EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
Qualis A1

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i3p322-343

Equações diofantinas lineares por meio da resolução de problemas: possibilidades para cursos de licenciatura em matemática

Linear diophantine equations through problem solving: possibilities for mathematics degree courses

Ecuaciones lineales diofánticas a través de la resolución de problemas: posibilidades para carreras de matemáticas

Équations diophantiennes linéaires par la résolution de problèmes : possibilités pour les cours de mathématiques

Andrei Luís Berres Hartmann[1]
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)
Doutorando[2] e mestre em educação matemática – PPGEM/UNESP
https://orcid.org/0000-0001-5240-7038

Lais Cristina Pereira da Silva[3]
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)
Doutoranda e mestra em educação matemática – PPGEM/UNESP
https://orcid.org/0000-0002-6796-9559

Rosane Rossato Binotto[4]
Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS)
Doutora em matemática - Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
https://orcid.org/0000-0001-9420-9312

Resumo

O estudo das equações diofantinas teve início a partir das proposições de Diofanto de Alexandria, atualmente sendo capaz de subsidiar a resolução de problemas em diversas áreas e o trabalho com números inteiros em diversos contextos. Assim, este tópico tem sido abordado em cursos de licenciatura em matemática, especialmente na disciplina Teoria dos Números. Ao considerarmos estes aspectos, objetivamos apresentar uma possibilidade de trabalho com equações diofantinas lineares por meio da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas (MEAAMaRP), adotada pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), para cursos de licenciatura em matemática, a partir de uma experiência realizada em uma aula-piloto de um programa de pós-graduação. Para

[1] andreiluis_spm@hotmail.com
[2] Com bolsa da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo 2021/11937-0.
[3] lais.cristinapds@gmail.com
[4] rosane.binotto@uffs.edu.br

tanto, seguimos o paradigma qualitativo de pesquisa e realizamos uma intervenção em uma disciplina de um programa de pós-graduação em educação matemática com características de um experimento de ensino. Seguimos as dez etapas propostas para resolver um problema segundo a MEAAMaRP e utilizamos a análise de conteúdo para a organização e tratamento dos dados, principalmente suas três principais fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados e interpretação. Pudemos constatar que os participantes se apropriaram do conceito de equações diofantinas lineares e realizaram inferências a partir do diálogo e tentativas de resolução dos problemas geradores. Assim, indicamos o trabalho com a resolução de problemas em cursos de licenciatura em matemática, já que é ele capaz de possibilitar ao estudante o desenvolvimento da autonomia e o trabalho em grupo, entre outros resultados.

Palavras-chave: Educação matemática, Teoria dos números, Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas.

Abstract

The study of Diophantine equations began from the propositions of Diophantus of Alexandria, currently supporting problem solving in several areas and working with integer numbers in several contexts. Thus, this topic has been addressed in undergraduate mathematics courses, especially in the Number Theory subject. When considering these aspects, we aim to present the possibility of working with linear Diophantine equations through the mathematics teaching-learning-assessment methodology through problem solving (MEAAMaRP), adopted by the Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas [Working Group and Studies in Problem Solving] (GTERP), for undergraduate mathematics courses, based on an experience carried out in a pilot class of a graduate program. To this end, we followed the qualitative research paradigm and carried out an intervention in a matter of a graduate program in mathematics education with characteristics of a teaching experiment. We followed the ten steps proposed to solve a problem according to the MEAAMaRP. We used content analysis to organize and treat the data, mainly its three main phases: pre-analysis, exploration of the material and treatment of the results and interpretation. We could see that the participants appropriated the concept of linear Diophantine equations, made inferences from the dialogue, and attempted to solve the generating problems. Thus, we indicate the work with problem solving in mathematics degree courses since it can enable the student to develop autonomy and group work, among other results.

Keywords: Mathematics education, Number theory, Teaching-learning-assessment of mathematics through problem solving.

Resumen

El estudio de las ecuaciones diofánticas se inició con las proposiciones de Diofanto de Alejandría, pudiendo actualmente apoyar la resolución de problemas en diferentes áreas y trabajar con números enteros en diferentes contextos. Así, este tema ha sido abordado en los Cursos de Licenciatura en Matemática, asociados a la disciplina de Teoría de Números. Al considerar estos aspectos, pretendemos presentar una posibilidad de trabajar con ecuaciones diofánticas lineales a través de la Metodología de Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación de las Matemáticas a través de la Resolución de Problemas (MEAMaRP) adoptada por el Grupo de Trabajo y Estudios en Resolución de Problemas (GTERP), para la Licenciatura Cursos en Matemáticas, a partir de una experiencia realizada en una clase piloto en un programa de posgrado. Para ello, seguimos el paradigma de la investigación cualitativa y realizamos una intervención en una disciplina de un Programa de Posgrado en Educación Matemática con características de experimento didáctico. Se siguieron los 10 pasos propuestos para resolver un problema según MEAAMaRP y se utilizaron técnicas de análisis de contenido para la organización y tratamiento de los datos, principalmente sus tres fases principales: preanálisis, exploración de materiales y tratamiento de resultados e interpretación. Pudimos ver que los participantes se apropiaron del concepto de ecuaciones diofánticas lineales e hicieron inferencias a partir del diálogo e intentaron resolver los problemas generadores. Así, indicamos el trabajo con Resolución de Problemas en los Cursos de Licenciatura en Matemáticas, ya que es capaz de posibilitar que el alumno desarrolle aspectos como la autonomía y el trabajo en grupo.

Palabras clave: Educación matemática, Teoría de los números, Enseñanza-aprendizaje-evaluación de las matemáticas a través de la resolución de problemas.

Résumé

L'étude des équations diophantiennes a commencé avec les propositions de Diophante d'Alexandrie, actuellement en mesure de soutenir la résolution de problèmes dans différents domaines et de travailler avec des nombres entiers dans différents contextes. Ainsi, ce sujet a été abordé dans les Cours de Licence de Mathématiques, associés à la discipline de la Théorie des Nombres. Lors de l'examen de ces aspects, nous visons à présenter une possibilité de travailler avec des équations diophantiennes linéaires à travers la méthodologie d'enseignement-apprentissage-évaluation des mathématiques par la résolution de problèmes (MEAAMaRP) adoptée par le groupe de travail et d'études en résolution de problèmes (GTERP), pour le diplôme Cours de Mathématiques, basés sur une expérience réalisée dans une classe pilote d'un programme d'études supérieures. Pour ce faire, nous avons suivi le paradigme de la recherche qualitative et réalisé une intervention dans une discipline d'un programme d'études supérieures en didactique des mathématiques présentant les caractéristiques d'une expérience d'enseignement. Les 10 étapes proposées pour résoudre un problème selon MEAAMaRP ont été suivies et des techniques d'analyse de contenu ont été utilisées pour l'organisation et le traitement des données, principalement ses trois phases principales : pré-analyse, exploration matérielle et traitement des résultats et interprétation. Nous avons pu voir que les participants se sont appropriés le concept d'équations diophantiennes linéaires et ont fait des inférences à partir du dialogue et des tentatives de résolution des problèmes générateurs. Ainsi, nous indiquons le travail avec la résolution de problèmes dans les cours de licence en mathématiques, car il est capable de permettre à l'étudiant de développer des aspects tels que l'autonomie et le travail de groupe.

