ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p305-335

Licenciandos em matemática interagindo no VMTcG em uma tarefa sobre translação

Prospective mathematics teachers interacting on VMTcG in a task concerning translation

Futuros profesores de matemáticas interactuando en el VMTcG en una tarea sobre traslación

Futurs professeurs de mathématiques interagissant sur VMTcG dans une tâche concernant la translation

M Marcelo Almeida Bairral[1]
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ
Doutorado em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0002-5432-9261

Thuane da Silveira Silvano[2]
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ
Graduada em Licenciatura em Matemática
https://orcid.org/0000-0002-6125-0981

Resumo

Este estudo integra um projeto de pesquisa voltado ao aprendizado em ambientes virtuais. Mediante estudo de caso ilustram-se e analisam-se interações de licenciandos em matemática em uma tarefa sobre translação em um dispositivo síncrono e integrado ao GeoGebra. O marco teórico da investigação ressalta a importância da tarefa e duas possíveis formas de raciocinar – ascendente ou descendente – mediante interações colaborativas em Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD)[3]. A análise foi baseada nas interações escritas, nas construções em tela, nas tabelas e nos gráficos – expostos na Figuras – gerados na plataforma do Virtual Math Team com GeoGebra (VMTcG). Destaca-se a forma com que os futuros professores construíram o que foi proposto a partir de dúvidas e de ideias emergentes. Ressalta-se a importância do *design* de tarefas que aprimorem o entendimento de transformação e de relação funcional no trabalho com isometrias.

Palavras-chave: formação inicial de professores, Interações *online*, Isometrias, Translação.

[1] mbairral@ufrrj.br
[2] thuanesilvano@gmail.com

Abstract

This study is part of a research project aimed at learning in virtual environments. Through a case study, interactions by prospective mathematics teachers in a task on translation in a synchronous device integrated to GeoGebra are illustrated and analyzed. The theoretical framework of the investigation emphasizes the importance of the task and two possible ways of reasoning (ascending or descending) through collaborative interactions in DGE. The analysis was based on written interactions, on-screen constructions, tables, and graphs generated on the VMTwG platform. The focus is on the way in which future teachers built what was proposed based on doubts and emerging ideas. The importance of designing tasks that improve the understanding of transformation and functional relationship in working with isometries is stressed.

Keywords: Prospective mathematics teachers, Online interaction, Isometrics, Translation.

Resumen

Este estudio forma parte de un proyecto de investigación dirigido al aprendizaje en entornos virtuales. A través de un estudio de caso, se ilustran y analizan las interacciones de futuros profesores de matemáticas en una tarea de traducción en un dispositivo síncrono integrado a GeoGebra. El marco teórico de la investigación enfatiza la importancia de la tarea y dos posibles formas de razonamiento (ascendente o descendente) a través de interacciones colaborativas en AGD. El análisis se basó en interacciones escritas, construcciones en pantalla, tablas y gráficos generados en la plataforma VMTcG. Se destaca la forma en que los futuros docentes construyeron lo propuesto a partir de dudas e ideas emergentes. Enfatiza la importancia de diseñar tareas que mejoren la comprensión de la transformación y la relación funcional al trabajar con isometrías.

Palabras clave: formación inicial de profesores, Interacciones online, Isometrías, Traslación.

Résumé

Cette étude fait partie d'un projet de recherche visant l'apprentissage dans des environnements virtuels. A travers une étude de cas, les interactions de formation initiale des enseignants dans une tâche de traduction dans un dispositif synchrone intégré à GeoGebra sont illustrées et analysées. Le cadre théorique de l'investigation met l'accent sur l'importance de la tâche et sur deux modes de raisonnement possibles (ascendant ou descendant) à travers les interactions collaboratives en AGD. L'analyse s’est basée sur des interactions écrites, des constructions à l'écran, des tableaux et des graphiques générés sur la plateforme VMTaG. L’accent est mis sur la façon dont les futurs enseignants ont construit ce qui était proposé à partir de doutes et d'idées émergentes. L'accent est mis sur l'importance de concevoir des tâches qui améliorent la compréhension de la transformation et de la relation fonctionnelle dans le travail avec les isométries.

Mots-clés : Formation initiale des enseignants, Interactions en ligne, isométries, Translation.

Licenciandos em matemática interagindo no VMTcG em uma tarefa sobretranslação

Este estudo integra uma pesquisa[4] mais ampla, que analisa o modo como sujeitos – licenciandos e professores de matemática – interagem e aprendem em ambientes virtuais de aprendizagem. O foco aqui está circunscrito ao aprendizado de conceitos relacionados às isometrias no ambiente *Virtual Math Team* com GeoGebra (VMTcG). Particularmente, mostraremos aspectos emergentes nas interações síncronas de uma dupla de licenciandos em uma tarefa sobre translação.

A investigação, realizada no âmbito do Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática (GEPETICEM), integra um projeto[5] mais amplo financiado pelo CNPq. A pesquisa foi organizada em quatro principais momentos: 1) questionário, 2) sondagem inicial, 3) desenvolvimento conceitual[6] e 4) elaboração de tarefas (Silvano & Bairral, 2021), implementação e análise de atividades no VMTcG. Neste artigo traremos resultados inerentes ao momento 4 – particularmente, da aplicação.

Uma forma de analisar a aprendizagem matemática do sujeito é por meio da interação deste com o outro, com a matemática e com a tecnologia. O aspecto inovador do estudo aqui ilustrado está em analisar gráficos gerados na própria plataforma do VMTcG (adiante, Figuras 10 e 11) e na abordagem de um tópico ainda pouco explorado no currículo do Ensino Fundamental (Ng & Sinclair, 2015), no do Ensino Médio (Assis, 2020; Barbosa, 2014) e no da Licenciatura (Delmondi & Pazuch, 2018). Outro fator que justifica a relevância deste estudo é que o VMTcG ainda é um ambiente pouco usado no Brasil (Menezes & Bairral, 2021). Em um cenário de (pós-)pandemia e que demanda planejamentos em atividades *online*, este estudo também se mostra importante.

Iniciaremos o artigo ressaltando algumas particularidades e formas de raciocinar em ambientes de geometria dinâmica (AGD) e, a partir de uma revisão de literatura, sintetizaremos aspectos teóricos de transformações geométricas, em especial, as isometrias. Ao longo da pesquisa aplicamos atividades com caráter exploratório, adaptadas de Assis (2016), na plataforma do VMTcG, que permitissem a criação de linhas de raciocínio e de produção de conjecturas e de justificativas ou provas. Na análise mostraremos uma dessas tarefas.

Algumas particularidades e formas de raciocinar em AGD

---

[4] Integrante do projeto de pesquisa "Participar, descobrir e interagir em ambientes virtuais: Potencializando novas formas de aprendizagem matemática" (CNPq 302124/2016-0), financiado pelo CNPq e pela Faperj.

5 Aprovado pelo comitê de ética com o Parecer número 916/17.

6 Resultados dos três primeiros momentos podem ser vistos em Silvano e Bairral (2020).

Com os AGD é possível construir figuras geométricas a partir de diferentes informações fornecidas – suas características euclidianas, suas medidas etc. –, utilizando estratégias pessoais ou matemáticas. Esses ambientes favorecem a visualização das figuras de diferentes posições e a modificação de suas características euclidianas instantaneamente, como alguns pesquisadores ressaltam (Arzarello *et al.*, 2002; Salazar & Almouloud, 2015).

Atividades realizadas em AGD podem influenciar a exploração, a construção de conceitos, a validação ou refutação de conjecturas, entre outros. Os AGD permitem uma melhor visualização, melhoram o entendimento do processo de construção e possibilitam criar conjecturas e colocá-las em situação de verificação e de prova (Barreira & Bairral, 2017). Estes mesmos autores destacam que os AGD devem ser usados juntamente com propósitos docentes eficazes e adequados, para orientar os discentes a realizar de forma correta as atividades propostas.

No entanto, não estamos desconsiderando o uso de papel e lápis em aulas. Com eles também aprendemos e realizamos outros tipos de registros, diferentes dos que fazemos no AGD. Logo, em sala de aula pode haver um trabalho integrado com tecnologias em AGD e recursos que geram construções estáticas: papel, lápis, régua etc. Partindo da análise de duas figuras geométricas, é possível que, ao compará-las em um ambiente sem movimento, observemos apenas as medidas que foram feitas naquele desenho em particular. Quando utilizamos um AGD, podemos considerar diferentes configurações, tamanhos e posições. Essa possibilidade diversa de objetos a considerar envolve o sujeito no seu processo de descoberta e de aprendizado.

A forma de propor uma tarefa e de raciocinar sobre ela é outro aspecto a considerar em um AGD (Bairral & Marques, 2016). O tipo de tarefa e as formas de justificar são características que colocam a matemática em movimento, pois a construção, a visualização e a manipulação de objetos geométricos são possibilidades propiciadas pelo uso de AGD (Powell & Pazuch, 2016).

