ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p363-407

A praxeological approach to the study of fractal geometry in high school textbooks

Uma abordagem praxeológica do estudo da geometria dos fractais em livros didáticos do ensino médio

Un enfoque praxeológico para el estudio de la geometría fractal en los libros de texto de secundaria

Une approche praxéologique de l'étude de la géométrie fractale dans les manuels scolaires du secondaire

Ana Eliza Pescini[1]
Instituto Federal Catarinense
Mestrado em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0002-2733-2254

Luan Padilha[2]
Universidade Estadual do Paraná
Mestrado em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0003-4616-3182

Mariana Moran[3]
Universidade Estadual de Maringá
Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática
https://orcid.org/0000-0001-8887-8560

Resumo

Este texto é parte de uma pesquisa maior que caracterizou praxeologias didáticas e matemáticas da abordagem do conteúdo Geometria dos Fractais em livros didáticos do Ensino Médio. Tal pesquisa visou analisar quatro coleções compostas por três livros cada, aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018, que foram as mais adotadas entre as cinco maiores cidades do estado do Paraná em termos populacionais. A análise dos dados produzidos foi realizada sob a ótica das organizações praxeológicas – didática e matemática –, com a Teoria Antropológica do Didático (TAD) como referencial teórico-metodológico, no intuito de investigar escolhas matemáticas e didáticas dos autores das coleções. Para o presente artigo, nos ateremos às análises dos quatro livros selecionados para o Primeiro Ano do Ensino Médio no estado do Paraná. Sendo assim, as análises nos possibilitaram apontar que o objeto de

[1] anaelizap97@gmail.com
[2] padilha.luan16@gmail.com
[3] mmbarroso@uem.br

conhecimento Geometria dos Fractais se faz presente, seja de modo teórico ou durante os exercícios, em quatro dos doze livros didáticos analisados. Tal apresentação ocorre de modo articulado com outras unidades temáticas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) diferentes da Geometria, como Números e Álgebra. No que diz respeito aos Tipos de Tarefas categorizados, esses ocorrem através de explorações dos fractais como o floco de neve e a curva de Koch, o triângulo e o tapete de Sierpinski. Porém, de modo geral, a proposta de estudo do tema foi predominantemente abordada como um meio para o ensino de outros assuntos da matemática diferentes da própria Geometria dos Fractais.

Palavras-chave: Geometria dos Fractais, Teoria Antropológica do Didático, Livros Didáticos.

Abstract

This text is part of a larger research that characterized didactic and mathematical praxeologies related to how Fractal Geometry is approached in high school textbooks. The research aimed to analyze four collections containing three books each. The chosen books were the most adopted among the five most populous cities in the state of Paraná, and were all approved by Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) of 2018. The analysis of the produced data was carried out from the perspective of praxeological organizations - didactics and mathematics - with the Anthropological Theory of The Didactic (ATD) as a theoretical-methodological reference providing opportunities to investigate the mathematical and didactic choices made by the authors of the selected books. For this article, we will focus on the analyses of the four books adopted in the First Year of High School in the state of Paraná. As a result of the analyses, it was possible to point out that the object of knowledge Fractal Geometry is present in four out of the twelve textbooks analyzed, either theoretically or in the exercises. Such presentation occurs in association with other thematic units of Base Nacional Comum Curricular (BNCC) that are out of the scope of Geometry, such as Numbers and Algebra. With regard to the categorized Task Types, they are presented through explorations of fractals such as the snowflake and Koch curve, Sierpinski carpet and triangle, but in general, the proposals for the study of this theme were predominantly used as a means for teaching mathematics subjects other than Fractal Geometry itself.

Keywords: Fractal Geometry, Anthropological Theory of the Didactic, Textbooks.

Resumen

Este texto es parte de una investigación más amplia que caracterizó las praxeologías didácticas y matemáticas del enfoque de contenido de Geometría Fractal en los libros de texto de secundaria. Tal investigación se propuso analizar cuatro colecciones compuestas por tres libros cada una, aprobadas por el Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018 y que fueron las más adoptadas entre las cinco mayores ciudades del estado de Paraná, en términos de habitantes. El análisis de los datos producidos se realizó desde la perspectiva de las organizaciones praxeológicas - didáctica y matemáticas - teniendo como referente teórico-metodológico la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD), brindando oportunidades para investigar las elecciones matemáticas y didácticas de los autores de las colecciones. Para este artículo nos ceñiremos a los análisis de los cuatro libros seleccionados para el Primer Año de Secundaria en el estado de Paraná. Así, frente a los análisis, fue posible señalar que el objeto de conocimiento Geometría de los Fractales está presente, ya sea teóricamente o durante los ejercicios, en cuatro de los doce libros de texto analizados. Tal presentación ocurre de forma articulada con otras unidades temáticas de la Base Curricular Común Nacional (BNCC) diferentes a la Geometría, como, por ejemplo, Números y Álgebra. En cuanto a los Tipos de Tareas categorizados, estos se presentan a través de exploraciones de fractales como el copo de nieve y la curva de Koch; el triángulo y la alfombra de Sierpinski, pero en general predominó una propuesta de estudio de este tema como medio para la enseñanza de otras materias de las matemáticas distintas a la propia Geometría de los Fractales.

Palabras clave: Geometría de Fractales, Teoría Antropológica de lo Didáctico, Libros didácticos.

Résumé

Ce texte vise à caractériser les praxéologies didactiques et mathématiques de l'approche de contenu de la Géométrie Fractale dans les manuels scolaires du secondaire. Il a été proposé d'analyser quatre collections composées de trois livres chacune, approuvées par le Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018 et qui étaient les plus adoptées parmi les cinq plus grandes villes de l'État du Paraná, en termes d'habitants. L'analyse des données produites a été réalisée du point de vue des organisations praxéologiques - didactiques et mathématiques - ayant la Théorie Anthropologique de la Didactique (TAD) comme référence théorique et méthodologique, offrant des possibilités d'enquêter sur les choix mathématiques et didactiques des auteurs des collections. Pour cet article, nous nous en tiendrons aux analyses des quatre livres sélectionnés pour la première année du lycée. Ainsi, au vu des analyses, il a été possible de relever que l'objet de connaissance Géométrie des Fractales est présent, soit théoriquement, soit lors des exercices, dans quatre des douze manuels analysés. Une telle présentation se fait de manière articulée avec d'autres unités thématiques du National Common Curricular Base (BNCC) différentes de la Géométrie, comme, par exemple, les Nombres et l'Algèbre. En ce qui concerne les types de tâches catégorisés, ceux-ci sont présentés à travers des explorations de fractales telles que le flocon de neige et la courbe de Koch; le triangle et le tapis de Sierpinski, mais en général, une proposition pour l'étude de ce thème prédominait comme moyen d'enseigner d'autres matières de mathématiques différentes de la géométrie des fractales elle-même.

Mots-clés : Géométrie des Fractales, Théorie Didactique Anthropologique, Livres didactiques.

O interesse inicial pelo estudo da Geometria dos Fractais surgiu diante da necessidade de inclusão desse assunto na Educação Básica do estado do Paraná. Tal inserção foi norteada pelas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná - DCE (Paraná, 2008), que estabelecem que conteúdos de noções de geometrias não euclidianas sejam abordados nas salas de aula. Desse modo, optamos por estudar parte das geometrias não euclidianas ao nos depararmos com as características da Geometria dos Fractais, pois observamos que este objeto de conhecimento possibilita a exploração de diversos assuntos da Matemática além da própria Geometria Fractal.

Esses aspectos nos geraram a indagação de como essas geometrias são abordadas nas coleções de livros didáticos adotados para o Ensino Médio no Estado do Paraná. Por isso, optamos por elaborar uma organização praxeológica do assunto Geometria dos Fractais com base em livros didáticos do Ensino Médio.

Quando o livro didático é adotado pelo professor em alguma instituição educacional, ele passa a auxiliá-lo em seus planejamentos, nas atividades a serem propostas, servindo de suporte para esclarecer suas dúvidas, entre outros aspectos. Para o aluno, o livro é uma ferramenta disponível a qualquer momento e que pode ser utilizada para compreender assuntos da Matemática, solucionar problemas, resolver exercícios e dar exemplos que o ajudem a compreender certos assuntos, desempenhando, assim, o papel de auxiliador no ensino.

Essa importante função nos levou a indagar sobre como o assunto Geometria dos Fractais é abordado nos livros didáticos, e após leituras e discussões desenvolvidas no Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria (GPEG) sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD), decidimos refletir a respeito das organizações praxeológicas – didática e matemática – dessa Geometria que podem ser deduzidas a partir dos livros didáticos para o Ensino Médio utilizados no estado do Paraná.

Neste trabalho, a TAD se faz presente como ferramenta para estudo e análise do assunto Geometria dos Fractais do ponto de vista matemático, bem como das escolhas didáticas contidas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. Delimitamos nosso trabalho às análises da praxeologia didática – ou organização didática (OD) – e da praxeologia matemática – ou organização matemática (OM) –, que fornecerão elementos para subsidiar as questões levantadas por nossa investigação.

Assim, nossa questão de pesquisa foi estabelecida do seguinte modo: o conteúdo Geometria dos Fractais pode ser encontrado nas coleções de livros didáticos adotados para o

Ensino Médio no estado do Paraná? Se sim, quais são as propostas de ensino para esse conteúdo?

Como forma de esclarecer os resultados encontrados por esta pesquisa, apresentaremos as análises dos quatro livros selecionados do Primeiro Ano do Ensino Médio, que foram as obras que mais fizeram referência à Geometria dos Fractais.

A seguir, descreveremos os pressupostos da Geometria dos Fractais e da TAD que nos interessaram no decorrer de nossos estudos.

Sobre a Geometria dos Fractais

Alguns fenômenos e imagens encontrados na natureza trazem mistérios e belezas que são geralmente incompreensíveis e inexplicáveis euclidianamente. Porém, são observados, admirados e estudados por diversos pesquisadores. Salvador (2009) destaca que

> Na Geometria do mundo que vivemos, observamos atentamente as formas tortuosas dos caminhos, das costas oceânicas, dos vales, dos montes, das nuvens, do sistema vascular humano, das folhas, dos galhos de arbustos ou árvores, na forma dos brócolis ou de uma couve-flor e também na forma esburacada de um pão ou de um pedaço de queijo, e no nível namométrico dos objetos encontramos formações rugosas que apresentam estruturas auto-similares, em que partes pequenas do objeto parecem ou são réplicas reduzidas do todo. (Salvador, 2009, p. 1)

Os geômetras da antiguidade, incluindo Euclides, consideravam as formas da natureza perfeitas em seus aspectos e beleza. Benoit Mandelbrot (1924 - 2010) compreendeu tais formas sob um novo olhar: ele pesquisou "a geometria de objetos com uma forma que se auto repete dentro de si e que parece sempre semelhante, independente da ampliação ou redução da sua imagem, introduzindo assim o conceito de fractal" (Salvador, 2009, p. 2).

Mandelbrot definiu um objeto fractal através de três características principais: autossemelhança, dimensão fracionária e complexidade infinita. No que se refere à autossemelhança ou autossimilaridade, Barbosa (2002) destaca que essa característica almeja explicar o traçado de formas fragmentadas e irregulares, além de apresentar o impacto de surpresa da ordem existente na desordem. Além disso, as características mencionadas possibilitam visualizar ordem e padrões onde antes se via apenas irregularidades, o imprevisível, o caótico.

Ademais, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, a dimensão de um Fractal não é necessariamente um número inteiro, podendo ser um número fracionário. No entanto, compreender e determinar a dimensão de um Fractal requer cálculos mais sofisticados, apesar de não muito complexos, os quais não abordaremos neste texto. Com relação à complexidade infinita, os processos geradores dos Fractais podem ser recursivos, tendo um número infinito de iterações atribuído a ele. Em outras palavras, podemos ampliar uma figura Fractal quantas vezes desejarmos, sem nunca obter a imagem final de um Fractal em sua perfeição.

Como exemplo, temos a Figura 1, que mostra níveis do Floco de Neve de Koch:

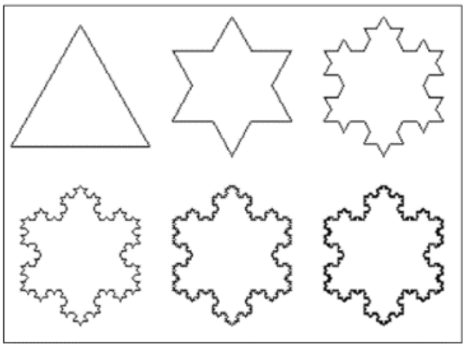


Figura 1.