Mots-clés : Enseignement des mathématiques, La théorie du nombre, Enseignement-apprentissage-évaluation des mathématiques par la résolution de problèmes.

De acordo com Boyer (1996), a obra mais famosa de Diofanto de Alexandria, pioneiro em equações diofantinas, é a *Arithmetica*, composta por treze livros, sendo caracterizada por um alto grau de habilidade matemática. Além disso, Diofanto teve forte influência no desenvolvimento das equações diofantinas, pois apresentava um modo de pensar diferente do dos gregos em termos de metodologia e tinha um estilo próprio de registro.

Segundo Eves (2004, p. 207), dentre os matemáticos significativos a estudarem a teoria dos números, Diofanto de Alexandria foi um dos pioneiros e dos mais importantes, isso porque

> teve uma importância enorme para o desenvolvimento da álgebra e uma grande influência sobre os europeus que posteriormente se dedicaram à teoria dos números. Tal como no caso de Herão, nada se sabe com certeza acerca da nacionalidade de Diofanto e da época exata em que viveu. Apesar de haver algumas evidências tênues de que possa ter sido contemporâneo de Herão, a maioria dos historiadores tende a situá-lo no século III de nossa era. Além do fato de que sua carreira floresceu em Alexandria, nada mais de certo se sabe sobre ele, embora se encontre na Antologia grega um epigrama que se propõe a dar alguns detalhes de sua vida.

Campell e Zazkis (2002) corroboram esta afirmação ao argumentar que, com o estudo das equações diofantinas, é possível resolver situações-problema aplicadas em diferentes áreas; trabalhar com os números inteiros em diversos contextos a fim de desenvolver estratégias; e ampliar o repertório de resolução de problemas sem necessariamente recorrer a algoritmos, favorecendo a leitura, interpretação dos enunciados e o desenvolvimento de conjecturas. Explicitam que, no processo de ensino e aprendizagem, é importante o uso da estratégia da tentativa e erro; a verificação de cálculos numéricos; e o uso de propriedades, com o intuito de possibilitar entendimento para o aluno acerca do objeto estudado.

A exemplo das ideias de Campell e Zazkis (2002), no curso de licenciatura em matemática do câmpus universitário em que este estudo foi realizado, há a disciplina de Teoria dos Números que considera o estudo de equações diofantinas. Dentre os objetivos da disciplina, consta que: “o conhecimento da Aritmética dos números inteiros é fundamental, tanto para o futuro professor de Matemática, na educação básica, como o futuro pesquisador nas diferentes áreas associadas à Matemática”, e que “o objetivo dessa disciplina é familiarizar os alunos com conteúdo relevante e com métodos típicos de abordagem de problemas neste contexto” (Programa de Ensino, 2018). Além disso, a ementa também inclui o estudo de divisibilidade; teorema fundamental da aritmética; congruências; restos quadráticos; equações diofantinas; e teorema de Fermat.

Neste contexto, Resende e Machado (2012) apresentam que, na formação de professores, a teoria elementar dos números deve considerar aspectos como seus tópicos que estão presentes na educação básica, suas relações com os números naturais e inteiros e suas ideias presentes na matemática escolar, além de ser uma oportunidade rica para a investigação matemática. Assim, dentre os aspectos destacados na metodologia de ensino prevista para a disciplina mencionada, que converge com os apontamentos de Resende e Machado (2012), há aulas que envolvem a resolução de problemas, que desenvolvem os conteúdos em torno da teoria dos números e que propiciam ao estudante uma reflexão sobre seu ensino e aprendizagem na educação básica.

Diante do explicitado, fomos mobilizados pela seguinte questão motivadora desta edição temática: de que maneira a teoria elementar dos números deve ser trabalhada na formação inicial de professores de matemática ou de pedagogos para que ela possa efetivamente subsidiar o trabalho docente na educação básica? E objetivamos apresentar uma possibilidade de trabalho de equações diofantinas lineares por meio da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas (MEAAMaRP), para cursos de licenciatura em matemática, a partir de uma experiência realizada em uma aula piloto em um programa de pós-graduação.

A resolução de problemas como linha de pesquisa, segundo as autoras Onuchic e Allevato (2011, p. 77), tem como pioneiro Polya[5]. Em seus estudos, Polya se preocupou "em descobrir como resolver problemas e como ensinar estratégias que levassem a enxergar caminhos para resolver problemas". Ou seja, o foco dessa abordagem se volta para como desenvolver a capacidade de pensar em procedimentos, técnicas ou métodos, de modo que o indivíduo seja capaz de explicar o sentido que isso faz para ele.

No entanto, para tal desenvolvimento, conforme as autoras, é fundamental que o professor assuma o papel de mediador, inserindo provocações em meio às atividades; promova discussão e envolvimento dos estudantes; bem como passe para o aluno maior responsabilidade pela aprendizagem que pretende atingir. Ao argumentar sobre o papel do professor, Polya (1995, p. v) corrobora essa afirmação:

> se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e

[5] George Polya (1887-1985) foi um matemático húngaro-estadunidense. Publicou o livro intitulado *How to solve it*, que recebeu no Brasil o curioso título *A arte de resolver problemas*.

> auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar esse objetivo.

Assim, o aluno deve assumir o papel de participante ativo; ter responsabilidade com seu processo de ensino e aprendizagem; e analisar seus próprios métodos e as soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Nesse processo de ensino e aprendizagem através da resolução de problemas, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), destaca a importância dessa metodologia ser trabalhada ao longo da jornada escolar. A BNCC traz, como pano de fundo para o ensino de matemática, o desenvolvimento de assuntos matemáticos por meio da resolução de problemas, pois

> convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "Resolver e Elaborar Problemas" em lugar de "Resolver Problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada. (Brasil, 2018, p. 536)

Diante disso, compreendemos que a resolução de problemas pode ser trabalhada em diferentes segmentos, uma vez que possibilita a contextualização e a interdisciplinaridade, promovendo o entrelaçamento entre situações vivenciadas e questões relacionadas às ferramentas matemáticas, dando condições para o aluno formular um pensar crítico-reflexivo mediante a construção da solução de uma situação-problema. No caso específico da formação de professores, o trabalho com a resolução de problemas e outras metodologias pode fazer com que o professor esteja mais bem preparado para sua futura realidade profissional (Onuchic & Morais, 2013).