Há dois modos de raciocinar e deduzir propriedades matemáticas em um AGD (Arzarello et al., 2002): o pensamento **ascendente** – da prática para a teoria – e o **descendente**: da teoria para a prática. Quando trabalhamos com construções prontas e utilizamos os ambientes como motivação e introdução da aula, para, a partir da exploração e da análise do que já está pronto, definir formalmente um conceito novo para a turma, chamamos de aspecto **ascendente**. Agora, quando iniciamos um novo conteúdo, mostrando sua definição, exemplo e aplicações, estudando a fundo cada variação e processo de solução, e somente depois partimos para a construção, chamamos de aspecto **descendente**. Em outras palavras, no **ascendente** os conceitos emergem da situação em análise e, no **descendente**, o que o sujeito faz é aplicar seus conhecimentos.

Ao repensarmos os movimentos feitos nas figuras construídas também podemos observar dois aspectos importantes: **invariante** e **variante** (Bairral & Barreira, 2017). Durante a construção de um triângulo qualquer, por exemplo, devemos respeitar suas propriedades, como a soma dos ângulos internos serem 180° e, estudando a fundo, analisar a localização dos seus pontos notáveis: baricentro, ponto de encontro das medianas; incentro, ponto de encontro das bissetrizes; ortocentro, ponto de encontro das alturas; e circuncentro, ponto de encontro entre as mediatrizes. Ao movermos um de seus vértices, podemos notar a variação na área, no perímetro, nos ângulos, na localização dos pontos notáveis e no tipo de triângulo – acutângulo, retângulo ou obtusângulo. A essas características que variam, chamamos de aspectos **variantes**. Porém, por mais que a localização dos pontos notáveis mude, sempre podemos localizá-los, assim como, independentemente da medida dos três ângulos, sua soma sempre será de 180° – a essas propriedades, chamamos de aspectos **invariantes**. Os elementos invariantes têm relação com a construção feita, e os diversos movimentos feitos nos pontos livres favorecem a sua identificação e compreensão.

Particularmente, o estudo das transformações geométricas confere ao ensino da geometria um dinamismo que não possuía na versão estática de Euclides (Veloso, 2012) e permite, dentre outras características, o entendimento de aspectos (in)variantes na figura e suas imagens por determinada transformação. No VMTcG,

> a aprendizagem não é vista como um produto em si mesmo, mas uma conjunção de aspectos (exemplos, conceitos, concepções, sugestões, construções em tela etc.) que vão se desenvolvendo no coletivo constituído. Embora as contribuições sejam individuais o resultado é um produto do grupo, não de um sujeito apenas. Coletivos distintos desenvolvem formas próprias de interagir e, portanto, de aprender. (Oliveira & Bairral, 2020, p. 304)

Alguns estudos prévios

Dentre os diversos estudos prévios realizados no VMTcG, destacamos oito relevantes ao nosso estudo (Tabela 1), sombreando em verde os resultados de cunho mais matemático e em cinza os relacionados ao *design* de tarefas e aos processos de raciocínio e de prova, importantes em nossa análise.

Tabela 1.

Pesquisas utilizando VMTcG

Autor(es)	Público-alvo	Temática	Objetivo geral	Resultados
Salles e Bairral (2012)	Docentes (formação continuada em exercício)	Geometria do Táxi	Analisar as interações docentes no VMTcG em um problema da geometria do táxi.	As categorias de interlocução elencadas por Powell (2006) para dinâmicas presenciais também podem ser identificadas no VMTcG (chat). Os docentes aprenderam sobre a métrica em uma geometria não convencional e empregaram estratégias do raciocínio combinatório para analisar a quantidade mínima de caminhos.
Barbosa (2014)	Alunos do Ensino Médio	Transformações no plano com foco nas matrizes	Compreender como alunos desenvolvem ideias sobre transformações no plano mediante tarefas envolvendo matrizes.	Identificar a metáfora transformação como mudança, na qual transformações no plano foram entendidas a partir de mudanças físicas, corpóreas. A metáfora de ligação matriz identidade é elemento neutro e emergiu de provocações da pesquisadora. O elemento neutro da multiplicação de números reais provocou a compreensão de que a transformação pode não mudar, quando a matriz de transformação é a matriz identidade.
Marques e Bairral (2014)	Licenciatura em Matemática	Teorema de Varignon	Refletir sobre o processo de desenvolvimento do raciocínio, mediante conjecturas e estratégias de prova.	Adotar um olhar mais dinâmico e processual para a produção de provas em AGD. Essa dinâmica interativa pode tornar os futuros docentes mais motivados para o uso de *softwares* como minimizadores das dificuldades comumente encontradas para demonstrar em matemática.
Bairral e Marques (2016)		Pontos notáveis do triângulo	Analisar interações *online* de futuros professores de matemática no VMTcG.	A natureza da tarefa interfere na forma de raciocinar dos sujeitos. A elaboração de justificativas e provas continua sendo um desafio

				em cenários virtuais como o VMTcG.
Powell e Pazuch (2016)	Docentes (formação continuada em exercício)	Quadriláteros e suas bissetrizes	Analisar como construíram justificativas com base em suas próprias conjecturas e percepções de relações entre objetos geométricos, sem o uso de medidas.	As justificativas foram baseadas nas propriedades dos objetos matemáticos, nas relações entre objetos e nas relações entre relações. Essas justificativas teóricas e as condições em que elas foram realizadas geram implicações para a formação de professores e para a sua prática docente.
Barreira e Bairral (2017)	Licenciatura em Matemática	Quadriláteros	Ilustrar uma dupla de licenciandos interagindo no VMTcG para construir um quadrilátero e analisar sua natureza.	As formas de convencimento sobre a natureza do quadrilátero construído estiveram basicamente embasadas em propriedades conhecidas por eles sobre o polígono em análise. Resultados instigam sobre tipo de tarefa e estratégias de raciocínio usadas pelos interlocutores.
Oliveira e Bairral (2020)		Proposição de tarefa no GeoGebra	Analisar interações de licenciandos na proposição de uma tarefa com o GeoGebra.	Reflexões *online* pautadas na formulação e na solução de novos problemas podem caminhar conjuntamente.
Brito (2022)	Licenciandos em Matemática, e formação continuada	Semelhança de triângulos	Analisar o aprendizado de semelhança mediante interações no VMTcG.	A importância do *design* das tarefas, do controle deslizante e da mediação semiótica

Dos estudos elencados na Figura 1, a nova versão do VMTcG foi utilizada apenas por Brito (2022). A versão atual funciona bem em *smartphones* e possibilita a geração de gráficos, como veremos na análise.

Salles e Bairral (2012) analisaram o raciocínio matemático a partir de interações no quadro e do *chat* escrito. Os autores observaram as quatro propriedades de interlocução (avaliativa, informativa, interpretativa e negociativa)[7] e ressaltaram o papel da interlocução negociativa para a melhor compreensão das ideias dos sujeitos.

Marques e Bairral (2014) discursaram sobre a criação de conjecturas e de processos de prova nos AGD. Ressaltaram duas fases: a de conjecturar, na qual os alunos se envolvem na exploração de figuras, e a fase de provas, que é um produto da exploração, mas os sujeitos tentam validar suas hipóteses, geralmente coletivamente. As explorações geraram questionamentos e afirmações (certezas), e a partir deles foram criadas conjeturas para começar um processo de prova.

Bairral e Marques (2016) enfatizaram o uso de AGD, particularmente, destacando como pontos positivos a visualização, a construção e a interação *online*. A plataforma do VMTcG foi apresentada, e a atividade interativa ocorreu em salas diferentes: uma, em que havia um triângulo previamente construído com os três pontos notáveis do triângulo; e outra, em que não havia a construção. Na sala com o triângulo construído os participantes movimentaram mais a figura, além de utilizar as ferramentas do GeoGebra para validar suas conjecturas. Na sala onde o triângulo não estava construído, os sujeitos levaram mais tempo com a construção e movimentaram menos a figura. Os estudiosos indicaram resultados diferentes de descobertas matemáticas em cada sala.

Powell e Pazuch (2016) analisaram o modo como docentes em formação continuada construíram justificativas com base em suas próprias conjecturas e percepções de relações entre objetos geométricos. Os pesquisadores afirmaram que essas justificativas teóricas e as condições em que elas ocorrem geram implicações para a formação de professores e para a sua prática docente.

Bairral e Barreira (2017) destacaram especificidades de um AGD, como a possibilidade de arrastar as figuras para explorá-las, a construção mais fácil e rápida, a visualização da construção em diferentes ângulos e formas, a criação de conjecturas e a possibilidade de prová-las, e a reorganização do ensino na sala de aula. Os autores sinalizaram características variantes e invariantes presentes nas construções e aspectos ascendentes e descendentes no momento de pensar matematicamente. Por fim, sublinharam a produção de dados do VMTcG, particularmente, a análise das interações mediante o *replayer*.

7 Na interlocução **avaliativa** os alunos apenas expõem suas afirmações sem intervenção, é papel do docente admitir uma interlocução **interpretativa**, posicionando-se de maneira a buscar entender o pensamento do aluno. Quando há a interlocução **informativa,** o participante apenas informa algo para gerar curiosidade e dúvidas. Na interlocução **negociativa,** os sujeitos buscam uma solução compartilhada para o problema e interagem em uma sequência de questionamentos (Powell, 2003).