Níveis do Floco de Neve de Koch (Pescini, 2021, p. 22)

A inclusão do estudo da Geometria Fractal nas salas de aula, bem como sua abordagem em um contexto educativo, possibilita aos alunos manter o contato com esse assunto, aprimorando, assim, seus saberes e provocando a criticidade através de uma nova Geometria. A respeito disso, Piccolli (2006, p. 7) comenta que o ensino da Matemática de forma descontextualizada pode acabar promovendo somente aspectos de memorização e fórmulas, sem um real significado.

Assim, tivemos interesse em investigar a comparência desse conteúdo nos livros didáticos do estado do Paraná, a qual iremos analisar por meio de estudos praxeológicos didáticos e matemáticos advindos da compreensão da Teoria Antropológica do Didático (TAD).

A Teoria Antropológica do Didático para a Presente Pesquisa

A Teoria Antropológica do Didático, proposta por Yves Chevallard, é uma teoria desenvolvida no escopo da Didática da Matemática que permite, particularmente, analisar situações de ensino e aprendizagem da Matemática escolar. Ela oferece subsídios para investigar e modelar a atividade matemática. Essa teoria considera que toda atividade humana põe em prática uma organização, denominada por Chevallard de praxeologia ou organização praxeológica (Bittar, 2017).

O conhecimento, sob a perspectiva proposta pela TAD, é oriundo de alguma atividade humana. Em vista disso, conhecimentos matemáticos transcorrem de atividades matemáticas. De acordo com Casabò (2001, apud Kaspary & Bittar, 2014, p. 39-40) “estudar condições de produção e difusão do conhecimento matemático requer então que sejamos capazes de descrever e analisar determinados tipos de atividades humanas que se realizam em condições particulares.”

Neste trabalho, nos limitaremos à abordagem do assunto Geometria dos Fractais e às atividades matemáticas propostas por livros didáticos. Para analisar e descrever essa e qualquer outra prática matemática, a TAD nos oferece instrumentos claramente operatórios (Chevallard & Bosch, 1999, p. 4). Trata-se de resultados da composição de um modelo que recebe o nome de praxeologia ou organização praxeológica, que é composto pelos seguintes elementos: tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria.

O Tipo de Tarefa é determinado por uma proposição composta por um verbo concernente a um conjunto de tarefas do mesmo tipo, representado pela letra T. Por exemplo: aplicar a fórmula de Bháskara é uma tarefa; desenvolver a fórmula da soma e produto é outra tarefa que tem semelhança com a anterior. Trata-se, então, de tarefas que são de um mesmo tipo: encontrar as raízes de uma equação do segundo grau. O tipo de tarefa é descrito ou definido por um verbo de ação (encontrar) e um complemento (raízes da equação). Observamos, assim, a necessidade do complemento para que o tipo de tarefa seja bem definido.

Para resolver um determinado tipo de tarefa, selecionamos uma técnica τ, que pode ser um modo ou modelo escolhido para desempenhar a tarefa, uma ação ou um passo a passo com o objetivo de cumprir o tipo de tarefa proposto. A técnica é justificada por uma tecnologia θ, que fundamenta e embasa seu emprego, fornecendo credibilidade e confiabilidade à técnica escolhida. Por fim, a teoria Θ tem atribuição de justificar e explicar a tecnologia de forma aprofundada. Esses quatro elementos compõem o quarteto praxeológico, simbolizado pela notação $[T, \tau, \theta, \Theta]$ (Chevallard, 1999).

A TAD oferece subsídios para sua utilização como metodologia de pesquisa, bem como metodologia de ensino, na investigação e exploração de tarefas, de maneira a elaborar modelos praxeológicos que possam orientar o desenvolvimento de atividades matemáticas.

Para a análise de livros didáticos, Chevallard (1999) permite a identificação de organizações praxeológicas envolvendo tanto a organização matemática como a organização didática. A análise de uma praxeologia matemática se baseia no entorno do estudo da

Matemática, de sua identificação. Melhor dizendo, é a verificação proposta do quarteto praxeológico: dos tipos de tarefa, das técnicas, de suas tecnologias e teorias.

A organização didática pode ser entendida como o modo pelo qual a praxeologia matemática é construída e organizada. A praxeologia didática, além de ser estruturada pelo quarteto, também pode ser descrita por momentos didáticos, ou momentos de estudo propostos por Chevallard (1999), os quais descrevemos resumidamente como: 1) caracteriza-se pelo primeiro contato com a praxeologia em questão, salientando que tal organização pode e deve ser revista no decorrer do período escolar. Na maior parte dos casos, esse momento didático não tem a função de explorar excessivamente o objeto matemático, o que poderá ser realizado no decorrer dos demais momentos; 2) é o momento da exploração das tarefas, o início da elaboração de uma técnica. Chevallard (1999) ressalta que o estudo de um determinado tipo de tarefa não faria sentido por si só, se não fosse para a elaboração de técnicas, que é a finalidade de qualquer atividade matemática; 3) constituição do entorno tecnológico-teórico $[\theta,\Theta]$; 4) é o momento que tem como objetivo estudar e explorar a técnica desenvolvida, com o intuito de torná-la mais eficiente e confiável; 5) o momento da formalização do saber matemático estudado, dispondo do que se mostrou mais eficiente para a construção da praxeologia; e 6) este momento se articula com o momento da institucionalização. É a ocasião de refletir sobre a eficiência das técnicas atribuídas, bem como de investigar e verificar o que foi estudado até o presente.

É necessário esclarecer que tais momentos não obedecem necessariamente a uma ordem, não ocorrem em sequência definida, e podem se repetir várias vezes. Portanto, ao buscar compreender o cenário do conteúdo Geometria dos Fractais nas escolas, a análise da organização didática proposta pelas coleções de livros didáticos adotados se faz fundamental.

A TAD e a Geometria dos Fractais

Ao estudar aspectos relacionados à TAD e à Geometria dos Fractais, entendemos que esta última pode ser estudada sob o ponto de vista da primeira. Dentre outros aspectos, A TAD nos possibilita analisar e modelar os objetos ostensivos e não ostensivos presentes na atividade matemática, e essa análise pode ser empregada na abordagem de assuntos matemáticos sugeridos em livros didáticos.

> Nós falaremos de objeto ostensivo [...] para nos referirmos a todo objeto tendo uma natureza sensível, uma certa materialidade, e que, por isso, adquire para o ser humano uma realidade perceptível. Esse é o caso de um objeto material qualquer e, notadamente, de objetos materiais particulares que são os sons [...], os grafismos [...] e os gestos. Os

> objetos não ostensivos são então todos os “objetos” que, como as ideias, as intuições ou os conceitos, existem institucionalmente – no sentido em que lhe atribuímos uma existência – sem, entretanto, poderem ser vistos, ditos, escutados, percebidos ou mostrados por si mesmos: eles só podem ser evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos associados (uma palavra, uma frase, um grafismo, uma escrita, um gesto ou um longo discurso) (Bosch & Chevallard, 1999, p. 10).

Desse modo, ao pensarmos em representações dos fractais como objetos ostensivos, podemos mencionar a construção de objetos como a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski, realizadas em softwares matemáticos, e também sua construção através do emprego de materiais manipuláveis e instrumentos de desenho. Tais representações conferem uma certa materialidade e sensibilidade ao objeto referido, trazendo uma realidade perceptível diante de suas características e propriedades.

Por outro lado, em sua descrição de fractal, Benoit Mandelbrot determina a autossemelhança, a dimensão fracionária e a complexidade infinita como as principais características desse objeto. Assim, ao refletirmos sobre estas características, compreendemos que as infinitas iterações de autossemelhança e o objeto fractal no seu ideal de complexidade infinita só se tornam compreensíveis quando o objeto fractal está na sua condição de objeto não ostensivo.

Portanto, como o processo gerador de um fractal pode ser recursivo, possuindo um número infinito de iterações, ou ainda pode ser ampliado quantas vezes desejarmos sem nunca obtermos a imagem final, entendemos a não ostensividade desse objeto final. Dessa maneira, a associação do fractal a um objeto não ostensivo se deve ao fato de que ao pensarmos em um objeto fractal e imaginarmos sua enésima iteração, reconhecemos o estado e a ideia de um objeto não ostensivo, uma vez que não podemos conceber visualmente e nem mentalmente a representação do objeto nesse estado.

Essa importante reflexão nos possibilita compreender que não obteremos uma representação final para um fractal tal qual ele é. Um fractal possui características que precisam ser compreendidas para além de sua ostensividade, e proporcionar a reflexão dessas características aos estudantes auxilia no entendimento das particularidades e das diferenciações entre os objetos que permeiam a matemática e suas propriedades específicas.

Na seção seguinte, traremos as indicações a respeito dos livros didáticos selecionados para a produção dos dados para esta pesquisa.

Materiais Selecionados

Nossa investigação abrangeu as quatro coleções mais adotadas pelas escolas públicas das cinco cidades mais populosas do Estado do Paraná – Curitiba, Londrina, Maringá, Ponta Grossa e Cascavel –, as quais adotaram livros de Matemática contemplados no PNLD 2018 – Ensino Médio. Estabelecemos como critério de busca as principais coleções do Ensino Médio adotadas pelas escolas dessas cidades e tomamos como hipótese a maior circulação de obras utilizadas pelos professores e alunos, buscando obter, assim, uma maior proximidade da realidade do suporte didático disponibilizado aos professores e estudantes. Porém, neste texto incluiremos somente as análises dos livros correspondentes ao Primeiro Ano do Ensino Médio.

De acordo com a busca realizada, chegamos à possibilidade de análise das coleções Contato Matemática (Souza & Garcia, 2016), Matemática – Contexto & Aplicações (Dante, 2016), Quadrante Matemática (Chavante & Prestes, 2016) e Matemática Ciência e Aplicações (Iezzi et al, 2016), uma vez que estas foram as quatro coleções mais adotadas pelas cinco cidades mais populosas do estado do Paraná. A coleção Contato Matemática, da Editora FTD, foi a mais utilizada pelas escolas, segundo o levantamento realizado. Para que as análises ficassem mais fluentes, adotamos como critério uma abreviatura para fazer referência aos livros didáticos de cada ano, as quais estão apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1.

Abreviatura dos livros didáticos adotados (Pescini, 2021, p. 57)

Coleção	Primeiro Ano	Segundo Ano	Terceiro Ano
Contato Matemática	LD 1.1	LD 2.1	LD 3.1
Matemática - contexto & aplicações	LD 1.2	LD 2.2	LD 3.2
Quadrante Matemática	LD 1.3	LD 2.3	LD 3.3
Matemática ciência e aplicações	LD 1.4	LD 2.4	LD 3.4

Portanto, em posse dessas informações, providenciamos os livros anteriormente mencionados com o objetivo de prosseguir para a produção e análise dos dados.

Subsídios para a Análise dos Dados

A análise das coleções dos livros didáticos investigados no contexto da dissertação de mestrado envolveu os três volumes correspondentes a cada coleção. No entanto, conforme descrito anteriormente, neste artigo, nos ateremos somente aos quatro livros selecionados do Primeiro Ano: LD 1.1 à LD 1.4. Buscamos, ao apresentar as análises, revelar como o ensino da Geometria dos Fractais se desenvolve nestas obras. Para tal, realizamos a investigação da

Parte Curso, das Atividades Resolvidas e das Atividades Propostas presentes nos livros que integrarão a organização praxeológica do conteúdo Geometria dos Fractais. Sobre esses conceitos, Bittar comenta:

> A Parte Curso compreende a explanação de definições, propriedades, resultados e exercícios resolvidos. Nessa Parte os autores do livro didático trazem, mesmo que implicitamente, o que consideram que os alunos daquele nível de escolaridade devem aprender e é nessa Parte que os alunos buscam pistas para resolver o que lhes é pedido. A análise da Parte Curso permite identificar alguns tipos de tarefas que parecem importantes naquela instituição, neste caso o LD. [...] Uma vez realizada a análise da Parte Curso, passamos às Atividades Propostas. Nesse momento buscamos analisar cada atividade identificando qual é a tarefa do aluno e qual é a técnica que se espera que ele utilize para a resolução da tarefa, tendo como apoio a(s) praxeologia(s) anteriormente identificada(s) (2017, p. 371-373).

As Atividades Resolvidas se referem às atividades propostas aos estudantes com suas resoluções, de forma que sirvam como exemplos a serem seguidos durantes as Atividades Propostas. Desse modo, como observamos que o conteúdo Geometria dos Fractais também foi contemplado em Atividades Resolvidas, reservamos uma parte das análises a esse momento do livro.

Logo, a análise praxeológica proposta por este trabalho foi feita com base no que o autor de cada coleção esperava que o estudante fizesse. Para isso, realizamos uma análise praxeológica pautada no Manual do Professor, o qual subsidiou nosso olhar diante da teoria e das atividades propostas em cada livro didático.