Neste contexto, este trabalho é fruto dos estudos da disciplina de Tópicos Especiais em Educação Matemática: Resolução de Problemas - Ensino, Aprendizagem e Avaliação oferecida no ano de 2022 em um programa de pós-graduação em educação matemática da região sudeste do Brasil, que seguiu a MEAAMaRP adotada pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP). Este texto está organizado em mais três seções principais além desta, as quais envolvem os aspectos metodológicos, a apresentação e discussão dos dados e as considerações finais.

Percurso Metodológico

Ao considerarmos o objetivo deste artigo, enunciado na seção anterior, adotamos a abordagem qualitativa de pesquisa (Lüdke & André, 1986). Esse fator se justifica, já que nossa principal preocupação se volta ao processo de constituição de possibilidades de se ensinar tópicos da teoria de números a partir da resolução de problemas e como isso se manifesta nas atividades aplicadas, ou seja, nas etapas desenvolvidas ao longo da experiência realizada.

Para tanto, realizamos uma intervenção em uma disciplina de um programa de pós-graduação em educação matemática com características de um experimento de ensino, já que "trata-se de uma metodologia de pesquisa que busca explorar e explicar as atividades matemáticas dos estudantes" (Borba, Almeida & Gracias, 2019, p. 46). Ou seja, compreendemos essa experiência como uma possibilidade para avaliar uma nova abordagem de um tópico matemático da teoria dos números. Assim, desenvolvemos um plano de aula sobre equações diofantinas lineares, tópico abordado na disciplina de Teoria dos Números[6] no curso de licenciatura e bacharelado em matemática do câmpus universitário em que o programa de pós-graduação está vinculado. Na Tabela 1, apresentamos uma síntese desse plano de aula.

Tabela 1.

Plano de Aula (Elaborado pelos autores, 2022).

Disciplina	Teoria dos Números – licenciatura e bacharelado em matemática
Ministrantes/Professores	Os autores do artigo
Horas/aula	3 h/a
Semestre/Ano	2022/2
Conteúdo	Equações diofantinas lineares
Objetivo geral	Apresentar o conceito, os teoremas e os procedimentos de resolução das equações diofantinas lineares por meio da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas do GTERP.
Objetivos específicos	Revisar o procedimento de resolução do máximo divisor comum; rever o algoritmo da divisão de Euclides; compreender a definição de equação diofantina linear; entender a condição de existência de uma equação diofantina linear; saber utilizar os teoremas e resultados em diferentes situações e problemas.
Recursos auxiliares	Folhas de sulfite impressas com exemplos e exercícios.
Estratégia	Utilizar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas do GTERP para trabalhar o conceito de equações diofantinas lineares com alunos do ensino superior do curso de licenciatura em matemática.

[6] Essa disciplina já foi ministrada pelo primeiro autor do artigo.

Já que, no ambiente em que a intervenção foi realizada, tratava-se de discussões e estudos voltados à metodologia de resolução de problemas, optamos por elaborar o plano de aula a partir da utilização da MEAAMaRP. De acordo com as autoras Allevato e Onuchic (2021, p. 47), essa metodologia pode propulsionar as aprendizagens dos estudantes por meio da utilização do problema como "ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos".

Assim, as autoras sugerem que as atividades sejam desenvolvidas a partir de dez etapas, conforme Figura 1. Nesse processo, cabe principalmente ao professor propor um problema gerador ou aceitar um proposto pelos próprios estudantes (etapa 1) e, ao longo das etapas de resolução, auxiliar os grupos na compreensão dele, bem como observá-los e incentivá-los. Para Allevato e Onuchic (2021), a função do problema gerador é fazer com que o estudante seja capaz de construir um novo conteúdo ou conceito, em nosso caso, o de equações diofantinas lineares.

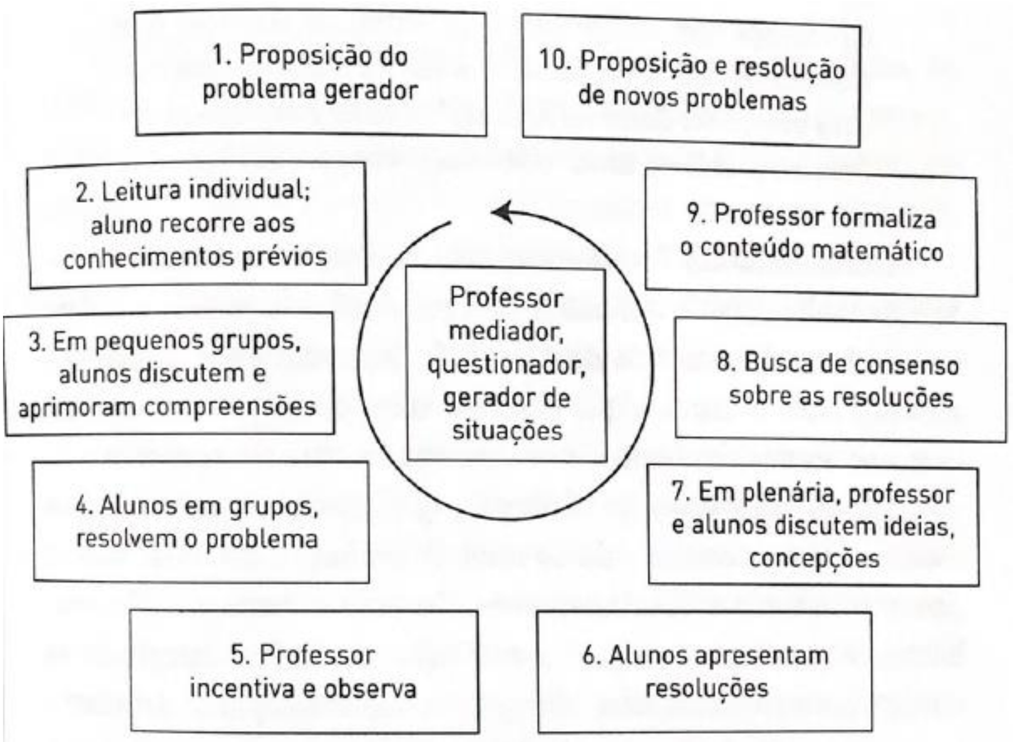

Figura 1.

Esquema da MEAAMaRP (Allevato & Onuchic, 2021, p. 51).

A segunda etapa é realizada após cada aluno ter recebido o problema e buscado compreendê-lo. Então, os estudantes reúnem-se em grupos para a realização da terceira e quartas etapas da metodologia. Neste instante é que o professor auxilia os grupos a compreenderem o problema e, também, a buscarem estratégias para resolvê-lo a partir de seus conhecimentos prévios, sem fornecer respostas prontas (etapa 5).