Ao contrário dos demais estudos, Oliveira e Bairral (2020) analisaram interações de licenciandos na proposição de uma tarefa com o GeoGebra no VMTcG. Destacaram que reflexões sobre a formulação e a solução de novos problemas podem caminhar conjuntamente. Também sublinharam que o VMTcG se mostra muito frutífero na proposição de tarefas, por gerar um processo retroalimentado pelas reflexões relacionadas à resolução da situação em análise e com possíveis enunciados e conteúdos emergentes.

Brito (2022) analisou o aprendizado de futuros professores sobre semelhança de triângulos e destacou a importância do *design* das tarefas, ao resgatar o conceito da mediação semiótica (Bussi & Mariotti, 2008). O papel do controle deslizante foi importante em algumas tarefas, sobretudo as que envolviam a comparação de medidas de lados.

Isometrias em estudos prévios: transformação, função, olhares pontuais e globais

Além do estudo de Barbosa (2014), mencionado na Figura 1, outros, focados nas transformações isométricas fora do ambiente VMTcG (Assis, 2016, 2020; Ng & Sinclair, 2015; Silva & Almouloud, 2021; Veloso, 2012), merecem atenção e constituem suporte teórico em nossa investigação.

Conceitos de transformação e de função são importantes em matemática. O de transformação, como explicitado por estudantes do Ensino Médio na pesquisa de Barbosa (2014), foi associado a câmbios, sendo as transformações no plano entendidas a partir de mudanças físicas, corpóreas. Curiosamente, essa foi uma ideia de MA, um dos licenciandos participantes em nosso estudo, ao dizer que isometria é a característica de contração muscular, por exercitar-se de forma parada (Anexo I). A resposta é instigante, por ser também ambígua, pois associa contração (movimento) a exercício parado.

A noção de função, na geometria, desempenha um papel decisivo na simplificação e na fixação de uma terminologia que, no caso das transformações geométricas, tem tido um caráter nebuloso. Para Veloso (2012), a ideia de transformação geométrica como função definida em todos os pontos do espaço, seja o plano – um espaço tridimensional – ou outro tipo de conjunto, é decisiva para a compreensão de muitos tópicos da geometria. Concordamos com essa relevância e, a partir de Silva e Almouloud (2021), as atividades planejadas para o trabalho com o VMTcG estão voltadas a dois âmbitos[8] de significação das transformações geométricas, a saber: a transformação considerada como uma aplicação pontual do plano sobre ele mesmo

8 Os autores falam em níveis, mas, como essa denominação levaria a discussões mais detalhadas de concepção de aprendizado, optamos por não adentrar nelas no momento.

(objeto funcional); e a transformação considerada como uma ferramenta funcional, a fim de colocar em evidência os invariantes ou de resolver o problema. Um olhar para o grupo de transformações – quarto nível apresentado em Silva e Almouloud (2021) – pode ser visto em Assis (2020), no qual o autor analisa estudantes do Ensino Médio realizando composições de modo instigante – não hierárquico – em dinâmicas favorecidas pelos toques em tela em tarefas específicas.

Figuras geométricas podem ser transformadas por meio da manipulação de suas propriedades, levando em conta seus elementos particulares (Silva & Almouloud, 2021). Todavia, outra ideia que deve ser explorada é de a imagem ser interpretada como transformação: identificar a imagem da figura pela transformação T do plano, ou seja, determinar uma isometria que transforme uma figura em outra (Veloso, 2012).

O estudo das isometrias envolve a análise da preservação de distâncias e as noções de "situado entre", ponto médio, segmento, semirreta, triângulo, ângulo, amplitude, paralelismo e perpendicularismo (Veloso, 2012, p. 21). Nessa análise, a identificação dos pontos fixos constitui um importante auxiliar no estudo de um tópico ou de um problema envolvendo transformações. Assim, atividades no GeoGebra podem ser grandes aliadas, uma vez que ele favorece a exploração e o manuseio de pontos fixos e livres.

A análise das transformações geométricas em AGD envolve olhares globais – descritos em termos da propriedade de uma dada figura – e pontuais, observados em termos do mapeamento de uma parte da figura para a outro (Ng & Sinclair, 2015). Portanto, é importante que (futuros) professores de matemática compreendam a simetria ortogonal (ou axial ou reflexão) não apenas como a simetria no objeto – em que se explora o papel do eixo de simetria em figuras geométricas, suas características em elementos da natureza e sua influência no mundo das artes –, mas também o objeto matemático simetria ortogonal, em que se deve estudar sua definição e propriedades matemáticas (Silva & Almouloud, 2021).

Como nosso foco está no aprendizado (*online* e síncrono) de isometrias com o GeoGebra, aproveitamos para utilizar algumas das tarefas elaboradas em Assis (2016, 2020). Embora elas sejam para o GeoGebra em *tablets* e *smartphones*, o seu *design* foi adaptado para o VMTcG, e a restrição de uso para alguns ícones foi um fator destacável em algumas tarefas. O autor trabalha com rotação, translação e simetria, temáticas que, segundo ele, são pouco contempladas no currículo.

A partir da revisão apresentada, sintetizamos, na Tabela 2, aspectos que fundamentam teoricamente nosso estudo.

Tabela 2.

Aspectos teóricos fundantes

Aspectos matemáticos nas interações negociativas	Aspectos da mediação semiótica no *design* de tarefas	Particularidades do VMTcG
-Transformação como função. -Relações entre objetos e na dinâmica das relações entre relações. -Visualização, construção e manipulação de objetos geométricos como processos intrínsecos. -Raciocínio ascendente ou descendente. - Olhares globais e pontuais. -Fase de exploração e de construção de provas. -Variantes e invariantes.	-Enunciados diferentes geram descobertas matemáticas diferentes. -Importância do controle deslizante, de restrição de ícones etc. -Exploração e manuseio de pontos fixos e livres. -Figuras em diferentes tamanhos e posições. -Construções prévias em arquivos a compartilhar.	-Interações colaborativas. -Trabalho conjunto e retroalimentativo. -Produção coletiva. -Natureza conjuntiva: escrita, construção, observação, controle do *mouse*. -Uso do *replayer* para analisar detalhes.

Contextualização e produção de dados

A pesquisa está ambientada no VMTcG[9], uma plataforma *online*, com *chat* escrito, e quadro e ferramentas do GeoGebra, para atividades síncronas, em pequenos grupos. No *chat* é possível ver se o sujeito está com o controle[10], permite a construção e o uso do GeoGebra. É possível também postar e acompanhar as mensagens de texto no *chat*. A Figura 1 ilustra esses aspectos.

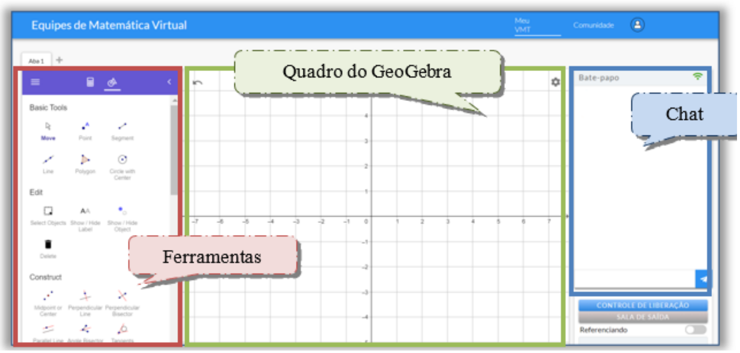


Figura 1.

Tela de uma sala do VMTcG(Captura de Tela)

O planejamento e o trabalho de campo ocorreram de forma síncrona, devido à pandemia do Covid-19. Participaram dez licenciandos (concluintes) em matemática e cinco mestrandos de um Programa profissional da IFES, no período de setembro a dezembro de 2020.

9 Disponível em: https://vmt.mathematicalthinking.org/
10 Controle de liberação, em azul na parte inferior direita.

Como habitualmente, fizemos em nossas intervenções pedagógicas o momento de ambientação dos indivíduos, em que os sujeitos fazem construções e conhecem o cenário a partir de uma atividade simples em termos de construções e de conceitos prévios. Após essa ambientação, foram aplicadas três atividades:

- **Atividade**[11] **1 – Quadrilátero:** foi realizada uma tarefa envolvendo translação[12] de figuras geométricas (Figura 4).
- **Atividade 2 – Quadrado:** a partir da atividade 1, foi proposta uma tarefa que trabalhasse com rotação[13] e translação, e que comparasse as duas atividades, 1 e 2 (Anexo II).
- **Atividade 3 – Questões curiosas:** a partir de uma folha de exercícios feita em aula com lápis e papel, foi proposto que os sujeitos escolhessem uma das questões para resolver no VMTcG.

