemático: de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos pode ser apenas uma apreensão conceitual e, de outro lado, só por meio de *representações semióticas* é que uma atividade sobre objetos matemáticos é possível. Este paradoxo pode constituir um verdadeiro círculo para a aprendizagem. (1993, p. 38)

4.1 Representação semiótica, o que é?

É uma representação construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua *forma* no sistema *semiótico*, e de outro lado, pela *referência* do objeto representado.

Uma figura geométrica, um enunciado em língua materna, uma fórmula algébrica ou uma representação gráfica, por exemplo, são *representações semióticas* que revelam *sistemas semióticos* diferentes. O *tratamento* dos objetos matemático depende, portanto, das possibilidades de suas representações. Duval (1995) explica a noção de *registro de representação semiótica* da seguinte forma:

> Os sistemas semióticos devem permitir realizar as três atividades cognitivas inerentes a qualquer representação. Em primeiro lugar, *constituir* um traço ou um conjunto de vestígios perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de algo num sistema determinado. Em seguida, *transformar* as representações pelas únicas regras próprias ao sistema, de maneira a obter outras representações que podem constituir uma correspondência de conhecimentos em relação às representações iniciais. Por último, *converter* as representações produzidas num sistema de representações para outro sistema, de tal maneira que este último permita esclarecer outros significados relativos ao que é

> representado. Não são todos os sistemas semióticos que permitem essas três atividades cognitivas fundamentais... Mas as línguas naturais, as línguas simbólicas, as representações gráficas, as figuras geométricas, etc., permitem-no. Falamos então de registro de representação semiótica. (p. 20)

Duval distingue, portanto, três atividades cognitivas fundamentais, ligadas aos registros de representações:

- A *formação* de uma representação semiótica: baseada na aplicação de regras de conformidade[4] e na seleção de certas características do conteúdo envolvido. Por exemplo: composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, escrita de uma fórmula, etc.
- O *tratamento* de uma representação: é a transformação dessa representação no mesmo registro onde foi *formada*. O *tratamento* é, portanto, uma transformação interna num registro. Por exemplo, o cálculo é uma forma de *tratamento* próprio das escritas simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo integral, cálculo proposicional...).
- A *conversão* de uma representação: é a transformação dessa representação numa representação de um outro registro. Por exemplo, a tradução é a conversão de uma representação lingüística numa dada língua a uma representação lingüística de uma outra língua.

A *conversão* é uma atividade cognitiva diferente e independente do *tratamento*. Isso pode ser facilmente observado em situações bem simples: *o cálculo aritmético*, por exemplo. Os alunos podem muito bem efetuar adições de dois números na sua forma decimal e na sua forma fracionária sem pensar em converter, se isso for necessário.

A *conversão* requer que compreendamos a diferença entre *significação* e *referência* dos símbolos ou dos sinais. Nas formas de um número, é importante distinguir a significação operatória relativa ao significando. Essa significação operatória não é a mesma para $0{,}25$, para $1/4$ e para 25.10^{-2}, pois não é o mesmo tratamento que deve ser colocado em

---

4 Regras a respeitar na formação de uma representação semiótica, tais como *regras gramaticais quando se trata de línguas maternas, regras de representação gráfica, regras de cálculos numéricos...*

prática para efetuar as adições: 0,25+0,25=0,5; 1/4+1/4=1/2 e 25.10^{-2}+ 25.10^{-2}=50.10^{-2}. Cada uma dessas três formas tem uma significação operatória diferente, mas elas representam a mesma quantidade, ou seja, o mesmo número.

Esse é um dos exemplos que explica o fato de que certos alunos chegam à sexta série sem saber calcular. Esquecem (ou sequer aprendem) que uma forma decimal, uma forma fracionária e uma forma exponencial constituem três registros diferentes de uma mesma quantidade.

A conversão não pode ser confundida com duas atividades que lhe são bem próximas: a *codificação* e a *interpretação*. A *interpretação* requer uma mudança de quadro ou de contexto. Essa mudança não implica a mudança de registro, mas muitas vezes mobiliza analogias. A *codificação* é a "transcrição" de uma representação em outro sistema semiótico.