À vista disso, nossa problemática de pesquisa caracterizou-se como: *O conteúdo Geometria dos Fractais pode ser encontrado nas coleções de livros didáticos adotados para o Ensino Médio no estado do Paraná? Se sim, quais são as propostas de ensino para esse conteúdo?*

Para a composição da organização praxeológica referente ao ensino da Geometria dos Fractais contemplado nas coleções selecionadas, realizamos o estudo da organização matemática (OM) e da organização didática (OD) de acordo com a Teoria Antropológica do Didático.

No que diz respeito à OM, identificamos os tipos de tarefas propostas, presentes nas Atividades Resolvidas e nas Atividades Propostas, em forma de exercícios, e agrupamos os tipos de tarefas que apresentaram semelhança entre si, a fim de reconhecermos suas potencialidades, as técnicas instigadas e os aspectos tecnológicos-teóricos que permitiram justificar o uso das técnicas.

Com relação à OD, analisamos a presença e a apresentação dos momentos didáticos no ensino proposto, no intuito de auxiliar na compreensão da construção e organização do quarteto praxeológico identificado na organização matemática.

Escolhemos investigar, ao longo de toda a obra, os capítulos que abrangessem o estudo da Geometria dos Fractais, haja vista que esse objeto do saber apresenta conexões com outros objetos matemáticos ou não matemáticos. Buscamos também analisar brevemente as convergências e diferenças entre o que é sugerido nas Diretrizes Curriculares e o que é implementado nas coleções de livros didáticos analisadas.

A seguir, descrevemos os aspectos relativos às análises.

Análise e Discussão da Produção dos Dados

Apresentamos, nesta seção, produções e análises dos volumes das coleções correspondentes ao Primeiro Ano do Ensino Médio. No que diz respeito ao conteúdo de Geometria dos Fractais encontrado nos livros didáticos, observamos, de modo geral, que esse tópico está atrelado a atividades direcionadas a outros conteúdos matemáticos. E, principalmente, a Parte Curso sobre esta geometria não euclidiana só foi identificada em um dos quatros volumes analisados: no LD 1.3. Além disso, destacamos que, ao analisarmos o LD 2.1, assim como LD 2.2 e o LD 2.3, não encontramos Parte Curso nem Atividades Resolvidas ou Propostas sobre Geometria Fractal, ou seja, nenhuma informação sobre o assunto investigado foi localizada nesses livros. O mesmo foi verificado em todos os volumes correspondentes ao Terceiro Ano, que também não apresentaram nenhuma abordagem da Geometria dos Fractais.

A respeito dos tipos de fractais encontrados, o Triângulo de Sierpinski aparece em todos os livros do Primeiro Ano analisados, tendo sido contemplado em uma atividade cada. Ademais, identificamos o Tapete de Sierpinski e o Floco de neve de Koch no LD 1.3.

Em seguida, iniciaremos as análises da Parte Curso, Atividades Resolvidas e Atividades Propostas dos livros do Primeiro Ano do Ensino Médio selecionados.

<u>Parte Curso</u>

As análises da Parte Curso presente nos livros didáticos estão norteadas pela Organização Didática, passando pelos momentos didáticos propostos por Chevallard (1998). Desse modo, para iniciar nossas análises, destacamos que, dentre os livros do Primeiro Ano, o LD 1.1, o LD 1.2 e o LD 1.4 não apresentaram Parte Curso destinada ao conteúdo de Geometria dos Fractais. Portanto, as análises desta parte são destinadas unicamente ao LD 1.3, o único livro do Primeiro Ano a realizar essa exploração.

Ao final do estudo de todos os capítulos do LD 1.3, pudemos constatar que esse livro apresenta uma breve seção intitulada *Ampliando fronteiras*, a qual apresenta aos leitores conteúdos, curiosidades matemáticas não contempladas em seus capítulos e outros destaques que o autor do livro entende ser necessário apresentar. Após o capítulo dez, destinado ao ensino de Trigonometria, essa obra promove o primeiro contato com o conteúdo da Geometria dos Fractais. De forma sucinta, em duas páginas, a obra apresenta aspectos gerais sobre essa geometria não euclidiana, e a primeira modelação em forma de praxeologia é concebida por meio da exploração da Curva de Koch ou do Floco de Neve de Koch.

Inicialmente são exibidas as características gerais dos fractais, como sua complexidade infinita, comentando sobre aspectos relacionados à área e ao perímetro dessas figuras. Conforme a Figura 2, são apresentadas as características e as ilustrações das quatro primeiras iterações desse fractal.


Ampliando fronteiras

Curva de Koch

Uma característica dos fractais é a complexidade infinita, isto é, a quantidade de detalhes é infinita e nunca conseguiríamos representá-los completamente. Isso gera um aparente paradoxo, pois apesar de obtermos uma figura cujo perímetro é infinito, ela abrange uma área finita.

Paradoxo: pensamento, proposição ou argumento que desafia o pensamento lógico, aparentando contradição.

Fractal: estrutura geométrica na qual um padrão é repetido tanto na parte quanto no todo, em qualquer escala.

Floco de neve de Koch

O matemático polonês Helge von Koch (1870-1924) propôs um fractal obtido a partir de um triângulo equilátero: divide-se cada lado do triângulo em três partes de medidas iguais, removendo a parte do meio de cada lado e substituindo-a por dois lados de outro triângulo equilátero, cuja medida do lado é igual ao comprimento do segmento removido. Com algumas alterações recorrentes (iterações), o resultado é uma figura semelhante a um floco de neve, chamada **floco de neve de Koch**.

iteração 0 iteração 1 iteração 2 iteração 3 iteração 4

Figura 2.

Ampliando Fronteiras: Curva de Koch (Chavante & Prestes, 2016, p. 248)

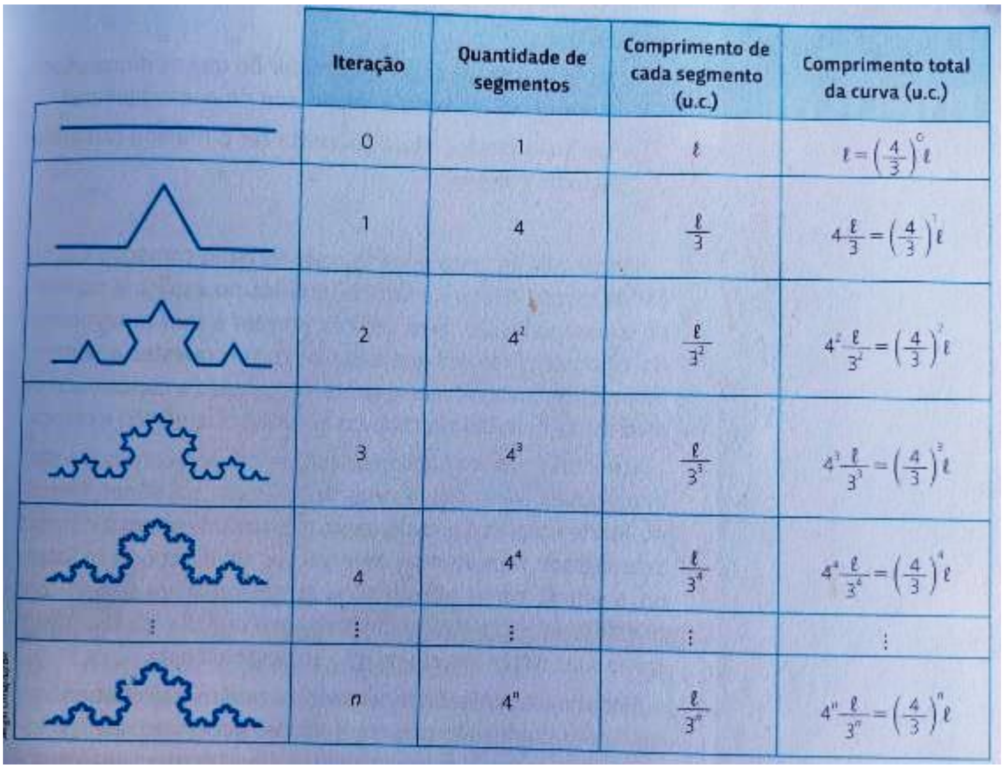
Cabe observar que, antes do aparecimento ilustrativo das primeiras iterações do floco de neve de Koch, foi descrita a construção desse fractal de forma detalhada, explicando os traçados e fragmentos das iterações. Sobre a teoria fractal, de modo geral, o autor se refere ao paradoxo da complexidade infinita, mencionando que tal figura fractal apresenta seu perímetro infinito, mas, em contrapartida, tem sua área finita.

Diante disso, o autor propõe explorar o perímetro da figura apresentada anteriormente, mas para sua construção, ele salienta que considerará apenas o comprimento da linha apresentada nas imagens, a qual é denominada Curva de Koch. Podemos observar novamente as figuras ilustradas pelo autor na Figura 3.

Figura 3.

Floco de Neve de Koch (Chavante & Prestes, 2016, p. 248)

Nesse momento, o autor propõe uma situação oriunda do objeto matemático apresentado anteriormente, buscando explorar o conceito de perímetro para esse fractal através de uma tabela que o aluno pode explorar a fim de entender seu perímetro e seu processo de formação. Os traçados em vermelho das figuras serviram para a construção da tabela apresentada a seguir, considerando um segmento inicial de comprimento “l” (letra “l”), conforme a Figura 4.



	Iteração	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento (u.c.)	Comprimento total da curva (u.c.)
	0	1	ℓ	$\ell = \left(\frac{4}{3}\right)^0 \ell$
	1	4	$\frac{\ell}{3}$	$4 \cdot \frac{\ell}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^1 \ell$
	2	4^2	$\frac{\ell}{3^2}$	$4^2 \cdot \frac{\ell}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \ell$
	3	4^3	$\frac{\ell}{3^3}$	$4^3 \cdot \frac{\ell}{3^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \ell$
	4	4^4	$\frac{\ell}{3^4}$	$4^4 \cdot \frac{\ell}{3^4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \ell$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n	4^n	$\frac{\ell}{3^n}$	$4^n \cdot \frac{\ell}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \ell$

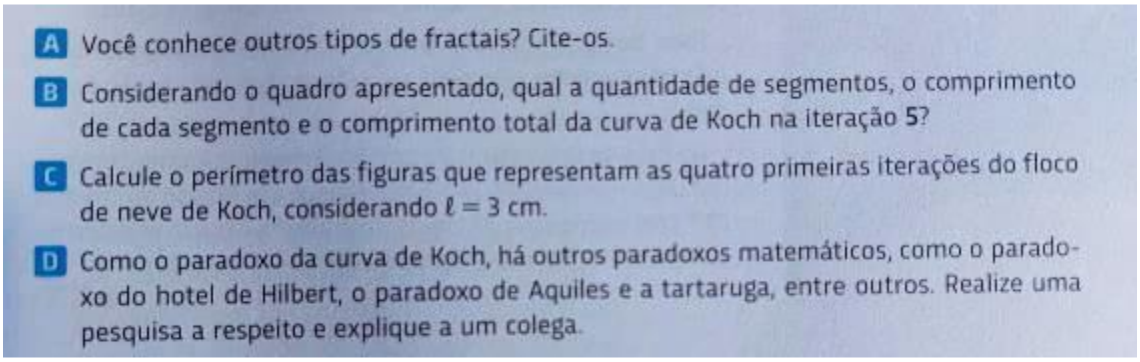
Figura 4.

Tabela do Cálculo do Perímetro: Floco de Neve de Koch (Chavante & Prestes, 2016, p. 249)

Em seguida da apresentação da Figura 4, o livro faz menção ao conteúdo de progressão geométrica (PG), indicando que os termos do comprimento total da curva em cada iteração representam os termos de uma PG de razão $\frac{4}{3} > 1$. Desse modo, apresenta ao aluno um exemplo relacionado ao paradoxo da complexidade infinita, exibindo o comprimento total da Curva de Koch, que é finito e, consequentemente, o perímetro do floco de neve de Koch, que é infinito.

Após contemplar os momentos da apresentação de definições de conceitos fractais e da proposta de ensino com a construção da tabela envolvendo o perímetro do fractal explorado, o autor investiga o próximo momento, que diz respeito à aplicação do que foi pré-determinado, tais como indagações e pesquisas sobre a teoria fractal.

A exploração das técnicas desenvolvidas até então, relacionadas aos conhecimentos de comprimento do segmento, comprimento total e perímetro das figuras, juntamente com a investigação a respeito de outros exemplos de fractais e informações complementares sobre paradoxos matemáticos são invocadas por meio de tarefas contempladas na sequência do livro, como indicado a seguir.



A Você conhece outros tipos de fractais? Cite-os.

B Considerando o quadro apresentado, qual a quantidade de segmentos, o comprimento de cada segmento e o comprimento total da curva de Koch na iteração **5**?

C Calcule o perímetro das figuras que representam as quatro primeiras iterações do floco de neve de Koch, considerando $\ell = 3$ cm.