Planejamento e estruturação da análise

Focaremos na primeira atividade, cujo objetivo foi trabalhar com a transformação geométrica translação, por meio de um vetor. Cada *chat* é planejado para uma duração máxima de duas horas. Separamos duas possibilidades: a primeira, com um vetor qualquer e a segunda, com o vetor sendo o raio de uma circunferência.

[11] Nesse artigo usamos tarefa e atividade como sinônimo.
12 Dado um vetor MN, diz-se translação, definida por MN, a transformação geométrica **T** que faz corresponder, a cada ponto P do plano, o ponto P’, que é a extremidade do segmento orientado (ou vetor) PP’ e tem P como origem (Veloso, 2012).
13 Sejam um ponto C e um ângulo orientado φ. Diz-se rotação **R** de centro C e ângulo φ a transformação geométrica que faz corresponder, a cada ponto P do plano, o ponto P’ = **R**(P) (Veloso, 2012).

ATIVIDADE 1 (Adaptada de ASSIS,2016)

1. Construam um quadrilátero qualquer.
2. Selecionem a ferramenta .
3. Toquem no quadrilátero construído e, em seguida, em dois pontos distintos na área de trabalho.

   a. Observem o que ocorreu e comentem.
   b. Movimentem livremente a figura original, selecionando toda figura ou um de seus vértices. Registrem suas observações.
   c. O quê vocês observam quando movimentam uma das extremidades da seta (vetor)?

4. Construam uma circunferência, selecionem a ferramenta , depois selecionem o quadrilátero, o centro da circunferência e um ponto sobre a circunferência.

   d. Movimentem o ponto sobre a circunferência e observem o que ocorre. Elaborem hipóteses (conjecturas) e justifiquem a validade delas.

Figura 2.

Atividade 1 – Quadrilátero

A análise foi baseada nas tabelas e nos gráficos – aqui expostos nas Figuras – gerados na plataforma do VMTcG. Analisamos o *chat* e as construções para observar o trabalho em equipe durante as atividades, a forma como construíram o que foi proposto e as hipóteses criadas no decorrer das atividades sobre o movimento das figuras, incluindo as tentativas de provar essas conjecturas.

O trabalho no VMTcG ocorre em pequenos grupos. Cada sala (grupo) é considerada uma unidade de análise e é considerada única, pois os sujeitos são singulares. Os dados ilustrados e discutidos aqui são oriundos dos gráficos gerados e da revista constante – uso do *replayer* – às interações e às construções dos sujeitos. Os gráficos e o *replayer* são recursos do VMTcG.

As construções são feitas em conjunto no GeoGebra, e os participantes comentam e debatem no *chat* suas observações, respostas e dúvidas. Portanto, a aprendizagem no VMTcG é vista como a conjunção (Çakir et al., 2009) das ideias dos sujeitos nos diferentes espaços do ambiente, principalmente o *chat* escrito e as construções e observações compartilhadas no quadro com o GeoGebra. A interação é o processo comunicativo que potencializa esse aprendizado colaborativo (Bairral & Marques, 2016).

Os 15 participantes foram divididos em 4 grupos de no máximo 4 integrantes. Ao todo, a atividade 1 foi aplicada em 8 salas. Além das respostas iniciais dadas pelos licenciandos

(Anexo I), particularmente, com suas dúvidas explicitadas, a escolha da sala "AVA_6_quadrilátero" (Figura 3) foi feita a partir da contribuição dos participantes no *chat*, para pensar a atividade de uma forma diferente, pois a pesquisadora (segunda autora deste texto) percebeu a dificuldade de um licenciando sobre a variação do vetor translação. O objetivo da atividade era comparar o raio da circunferência, sendo um vetor (Figura 3, vetor GH) com o vetor construído anteriormente (Figura 3, vetor EF), pois os graduandos disseram que eram iguais. Foi, então, proposta uma tarefa com um raio fixo para que comparassem um novo vetor (Figura 3, vetor IJ). A realização durou aproximadamente 1 hora.

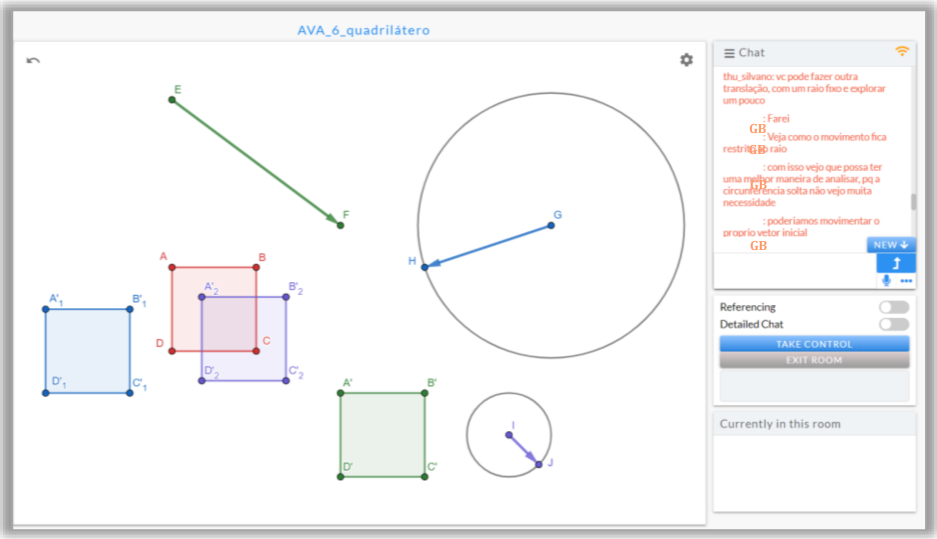


Figura 3.

Resolução da nova atividade proposta no VMTcG (Captura de tela)

Os dados – registros escritos, construções e movimentos no GeoGebra, tabelas, gráficos e *replayer* – são gerados diretamente pelo VMTcG. As figuras ilustrativas ao longo do artigo são geradas pelos pesquisadores em documentos editáveis, para facilitar a composição textual da análise. Na plataforma é possível gerar tabelas e gráficos com todas as informações da sala ou parte delas, a partir do que se deseja analisar (Figura 4).

A partir da Figura 4 é possível observar quais as principais e mais usadas ações dos participantes (thu_silvano, GB, NL, LC, bairral e LB) na plataforma. Vemos que os integrantes adicionam ou criam as figuras geométricas e arrastam ou movem suas construções, conforme pede a atividade, e seu foco é sempre em selecionar e arrastar, ou seja, explorar a construção. Também podemos filtrar para ver quem mais mexeu na plataforma e verificar quem participou.

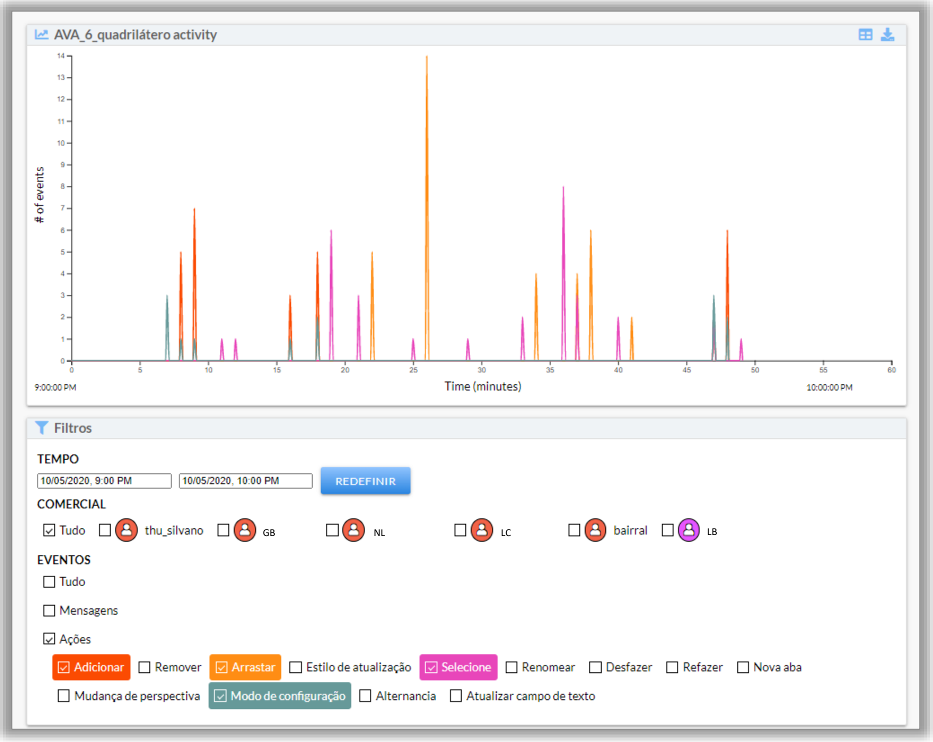


Figura 4.

Gráfico gerado no VMT, com filtros (Captura de tela)

Além do espaço de estatísticas do VMT, há um espaço chamado *replayer*, que possibilita rever completamente a atividade interativa, passo a passo e na velocidade desejada. Esse espaço aparece como um vídeo, no qual podemos acelerar ou deixar mais devagar, avançar, dar *pause* ou *play* e, por fim, passando o cursor na barra do vídeo, é possível ver com poucos detalhes que ação aconteceu naquele momento, como ilustra a Figura 5.