A *conversão* tem uma importância particular. No entanto, é geralmente negligenciada no ensino da matemática, enquanto que, como sublinha Duval, uma das condições essenciais para a apreensão conceitual dos objetos matemáticos é dispor, para um mesmo objeto, de várias representações semióticas.

A escolha de um registro de representação adequado pode favorecer o *tratamento* (transformações das representações ao interior de um mesmo registro). No entanto, dispor de vários registros de representação não é suficiente para garantir a compreensão. Uma segunda condição é necessária: a *coordenação* dos registros de representações. Ela se manifesta pela capacidade de reconhecer, em duas representações diferentes, representações de um mesmo objeto. Ela aparece como a condição fundamental para todo tipo de aprendizagem.

Duval interessou-se, particularmente, pelas representações gráficas de objetos matemáticos em duas dimensões. Vamos explorar seu trabalho, prolongando-o para o tratamento de objetos da geometria do espaço tridimensional.

Notamos que, em um dos seus trabalhos, intitulado "Gráficos e equações: articulação dos dois registros", Duval sublinha que:

> a leitura de representações gráficas pressupõe a discriminação das *variáveis visuais* pertinentes e a percepção das variações correspondentes das expressões algébricas. Essa leitura é um procedimento de *interpretação global* que supõe uma atitude contrária à prática de associar *um ponto* a um *par ordenado*. (1988, p. 235)

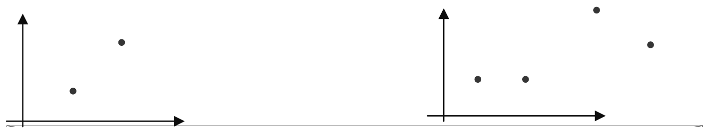
Nesse trabalho, o autor distingue três tipos de tratamentos de gráficos, de acordo com o procedimento adotado:

- ponto-a-ponto;
- extensão de traços já efetuados;
- interpretação global de propriedades das figuras.

O autor propõe esse último como o procedimento sistemático para destacar as variáveis visuais a serem consideradas nessa interpretação. Ele explica que, em geral, as representações gráficas são introduzidas e definidas pelo primeiro procedimento, que consiste em associar *um ponto* a *um par ordenado* e vice-versa. Notamos que esse tratamento funciona bem nos casos mais simples, como o traçado de uma reta no plano cartesiano, e é limitado a valores particulares e aos pontos marcados no plano cartesiano. Mas pode também suscitar dificuldades nas práticas de alunos.

Podemos, por exemplo, encontrar no trabalho de Markovits et alii (1988) um exemplo representativo das dificuldades de alunos confrontados com a noção de gráficos de funções. Os autores propõem aos alunos o seguinte exercício:

Quantas funções possíveis podemos traçar nos dois casos abaixo?



Para o primeiro caso, os alunos responderam "*somente um gráfico*, que a reta passando pelos dois pontos". No segundo, responderam que "*é impossível*", nenhum gráfico pode passar em todos esses pontos. Aá está uma das problemáticas em torno do primeiro procedimento.

O segundo procedimento corresponde às atividades de *interpolação* e de *extrapolação*, que se baseiam no que Duval chama de *aspectos produtores* e *aspectos redutores* das representações gráficas. Em geral, o procedimento de *extensão* é puramente mental.

Muitas vezes, tanto o segundo quanto o primeiro procedimento apóiam-se nos dados do traçado, sem levar em conta as variáveis visuais da representação gráfica. Além disso, o *tratamento* é orientado na pesquisa de valores particulares, sem levar em conta a forma da expressão algébrica.