D Como o paradoxo da curva de Koch, há outros paradoxos matemáticos, como o paradoxo do hotel de Hilbert, o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, entre outros. Realize uma pesquisa a respeito e explique a um colega.

Figura 5.

Investigação sobre os fractais (Chavante & Prestes, 2016, p. 249)

Os momentos propostos nessas investigações dizem respeito à busca de uma formalização ou reflexão sobre o saber matemático estudado. A Figura 5 permite observar que os itens A e D possibilitam diversas respostas, dependendo diretamente do aluno. Sendo assim, caracterizamos estas atividades como tarefas de caráter pessoal. Entretanto, os itens B e C oferecem subsídios para pensar sobre suas OM, as quais comentamos adiante.

Com relação ao item B, observamos que ele apresenta questionamentos sobre o comprimento da curva de Koch em cada etapa, conforme explorado na Figura 4. Como essa tarefa está vinculada a aspectos sobre perímetro, ela foi caracterizada como o Tipo de Tarefa *Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal*, e modelamos suas técnicas a partir do desenvolvimento apresentado no livro do professor sobre essa atividade, cuja OM pode ser observada a seguir.

Tabela 2.

Tipo de Tarefa 1 (Pescini, 2021, p. 62)

Tipo de Tarefa	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
Técnica	τ1a: Interpretar o quadro sobre perímetro. τ1b: Substituir a quantidade de segmentos na etapa desejada. τ1c: Substituir o comprimento de cada segmento pela etapa desejada. τ1d: Substituir o comprimento total da curva pela etapa desejada.
Tecnologia	θ1: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ1: Geometrias e Funções.

A respeito do item C, verificamos que ele aborda, assim como o item anterior, conhecimentos sobre o perímetro do fractal explorado nesse momento. Contudo, ele apresenta uma informação extra em sua descrição que o autor não havia disponibilizado até o momento: a atribuição de um valor numérico ao comprimento do segmento desse objeto fractal. Dessa forma, suas técnicas se diferem das mobilizadas no item anterior. Apresentamos, na sequência, sua OM.

Tabela 3.

Tipo de Tarefa 1 (Pescini, 2021, p. 62)

Tipo de Tarefa	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
Técnica	τ1a: Interpretar o quadro sobre perímetro. τ1b*: Substituir o valor numérico do comprimento de segmento no comprimento total da curva em cada etapa desejada.
Tecnologia	θ1: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ1: Geometrias e Funções.

Observamos que, nessas duas Organizações Matemáticas, as técnicas mobilizadas dependeram diretamente da Figura 4, e um passo a passo das atividades, sem o auxílio dessa tabela já construída, demandaria uma ampla interpretação dos conhecimentos sobre perímetro, como também do padrão figural desse fractal.

Portanto, a Parte Curso apresentada no LD 1.3 é explorada de forma breve, descontextualizada e como uma curiosidade. Uma introdução ao assunto Fractal foi realizada por meio de um exemplo e de uma proposta de perguntas investigativas. Aspectos figurais, numéricos e algébricos foram abordados, direcionando o aluno no conhecimento da existência desse objeto geométrico e da sua possível exploração matemática.

Atividades Resolvidas

As análises de LD1.1, LD1.2 e o LD1.4 não nos permitiram realizar a OM das Atividades Resolvidas, uma vez que elas não foram contempladas nesses livros. O mesmo ocorreu com a análise de todos os volumes de livros didáticos destinados ao ensino do segundo e terceiro anos do Ensino Médio.

Com relação às Atividades Resolvidas que o LD 1.3 propõe, encontramos, no capítulo de Sequências e Progressões, especificamente na parte destinada ao ensino de progressão geométrica, a seção Atividades Resolvidas, em que há uma Tarefa referente ao Tapete de Sierpinski, contemplando, assim, o conteúdo da Geometria dos Fractais.

O enunciado dessa Tarefa exibe quatro iterações do fractal mencionado, como podemos observar na Figura 6.

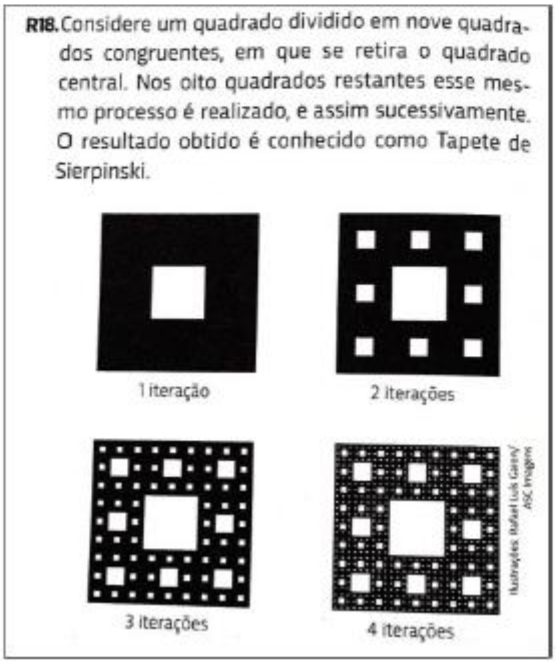


Figura 6.

Atividade Resolvida (Chavante & Prestes, 2016, p. 198)

Após as ilustrações descritas pelos autores, eles propõem duas perguntas que envolvem o fractal mencionado. A primeira delas faz menção à soma dos quadrados retirados nas quatros iterações ilustradas no enunciado, e a segunda instiga o aluno a pensar sobre a construção de uma lei de formação relacionada a este fractal em formação.

A seguir, apresentamos as perguntas, as resoluções e os quadros que contemplam a OM dessa proposta.

a) Determine a quantidade de quadrados retirados nas quatro primeiras iterações.

Resolução

a) Utilizando o que foi dado, temos a seguinte relação:

Iterações	Quadrados retirados
1	1
2	$8 \cdot 1 = 8$
3	$8 \cdot 8 = 64$
4	$8 \cdot 64 = 512$

Figura 7.

Atividade Resolvida item a (Chavante & Prestes, 2016, p. 198)

Com base na resolução apresentada pelos autores, realizamos a análise praxeológica e exibimos seu quadro na sequência.

Tabela 4.

Tipo de Tarefa 2 (Pescini, 2021, p. 68)

Tipo de Tarefa	T2: Determinar a quantidade de subfiguras [4] da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
Técnica	τ2a: Interpretar o padrão figural. τ2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ2c: Identificar a progressão geométrica do fractal. τ2d: Escrever a expressão numérica que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
Tecnologia	θ2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ2: Geometrias e Funções.

Com relação ao item b dessa Tarefa, temos:

[4] Adotamos a palavra *subfigura* como correspondente a uma parte do todo.

b) Escreva a lei de formação de uma função do tipo exponencial que esteja relacionada com sequência formada pela quantidade de quadrados retirados a cada iteração.

b) Observe que a sequência de valores obtidos no item **a**, (1, 8, 64, 512), constitui uma PG, em que $a_1 = 1$ e $q = 8$.
Assim, para determinar a quantidade de quadrados retirados após n iterações, basta utilizar o termo geral da PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot 8^{n-1} \Rightarrow a_n = 8^{n-1}$$

Portanto, a lei de formação da função do tipo exponencial que está relacionada com essa sequência é $f(x) = 8^{x-1}$.

Figura 8.

Atividade Resolvida item b (Chavante & Prestes, 2016, p. 198)

É possível observar que este item solicita aos alunos a construção algébrica para a lei de formação desse fractal, que contempla a quantidade de quadrados retirados a cada iteração, caracterizando-se como função exponencial. A seguir, apresentamos a tabela que contempla nossa análise.

Tabela 5.

Tipo de Tarefa 3 (Pescini, 2021, p. 69)

Tipo de Tarefa	T3: Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal.
Técnica	τ3a: Identificar o padrão figural do fractal. τ3b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ3c: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. τ3d: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
Tecnologia	θ3: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ3: Geometrias e Funções.

Logo, no que diz respeito às Atividades Resolvidas do LD1.3, encontramos uma proposta que contemplou dois tipos de tarefas diferentes, respaldadas nos conteúdos relacionados às Geometrias e às Funções. Ambas as tarefas se encontram em um capítulo dissociado de Geometria, o que poderia ser mais convencional, visto que a Geometria Fractal é uma área dentro do grande tema Geometrias.

As tarefas encontradas nesse livro exploraram aspectos relacionados à lei de formação do Fractal estudado. Embora elas estejam contidas em uma única Atividade Resolvida, ela apresentou dois Tipos de Tarefas diferentes, proporcionando uma breve explanação do fractal em questão e de sua articulação com a Matemática. Nesse contexto, as tarefas estão relacionadas especificamente ao conteúdo de Sequências e Progressões.

Atividades Propostas

A parte destinada às Atividades Propostas foi encontrada em três livros didáticos do primeiro ano, dentre os quatro analisados, sendo eles LD1.1, LD1.2 e LD1.3. O LD1.4 não apresentou Atividades Propostas sobre o conteúdo Geometria dos Fractais.

No que diz respeito aos livros didáticos para o segundo e terceiro anos do Ensino Médio, nada podemos declarar, uma vez que essas instituições não contém nenhuma Atividade Proposta que aborde o conteúdo objeto de nosso estudo.

O LD1.1 apresenta, no capítulo destinado ao ensino de Função Exponencial, uma Tarefa referente à sequência de figuras, com a inclusão de três níveis da composição de um fractal, conforme a figura a seguir.

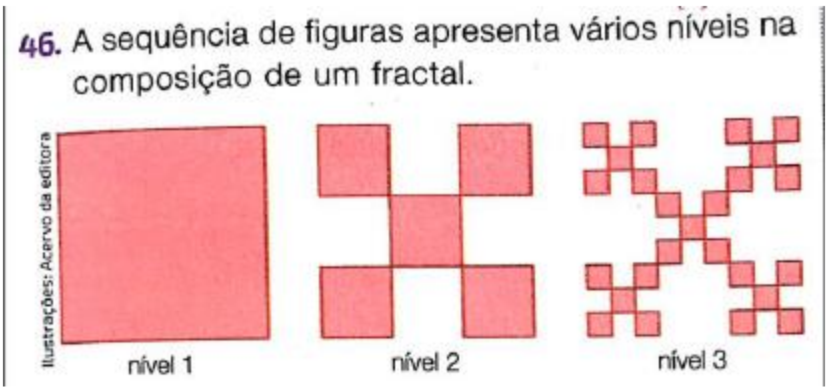


Figura 9.

Atividade Proposta 1 (Souza e Garcia, 2016, p. 151)

Por meio do enunciado, os autores propõem aos alunos três indagações que fazem menção ao pensamento figural e algébrico desse fractal. Sobre o item a, apresentamos a Figura 10.

a) Utilizando malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência.

Figura 10.

Atividade Proposta 1 item a (Souza e Garcia, 2016, p. 151)

Ao realizar a OM dessa Tarefa, observamos que ela se enquadra no Tipo de Tarefa *Construir a figura correspondente ao próximo nível de uma sequência*. Através das análises realizadas no livro do professor, observamos que a técnica mobilizada nesse momento diz respeito a manipular ostensivos. No caso, no enunciado da tarefa, os autores recomendam utilizar a malha quadriculada para a construção do nível desejado do respectivo fractal. Assim, construímos a Tabela 6 a respeito da Tarefa 4.

Tabela 6.

Tipo de Tarefa 4 (Pescini, 2021, p. 70-71)

Tipo de Tarefa	T4: Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal.
Técnica	τ4a: Identificar o padrão figural do fractal. τ4b: Manipular ostensivos – malha quadriculada – buscando a construção do nível desejado.
Tecnologia	θ4: Compreensão da autossemelhança do fractal.
Teoria	Θ4: Geometrias.

Com relação à Tarefa item b, que se refere ao conhecimento sobre a lei de formação algébrica do fractal, os autores apresentam três alternativas de resposta ao aluno:

b) Qual função expressa o número *y* de quadradinhos existentes na figura de nível *x* dessa sequência?

- $y = 5^{x+1}$
- $y = 5^{x}$
- $y = 5^{x-1}$

Figura 11.

Atividade Proposta 1 item b (Souza e Garcia, 2016, p. 151)

Dessa forma, observamos que a questão norteadora dessa Tarefa direciona o aluno na busca pela generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um determinado nível e, portanto, corresponde ao Tipo de Tarefa 3. Contudo, o passo a passo para realizar essa Tarefa e as teorias mobilizadas são diferentes dos elencados para o Tipo de Tarefa 3 apresentado anteriormente. Por essa razão, usamos as designações τ3d* e Θ3*.

Tabela 7.

Tipo de Tarefa 3 (Pescini, 2021, p. 71)

Tipo de Tarefa	T3: Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal.
Técnica	τ3a: Identificar o padrão figural do fractal. τ3b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ3c: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. τ3d*: Identificar a lei de formação algébrica do fractal. τ3d: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
Tecnologia	θ3: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ3*: Geometrias e Números e Álgebra.