Com o *replayer* podemos perceber algum detalhe que tenha passado despercebido durante a atividade e, até mesmo, analisar as construções simultaneamente, pois nesta versão do VMTcG não é possível ver as construções do quadro branco, ao vivo – é preciso atualizar a página ou "assumir o controle".

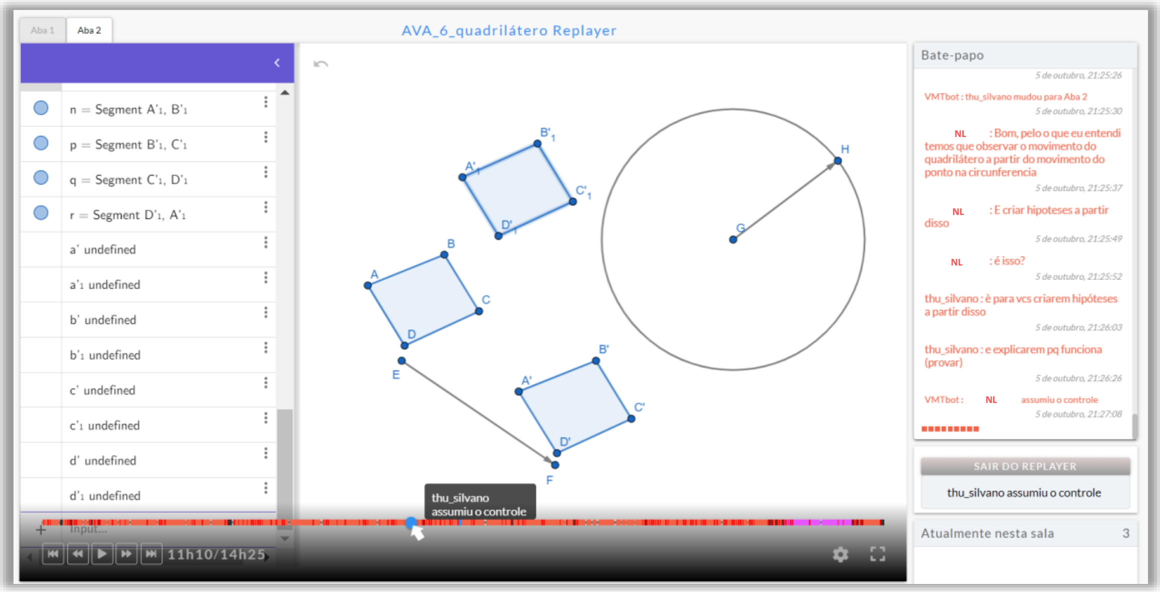


Figura 5.

Tela que registra o decorrer da atividade vista no replayer *(Captura de tela)*

Análise do caso: a dupla GB e NL

A pesquisa configura-se como estudo de caso, de natureza exploratória, principalmente, porque os sujeitos não conheciam o VMTcG e possuíam pouca vivência de aprendizagem com as isometrias (Anexo I). Eles estudaram Transformações Lineares em Álgebra I, Teoria dos Grupos e Teoria dos Anéis.[14]

A sala analisada mostrou-se singular, por ter sido formada por um graduando e uma graduanda que ofereceram respostas instigantes, respectivamente, GB (*Não sei dizer do que se trata, mas sei que o nome é familiar*) e NL (*Confesso que esse tópico foi o mais complicado de responder para mim, precisei pesquisar para formular uma resposta. Os resultados me levaram para um lado da isometria geométrica, ou seja, são imagens semelhantes em sequência com a mesma distância entre os pontos*)[15]. O propósito, portanto, é analisar com mais pormenores a compreensão e o desenvolvimento conceitual desses licenciados na atividade proposta, de modo a orientar novas elaborações de atividades (Berg, 2006).

Nosso processo analítico não estabelece comparações de rendimento de aprendizado entre as salas. Em novas tarefas e implementações, o que fazemos em nosso grupo de pesquisa é orientar-nos pela análise de diferentes salas, de modo a potencializar o aprendizado de todos, inclusive dos pesquisadores. Nas salas, a postura dos investigadores é acompanhar as discussões e intervir somente quando são demandados ou quando percebem algum erro

14 No currículo atual essa disciplina se denomina Teoria dos Anéis.
15 Veja essa análise em Silvano e Bairral (2020).

conceitual e ou de construção. Procuramos sempre deixar as interações fluírem o mais naturalmente possível, pois nesse processo o aprendizado vai ocorrendo e se redimensionando, quando necessário.

O auxílio dos gráficos gerados

Utilizando a ferramenta de estatística fornecida pela plataforma do VMTcG, geramos gráficos filtrando os sujeitos individualmente, separando em ações gerais (Figuras 6 e 7) e mensagens no *chat* escrito (Figuras 8 e 9).

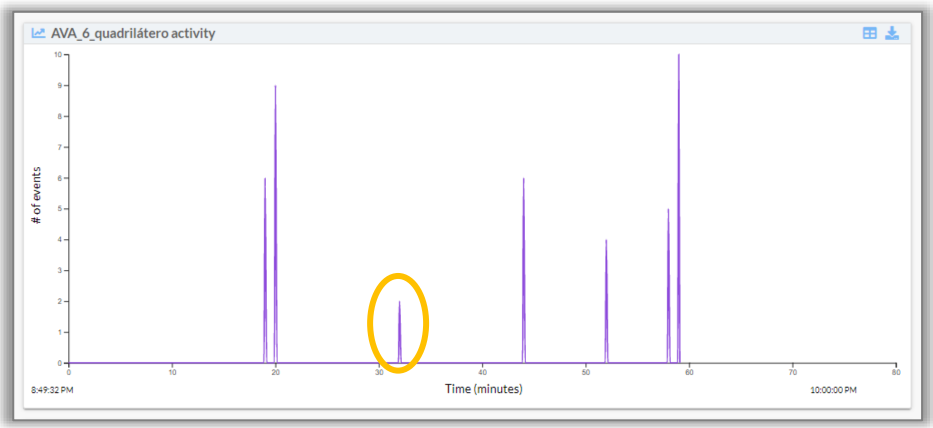


Figura 6.

Gráfico com as ações do participante GB no VMTcG (Captura de tela)

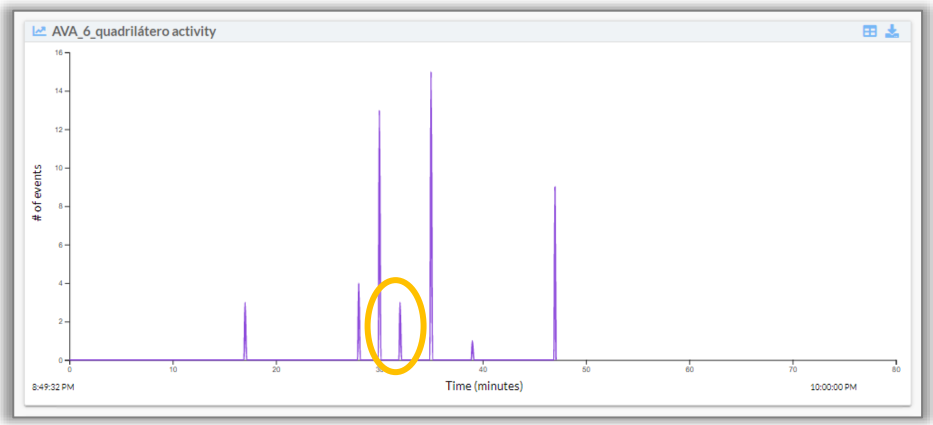


Figura 7.

Gráfico com as ações da participante NL no VMTcG (Captura de tela)

O gráfico da Figura 8 representa as ações do aluno GB, e o da Figura 9 representa as ações de NL16. Podemos observar que GB mexeu no quadro branco por mais tempo, ao

16 No VMTcG os participantes são identificados por cores diferentes, no entanto, nesta sala, isto não ocorreu, fazendo com que todos tenham a mesma cor e não seja possível diferenciá-los no gráfico. Faz-se necessária a análise dos gráficos referentes a cada participante, separadamente.

contrário da aluna NL, que mexeu por um período mais curto, e depois houve poucas interações. No entanto, ocorreram poucos movimentos e criações durante a atividade, levando-nos a supor que os acadêmicos apenas realizaram a construção pedida e não exploraram diferentes perspectivas de visualização e de posicionamentos das formas geométricas.

As Figuras 8 e 9 não fornecem informações sobre a aprendizagem, mas permitem ao pesquisador observar o desenvolvimento interativo como um todo, ou seja, identificar variações, acessos, intervalos temporais e quantidade de tempo utilizada. Por exemplo, observando a interseção do intervalo (aproximadamente nos 33 min.) destacado em amarelo nas Figuras 8 e 9, é possível captar que os dois graduandos realizaram ações temporalmente próximas.