O último procedimento corresponde ao *tratamento* qualitativo e global das propriedades dos gráficos. O conjunto traço/eixos forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Qualquer modificação dessa imagem, que provoca uma modificação na expressão algébrica correspondente, determina uma *variável visual* relevante na interpretação do gráfico. Nesse procedimento (de interpretação global), a conversão exige que as unidades significativas de cada registro sejam bem discriminadas. Assim, é importante identificar todas as modificações possíveis na imagem, ou seja, ver as modificações conjuntas da imagem e a forma da sua expressão algébrica. Isso caracteriza uma análise de congruência entre dois registros de representação de um objeto ou de uma informação.

Com esse procedimento, abandona-se o comportamento anterior, de associar "*um ponto*" a "*um par ordenado*", mobilizando assim o aspecto de associar uma "*variável visual de representação*" a "*unidades significativas da expressão algébrica*".

Quando se trata de começar pela *representação gráfica* para encontrar, por exemplo, a equação correspondente ou para utilizar o conceito de *inclinação* ou *direção*, é o procedimento de *interpretação global* que é fundamental. Recorrer ao procedimento *ponto a ponto* torna-se totalmente improdutivo, uma vez que, por definição, perdem-se as variáveis visuais. Assim, a prática sistemática do procedimento *ponto a ponto* não favorece o procedimento de *interpretação global*.

4.2 Variáveis visuais e unidades simbólicas significativas

Segundo Duval, a análise de congruência exige a discriminação de unidades significativas[5] próprias a cada registro de representação, bem como o exame das eventuais transformações necessárias para mudar de registro. Em geral, numa expressão algébrica, cada símbolo corresponde a uma unidade significativa. A discriminação das unidades significativas de uma expressão algébrica é uma tarefa relativamente simples. Entretanto, a discriminação das propriedades figurais de uma representação gráfica não o é. Levando em consideração algumas variáveis visuais definidas por Bertin (1977), Duval distingue:

---

5 Existem os símbolos: relacionais ($<$, $>$, $=$, …) ; de operação ou de sinal ($+$, -, ...); de variável; de expoente; de coeficiente ou de constante.

– Duas variáveis visuais gerais:

- Implantação de um exercício, quer dizer, o que se destaca como figura: *um traço ou uma zona*.
- A forma do exercício: o traçado que *delimita ou não uma zona*, é uma reta ou uma curva. Caso seja uma curva, se ela é *fechada* ou *aberta*.

– Três variáveis particulares relativas aos casos em que o gráfico é um traço simples (reta ou parábola).

- O sentido da inclinação de um traço;
- Os ângulos do traço com os eixos;
- A posição do traço em relação à origem do eixo vertical.

Os exemplos considerados por Duval justificando esses procedimentos são particularmente ligados aos casos mais simples de funções de uma variável. Entretanto, os problemas que nos interessam referentes ao cálculo de volume por integrais múltiplas levam em consideração a noção de funções de várias variáveis e revelam novas questões sobre os registros de representação, suas conversões e suas coordenações.

Como pode ser realizada a conversão de registros de representação de sólidos? Duval sublinha a importância da discriminação de variáveis visuais na interpretação das representações gráficas. Como discriminar variáveis visuais na representação gráfica de um sólido delimitado por superfícies tridimensionais?

4.3 Os registros de representações no ensino de cálculo das IM

As diferentes modalidades possíveis para o ensino de cálculo das integrais múltiplas constituem, por um lado, a apresentação dos conceitos matemáticos com base no discurso formal, e, por outro lado, o conjunto de situações suscetíveis de servirem de exemplos de aplicação. A princípio, a colocação de exemplos pode variar. Eles podem ser dados:

• Graficamente	• A partir de expressões algébricas
• Analiticamente	• A partir da integral múltipla já estabelecida

Tais exemplos podem resultar no cálculo de volume, por integral simples, dupla ou tripla. Nos três casos, se o resultado é um número real negativo, então o cálculo da integral é um *volume algébrico*. Tradicionalmente, se compreendermos os conceitos matemáticos inerentes, não levamos em conta que a manipulação desses quatro tipos de exemplos apresenta dificuldades próprias ou que a passagem de um a outro pode não ser evidente. Ora, de acordo com Duval, é importante, no ensino das integrais, compreender o funcionamento de representações semióticas e, principalmente, as suas conversões e suas coordenações. A nossa hipótese é que *a falta de compreensão do funcionamento das representações semióticas dos sólidos e, principalmente, a falta de uma mobilização de suas conversões torna difícil compreender o cálculo das IM*. Qual é o papel das representações gráficas e analíticas de sólidos no cálculo de volume utilizando as escritas algébricas $\int dx$, $\iint f(x,y)dA$ ou $\iiint dV$?