Dando prosseguimento, na sexta etapa cada grupo escolhe representantes para apresentarem suas resoluções na lousa, para posteriormente, em conjunto, buscar um consenso sobre o resultado correto (etapas 7 e 8). “Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo” (Allevato & Onuchic, 2021, p. 50).

Para finalizar, na nona etapa cabe ao professor apresentar formalmente, utilizando linguagem matemática adequada, os conceitos e procedimentos necessários para a resolução do problema gerador. E, na última etapa, novos problemas são propostos visando a analisar se os estudantes compreenderam o conteúdo matemático. Nesta etapa (10) da metodologia adotada pelo GTERP, Allevato e Onuchic (2021) sugerem que os próprios alunos possam propor os problemas, já que a BNCC (Brasil, 2018) sugere que os alunos elaborem problemas na educação básica.

Além destes aspectos, destacamos que o percurso metodológico adotado ao longo desta pesquisa considerou algumas técnicas da análise de conteúdo (Bardin, 2016), sobretudo suas três principais fases, quais sejam: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados e interpretação. Neste contexto, a pré-análise envolve o estudo da MEAAMaRP, além da revisão de conteúdos matemáticos abordados em disciplinas de Teoria de Números, que culminou na elaboração do plano de aula e proposta de trabalho.

Por sua vez, a exploração do material é caracterizada pela intervenção realizada, por meio da qual desenvolvemos as atividades previstas no plano de aula com estudantes de pós-graduação simulando uma aula do ensino superior. Por fim, a etapa de tratamento dos resultados e interpretação considera a discussão da proposta por meio do relato da experiência e da análise desta, fato este explicitado na próxima seção.

Apresentação e Análise dos dados

A aula iniciou com a apresentação da proposta a ser trabalhada com base na MEAAMaRP para a introdução de um conteúdo matemático, não sendo mencionado qual seria. Os cinco participantes dessa experiência de ensino receberam uma folha impressa com as dez etapas da MEAAMaRP, descritas na Figura 1, como orientação acerca dos procedimentos que seriam adotados na aula. Além disso, eles também receberam outra folha com o enunciado de três problemas, apresentados na Tabela 2, que seriam resolvidos pelos grupos formados, os quais foram selecionados pelos proponentes deste artigo (etapa 1 da metodologia).

Tabela 2.

Problemas. Elaborado pelos autores, adaptado de Braga & Carmo (2018)

1 – O cinema do Shopping de Rio Claro disponibiliza, nas quartas-feiras, ingressos com valores de R$10,00 pela manhã e R$12,00 pela tarde. De quantas maneiras podem ser vendidos os ingressos para que se tenha um saldo de R$200,00 ao final do dia? 2 – Edson é fã de música, reserva por mês R$125,00 para comprar CDs e DVDs. Em média, um CD custa R$10,00 e um DVD, R$16,00. Quais as possibilidades de aquisição dos itens, gastando exatamente R$125,00? 3 – Um fazendeiro deseja comprar filhotes de pato e de galinha, gastando um total de R$ 1770,00. Um filhote de pato custa R$31,00 e um de galinha custa R$21,00. Quantos de cada um dos dois tipos o fazendeiro poderá comprar?

Os problemas foram direcionados a eles com a orientação de que fossem lidos individualmente a fim de recorrerem aos conhecimentos prévios de matemática presentes (etapa 2 da metodologia). Em seguida, os participantes reuniram-se em dois grupos – grupo A e grupo B – para discutirem as hipóteses e estratégias para a resolução dos três problemas propostos, além de solucioná-los, o que corresponde às etapas 3 e 4 da metodologia (Figura 2). Nesse momento, professores circularam nos grupos observando e incentivando os participantes nas discussões e busca da solução dos problemas (etapa 5 da metodologia).

Figura 2.

Participantes resolvendo os problemas. Dados de pesquisa (2022)

Após resolverem os problemas nos grupos, os participantes compartilharam suas resoluções na lousa, descrevendo as estratégias adotadas e as soluções obtidas (etapa 6 da metodologia). Nesse momento, pudemos observar e compreender maneiras diferentes de se resolver um mesmo problema a partir da utilização dos conhecimentos prévios que eles possuíam. Ao compartilharem as soluções dos problemas na lousa, também houve a busca por consenso sobre as resoluções apresentadas, além da discussão de ideias e concepções matemáticas acerca do tema equações diofantinas (etapas 7 e 8 da metodologia). Na sequência, apresentamos e relatamos algumas das estratégias utilizadas pelos participantes.

Problema 1

As Figuras 3, 4 e 5, ilustram soluções apresentadas pelos grupos para o problema 1, enunciado no Tabela 2.

Soluções do grupo A

Esse grupo apresentou duas soluções para esse problema (Figuras 3 e 4). Na primeira solução, foi utilizada a estratégia de tentativa e erro para encontrar valores numéricos que satisfizessem o problema. Segundo as proponentes, os quatro valores numéricos apresentados são todas as soluções do problema. Deduziram que não havia mais soluções a partir da quantidade de ingressos para o turno da tarde, uma vez que que esse número teria que ser múltiplo de 5.

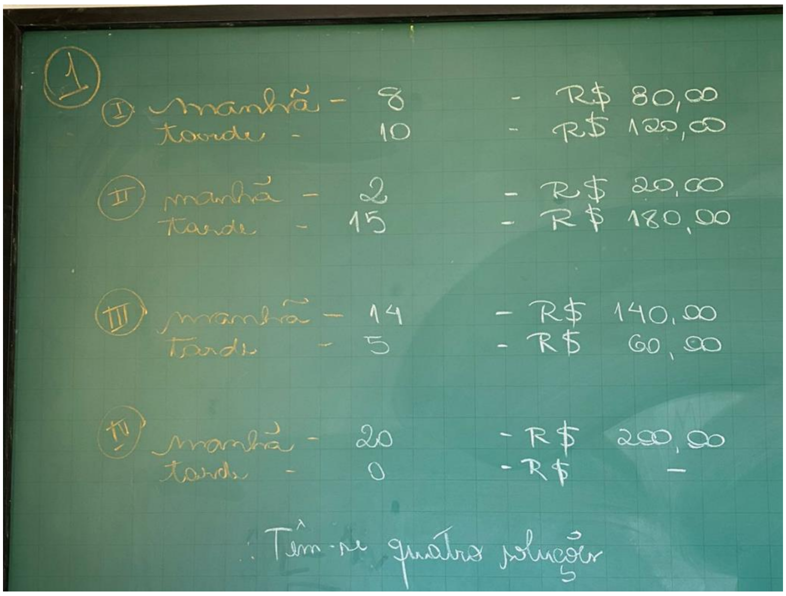

Figura 3.