Para findar essa atividade, é sugerida ao aluno a utilização da função que corresponde ao padrão de iteração do fractal anteriormente disposto através do emprego de substituição.

c) Em qual nível da sequência o número de quadradinhos da figura será:

- 3 125?
- 78 125?

Figura 12.

Atividade Proposta 1 item c (Souza e Garcia, 2016, p. 151)

É possível observar que esse Tipo de Tarefa tem proximidade ao Tipo de Tarefa 2, apresentado anteriormente, mas a outra Tarefa diz respeito à quantidade de subfiguras da sequência, dependendo do nível desejado, enquanto, neste caso, o aluno deve determinar o nível desejado da sequência partindo da quantidade de subfiguras. Assim, construímos nossa OM para o Tipo de Tarefa 2.

Tabela 8.

Tipo de Tarefa 2 (Pescini, 2021, p. 72)

Tipo de Tarefa	T2: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
Técnica	τ2a: Identificar o padrão figural. τ2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ2c*: Identificar a lei de formação algébrica.

	τ2d: Substituir o número da quantidade de subfiguras na lei de formação algébrica. τ2e*: Verificar a partir do resultado a que nível pertence o objeto desejado.
Tecnologia	θ2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ2: Geometrias e Números e Álgebra.

Nas atividades referentes ao estudo de Progressão Geométrica propostas aos alunos, encontramos quatro atividades que possuem propriedades fractais. Entretanto, três delas não citam esse termo em seu enunciado, deixando sua ideia implícita.

A próxima Tarefa corresponde a uma sequência de pontos, da qual os autores apresentam três iterações, conforme a imagem a seguir:

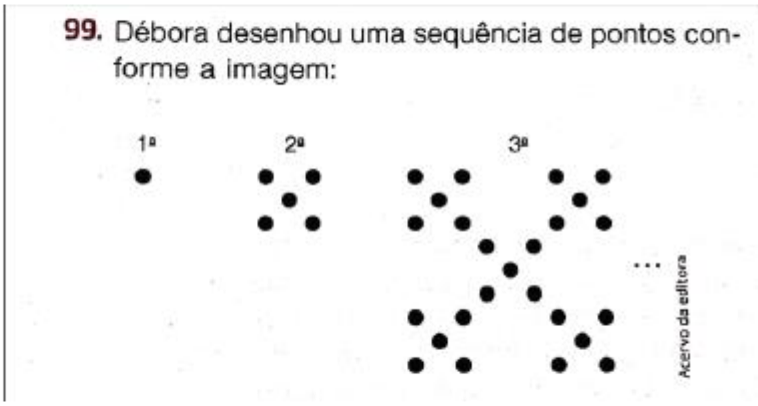


Figura 13.

Atividade Proposta 2 (Souza e Garcia, 2016, p. 224)

A partir disso, são propostas ao aluno duas perguntas que norteiam essa sequência, partindo dos fundamentos da progressão geométrica. A primeira delas sugere que o aluno pense sobre a continuidade dessa sequência e determine a quantidade de pontos referente à 5ª figura.

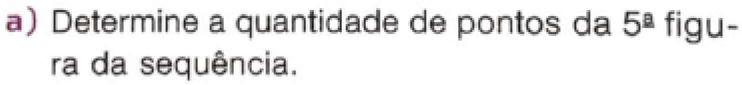

a) Determine a quantidade de pontos da 5ª figura da sequência.

Figura 14.

Atividade Proposta 2 item a (Souza e Garcia, 2016, p. 224)

Essa Tarefa instiga o aluno a buscar a escrita da expressão numérica que corresponde ao padrão de iteração do fractal, partindo da identificação do padrão figural, bem como a identificação da progressão geométrica desse fractal. Assim, construímos nosso quadro.

Tabela 9.

Tipo de Tarefa 2 (Pescini, 2021, p. 73)

Tipo de Tarefa	T2: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
Técnica	τ2a: Identificar o padrão figural. τ2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ2c: Identificar a progressão geométrica do fractal. τ2d: Escrever a expressão numérica que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
Tecnologia	θ2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ2: Geometrias e Funções.

Com relação ao item *b* da Atividade, os autores sugerem, além da identificação do padrão figural já utilizada no item anterior, também a soma dos termos de uma PG. Vejamos:

> b) Quantos pontos Débora terá desenhado ao concluir a 5ª figura da sequência?

Figura 15.

Atividade Proposta 2 item b (Souza e Garcia, 2016, p. 224)

Nessa Tarefa, os autores esperam que o aluno utilize as propriedades da progressão geométrica finita, manipulando a soma de seus termos para desenvolver sua resposta. Ainda que a Tarefa apresente semelhança com a anterior, o que as diferencia é a utilização da soma de todos os termos dessa sequência finita. Logo, temos o seguinte quarteto, que designamos por T2, e a técnica mobilizada nessa Tarefa é diferente da anterior.

Tabela 10.

Tipo de Tarefa 2 (Pescini, 2021, p. 74)

Tipo de Tarefa	T2: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
Técnica	τ2a: Identificação do padrão figural. τ2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ2c: Identificação da progressão geométrica do fractal. τ2d**: Escrever algebricamente a função que corresponde a soma dos termos de uma progressão geométrica e substituir pela etapa desejada.
Tecnologia	θ2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ2: Geometrias e Funções.

Na sequência do conteúdo de progressão geométrica do LD 1.1, além dos conceitos desse tema, a próxima Tarefa utiliza conhecimentos relacionados a grandezas e medidas. Tal fato foi observado porque, em seu enunciado, os autores exibem as figuras de uma sequência e pedem que o aluno considere, além das três figuras apresentadas, mais duas, completando, assim, uma sequência finita de cinco termos. Diante disso, questionam o aluno sobre a área em amarelo e em azul, que são as cores que compõem as iterações desses fractais, como podemos observar através da figura.

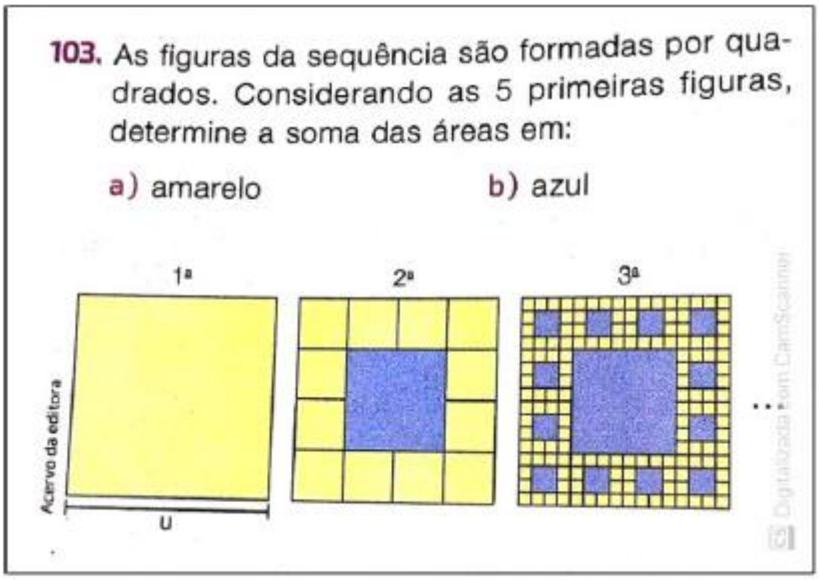


Figura 16.

Atividade Proposta 3 (Souza e Garcia, 2016, p. 224)

Ao analisarmos o LD do professor a respeito dessa Tarefa, verificamos que as técnicas mobilizadas pelos autores sugerem ao aluno escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal e substituir pela etapa desejada, partindo da identificação do padrão figural e da progressão geométrica. Assim, o objetivo é determinar as áreas das subfiguras e somá-las. Diante disso, apresentamos nossa próxima tabela com o Tipo de Tarefa 1.

Tabela 11.

Tipo de Tarefa 1 (Pescini, 2021, p. 75)

Tipo de Tarefa	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
Técnica	τ1a*: Identificação do padrão figural do fractal. τ1b**: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. τ1c*: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal.

	τ1d*: Substituir pelas etapas desejadas.
	τ1e: Determinar as áreas das subfiguras desejadas.
	τ1f: Somar as áreas das subfiguras do fractal.
Tecnologia	Θ1: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ1: Geometrias e Funções

Continuando as atividades correspondentes ao assunto de Progressão Geométrica, a próxima Tarefa envolve o conteúdo de Geometria dos Fractais implicitamente, pois como podemos observar, seu enunciado não faz menção a termos fractais. Essa atividade, assim como a anterior analisada, além de contemplar conhecimentos de progressão geométrica, explora conceitos de área.

112. Na sequência a seguir, o lado de cada quadrado maior mede 1u.

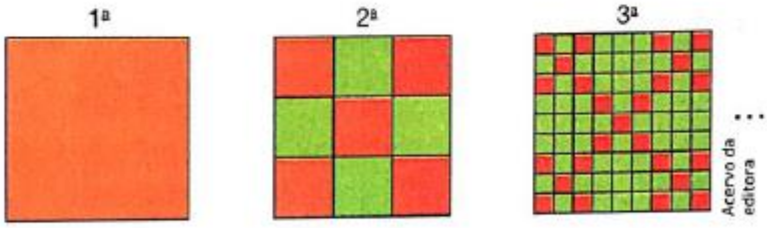


Figura 17.

Atividade Proposta 4 (Souza e Garcia, 2016, p. 224)

As duas questões norteadoras dessa atividade envolvem conceitos de área, mas o item *a* explora a área de dois níveis específicos desse fractal, enquanto o item *b* estuda a área da sequência infinita desse fractal. Ao analisarmos o primeiro item, observamos que ele menciona:

a) Qual é a área em vermelho na 2ª figura dessa sequência? E na 4ª figura?

Figura 18.

Atividade Proposta 4 item a (Souza e Garcia, 2016, p. 224)

Concluímos, sobre sua OM, que seu Tipo de Tarefa é semelhante ao T1 anterior, o qual explora a técnica em que o aluno, para determinar a área do objeto fractal correspondente ao nível solicitado, é instigado, primeiramente, a identificar o padrão figural e a relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. Em seguida, se deve escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal mencionado e, então, substituir o nível solicitado nessa Tarefa na função para, assim, ter as propriedades de suas áreas e somá-las, conforme solicitado.

Tabela 12.

Tipo de Tarefa 1 (Pescini, 2021, p. 76-77)

Tipo de Tarefa	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
Técnica	τ1a*: Identificação do padrão figural do fractal. τ1b**: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. τ1c*: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal. τ1d*: Substituir pelas etapas desejadas. τ1e: Determinar as áreas das subfiguras desejadas. τ1f: Somar as áreas das subfiguras do fractal.
Tecnologia	θ1: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ1: Geometrias e Funções.

A respeito do item b temos:

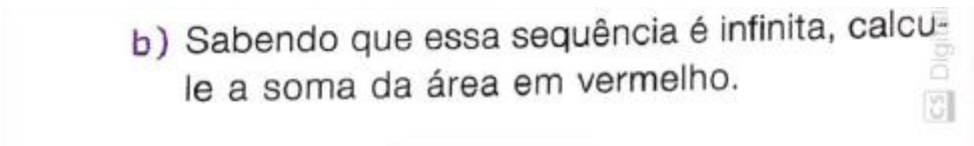

b) Sabendo que essa sequência é infinita, calcule a soma da área em vermelho.

Figura 19.

Atividade Proposta 4 item b (Souza e Garcia, 2016, p. 224)

Percebemos que, por se tratar de uma sequência infinita, o aluno não poderá utilizar as técnicas semelhantes à OM mencionada anteriormente. Para conseguir a resposta desse item, ele deverá empregar conhecimento de limite. Sendo assim, nossa Tabela 13 corresponde ao Tipo de Tarefa 1, ampliando sua técnica.

Tabela 13.

Tipo de Tarefa 1 (Pescini, 2021, p. 77)

Tipo de Tarefa	T1: Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal.
Técnica	τ1a*: Identificação do padrão figural do fractal. τ1b**: Identificar uma relação numéricas entre a quantidade de quadrados e os níveis.

	τ1c*: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal. τ1d**: Aplicar limite.
Tecnologia	θ1: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ1: Geometrias e Funções.

O primeiro contato com o termo fractal aparece na primeira atividade explorada desse livro. Em seguida, encontramos três Tarefas que se apropriam dos conceitos fractais, mas não mencionam que se trata de objetos fractais. A quinta e última atividade é a única que contempla uma breve explicação sobre o termo Fractal, que ocorre em seu enunciado.

> **129.** (Enem-MEC) **Fractal** (do latim *fractus*, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

Figura 20.