Para calcular o volume de um sólido por integral tripla "iterada" é necessário chegar a uma representação analítica do tipo:

> *$Q=\{(x,y,z),\ a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ m \le z \le n\}$ onde os limites de, ao menos, uma variável devem ser necessariamente constantes, uma se exprime como uma função integrável da primeira e a outra como uma função das duas outras.*

Retomando a definição dada por Duval, podemos dizer que:

> *A leitura da representação gráfica do sólido Q supõe a discriminação das variáveis visuais pertinentes e a percepção das variáveis correspondentes de sua representação analítica.*

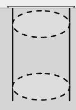
As expressões algébricas ou funções consideradas devem possibilitar a *formulação,* o *tratamento* e a *conversão*. Elas são elementos característicos das atividades cognitivas ligadas ao *registro de representação semióticas* no estudo das IM. Nesse estudo, se o registro *gráfico* e o *analítico* do sólido, assim como a *integral estabelecida* com base nesses registros, não são realmente coordenados, o resultado do *tratamento* do cálculo correspondente pode ser confundido com o volume efetivo desse sólido.

Além disso, esse cálculo pode produzir uma expressão algébrica no lugar de um valor efetivo da integral. A coordenação de registros é, portanto, um meio de controle e de refutação, necessário no cálculo de integrais. Assim, a nosso ver, é fundamental compreender bem os elementos desses registros que exercem um importante papel no *tratamento* do cálculo de integrais.

Uma expressão algébrica ou uma função de duas variáveis pode suscitar dificuldades e/ou confusões no momento do *tratamento* de representações. Uma expressão algébrica pode coexistir em dois objetos diferentes (dualidades e/ou dificuldades de representação de objetos no espaço).

A princípio, é mais simples discriminar as variáveis visuais numa representação bidimensional (2D) do que numa representação no espaço tridimensional (3D). É por isso que um aluno pode levar uma situação do espaço 3D ao espaço 2D utilizando técnicas de projeções ortogonais. Para ilustrar essa observação consideramos, por exemplo, o caso relativo à dualidade de representação de objetos *círculo* e *cilindro.*

As dificuldades ou confusões possíveis suscitadas por esses objetos são, de certa maneira, ligadas ao fato de que os dois objetos matemáticos (*círculo* e *cilindro*) possuem a mesma expressão algébrica, mas de *representações gráficas* e *analíticas* diferentes. Portanto, os cálculos de integrais associados são diferentes e são ligados, respectivamente, ao cálculo de área e de volume. A tabela abaixo distingue bem as diferentes características dos dois objetos.

Expressão algébrica	**Representação**		**Objeto matemático podendo ser representado**	**Integral podendo ser calculado**
	Analítica	**Gráfica**		
$x^2 + y^2 \leq 1$	L : $\{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$		Circulo	$\int f(x)dx$ ou $\int f(y)dy$ ou ainda $\iint dA$
$x^2 + y^2 \leq 1$	C : $\{(x, y, z), x^2 + y^2 \leq 1, z \in \quad \}$		Cilindro	$\int f(x)dx$ ou $\int f(y)dy$ ou $\iint f(x,y)dA$ ou ainda $\iiint f(x,y,z)dV$

As representações de objetos diferentes, a partir de uma única expressão algébrica, revelam possíveis confusões que um aluno pode fazer no tratamento de cálculos de integrais, isso se os registros de representação não forem bem entendidos e coordenados. Ao contrário, se eles o são, e se as funções consideradas são positivas nos seus domínios de definição, então os registros de representação permitem estabelecer as integrais simples possíveis para o cálculo da área da região plana representada e o do volume do sólido por uma integral simples ou múltipla.