A partir desta interseção temporal pudemos verificar que os dois participantes movimentaram o mesmo ponto da construção, o ponto H (Figura 7), para a observação do comportamento do vetor. Ao analisar a interseção do gráfico, notamos que, pelo enunciado da questão, que propõe a exploração dos diferentes casos de transformação, os alunos movimentaram o vetor para estudar o comportamento das figuras geométricas e para criar conjecturas a partir dos movimentos. No entanto, não foram construções ou movimentos simultâneos, pois o VMTcG só permite que um participante por vez assuma o controle do *mouse* para construir ou movimentar as construções.

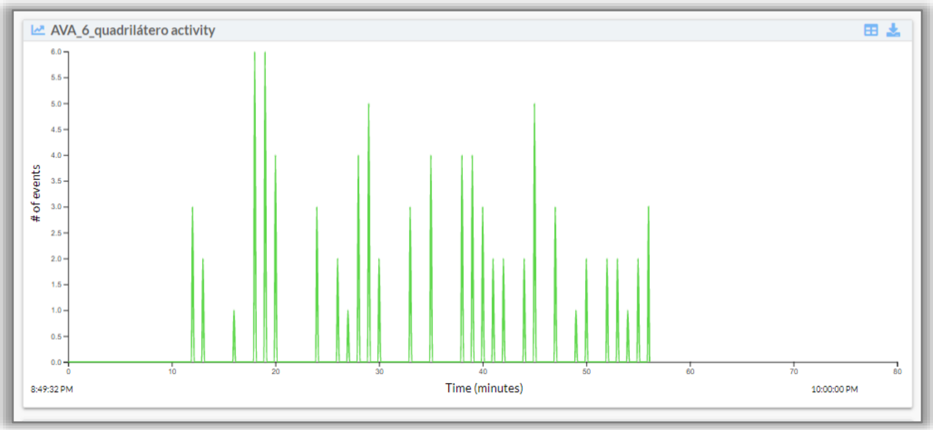


Figura 8.

Gráfico com as mensagens do participante GB no chat do VMTcG (Captura de tela)

Além das construções, a atividade propôs que os licenciandos fizessem observações no *chat* escrito, cuja estatística (de todo tempo de atividade) está ilustrada nas Figuras 8 e 9.

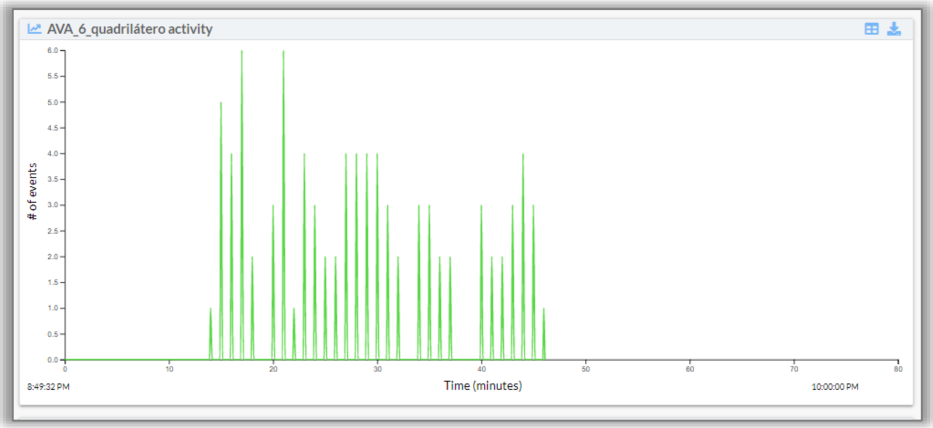


Figura 9

Gráfico com as mensagens da participante NL no chat *do VMTcG (Captura de tela)*

A Figura 8 representa as mensagens escritas do aluno GB, e a Figura 9 traz as mensagens escritas de NL. Em ambas as Figuras podemos perceber mais variações e movimentos. Isto é, a atividade transcorreu, na maior parte do seu tempo, no *chat*. Nele os licenciandos fizeram observações sobre as construções (Tabela 3, linha 15), tiraram e esclareceram dúvidas e, como proposto, criaram conjecturas e tentaram justificá-las. Como pode ser observado nas Figuras 8 e 9, o discente GB esteve mais tempo do que NL, o que se explica pelo fato de NL ter tido necessidade de sair mais cedo da atividade.

Na comparação das Figuras 8 e 9 não é fácil identificar interseções, pois os dois estudantes participaram do *chat* escrito a todo o momento, diferentemente do *chat* de construções (quadro branco), que só pode ser mexido por um aluno a cada vez.

Após uma análise gráfica do *chat* escrito, passamos a observá-lo com detalhes a cada mensagem, ou seja, atentamos para o modo como os participantes respondiam as questões e como planejavam realizar as construções – algumas vezes em grupo e outras individualmente.

Tabela 3.

Fragmento do chat do VMT

10	GB[17]	Primeira parte feita galera?
11	Mediador	Vc fez, GB?
12	NL	Ai agora foi
13	Mediador	aqui não está aparecendo

[17] Os sujeitos serão identificados pelas iniciais de seu nome e sobrenome.

14	Mediador	Agora foi
15	GB	observo que houve uma translação do quadrilátero em relação ao vetor criado
16	GB	e vcs?
17	NL	Sim, também observei isso
18	GB	tem algo a acrescentar?
19	NL	Não tenho
20	NL	Agora temos que construir uma circunferência?
21	Mediador	Sim

Interagindo e aprendendo sobre translação

Após um momento de cumprimentos e dúvidas à espera de todos os integrantes da sala para o início da atividade, pudemos observar que GB fez a construção individual, e não em equipe, como o proposto. No entanto, após a primeira construção, os dois participantes começaram a interagir no *chat*, comentando sobre as construções já feitas e as que precisavam fazer, e revelando suas observações sobre o que ocorreu na primeira etapa da atividade, quando o aluno GB diz: "*observo que houve uma translação do quadrilátero em relação ao vetor criado*" na linha 15 e, concordando com esse comentário, a aluna NL afirma: "*Sim, também observei isso*".

Tabela 4.

Fragmento[18] *do* chat *do VMTcG*

23	GB	Posso assumir o controle?
24	NL	Pode sim, apareceu para você o que eu fiz?
25	GB	Apareceu sim NL
26	Mediador	Apareceu pra mim também
27	NL	Conforme vamos movimentando o ponto da circunferência o quadrilátero vai girando né?
28	GB	Não entendi muito bem a proposta da questão (d)
29	GB	Alguém entendeu?
30	NL	Sumiu

[18] Transcrições mantidas na forma em que foram postadas.

31	NL	Bom, pelo o que eu entendi temos que observar a movimentação do quadrilátero a partir do movimento do ponto na circunferência
32	NL	E criar hipóteses a partir disso
33	NL	é isso?
34	Mediador	é para vcs criarem hipóteses a partir disso
35	Mediador	e explicarem pq funciona (provar)
36	GB	Se colocamos, uma translação em "função" do vetor e em seguida colocamos esse vetor fixo em uma circunferência o quadrilátero continua em função do vetor né
37	NL	Acho que sim
38	GB	Pq o movimento que eu faço com os quadriláteros através da circunferência, também é possível fazer sem a circunferência, não
39	GB	você vai tentar
43	NL	Eu tento fazer o movimento do quadrilátero e sem o ponto da circunferencia e não consegui
44	NL	Então acredito que está relacionado com um sim de circunferencia
45	Mediador	Como assim é possível movimentar sem a circunferência?
47	GB	Posso assumir o controle?
48	NL	O GB tinha sugerido que seria possível movimentar o quadrilátero sem o ponto da circunferencia e eu tentei e não consegui
49	NL	Pode sim
55	NL	GB agora nós só temos que analisar o quadrilátero que foi criado a partir da relação do primeiro quadrilátero, o centro da circunferencia e o ponto da circunferencia
56	GB	Não sei se viram, mas no meu ponto de vista a circunferencia não faz muita diferença, a não ser que colocamos um raio fixo
57	GB	aí dá pra fazer uma comparação de diferenças
58	Mediador	Não deu pra ver, mas pra mim a circunferência faz diferença
59	Mediador	Não consegui entender sua ideia
60	NL	Também não consegui entender muito bem
61	GB	NL, da mesma forma que a primeira, há uma translação
62	NL	Sim e agora essa translação está associada a uma circunferência

Como visto na Tabela 4, ocorreram algumas dúvidas iniciais sobre a questão que pedia para criarem uma hipótese sobre a construção e a colocassem à prova, como quando GB declara (linha 28): “*Não entendi muito bem a proposta da questão (d)*”, “*Alguém entendeu*?” e, em seguida, há a explicação de NL: “*Bom, pelo o que eu entendi temos que observar a* *movimentação do quadrilátero a partir do movimento do ponto na circunferência... E criar hipóteses a partir disso*".