Uma solução para o problema 1 dada pelo grupo A. Dados de pesquisa (2022)

Na outra solução, apresentada na Figura 4, há a generalização do problema por meio da equação $10x + 12y = 200$, sendo x a quantidade de ingressos da manhã e y a quantidade de ingressos da tarde. Isolaram o valor de x em função da variável y e concluíram que o valor de y tem que ser um múltiplo de 5. Todavia, apresentaram apenas uma solução numérica para o problema, encontrada por inspeção, e questionaram como encontrar as demais soluções utilizando essa equação.

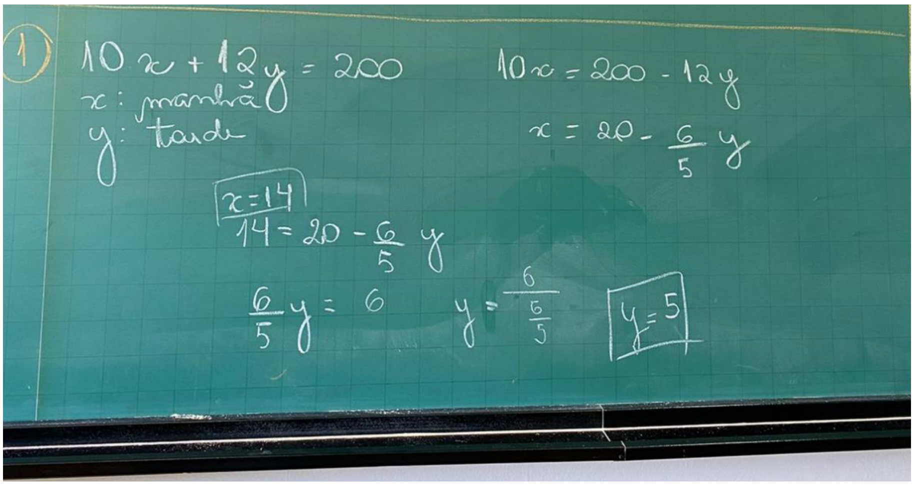

Figura 4.

Outra solução para o problema 1 dada pelo grupo A. Dados de pesquisa (2022)

Com relação à solução ilustrada na Figura 3, observamos que houve progressos no sentido de dar uma generalização para a solução do problema por meio de uma equação para modelá-lo.

Solução do grupo B

Na estratégia elaborada para a resolução do problema, os membros do grupo B observaram que a quantidade de ingressos para o turno da tarde teria que ser um múltiplo de 5. Assim, por meio de cálculo mental e tentativa e erro, encontraram quatro soluções inteiras possíveis, ilustradas na Figura 5.

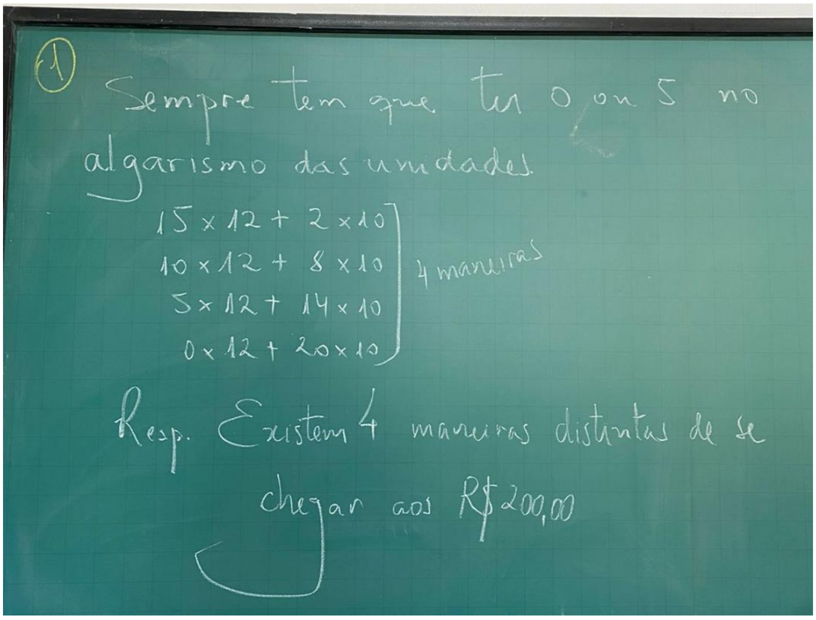

Figura 5.

Solução para o problema 1 dada pelo grupo B. Dados de pesquisa (2022)

Após a exposição das soluções para o problema 1 e discussões realizadas com a medição dos professores, algumas conclusões foram produzidas: a equação $10x + 12y = 200$, onde x representa a quantidade de ingressos da manhã e y representa a quantidade de ingressos da tarde, modela esse problema, sendo possível isolar uma das variáveis em função da outra; o máximo divisor comum (mdc) entre 12 e 10 é 2, sendo que 2 divide 200. Conjecturaram que a divisibilidade dos coeficientes da equação poderia ser uma condição para existência de solução.

Problema 2

As Figuras 6 e 7 apresentam as soluções dadas pelos grupos A e B, respectivamente, para o problema 2 enunciado no Tabela 2.

Solução do grupo A

Na solução apresentada pelo grupo A, as proponentes escreveram a equação geral que modela o problema dada por $10C + 16D = 125$, onde C representa a quantidade de CDs e D representa a quantidade de DVDs. Por tentativa e erro, não encontraram soluções para esse problema.

Concluíram que, para essa equação ter solução inteira e positiva, os coeficientes que acompanham C e D deveriam ser múltiplos de 5, o que não ocorre. Logo, esse problema não tem solução.

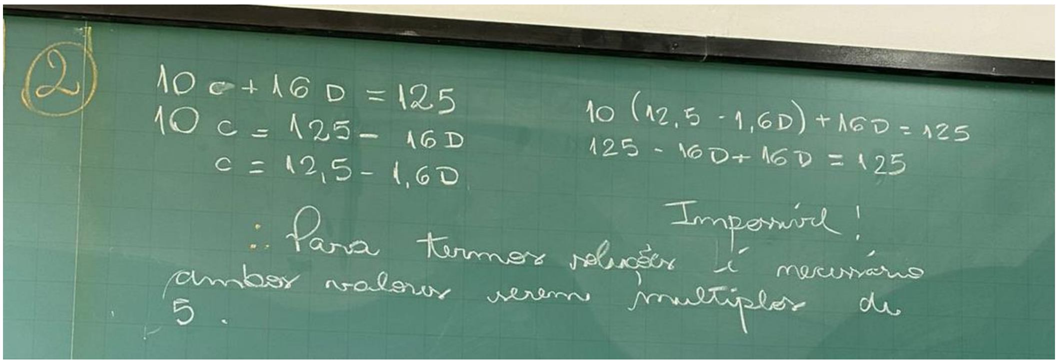

Figura 6.