4.4 Variáveis visuais e unidades significativas na representação de sólidos

Como sublinha Duval, a análise de congruência exige a discriminação de unidades significativas próprias a cada registro de representação, bem como o exame das eventuais transformações necessárias para mudar de registro. Entre as unidades significativas próprias a uma expressão algébrica, consideradas por esse autor, os símbolos de comparação $\leq$, $\geq$ e $=$ têm particularidades significativas na análise de representações de sólidos.

Por um lado, os dois primeiros símbolos são *ostensivos,* pois exercem um papel na discriminação da forma de um dado sólido Q (relativamente à sua convexidade ou concavidade, em relação à região do espaço tridimensional ocupada pelo conjunto dos pontos que o formam). Por outro lado, tais símbolos participam na leitura das representações gráficas dos sólidos. Dessa maneira, eles são *instrumentos* necessários na descrição dos mesmos. Ou seja, a *representação analítica* de um sólido deve ser expressa em termos de inequações, pois essa representação (cf. definição dada mais acima) descreve a estrutura algébrica do volume da porção de R^3 (sólido Q) que contém os limites de integração. Por conseguinte, podemos afirmar que o modo de representação dos sólidos (delimitados por superfícies de equações dadas) é fortemente ligado às práticas institucionais de cálculo de Integrais Múltiplas. O terceiro símbolo participa na descrição das superfícies que podem eventualmente delimitar um sólido. Assim, os sólidos devem ser expressos por inequações e as superfícies, por equações.

Por exemplo, a expressão $x^2 + y^2 \leq 1$ (com z qualquer) exprime o sólido infinito centrado na origem e de raio 1, enquanto que $x^2 + y^2 = 1$ é a sua superfície.

Prolongando, para os objetos do espaço, a idéia de variáveis visuais consideradas por Duval, podemos distinguir:

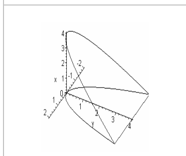
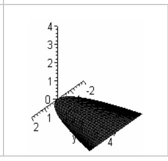
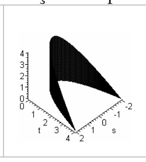
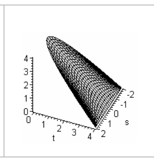
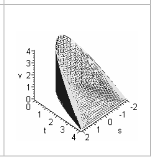
– Duas variáveis visuais gerais relativas aos casos da representação gráfica de superfícies/sólidos:

- A implantação do exercício, ou seja, o que se destaca como representação gráfica no espaço: *uma superfície* ou *um sólido*.
- A forma do exercício: a superfície traçada, delimitando ou não um sólido, é um plano ou superfície de equação conhecida. Essa superfície pode ser aberta ou fechada. Se ela for aberta, então pode

ser côncava ou convexa em relação à região do espaço ocupado pelo conjunto dos pontos que formam o sólido.

– Variáveis específicas:

- Posição da superfície (Sps) traçada em relação aos planos canônicos (planos *xOy, xOz, yOz*).
- Posição da altura do sólido em relação aos planos canônicos. Altura indica a variação da variável da integral mais interna numa integral tripla ou a discriminação do volume sob uma superfície em relação à região de integração de uma integral dupla.
- Posicionamento das partes de Sps que delimitam um sólido.
- Posicionamento das partes de um sólido, possíveis de serem demarcadas por simetria.
- "*Arestas curvilíneas*": uma intersecção (dois a dois) de superfícies no espaço, que será uma curva (ou uma reta). Se essas superfícies delimitam um sólido, então a união dessas curvas é uma curva fechada no espaço e corresponde às "*arestas curvilíneas*" do sólido (cf. representações gráficas abaixo).

Aresta curvilíneas	Porções de Sps			Sólido
				

- Escala.