A partir da hipótese sugerida por GB: "*Se colocamos, uma translação em 'função' do vetor e em seguida colocamos esse vetor fixo em uma circunferência o quadrilátero continua em função do vetor ne*" (linha 36), iniciou-se uma discussão a respeito do vetor que fazia a translação, o qual pertencia à circunferência.

"*Pq o movimento que eu faço com os quadrilateros através da circunferência, também é possível fazer sem a circunferencia, não*" (linha38). "*Não sei se viram, mas no meu ponto de vista a circunferencia não faz muita diferença, a não ser que colocamos um raio fixo*" (linha 56). O participante GB entendia que, por não estar fixo o raio da circunferência e podermos aumentá-lo e diminuí-lo conforme movimentamos o ponto da circunferência, esse vetor não se diferenciava do outro, pois este outro também possibilitava movimentá-lo livremente no plano. NL e o mediador não conseguiam enxergar essa possibilidade. Como NL precisou sair por motivos pessoais, o mediador continuou com GB.

A sequência dessa discussão está reproduzida na Tabela 5.

Tabela 5.

Fragmento do chat *do VMT*

87	Mediador	Consegui entender
88	Mediador	Realmente, os movimentos ficam bem semelhantes
89	Mediador	se o raio não for fixo
90	Mediador	vc pode fazer outra translação, com um raio fixo e explorar um pouco
91	GB	Farei
92	GB	Veja como o movimento fica restrito ao raio
93	GB	com isso vejo que vou ter uma melhor maneira de analisar, pq a circunferencia solta não vejo muita necessidade
94	GB	poderiamos movimentar o proprio vetor inicial
95	Mediador	Com o raio fixo, tem como a gente posicionar o quadrilátero transladado com o original?
96	Mediador	na mesma posição
97	GB	não
98	Mediador	Sim
99	Mediador	é uma diferença interessante entre as circunferências

100	GB	Sim sim
101	Mediador	ta ótimo
102	Mediador	Quer fazer mais alguma observação?
103	GB	mas é uma diferença que não encontramos na primeira construção e depois que criamos a circunferencia
104	GB	Eu to satisfeito
105	GB	foi bem interessante

Posteriormente às explicações e às observações a respeito dos vetores, o mediador propôs que o participante GB construísse uma circunferência, com um raio fixo que fosse um vetor e fizesse a translação do quadrilátero inicial, por meio desse vetor. Com essa proposta, foram surgindo novas questões para melhorar a exploração da construção, como na linha 95, em que o participante GB é questionado se é possível posicionar o quadrilátero transladado em cima do quadrilátero inicial, já que nos dois casos anteriores há essa possibilidade.

Da sondagem aos gráficos, aos escritos, às construções em tela e às ideias emergentes nas interações

A Tabela 6 sintetiza o trabalho da dupla GB e NL na atividade que focou na translação, particularmente, na atenção para vetores. Embora nosso objetivo aqui seja ilustrar as interações síncronas, cabe resgatar as ideias escritas por ele e por ela no momento de sondagem. Observamos que foi um movimento produtivo para a dupla, ou seja, o seu aprendizado deslocou-se de algo desconhecido (ou complicado) para ideias potentes no estudo das transformações geométricas (Silva & Almouloud, 2021; Veloso, 2012), como a de relação funcional (GB-L36) e a da imagem gerada por uma transformação (NL-62). Além do mais, a terminologia envolvida, embora conhecida por eles, foi emergindo a partir do enunciado da tarefa mediante ícones e formas de questionamento. A tipologia da tarefa não é neutra, e seus elementos constitutivos assumem papel na aprendizagem dos sujeitos (Bussi & Mariotti, 2008; Powell & Pazuch, 2016).

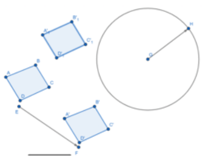
O objetivo da atividade era que os participantes diferenciassem os dois vetores. Isso ocorreu somente quando a tarefa teve um novo *design*. Queríamos que eles observassem que, sendo o vetor um raio fixo da circunferência, ele só se moveria de forma circular (elemento invariante), ao contrário do vetor criado a partir de dois pontos quaisquer, que poderia se mover em qualquer direção e variar de tamanho – ideias que só surgiram nas interações de GB e NL. Quando realizamos as transformações e movimentamos o vetor, pudemos ver que a figura original e a figura gerada pela transformação não se modificaram. Não fixando o vetor na circunferência podemos gerar figuras a partir de outras transformações. Problematizar quais seriam é uma outra ideia interessante para uma conversa, em um outro bate-papo ou conversa informal.

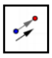
As interações nessa atividade estiveram circunscritas ao raciocínio ascendente (Arzarello et al., 2002), ou seja, os participantes realizaram construções, manipularam e questionaram, para posteriormente explorar conceitos emergentes, sem aplicar diretamente os que conheciam. Essa forma de raciocinar pode ter sido influenciada pela tarefa, que era diferente para eles (GB, L28). Cabe investigar mais essa interpretação.

Após a remodelação da atividade e de novas explorações, GB declarou estar satisfeito com a atividade e ter sido interessante a utilização do VMTcG. Além disso, ao ser perguntado se utilizaria essa tarefa em aula, disse que seria uma boa proposta, apenas com algumas modificações, como a que foi feita após sua dúvida. Aqui vemos a importância de a aprendizagem ser problematizada juntamente com desdobramentos, para a atuação profissional dos envolvidos (Powell & Pazuch, 2016).

Tabela 6.

Síntese do trabalho da dupla GB e NL

Momento 1: Sondagem	**Momento 2:**Implementação e análise de atividades no VMTcG				
Ideias iniciais (escritas em papel)	Propósito	Dúvida	Captura da tela (Fig. 5)	GB	NL
GB: **Não sei dizer** do que se trata, mas sei que o nome é familiar. NL: **Confesso que esse tópico foi o mais complicado de responder** para mim, <u>precisei pesquisar</u> para formular uma resposta. Os resultados me levaram para	Síntese do enunciado (Anexo I) 1.Toquem no quadrilátero construído e, em seguida, em dois pontos distintos na área de trabalho. (a) Observem o que ocorreu e comentem. (b) Movimentem livremente a figura original, selecionando toda figura ou um de seus vértices.	GB - L28: Não entendi muito bem a proposta da questão (4d). Alguém entendeu?		L15: observo que houve **uma translação do quadrilátero em relação ao vetor** criado L36: Se colocamos, uma translação **em "função" do vetor** e em seguida colocamos esse vetor fixo em uma circunferência o quadrilátero continua em	L17: Sim, também observei isso L31: Bom, pelo o que eu entendi temos que observar **a movimentação do quadrilátero a partir do movimento do ponto** na circunferência [...] E criar hipóteses a partir disso. L43: Eu tento fazer o

um lado da isometria geométrico, ou seja, são imagens semelhantes em sequência com a mesma distância entre os pontos.	Registrem suas observações. (c) O que vocês observam quando movimentam uma das extremidades da seta (vetor)? 4.Construam uma circunferência, selecionem a ferramenta , depois selecionem o quadrilátero, o centro da circunferência e um ponto sobre a circunferência. (d) Movimentem o ponto sobre a circunferência e observem o que ocorre. Elaborem hipóteses (conjecturas) e justifiquem a validade delas.			função do vetor né	movimento do quadrilátero e sem o ponto da circunferência e não consegui L62: Sim e agora essa translação **está associada** a uma circunferência

Considerações Finais

Utilizar AGD é mais uma forma de ensino e de aprendizagem matemática, seja em dinâmicas *online* ou presenciais. Ao analisar interações no VMTcG, este estudo inova metodológica, conceitual e didaticamente.

Metodologicamente o estudo inova, ao analisar a partir de gráficos gerados na própria plataforma. Embora os gráficos não forneçam informações sobre a aprendizagem dos envolvidos, eles possibilitam ao pesquisador observar o desenvolvimento interativo como um todo, ou seja, variações, acessos, uso do quadro-branco ou do *chat*, quantidade de tempo etc. A partir da geração de gráficos é possível selecionar elementos de análise, como vimos no caso selecionado.

Conceitualmente atua na abordagem de conteúdo escasso na formação continuada de professores de matemática. Ao potencializar interações síncronas em AGD, estimula a criatividade, a construção e a análise de figuras geométricas, tornando mais instigante a temática para uma geração cercada de tecnologia (Delmondi & Pazuch, 2018).

Quando pensamos em gerar hipóteses e colocá-las em prova (ou justificativa), imaginamos um ambiente algébrico, no qual usualmente predomina a escrita matemática. No entanto, vimos ao longo da análise apresentada que esse processo foi algo bem fluido e dinâmico, ou seja, a hipótese sugerida gerou diversas explorações no quadro do GeoGebra, para validar ou invalidar tal conjectura. Gerou, também, muito diálogo no *chat* escrito, para esclarecer dúvidas ou para cada um explicar suas ideias.