Solução para o problema 2 dada pelo grupo A. Dados de pesquisa (2022)

Solução do grupo B

A solução apresentada por esse grupo (Figura 7) é semelhante àquela apresentada pelo grupo A. Os proponentes escreveram a equação geral que modela o problema, $10x + 16y = 125$, onde x representa a quantidade de CDs e y representa a quantidade de DVDs, e isolaram a variável x em função de y. Também observaram que o valor de y teria que ser múltiplo de 5, e não de 2, para que x seja um número inteiro positivo, o que não acontece nesse caso.

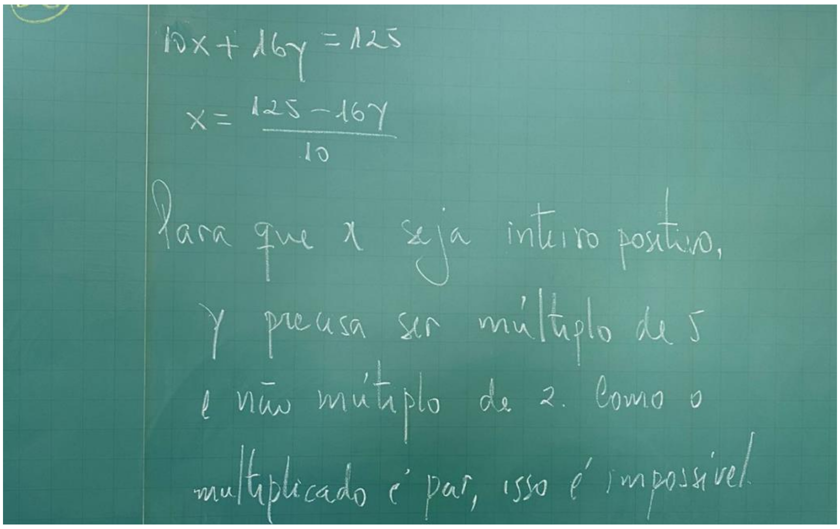

Figura 7.

Solução para o problema 2 dada pelo grupo B. Dados de pesquisa (2022)

Nas discussões e busca de consensos sobre o tema a partir dos dados produzidos, os participantes deduziram que o $mdc(10{,}16) = 2$ e que 2 não divide 125. Compararam esse dado com o obtido no problema 1, em que o $mdc(12{,}10) = 2$ e 2 divide 200. Foi conjecturado que uma equação dessa natureza possui soluções inteiras se o mdc dos coeficientes da equação dividir o seu termo independente.

Na sequência, passamos à apresentação e à discussão das soluções do problema 3, enunciado no Tabela 2.

Problema 3

Solução do grupo A

A solução para esse problema dada pelo grupo A e ilustrada na Figura 8, apresenta a equação que o modela e somente duas soluções encontradas por tentativa e erro. Na explanação, as integrantes do grupo observaram que, se o número de patos aumentasse, por exemplo, o número de galinhas teria que diminuir e vice-versa. Informaram que não investigaram mais soluções para o problema devido aos valores serem elevados para realizar multiplicações e somas.

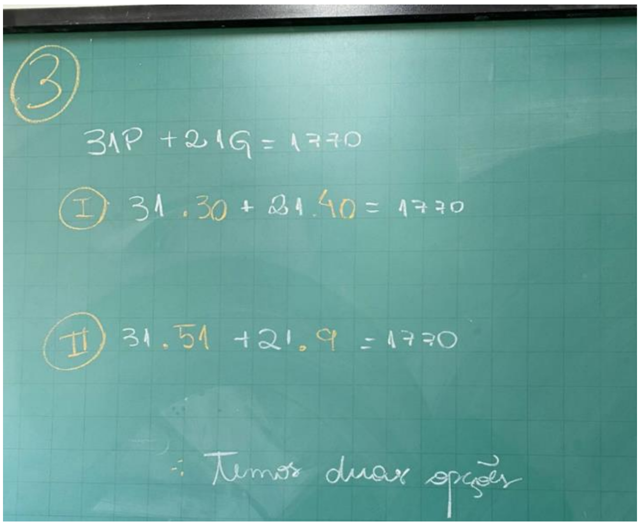

Figura 8.

Solução para o problema 3 dada pelo grupo A. Dados de pesquisa (2022)

Solução do grupo B

Na solução apresentada pelo grupo B, descrita na Figura 9, os proponentes apresentaram a equação que modela o problema, dada por $31x + 21y = 1770$, sendo x o número de filhotes de pato e y o de galinha, e isolaram a variável y em função de x. A partir da análise de condições para essas variáveis, o grupo apresentou somente uma solução para o problema.

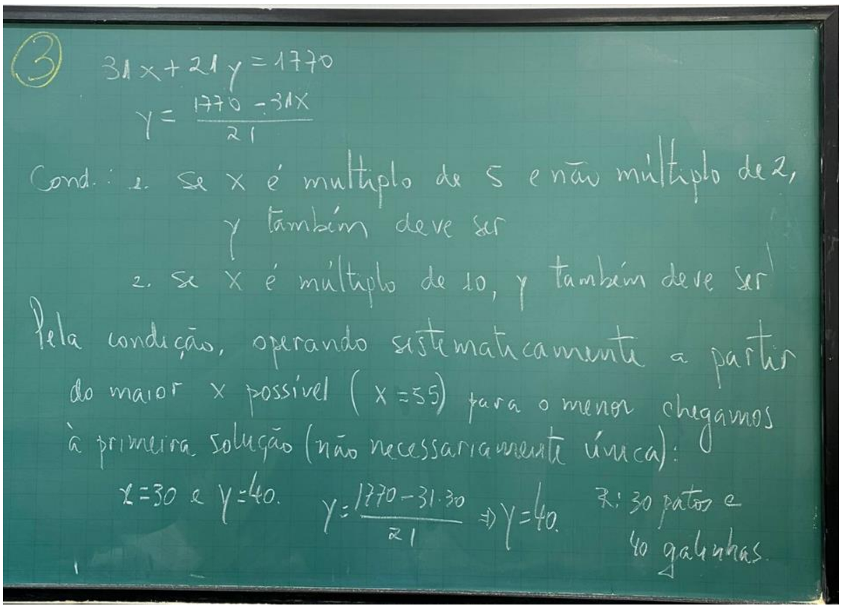

Figura 9.

Solução para o problema 3 dada pelo grupo B. Dados de pesquisa (2022)

Nas discussões sobre as soluções desse problema, que contaram com a mediação dos professores, os participantes observaram, nesse caso, que o $mdc(31,21) = 1$ e 1 divide 1770, sendo que essa seria uma condição para existência de soluções inteiras (positivas) para o problema.

Como quase todas as soluções apresentadas para os três problemas estavam incompletas, foi acordado com os participantes que seriam disponibilizadas as soluções corretas deles, sendo apresentada e discutida a solução do problema 3 após a sistematização do conteúdo.