Essas variáveis desempenham um papel importante na interpretação dos sólidos, bem como na coordenação/conversão entre registros de representação relativos às práticas de cálculo de volume por Integrais Múltiplas, e merecem, ao nosso ver, uma atenção especial.

4.5 Complexidades de representações e de conversões no cálculo das Integrais Múltiplas

A conversão da representação de um objeto e a sua transformação em outra representação carece de um outro registro. Para o cálculo de volumes por IM, três registros são centrais. O registro *gráfico*, o registro *analítico* e o registro *algébrico* (ou escrita do cálculo da integral definida). Em muitos casos, esse último depende da boa coordenação dos dois primeiros. As questões que emergem são as seguintes: Que papel desempenham tais registros na compreensão conceitual de cálculos das Integrais Múltiplas? Como discriminar as variáveis correspondentes entre esses registros?

As regras para efetuar uma conversão entre esses registros podem ser simples, mas a passagem de uma representação gráfica de um sólido à sua representação analítica e vice-versa pode ser uma tarefa difícil. Essa passagem supõe que as variáveis de cada representação foram bem discriminadas, o que nem sempre acontece de maneira imediata. A princípio, a discriminação das variáveis visuais de um sólido (no registro gráfico, a partir das técnicas clássicas de representação no ambiente *papel/lápis*) e as suas correspondências no registro analítico não é uma tarefa fácil. Por quê? Porque, em muitos casos, a representação gráfica no espaço tridimensional é difícil de fazer no ambiente *papel/lápis*, que só tem como base o plano, de duas dimensões (o papel). A utilização da perspectiva, que daria ao indivíduo um "conforto tridimensional" em um ambiente bidimensional, depende unicamente das suas habilidades em realizar o desenho. Assim, consideramos que essa é uma das causas pela qual uma utilização adequada de um ambiente computacional, como o Maple, pode ser de uma ajuda inegável. Ele pode permitir, enquanto instrumento, um controle sobre as variáveis visuais na interpretação global das propriedades da figura que o ambiente papel/lápis não permite com tanta facilidade.

A possibilidade de utilizar vários registros e de saber efetuar conversões, para passar de um registro a outro, é mais delicada no ensino universitário, no qual as Integrais Múltiplas são ensinadas. A utilização do ambiente computacional nesse ensino pode auxiliar o aluno no processo dialético de controle e de pré-estruturação das suas ações. Essa utilização supõe, no entanto, que a problemática da integração das ferramentas tecnológicas no ensino superior seja levada em conta. Contudo, como sublinha Trouche (2003), essa consideração estimula a emergência de novas abordagens teóricas.

5. Conclusão

Na introdução deste artigo, apontamos um dos objetivos essenciais das referências teóricas nas pesquisas sobre educação e sublinhamos o nosso interesse sobre pesquisas em *ergonomia cognitiva* relativas à aprendizagem do uso de ferramentas tecnológicas na educação, em particular na matemática (Rabardel, 1995). Esse interesse foi alimentado pelas abordagens Antropológica da Didática (Chevallard, 1992) e pela de Registros de

Representações Semióticas (Duval, 1993) que acabamos de estudar, as quais procuramos articular no desenvolvimento da tese mencionada, permitindo, por conseguinte, responder às nossas inquietações. Nas nossas análises, tanto didáticas quanto matemáticas, tentamos, na medida do possível, confrontar os diferentes pontos de vista que as três abordagens oferecem na investigação de objetos de ensino e aprendizagem, centrando nosso estudo nas integrais múltiplas, em paralelo com a problemática de integração das novas ferramentas tecnológicas nesse ensino. O nosso intuito, com este artigo, reside na possibilidade de divulgar nossos trabalhos de pesquisas desenvolvidos no GPEMAC em relação à didática francesa. Em trabalhos futuros, daremos continuidade a este texto, mostrando como essas teorias foram ou são efetivamente utilizadas. Esperamos, portanto, que este artigo contribua, não somente para a realização de nossas pesquisas, mas, principalmente, para a condução de outros trabalhos em educação matemática.