Atividade Proposta 5 (Souza e Garcia, 2016, p. 229)

Em seguida, os autores fazem menção à exploração do triângulo de Sierpinski, comentando sobre seus procedimentos de construção e apresentando três figuras compatíveis com os três primeiros níveis desse fractal. Como podemos observar:

> O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:
>
> 1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
> 2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;

Figura 21.

Atividade Proposta 5 – parte 2 (Souza e Garcia, 2016, p. 229)

Posteriormente, com base no triângulo de Sierpinski, os autores propõem uma Tarefa em que o aluno deve determinar qual figura pertence ao nível quatro desse fractal. São disponibilizadas cinco alternativas. Vejamos:

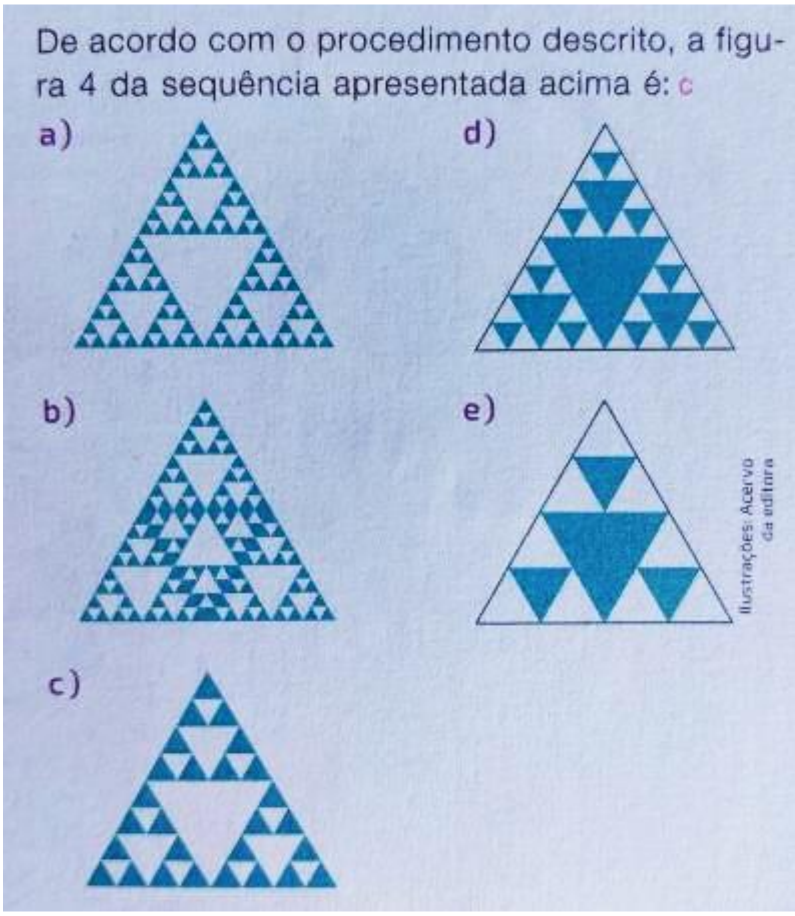


Figura 22.

Atividade Proposta 5 - alternativas (Souza e Garcia, 2016, p. 229)

Ao analisar essa Tarefa, determinamos a OM com o Tipo de Tarefa 4, pois perante nossa observação do desenvolvimento da resolução presente no livro do professor, a técnica mobilizada para a realização da Tarefa se refere a manipular ostensivos – neste caso, o papel – em busca da construção do nível desejado.

Tabela 14.

Tipo de Tarefa 4 (Pescini, 2021, p. 79)

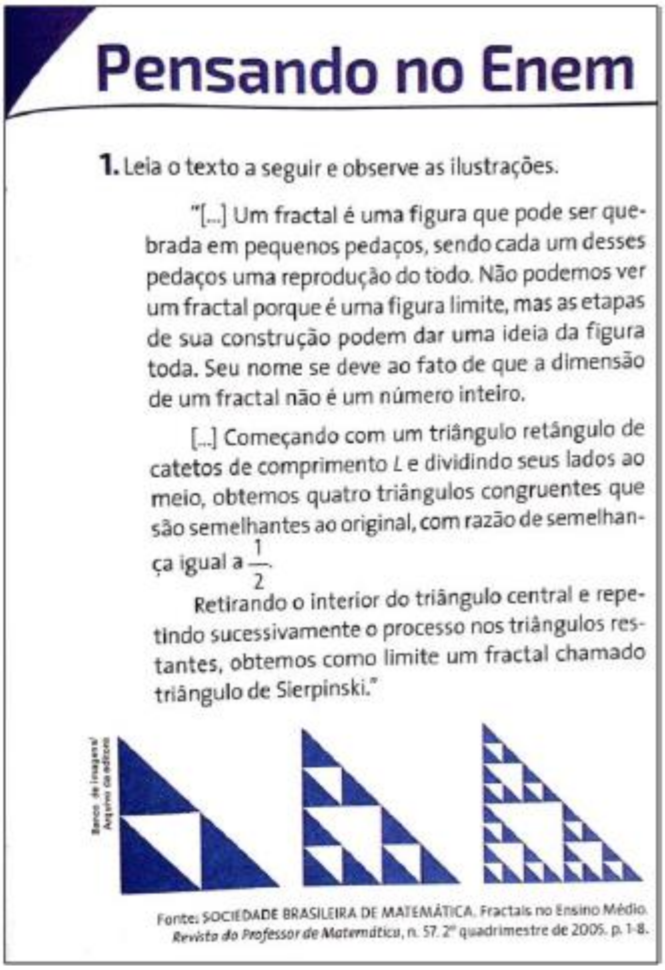
Tipo de Tarefa	T4: Construir a figura correspondente ao próximo nível de uma sequência.
Técnica	τ4a: Identificar o padrão figural do fractal. τ4b: Manipular ostensivos – malha quadriculada – buscando pela construção do nível desejado.
Tecnologia	θ4: Compreensão da autossemelhança do fractal.
Teoria	Θ4: Geometrias.

Isto posto, observamos que o LD1.1 contemplou cinco atividades que envolveram o conteúdo da Geometria dos Fractais, com uma variação de sete Tipos de Tarefas identificadas nessas atividades, todas encontradas na parte destinada ao ensino de Progressão Geométrica. Por mais que essa obra tenha explorado os fractais por intermédio de outro conteúdo de matemática, acreditamos que os autores explicitaram, de forma sucinta, os conhecimentos dessa teoria ao aluno. Todos os contatos ocorreram por meio de atividades, não havendo um momento dedicado exclusivamente à exploração da teoria.

O fractal Triângulo de Sierpinski foi utilizado na Atividade Proposta 5 do LD1.1 e também na Atividade Proposta do LD1.2, cuja análise identificou a presença de apenas uma atividade que contemplasse o conteúdo da Geometria dos Fractais em toda a obra. Essa atividade é oferecida depois de apresentados todos os capítulos, em uma seção destinada a questões voltadas aos vestibulares das regiões brasileiras e ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Inicialmente, a atividade retrata recortes de uma matéria retirada da Revista do *Professor de Matemática*, publicada em 2005 pela Sociedade Brasileira de Matemática, dentro do tema *Fractais no Ensino Médio*. Em seu enunciado, o autor exibe uma breve introdução dos aspectos gerais de um fractal, usando como exemplo o Triângulo de Sierpinski e explorando sua construção.

Logo após comentar sobre a construção desse fractal, são apresentadas três figuras ilustrando o Triângulo de Sierpinski, como podemos observar na Figura 23.



Pensando no Enem

1. Leia o texto a seguir e observe as ilustrações.

> "[...] Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma ideia da figura toda. Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro.
>
> [...] Começando com um triângulo retângulo de catetos de comprimento L e dividindo seus lados ao meio, obtemos quatro triângulos congruentes que são semelhantes ao original, com razão de semelhança igual a $\frac{1}{2}$.
>
> Retirando o interior do triângulo central e repetindo sucessivamente o processo nos triângulos restantes, obtemos como limite um fractal chamado triângulo de Sierpinski."

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. Fractais no Ensino Médio. *Revista do Professor de Matemática*, n. 57. 2º quadrimestre de 2005. p. 1-8.

Figura 23.

Atividade Proposta 6 (Dante, 2016, p. 261)

Dando continuidade à atividade, o autor apresenta as iterações desse fractal e quantos triângulos equivaleram a cada nível em uma tabela, exibindo, assim, a função que expressa o total de triângulos a cada nova etapa. Posteriormente, é ilustrada até a quinta iteração do Triângulo de Sierpinski.

Esse procedimento é uma descrição da construção iterativa do fractal denominado Triângulo de Sierpinski partindo de um triângulo retângulo, mas podemos partir de um triângulo equilátero (como abaixo).

Iteração	0	1	2	3	...	n
Número de triângulos	1	3	3^2	3^3	...	3^n

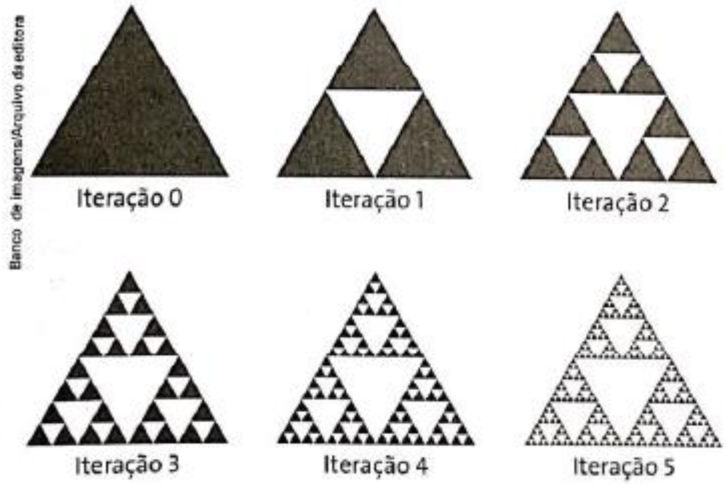


Figura 24.

Atividade Proposta 6 – parte 2 (Dante, 2016, p. 261)

A afirmação correta é:

a) O número de triângulos cresce linearmente a cada iteração.

b) A sequência formada pelas áreas totais de cada figura a cada iteração é uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{4}$.

c) A sequência formada pelas áreas de cada triângulo, a cada iteração, é uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{4}$.

d) A sequência formada pelo número de triângulos a cada iteração é uma progressão aritmética de razão 3.

e) A área de cada triângulo tende a infinito.

Figura 25.

Atividade Proposta 6 - Tarefas (Dante, 2016, p. 261)

A Tarefa que engloba os fatos apresentados anteriormente é estruturada em cinco alternativas, solicitando ao aluno que aponte apenas a alternativa correta. As opções envolvem conhecimentos sobre a complexidade infinita e a dimensão fractal, assim como a sequência formada pelas áreas totais de cada figura a cada iteração, e a área de cada triângulo. Vejamos a Figura 25.

Analisando somente as atividades e o conjunto em que elas se apresentam, não é possível pensar em suas OM, pois elas não se encontram em um conteúdo específico, e sim após apresentados todos os capítulos, em uma seção com um conjunto de atividades diversificadas sobre vestibular e ENEM. Porém, ao analisar as respostas presentes no livro do professor, foi possível realizar a OM dessas Tarefas.

Com relação às conclusões de cada item, temos:

Pensando no Enem

1. Analisando as alternativas:
   a) O número de triângulos cresce **exponencialmente** a cada iteração. (F)
   b) A sequência formada pelas áreas totais de cada figura a cada iteração é uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{4}$. (V)
   c) A sequência formada pelas áreas de cada triângulo a cada iteração é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$. (F)
   d) A sequência formada pelo número de triângulos, a cada iteração, é uma **progressão geométrica** de razão 3. (F)
   e) A área de cada triângulo tende a **zero**. (F)

Iteração	**0**	**1**	**2**	**3**	**...**	***n***
Número de triângulos	1	3	3^2	3^3	...	3^n
Área de cada triângulo	A	$\frac{1}{4}A$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2 A$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3 A$	...	$\left(\frac{1}{4}\right)^n A$
Área total	A	$\frac{3}{4}A$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 A$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 A$	...	$\left(\frac{3}{4}\right)^n A$

Resposta: alternativa **b**.

Figura 26.

Respostas Atividade Proposta 6 (Dante, 2016, p. 306)

Observamos que, a cada item, o Tipo de Tarefa pode variar. Assim, para resolver essa Tarefa, o aluno mobilizará mais do que uma técnica.

Com relação à alternativa *a*, o Tipo de Tarefa que identificamos faz menção a *Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal*. Assim, nossa OM para essa Tarefa é referente ao T3.

Tabela 15.

Tipo de Tarefa 3 (Pescini, 2021, p. 82-83)

Tipo de Tarefa	T3: Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal.
Técnica	τ3a: Identificar o padrão figural do fractal. τ3b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ3c: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. τ3d: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
Tecnologia	θ3: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ3: Geometrias e Funções.