A partir das estratégias adotadas – resolução, socialização e discussão – foram produzidos alguns consensos: (i) Esse tipo de problema envolve equações com duas variáveis, com solução no conjunto dos números inteiros; (ii) Uma condição para a existência de soluções para esse tipo de equação é a divisibilidade do máximo divisor comum dos coeficientes da equação pelo termo independente dessa equação.

Além disso, durante a discussão surgiram algumas questões sobre as soluções dos problemas propostos, tais como: (a) Como encontrar o número de soluções para esse tipo de equação? Esse número é finito ou infinito? (b) Existe algum método para encontrar todas as soluções?

Na sequência, formalizamos o conceito de equações diofantinas, iniciando com uma retomada do algoritmo da divisão de Euclides, correspondendo à etapa 9 da metodologia do GTERP.

Formalização dos conteúdos matemáticos

Nesta etapa apresentamos os principais conceitos acerca de equações diofantinas lineares de duas variáveis, tendo como base referências indicadas na bibliografia básica disponível na disciplina de Teoria dos Números (Programa de Ensino, 2018), quais sejam: Martinez et al. (2013); Graham, Knuth e Patashnik (1995); Niven e Zuckerman (1991); Vinogradov (1977).

Lema - algoritmo da divisão de Euclides

Sejam a e b dois números inteiros positivos e $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$, com r inteiro. Então $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.

Uma demonstração para esse lema pode ser encontrada em Martinez et al. (2013, p. 19).

Definição - equação diofantina linear

Uma equação diofantina linear em duas variáveis é uma expressão da forma $ax + by = c$, no qual $a, b, c \in Z$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e o par $(x, y) \in Z^2$, sendo Z o conjunto dos números inteiros. Chamamos de solução de uma equação diofantina a todo par $(x_0, y_0) \in Z^2$ que satisfaz a equação $ax_0 + by_0 = c$.

Exemplo 1: Resolva a equação diofantina $8x + 7y = 9$.

$(2, -1)$ é uma solução, pois $8 \,.\, 2 + 7 \,.\, -1 = 16 - 7 = 9$.

Teorema - condição de existência de solução

A equação diofantina linear $ax + by = c$ possui solução inteira se, e somente se, $mdc(a, b)$ divide c, isto é, $mdc(a, b)|c$.

Demonstração:

Sejam x_0 e y_0 soluções particulares da equação $ax + by = c$. Como o $mdc(a, b)$ divide a e b, ele também divide $ax_0 + by_0$, e, como (x_0, y_0) é uma solução dessa equação, então $ax_0 + by_0 = c$ e $mdc(a, b)$ divide c.

Por outro lado, suponha que o $mdc(a, b)$ divide c, então $c = mdc(a, b).\, k$, para algum k inteiro. Além disso, existem números inteiros x_0 e y_0, tais que $mdc(a, b) = ax_0 + by_0$. Multiplicando essa equação por k, obtemos $mdc(a, b).\, k = akx_0 + bky_0$, ou seja, $akx_0 + bky_0 = c$ e assim existe (kx_0, ky_0) em Z^2, que é solução da equação $ax + by = c$.

Assim, a equação diofantina $ax + by = c$ possui infinitas soluções se c for um múltiplo do maior divisor comum de a e b. Caso contrário, ela não possui solução.

Teorema - solução da equação $\boldsymbol{ax + by = c}$

Seja (x_0, y_0) uma solução particular de $ax + by = c$ em que a e b são números inteiros diferentes de zero. Então qualquer solução inteira dessa equação é dada por:

$$x = x_0 + bdk \quad \text{e} \quad y = y_0 - adk,$$

onde o $mdc(a, b) = d$ e k é um número inteiro qualquer.

Uma demonstração para esse lema pode ser encontrada em Braga e Carmo (2018, pp. 24-25).

Exemplo 2: Encontrar uma solução para a equação diofantina $32x + 9y = 7$.

Como $mdc(a, b) = (32, 9) = 1$ e $1 \mid 7$, a equação tem solução inteira. Pelo algoritmo de Euclides, temos as seguintes possibilidades:

$$32 = 9 \,.\, 3 + 5;\ 9 = 5 \,.\, 1 + 4;\ 5 = 4 \,.\, 1 + 1;\ 4 = 1 \,.\, 4 + 0.$$

Isolando o mdc e escrevendo-o em função de $a = 32$ e $b = 9$, a partir dos testes das divisões euclidianas, obtemos:

$$1 = 5 - 4 \,.\, 1;$$

$$1 = 5 - (9 - 5 \,.\, 1) \,.\, 1;$$

$$1 = 5 - 9 \,.\, 1 + 5 \,.\, 1;$$

$$1 = 5 \,.\, 2 - 9 \,.\, 1;$$

$$1 = (32 - 9 \,.\, 3) \,.\, 2 - 9 \,.\, 1;$$

$$1 = 32 \,.\, 2 - 9 \,.\, 7.$$

Assim, encontramos uma combinação linear para 32 e 9, tal que

$$32\,.\,2\ +\ 9\,.\,(-\,7)\ =\ 1.$$

Multiplicando essa solução particular por 7 obtemos $32\,.\,14\ +\ 9\,.\,(-\,49)\ =\ 7$.

Logo, (14, - 49) é solução trivial da equação dada. A solução geral é da forma:

$$x = 14 + 9k \text{ e } y = -49 - 32k, \text{ onde } k \in Z.$$

Após a formalização desses conteúdos, discutimos a solução do problema 3 a partir da utilização da técnica apresentada no Exemplo 2. De modo resumido, a solução para esse problema é dada por: $31x + 21y = 1$, que é a equação diofantina que modela o problema, com o $mdc(31, 21) = 1$ e 1 divide 1770. Então o problema possui solução, sendo uma delas dada por $x_0 = 30$ e $y_0 = 40$. As demais soluções são da forma $x = 30 + 21k$ e $y = 40 - 31k$, com k inteiro. Nesse caso, como x e y têm que ser inteiros positivos, então as possibilidades são $k = -1, 0, 1$, resultando nos respectivos pares de soluções $(9, 71)$, $(30, 40)$ e $(51, 9)$.

Consideramos pertinente enfatizar que, embora em um primeiro instante os três problemas propostos e descritos no Tabela 2 apresentem semelhanças, cada um deles envolve estratégias diferentes de resolução. As soluções do problema 1 podem ser encontradas por tentativa e erro, o que dificilmente acontece no problema 3, o que observamos ao longo da apresentação das resoluções (etapa 6) e plenária (etapa 7). Além disso, o problema 2 proposto não possui solução.

Por fim, mas não menos importante, entregamos aos participantes uma lista de exercícios para fixar os conceitos estudados. Ou seja, a proposição e resolução de novos problemas, última etapa da metodologia do GTERP.