Referências

ARTIGUE, M. (1998). Un regarde didactique sur l'utilisation d'outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques. *Repères IREM*, n. 19, pp. 77-108.

BERTIN, J. (1977). *La graphique et le traitement graphique de l'information*. Paris, Flammarion.

BESSOT, A. (1994). Panorama del quadro teorico della didattica matematica in Francia. *L'educazione matematica*, Anno XV, Serie IV, v. 1, n. 1, Italie.

______(2005). *Etude didactique des relations entre l'enseignement de la notion de limite et la programmation d'algorithmes de calcul dans un environnement 'calculatrice'*. Séminaire franco-vietnamien de didactique des mathématiques. UPHCM, pp. 1-6.

BOSCH, M. e CHEVALLARD, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, v. 19/1, pp. 77-123.

CHEVALLARD, Y. (1989). *Le concept de rapport au savoir. Rapport personel, rapport institutionnel, rapport officiel*. Seminaire de Grenoble. IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 12, n. 1, pp. 73-112.

______(1994). "Les processus de transposition didactique et leur théorisation". In : ARSAC, G. et alii. *La transposition didactique à l'épreuve*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

______(1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, v. 19/2, pp. 221-266.

DRIJVERS, P. (2002). "L'algèbre sur l'écran, sur le papier et la pensée algébrique". In: GUIN, D. e TROUCHE, L. *Calculatrices symboliques – transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique.* Recherches en Didactiques des Mathématiques. Grenoble, La Pensée Sauvage.

DUVAL, R. (1988). Graphiques et équations: l'articulation de deux registres*. Annales de didactique et de sciences cognitives*. IREM de Strasbourg, v. 1, pp. 235-253.

______(1993*).* Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. IREM de Strasbourg, v. 5, pp. 35-65.

______(1995*). Sémiosis et pensée humaine*. Bern, Peter Lang.

GUIN, D. e TROUCHE, L. (coord.) (2002). *Calculatrices symboliques – transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique.* Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble, La Pensée Sauvage.

HENRIQUES, A. (2006). *L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples: analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple*. UJF-Grenoble, Lab. Leibniz.

LAGRANGE, J. B. (2000). *Approche didactique et cognitive d'un instrument technologique dans l'enseignement: le cas du calcul formel en lycée*. Document pour l'habilitation à diriger les recherches. Université Paris VII.

______(2002). "Etudier les mathématiques avec les calculs symboliques: quelle place pour les techniques". In: GUIN, D. e TROUCHE, L. *Calculatrices symboliques – transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*. Recherches en Didactiques des Mathématiques. Grenoble, La Pensée Sauvage.

MARKOVITZ, Z.; EYLON, B e BRUCKHEIMER, M. (1988). Difficulties students have with the function concept. *The ideas of Algebra*, K-12, NCTM, Yearbook.

MATHERON Y. (2000), Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques. *Petit x,* n. 54, pp. 51-78.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains.* Paris, Armand Colin Editeur.

SWOKOWSKI, E. W. (1993). *Analyse*. Traduit de l'anglais par Mechelim. 5 ed. De Boeck Université.

_____(1994). *Cálculo com geometria analítica*. 2 ed. São Paulo, Makron Books.

TROUCHE, L. (2002). "Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans l'environnement calculatrice symbolique". In: GUIN, D. e TROUCHE, L. *Calculatrices symboliques – transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique.* Recherches en Didactiques des Mathématiques. Grenoble, La Pensée Sauvage.

_____(2003). From artifact to instrument: mathematics teaching mediated by symbolic calculators. *Interacting with computers*, v. 15, n. 6, pp. 783-800.

VERILLON, P. (1996). La problématique de l'enseignement: un cadre pour penser l'enseignement du graphisme. *Revue GRAF & TEC*, v. 0, n. 0. Université Fédérale Santa Catarina, Brésil.

Recebido em abr./2006; aprovado em maio/2007.