Os itens *b* e *c* utilizam conhecimentos sobre as áreas totais e pertencentes a cada iteração. Ambos mobilizam o Tipo de Tarefa 1, mas o que os diferencia é que, no momento da construção algébrica da função que corresponde ao padrão de iteração do fractal, uma irá se referir à área total, ao passo que a seguinte tangerá a área de cada triângulo.

Sobre a tabela da OM dos itens b e c, apresentamos:

Tabela 16.

Tipo de Tarefa 1 (Pescini, 2021, p. 83)

Tipo de Tarefa	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
Técnica	τ1a*: Identificação do padrão figural do fractal. τ1b**: Identificar uma relação numéricas entre a quantidade de quadrados e os níveis. τ1c*: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal. τ1d*: Substituir pelas etapas desejadas. τ1e: Determinar as áreas das subfiguras desejadas. τ1f: Somar as áreas das subfiguras do fractal.
Tecnologia	θ1: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ1: Geometrias e Funções.

Ao investigar a Tarefa do item *d*, identificamos que ela solicita ao aluno pensar sobre a expressão numérica que corresponde ao padrão de iteração do fractal. Logo, constituímos nossa OM referente ao Tipo de Tarefa 2 do seguinte modo:

Tabela 17.

Tipo de Tarefa 2 (Pescini, 2021, p. 83-84)

Tipo de Tarefa	T2: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
Técnica	τ2a: Identificar o padrão figural. τ2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ2c: Identificar a progressão geométrica do fractal. τ2d: Escrever a expressão numérica que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
Tecnologia	θ2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ2: Geometrias e Funções.

Para findarmos as OM dessa atividade, compreendemos que o autor sugere ao aluno escrever a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal para determinar se o item *e* é verdadeiro ou falso. Logo, traçando essa função, ele poderá indicar se a área de cada triângulo tende ao infinito ou não. Assim, nossa OM desse item pertence ao T1.

Tabela 18.

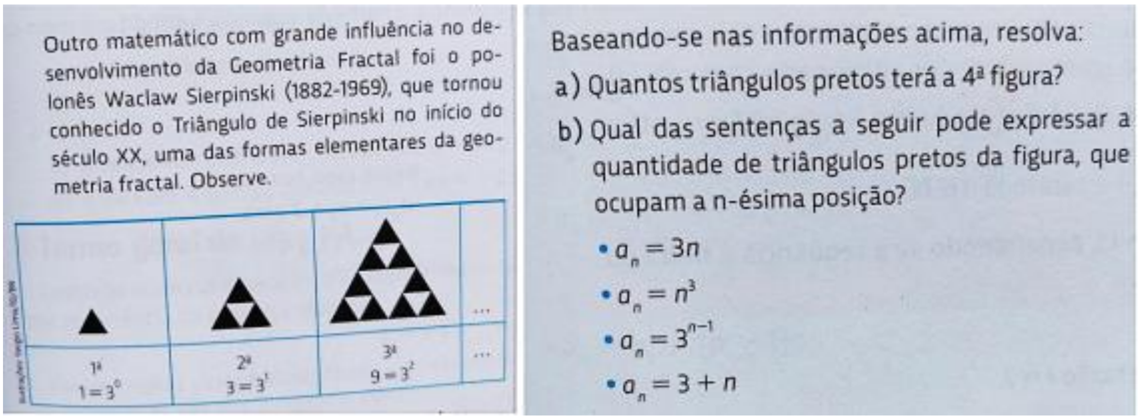
Tipo de Tarefa 1 (Pescini, 2021, p. 84)

Tipo de Tarefa	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
Técnica	τ1a*: Identificar o padrão figural do fractal. τ1b**: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. τ1c*: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal. τ1d*: Substituir pelas etapas desejadas. τ1e: Determinar as áreas das subfiguras desejadas. τ1f: Somar as áreas das subfiguras do fractal.
Tecnologia	θ1: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ1: Geometrias e Funções.

Diante do desenvolvimento desses itens, o aluno chegará à alternativa correta dessa atividade. Ressaltamos que essas Tarefas englobaram, em uma única atividade, três organizações matemáticas diferentes, explorando diferentes técnicas e conhecimentos fractais de Geometrias e Funções.

Em vista do que foi exposto, constatamos a presença de apenas uma atividade que explorou os conhecimentos fractais durante a leitura do LD1.2, sendo apresentada na seção destinada a questões de vestibulares e ENEM, localizada ao final dos capítulos dessa instituição. Por se tratar de uma atividade, identificamos a variação de três Tipos de Tarefas presentes, o que nos ofereceu subsídios para considerar escasso o contato e a exploração da teoria em questão, uma vez que as seções destinadas a vestibulares podem não ser exploradas durante as aulas, o que eximiria os alunos do contato com a Geometria dos Fractais nessa instituição.

O LD1.3 propõe o primeiro contato com a Geometria dos Fractais em uma Atividade Proposta presente no capítulo oito do livro, referente ao ensino de *Sequências e Progressões*. O enunciado da Tarefa apresenta brevemente aspectos gerais da Geometria dos Fractais, como o significado do termo fractais, seu precursor e avanços dessa teoria, e aponta exemplos naturais e computacionais de objetos fractais. Uma figura de um exemplo computacional é exibida e, logo em seguida, se apresenta o Triângulo de Sierpinski e seu criador, com três iterações desse objeto fractal expostas na sequência. Então, são sugeridas duas Tarefas relacionadas ao fractal apresentado, como podemos observar na figura a seguir.


Outro matemático com grande influência no desenvolvimento da Geometria Fractal foi o polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), que tornou conhecido o Triângulo de Sierpinski no início do século XX, uma das formas elementares da geometria fractal. Observe.

1ª $1=3^0$	2ª $3=3^1$	3ª $9=3^2$	...

Baseando-se nas informações acima, resolva:

a) Quantos triângulos pretos terá a 4ª figura?

b) Qual das sentenças a seguir pode expressar a quantidade de triângulos pretos da figura, que ocupam a n-ésima posição?

- $a_n = 3n$
- $a_n = n^3$
- $a_n = 3^{n-1}$
- $a_n = 3 + n$

Figura 27.

Atividade Proposta 7 (Chavante & Prestes, 2016, p. 175)

Em relação ao item *a*, a tabela seguinte contempla sua OM.

Tabela 19.

Tipo de Tarefa 2 (Pescini, 2021, p. 85)

Tipo de Tarefa	T2: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
Técnica	τ2a: Identificar o padrão figural. τ2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ2c: Identificar a progressão geométrica do fractal. τ2d: Escrever a expressão numérica que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
Tecnologia	θ2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ2: Geometrias e Funções.

A tabela apresentada em seguida abrange a OM referente ao item *b* da Tarefa supracitada.

Tabela 20.

Tipo de Tarefa 3 (Pescini, 2021, p. 86)

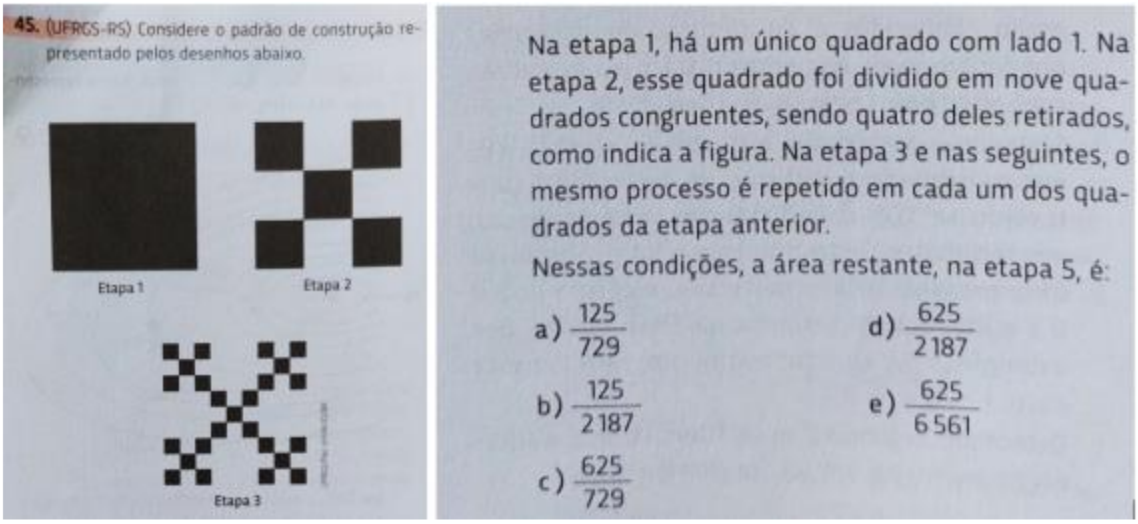
Tipo de Tarefa	T3: Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal.
Técnica	τ3a: Identificar o padrão figural do fractal. τ3b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ3c: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. τ3d: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
Tecnologia	θ3: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ3: Geometrias e Funções.

Podemos observar que o item *a* solicita que o aluno descubra quantas subfiguras pertencem a um nível específico – neste caso, o nível quatro. Já o item *b* da atividade pede que o discente desenvolva um raciocínio que envolva generalização, almejando a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal desejado.

Esse primeiro exemplo mostra como a Geometria dos Fractais pode ser trabalhada não somente com fim em si mesma, mas também como um meio de trabalhar outros conteúdos matemáticos, podendo estar relacionada e interligada a outras teorias.

Seguindo a ideia de relação entre a Geometria dos Fractais com outros conteúdos matemáticos, é apresentada, ainda nas Atividades Propostas, na parte destinada ao estudo de progressão geométrica, uma sugestão dos autores para uma Tarefa que implicitamente recorre ao conteúdo de Geometria dos Fractais e que foi proposta em um concurso vestibular. Essa Tarefa considera um padrão de construção figural apresentado em três etapas e descreve, em seu enunciado, como essas figuras foram construídas.

A pergunta que a norteia diz respeito à área da figura na etapa cinco, conforme a Figura 28 a seguir.


45. (UFRGS-RS) Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.

Etapa 1 Etapa 2

Etapa 3

Na etapa 1, há um único quadrado com lado 1. Na etapa 2, esse quadrado foi dividido em nove quadrados congruentes, sendo quatro deles retirados, como indica a figura. Na etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior.

Nessas condições, a área restante, na etapa 5, é:

a) $\frac{125}{729}$ d) $\frac{625}{2187}$

b) $\frac{125}{2187}$ e) $\frac{625}{6561}$

c) $\frac{625}{729}$

Figura 28.

Atividade Proposta 8 (Chavante & Prestes, 2016, p. 192)

Essa Tarefa consistiu em determinar a área restante na etapa 5, ao retirar quadradinhos sequencialmente, a depender da etapa da figura. Assim, estabelecemos a OM a seguir.

Tabela 21.

Tipo de Tarefa 1 (Pescini, 2021, p. 87)

Tipo de Tarefa	T1: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
Técnica	τ1a*: Identificar o padrão figural do fractal. τ1b**: Identificar uma relação numérica entre a quantidade de quadrados e os níveis. τ1c*: Escrever algebricamente a função que corresponde ao padrão de iteração do fractal. τ1d*: Substituir pelas etapas desejadas. τ1e: Determinar as áreas das subfiguras desejadas. τ1f: Somar as áreas das subfiguras do fractal.
Tecnologia	θ1: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ1: Geometrias e Funções.

Ainda no âmbito do conteúdo de progressão geométrica, os autores voltam a sugerir a Geometria dos Fractais em uma de suas atividades, novamente de forma implícita. A Tarefa referida faz menção a uma sequência finita de figuras formadas por pontos e apresenta a ilustração de três etapas em seu enunciado. Apresentamos, a seguir, a ilustração da Tarefa e sua OM detalhada.

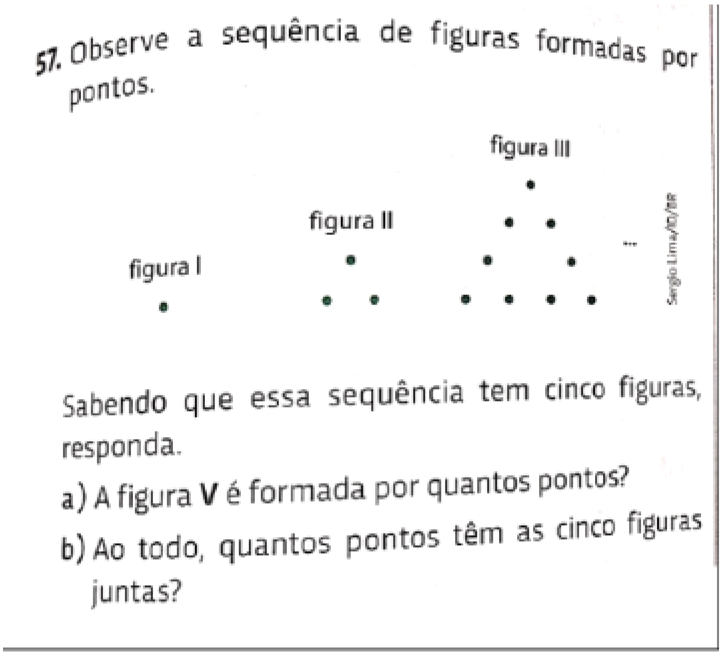


Figura 29.