Pudemos observar semelhanças e divergências entre a experiência realizada e o estudo de Mendes, Pereira e Proença (2020). Estes autores indicaram quatro fragilidades do trabalho com a resolução de problemas na formação de professores de matemática, quais sejam: (i) dificuldades quanto à falta de conhecimento sobre o conteúdo matemático da educação básica pelos licenciandos; (ii) dificuldades apresentadas pelos licenciandos em comunicar suas ideias a respeito do conteúdo matemático trabalhado; (iii) dificuldade no entendimento dos problemas pelos estudantes; e, (iv) dificuldades relativas ao tempo para a realização das atividades pelos licenciandos e ao desenvolvimento da abordagem de ensino.

Ao observarmos essas quatro fragilidades e a experiência realizada por nós, indicamos que os discentes de pós-graduação em educação matemática participantes do estudo, e em sua maioria licenciados em matemática, apresentavam conhecimentos acerca dos conteúdos da educação básica e conseguiram comunicar suas ideias na plenária. Porém, evidenciamos o terceiro e quarto pontos de Mendes, Pereira e Proença (2020), casos esses exemplificados pela dificuldade inicial dos discentes em observar diferenças entre os três problemas propostos (veja Tabela 2) e a própria realização das atividades.

Considerações Finais

Neste artigo, tivemos como objetivo apresentar uma possibilidade de trabalho de equações diofantinas lineares por meio da MEAAMaRP, em cursos de licenciatura em matemática, a partir de uma experiência realizada em uma aula-piloto em um programa de pós-graduação. Para tanto, consideramos uma intervenção em uma disciplina de um programa de pós-graduação em educação matemática com características de um experimento de ensino.

Consideramos esse experimento relevante, pois a formação de professores, conforme aponta Tardif (2018), contempla o somatório de saberes disciplinares, saberes profissionais, saberes curriculares e saberes experienciais. Os saberes disciplinares, profissionais e curriculares são produzidos no âmbito acadêmico, e os saberes experienciais são produzidos pelos professores na sua própria prática pedagógica nas escolas. Neste sentido, pesquisas e experiências realizadas no ambiente acadêmico que apresentam e discutem outras metodologias para o ensino e aprendizagem em matemática, como a resolução de problemas, por exemplo, tem potencial para subsidiar o trabalho docente na educação básica. Ademais, a experiência realizada simulou um ambiente de sala de aula, possibilitando pensarmos sobre os saberes experienciais também na formação dos professores.

Assim, no estudo realizado, os encontros foram permeados por discussões e aprendizados, focando em *como*[7] desenvolver estratégias e abordar assuntos matemáticos por meio de resolução de problemas com alunos de diferentes segmentos (ensino fundamental anos finais, ensino médio e graduação), utilizando a metodologia do GTERP. As discussões durante as aulas proporcionaram um ambiente de diálogo, prática e reflexão, isso porque foi possível (re)lembrar o modo pelo qual estudamos ao longo da jornada acadêmica e sobre como se dá o *ser professor*[8] em sala de aula. Além disso, entendemos o quão essa linha de pesquisa é potente e assume papel importante no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes.

Embora a maioria dos participantes da intervenção sejam graduados em matemática e, em algum momento de sua formação, tenham estudado equações diofantinas lineares, estes não se recordavam do tópico matemático abordado. Pudemos constatar que foram capazes de se

[7] Entendemos que este *como* indica possibilidades distintas de desenvolver um mesmo problema.
[8] *Ser professor* se refere aos modos de atuar em sala de aula.

apropriar do conceito e, ao longo das etapas 6 a 8 dessa metodologia, realizaram inferências a partir das observações realizadas e tentativas de resolução dos problemas geradores.

Destarte, destacamos que é importante trabalhar assuntos matemáticos baseados na metodologia de resolução de problema, uma vez que ela possibilita ao aluno: desenvolver autonomia e ampliar o repertório para expressar suas opiniões e estratégias; ampliar a sua capacidade de analisar, verificar e interpretar os resultados obtidos; compreender que os equívocos no decorrer da resolução fazem parte do processo de ensino e aprendizagem; e desenvolver habilidades de trabalhar em grupo. Assim, esperamos que a experiência proposta e apresentada ao longo deste texto possa inspirar professores atuantes em cursos de licenciatura em matemática a utilizarem os métodos de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas no ensino de tópicos da teoria dos números, sobretudo de equações diofantinas lineares.

Referências

Allevato, N. S. G., & Onuchic, L. R. (2021). Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In L. R. Onuchic, N. S. G. Allevato, F. C. H. Noguti & A. M. Justilin. *Resolução de problemas: teoria e prática* (pp. 37-57). Paco Editorial.

Bardin, L. (2016). *Análise de conteúdo*. São Paulo: Edições 70, 3ª reimp.

Borba, M. C., Almeida, H. R. F. L., & Gracias, T. A. S. (2019). *Pesquisa em ensino e sala de aula: diferentes vozes em uma investigação*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2 ed.

Boyer, C. B. (1996). *História da Matemática*. 2 ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher.

Braga, E. S., & Carmo, R. C. (2018). *Aplicações de Equações Diofantinas* [Trabalho de conclusão de curso de Licenciatura Plena em Matemática, Universidade Federal do Amapá].

Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricul*ar. Brasília, DF.

Campbell, S., & Zazkis, R. (2002). Toward Number Theory as a Conceptual Field. In: Campbell, S., Zazkis, R. (org.). *Learning and Teaching Number Theory* (pp. 1-14). London: Ablex Publishing.

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da Unicamp.

Graham, R, L., Knuth, D. E., & Patashnik, O. (1995). *Matemática Concreta*. LTC, São Paulo.

Lüdke, M., & André, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*, São Paulo: EPU.

Martinez, F. E. B., Moreira, C. G. T., Saldanha, N. T., & Tengan, E. (2013). *Teoria dos Números Um passeio com Primos e outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro*. IMPA.

Mendes, L. O. R., Pereira, A. L., & Proença, M. C. (2020). O que dizem as pesquisas sobre a Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática: um olhar sobre as fragilidades metodológicas. *Educação Matemática Pesquisa*. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 22(2), 721-750.

Niven, I. E., & Zuckerman, N. S. (1991). *An Introduction to the Theory of Numbers*. NY, John Wiley & Sons.

Onuchic, L. L. R, & Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98.

Onuchic, L. D. L. R., & Morais, R. S. (2013). Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 15(3), 671-691.

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas*. Rio de janeiro: Interciência.

Programa de Ensino. (2018). *Teoria dos Números*. Matemática (Licenciatura e Bacharelado). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro/SP.

Resende, M. R., & Machado, S. D. (2012). O ensino de matemática na licenciatura: a disciplina Teoria Elementar dos Números. *Educação Matemática Pesquisa*, 14(2), 257-278.

Tardif, M. (2018). *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Vozes.

Vinogradov, V. (1977). *Fundamentos de la teoria de los números*. MIR, Moscou.