Elaborar e provar conjecturas não tem sido uma prática usual em nossa Universidade, apesar de esforços envidados por alguns formadores. No caso apresentado, os licenciandos focaram mais no momento de exploração a partir da conjectura emergente do diálogo NL-L31 e GB-L36. Seria necessário mais tempo para aprimorar a justificativa deNL-L32 ou as de GB-93? Será que afirmações do mediador, como as das linhas 85, 95 e 99, foram pistas para eles, e não perceberam necessidade de provar? Embora um *chat* possa não ser suficiente para detalhar um procedimento de prova (Marques & Bairral, 2014), o conjunto deles pode ser potente para minimizar a dificuldade dos futuros professores em gerar suas próprias provas. Precisamos estudar mais, inclusive, com análises longitudinais entre salas.

Didaticamente a contribuição está no *design* de tarefas para cenários *online*. Na atividade analisada é interessante pensar como pequenos detalhes mudam completamente uma atividade e como também aprendemos com nossos alunos, e não somente ensinamos. Há uma relação de troca de conhecimento no ambiente da sala *online*. Cada atividade realizada no VMTcG trouxe, para nós e para os participantes, novas perspectivas de ensino e de aprendizagem de transformações isométricas em AGD.

Mediante a reflexão podemos produzir todas as isometrias do plano (Silva & Almouloud, 2021), e as quatro isometrias básicas – translação, rotação, reflexão e simetria axial e reflexão deslizante e simetria deslizante – podem ser obtidas como composições de reflexões (Veloso, 2012). Aqui focamos na translação, mas cabe elaborar atividades que explorem essa composição de modo a verificar mais detalhes no aprendizado em tarefas com AGD, incluindo o aprimoramento da compreensão dos conceitos de transformação e de relação funcional.

Referências

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM*, *34*(3), 66-72.

Assis, A. R. de. (2020). *Alunos do Ensino Médio realizando toques em telas e aplicando isometrias com GeoGebra* [Tese de doutorado em Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro].

Assis, A. R. de. (2016). *Alunos do Ensino Médio Trabalhando no GeoGebra e no Construtor Geométrico: Mãos e rotAções em touchscreen* [Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro].

Bairral, M. A., & Barreira, J. C. F. (2017). Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, 6*(2), 46-64.

Bairral, M. A., & Marques, F. de J. R. (2016). Onde se localizam os pontos notáveis de um triângulo? Futuros professores de matemática interagindo no ambiente VMT com GeoGebra. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(1), 111-130.

Barbosa, A. C. M. (2014). *Transformações no plano: alunos do ensino médio interagindo em ambiente colaborativo virtual* [Tese de doutorado em Educação Matemática, Universidade Anhanguera].

Barreira, J. C. F., & Bairral, M. (2017). Que quadrilátero é? Licenciandos em matemática usando propriedades conhecidas no VMT com o GeoGebra. *Boletim Gepem,* (70), 143-156. doi:10.4322/gepem.2017.027

Berg, B. L. (2006). *Qualitative research methods for the social sciences*. Allynand Bacon.

Brito, C. da S. (2022). *Licenciandos e professores de matemática interagindo no VMTcG em atividades de semelhança de triângulos*. [Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro].

Bussi, M. G. B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In M. B. B. L. English, G., Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2 ed., pp. 720–749). Mahwah: Erlbaum.

Çakir, M. P., Zemel, A., & Stahl, G. (2009). The joint organization of interaction within a multimodal CSCL medium. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, *4*(2), 115-149.

Delmondi, N. N., & Pazuch, V. (2018). Um panorama teórico das tendências de pesquisa sobre o ensino de transformações geométricas. *RBEP*, *99*(253), 659-686. doi:10.24109/2176-6681.rbep.99i253.38616.

Marques, F. de J. R., & Bairral, M. A. (2014). Futuros professores de Matemática interagindo em um Ambiente Virtual com o GeoGebra. *Educação Matemática em Revista*, (41), 5-18, 2014.

Menezes, R. O., & Bairral, M. A. (2021). Um mapeamento de pesquisas sobre atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas de forma online. *Revemop*, (3), 1-16. doi:10.33532/revemop.e202119

Ng, O., & Sinclair, N. (2015). Young children reasoning about *symmetry* in a dynamic geometry environment. *ZDM Mathematics Education,* (47), 421-434. doi 10.1007/s11858-014-0660

Oliveira, R., & Bairral, M. (2020). Interações em um ambiente de aprendizagem online e síncrono: que tarefa propor com o GeoGebra? *Paradigma, XLI (Extra 2),* 277-304. doi:10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p277-304.id898

Powell, A. B. (2003). *“So let's prove it!” Emergent and elaborated mathematical ideas and reasoning in the discourse and inscriptions of learners engaged in a combinatorial task.* (Doctoral Thesis). Rutgers, The State University of New Jersey,

Powell, A. B., & Pazuch, V. (2016). Tarefas e justificativas de professores em ambientes virtuais colaborativos de geometria dinâmica. *Zetetiké*, *24*(2), 191-207.

Salazar, J. V. F., & Almouloud, S. A. (2015). Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. *Educ. Matem. Pesq., 17*(5), 919-941.

Salles, A. T., & Bairral, M. A. (2012). Interações docentes e aprendizagem matemática em um ambiente virtual. *Investigações em Ensino de Ciências (IENCI), 17*(2), 453 - 466.

Silva, C. V., & Almouloud, A. S. (2021). Um estudo histórico e epistemológico sobre o objeto matemático Simetria Ortogonal. *Intermaths, 2*(1), 71-87. doi:10.22481/intermaths.v2i1.7429

Silvano, T. da S., & Bairral, M. A. (2020). O que dizem (futuros) professores de matemática sobre isometrias: uma análise preliminar. *Anais do IX Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Rio de Janeiro* (IX SPEM-RJ 2020). Rio de Janeiro: SBEM-RJ.

Silvano, T. da S., & Bairral, M. A. (2021). Interação no Virtual Math Team com GeoGebra em atividades sobre isometrias. *Anais do VIII Encontro de Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro* (VIII EEMAT 2021). Rio de Janeiro: SBEM-RJ.

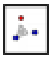
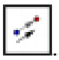
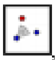
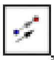
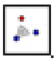
Veloso, E. (2012). *Simetria e transformações geométricas*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática – APM.

Anexo I

CONCEITO DE ISOMETRIA	
RESPOSTAS RELACIONADAS À MATEMÁTICA:	
CM	São transformações geométricas, isto é, são figuras ou sólidos geométricos que mantêm as distâncias entre pontos. Elas podem mudar de sentido, direção, rotacionar, transladar que não mudam as suas características iniciais.
FM	Falando em geometria, seriam repetições de figuras, ou de pedaços delas.
JS	Transformação geométrica que conserva propriedades matemáticas das figuras.
LA	Na matemática, a isometria é uma transformação geométrica em que a figura original e a transformada são congruentes.
LS	Medidas iguais, geometria.
PB	Processo que possibilita o deslocamento de uma figura ou ampliação e redução de figuras (para a obtenção de formas semelhantes).
TS	Na geometria são transformações que não alteram os ângulos e a distância entre os pontos da figura, mas podem mudar a posição da figura. Por exemplo, através da translação.
TA	São transformações de imagens.
RESPOSTAS QUE EXPRESSAM DÚVIDAS:	
GB	Não sei dizer do que se trata, mas sei que o nome é familiar.
LC	Acho que é um tipo de transformação geométrica.
MS	Recordo-me de ter estudado sobre Isometrias na disciplina de Teoria dos Grupos, e lembro de ter alguns conceitos como reflexão, simetria e translação relacionados a esse termo. Acredito que esteja ligado diretamente a questões de posição de um objeto, paralelo a sua geometria no plano.
NL	Confesso que esse tópico foi o mais complicado de responder para mim, precisei pesquisar para formular uma resposta. Os resultados me levaram para um lado da isometria geométrico, ou seja, são imagens semelhantes em sequência com a mesma distância entre os pontos.
RESPOSTAS COM IDEIAS FORA DA MATEMÁTICA:	
MA	Isometria é a característica de contração muscular, se exercitar de forma parada.

Anexo II

ATIVIDADE 2 (Adaptada de ASSIS, 2016)

1. Construam um quadrado utilizando a ferramenta "polígono regular".
2. Selecionem a ferramenta . Com o ícone selecionado, toquem no quadrado e em um de seus vértices. Escolham um ângulo e um sentido (horário ou anti-horário). Comentem o que acontece.
3. Criem um vetor e selecione a ferramenta . Com o ícone selecionado, toquem no quadrado original e no vetor. Comentem o que acontece.
4. Movimentem livremente a figura original. Comentem o que vocês observam de interessante.
5. Se pegarmos 2 quadrados iguais:
   - ❖ No 1° quadrado utilizarmos a ferramenta , e com o resultado, utilizarmos a ferramenta ,
   - ❖ No 2° utilizarmos a ferramenta  e com o resultado, utilizarmos a ferramenta .

As construções finais serão iguais? Justifiquem.

a. Se vocês fossem aplicar essa atividade em uma turma do Ensino Médio vocês fariam diferente? Comentem.

b. Que conceitos vocês utilizaram para resolver essa atividade? Estão com alguma dúvida? Comentem