Atividade Proposta 9 (Chavante & Prestes, 2016, p. 199)

Ao realizar a Organização Matemática dessa Tarefa, percebemos que o item *a* se enquadra no Tipo de Tarefa 2.

Tabela 22.

Tipo de Tarefa 2 (Pescini, 2021, p. 88)

Tipo de Tarefa	T2: Determinar a generalização algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório do fractal.
Técnica	τ2a: Identificar o padrão figural. τ2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ2c: Identificar a progressão geométrica do fractal. τ2d: Escrever a expressão numérica que corresponde ao padrão de iteração do fractal.
Tecnologia	θ2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ2: Geometrias e Funções.

Com relação ao item *b* dessa Tarefa, o autor do LD1.3 almeja que o estudante utilize a soma dos termos de uma progressão geométrica finita para responder à pergunta. Embora esse Tipo de Tarefa seja muito semelhante ao anterior, ele traz diferenças, uma vez que solicita a soma das subfiguras até o nível cinco. Logo, temos:

Tabela 23.

Tipo de Tarefa 2 (Pescini, 2021, p. 88-89)

Tipo de Tarefa	T2: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
Técnica	τ2a: Identificar o padrão figural. τ2b: Escrever numericamente a quantidade de quadrados em cada nível. τ2c: Identificar a progressão geométrica do fractal. τ2d**: Escrever algebricamente a função que corresponde a soma dos termos de uma progressão geométrica e substituir pela etapa desejada.
Tecnologia	θ2: Compreensão de complexidade infinita do fractal.
Teoria	Θ2: Geometrias e Funções.

Dentre as sete Tarefas propostas no LD1.3 que envolveram o conteúdo Geometria dos Fractais, observamos a presença de quatro Tipos de Tarefas distintos. Evidenciamos que todas as Tarefas analisadas se apresentam na seção destinada ao ensino de progressão geométrica. Sendo assim, as teorias mobilizadas em todos os Tipos de Tarefas dizem respeito ao ensino de Geometrias e Funções. Tão somente a Parte Curso está deslocada do capítulo de Sequências e Progressões. Entretanto, o exemplo citado sobre perímetro e comprimento da curva de Koch faz menção ao ensino de PG.

Embora o LD1.3 tenha apresentado a Parte Curso sobre a Geometria dos Fractais, enquanto o LD1.1 e LD1.2 não contemplaram esse componente, acreditamos que a instituição LD1.3, de forma geral, poderia ter abrangido maiores informações sobre essa teoria, o que oportunizaria melhores conhecimentos e explorações fractais ao aluno.

Isto posto, destacamos que as explorações sobre o ensino da Geometria dos Fractais nessa instituição não se apresentam através de seu próprio conteúdo, mas por intermédio e objetivo de exploração de outro conteúdo matemático.

De modo geral, constatamos a presença unicamente das Atividades Propostas no LD1.1 e no LD1.2, ao passo que o LD1.3 apresentou, além das Atividades Propostas, a Parte Curso e Atividades Resolvidas referentes ao estudo da Geometria dos Fractais.

A seguir, apresentamos nossas considerações finais a respeito desta investigação, em que buscamos destacar os principais aspectos identificados acerca da proposta de ensino do conteúdo Geometria dos Fractais ao longo das coleções analisadas.

Considerações finais

Com o intuito de responder nossa questão de pesquisa *O conteúdo Geometria dos Fractais pode ser encontrado nas coleções de livros didáticos adotados para o Ensino Médio no estado do Paraná? Se sim, quais são as propostas de ensino para este conteúdo,* nos concentramos nas coleções mais adotadas pelas cinco cidades mais populosas do Estado do Paraná. As análises realizadas sobre essas coleções revelam aspectos significativos sobre o ensino proposto. Apresentamos, neste momento, características observadas sobre o conteúdo Geometria dos Fractais.

Ressaltamos que a Teoria Antropológica do Didático, utilizada neste trabalho como teoria e como metodologia, foi fundamental para a construção e compreensão da proposta de ensino em discussão. As noções das organizações matemáticas e das organizações didáticas ofereceram subsídios para compreender nossos objetos de pesquisa, que se resumem em identificar e conhecer as metodologias utilizadas sobre a teoria fractal presentes nas instituições LD, além de elencar os Quartetos Praxeológicos e momentos didáticos para esse assunto.

Com base nas análises realizadas, afirmamos que há dados plausíveis para afirmar que a razão de ser da Geometria dos Fractais frente a essas instituições se refere a uma teoria desenvolvida como mediadora na abordagem de outros conteúdos matemáticos. Identificamos que essa geometria se apresenta como um meio, não como um fim em si mesma, o que nos possibilita concluir que ela ocupa lugar de ferramenta nessas instituições.

Embora a Base Nacional Comum Curricular - BNCC não indique o estudo do conteúdo de geometrias não euclidianas no contexto da Educação Básica, nossa pesquisa possibilitou observar que outras unidades temáticas, tais como álgebra, funções e números, são abordadas durante as propostas. Sendo assim, há possibilidade de trabalhar habilidades indicadas na BNCC com propostas embasadas na Geometria dos Fractais. Vale ressaltar que as DCE (Paraná, 2008), conforme exposto anteriormente, recomendam a abordagem da Geometria dos Fractais em sala de aula, assim como os PCN (Brasil, 1998) indicavam durante a elaboração das Diretrizes do Estado do Paraná.

Frente ao que as DCE (Paraná, 2008) apontam, observamos que os documentos oficiais e as abordagens presentes na instituição livro didático investigada conversam de tal modo que, ao tomar conhecimento das Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná com relação ao que elas indicam para o ensino de Geometria dos Fractais, encontramos uma valorização à vista da articulação dos conhecimentos geométricos com outros conteúdos matemáticos, como a aritmética e a álgebra.

Da mesma forma, as Diretrizes Curriculares do Paraná para o ensino dessa geometria priorizam a abordagem de definições, enunciados e demonstrações dos resultados, os quais são apontados como inerentes ao conhecimento geométrico. Nesse sentido, as abordagens desses aspectos são apresentadas de forma sucinta nos livros didáticos analisados em que encontramos tal assunto.

As Tarefas identificadas nos livros que abordam conhecimentos do conteúdo Geometria dos Fractais, em sua maioria, foram localizadas em meio ao capítulo destinado ao ensino de Progressão Geométrica. Vale ressaltar que as Tarefas investigadas se enquadram no quesito atividades do contexto escolar, de aplicações de conceitos matemáticos diretamente, não se fazendo presente nenhuma Tarefa do contexto extraescolar.

Com relação ao nível de conteúdo encontrado sobre a Geometria dos Fractais, podemos apontar que ele está presente de forma abreviada. Porém, ao pensar em sua presença perante organizações praxeológicas, as instituições abordam e dialogam com os requisitos sugeridos pelos documentos oficiais – neste caso, as DCE –, mas de forma sucinta.

Assim como sugerido nas DCE (Paraná, 2008, p. 172), os Tipos de Tarefa encontrados apresentam explorações dos fractais, como o floco de neve e a curva de Koch, e triângulo e tapete de Sierpinski. Além disso, há valorização no tocante às “definições, às abordagens de enunciados e às demonstrações de seus resultados”, como sugerido nas Diretrizes.

Perante as considerações feitas, indagações surgem: os professores encontrarão subsídios suficientes para ensinarem a Geometria dos Fractais, com base nas suas características, apoiando-se somente no livro didático? Conseguirão superar a insegurança de trabalhar esse conteúdo se não tiverem conhecimentos *a priori* sobre ele?

Certamente essas questões geram muitas discussões, e acreditamos que mudanças podem ocorrer. Uma delas pode estar relacionada aos professores recém-formados, que poderão ter estudado, em suas grades curriculares, assuntos referentes às geometrias não euclidianas, possibilitando uma compreensão para a abordagem em sala de aula. Por outro lado, com relação aos professores atuantes há certo tempo, é necessário resgatar o contexto histórico, matemático e filosófico dessa Geometria por meio da formação continuada da sua prática a fim de que mudanças possam ocorrer, uma vez que somente o livro didático não fornece material suficiente para abordar esse conteúdo em sala de aula.

Acreditamos que a leitura deste trabalho, que foi proveniente de muitas inquietações, possa suscitar dúvidas aos leitores e resultar em questões norteadoras para futuras pesquisas. Como exemplo, podemos elencar: de que forma o conteúdo Geometria dos Fractais se faz presente na prática dos professores em sala de aula? Quais materiais de apoio o professor utiliza para abordar esse assunto além do livro didático?

Esperamos que esta discussão possa oferecer uma contribuição para estudos e investigações relacionados ao conteúdo Geometria dos Fractais e também para a visibilidade da organização praxeológica para a aprendizagem desse tema.

Declaração de Disponibilidade de Dados

Os dados que suportam os resultados deste estudo estão disponíveis abertamente em Figshare através do DOI https://doi.org/10.6084/m9.figshare.21719939.v1. Esses dados foram derivados dos seguintes recursos disponíveis em domínio público: http://biblioteca.unespar.edu.br:8080/pergamumweb/vinculos/000096/00009660.pdf.

Declaração de contribuição dos autores

O manuscrito em questão foi desenvolvido a partir da dissertação de mestrado de Ana Eliza Pescini, sob orientação de Mariana Moran. Todas as pessoas que atendem a critérios de autoria de artigo são listadas como autores, e todos os autores estão suficientemente no trabalho para assumir responsabilidade pelo seu conteúdo, incluindo participação no conceito, análise, redação ou revisão do manuscrito, conforme detalhamento a seguir:

Concepção e desenho do estudo: Ana Eliza Pescini, Luan Padilha e Mariana Moran;

Revisão da literatura: Ana Eliza Pescini, Luan Padilha e Mariana Moran;

Produção e coleta dos dados: Ana Eliza Pescini e Luan Padilha;

Análise e interpretação de dados: Ana Eliza Pescini, Luan Padilha e Mariana Moran;

Elaboração do manuscrito: Ana Eliza Pescini, Luan Padilha e Mariana Moran;

Revisão intelectual do manuscrito: Mariana Moran;

Aprovação final da versão a ser submetida à revista: Ana Eliza Pescini, Luan Padilha e Mariana Moran.

Agradecimentos

Agradecemos ao revisor Leonardo Spanghero, que fez a revisão e tradução completa deste artigo, indicando modificações na escrita que enriqueceram muito o conteúdo do texto.

Com o intuito de responder à nossa questão de pesquisa, um agradecimento especial à Capes e ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM da Universidade Estadual do Paraná, campi de Campo Mourão e União da Vitória, pelo apoio prestado à publicação considerando a revisão e tradução do artigo.

Referências

Barbosa, R. M. (2002). *Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula*. Autêntica.

Bittar, M. (2017). A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Zetetike*, 25 (3), p. 364–387. https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8648640

Chavante, E.& Prestes, D. (2016). *Quadrante Matemática*. Edições SM.

Chevallard, Y. & Bosch, M. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'estude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19 (1), p. 77–124. https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/

Chevallard, Y. (1999). L'Analyse de Des pratiques Enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques,* 19 (2), p. 221–266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Dante, L. R. (2017). *Matemática: contexto e aplicações*. Ática.

Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R. & Almeida, N. de. (2016). *Matemática Ciência e Aplicações*. Saraiva.

Kaspary, D. R. A. & Bittar, M. (2014). *Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental* [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul]. http://grupoddmat.pro.br/wp-content/uploads/2017/03/Disserta%C3%A7%C3%A3o.-2014.-ANJOS-D.-R.-K.-142f.pdf

Paraná. (2008). Secretária de Estado da Educação do Paraná. (2008). *Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática*.

Pescini, A. E. (2021). *Uma Análise Praxeológica da Geometria dos Fractais em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio* [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual do Paraná]. http://biblioteca.unespar.edu.br:8080/pergamumweb/vinculos/000096/00009660.pdf

Piccoli, L. A. P. (2006). *A construção de conceitos em matemática: uma proposta usando tecnologia de informação*. [Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática]. https://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/3513/1/383787.pdf

Salvador, J. A. (2012). Dobras, cortes, padrões e Geometria Fractal no ensino de Matemática. *Anais do I Simpósio de Matemática e Matemática Industrial* (pp. 134-188). Catalão: Departamento de Matemática. https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/631/o/anais_simmi_2009.pdf

Souza, J. R. & Garcia, J. da S. R. (2016). *Contato Matemática*. FTD.