EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i2p127-144

La educación del razonamiento probabilístico

Education of probabilistic reasoning

Educação do raciocínio probabilístico

Qualis A1

Formation au raisonnement probabiliste

Carmen Batanero [1]
Universidad de Granada
Tesis doctoral sobre procesos puntuales estocásticos y fiabilidad
https://orcid.org/0000-0002-4189-7139

María Magdalena Gea Serrano[2]
Universidad de Granada
https://orcid.org/0000-0002-5229-0121

Rocío Álvarez-Arroyo [3]
Universidad de Granada
PHD, Universidade de Granada, Espanha
https://orcid.org/0000-0002-3201-8542

Resumen

Aunque en los últimos años la enseñanza de la probabilidad se ha introducido en muchos países desde la educación primaria y se extiende a lo largo de todos los niveles educativos, la investigación nos informa de errores frecuentes al aplicarla en contextos cotidianos o en la toma de decisiones profesionales. En este trabajo se comienza analizando la cultura probabilística, como la base del razonamiento probabilístico que debiera adquirir toda persona. Seguidamente, se analizan las características y componentes básicos de dicho razonamiento y se describen algunos de los sesgos más frecuentes en el mismo. Se concluye con algunas sugerencias para desarrollar el razonamiento probabilístico de los estudiantes.

Palabras clave: Razonamiento probabilístico, Cultura probabilística, Componentes, Sesgos de razonamiento.

Abstract

Although in recent years the teaching of probability has been implemented in many countries from primary education onwards and extends throughout all educational levels, research reports

[1] batanero@ugr.es
[2] mmgea@ugr.es
[3] rocioaarroyo@ugr.es

frequent errors when applying probability in everyday contexts or in professional decision making. In this paper we begin by analysing the probabilistic literacy, as the basis of probabilistic reasoning that every citizen should have. Next, we analyse the essential characteristics and components of probabilistic reasoning and describe some common biases in probabilistic reasoning. We conclude with some suggestions for developing students' probabilistic reasoning.

Keywords: Probabilistic reasoning, Probabilistic literacy, Components, Reasoning biases.

Résumé

Bien que l'enseignement des probabilités ait été introduit ces dernières années dans de nombreux pays à partir de la primaire et qu'il s'étende à tous les niveaux de l'éducation, la recherche nous informe de fréquentes erreurs lors de son application dans des contextes quotidiens ou dans la prise de décisions professionnelles. Cet article commence par analyser la culture probabiliste, en tant que base du raisonnement probabiliste que chacun devrait acquérir. Ensuite, nous analysons les caractéristiques et les composantes de base de ce raisonnement et décrivons certains des biais les plus fréquents. Il se termine par quelques suggestions pour développer le raisonnement probabiliste des étudiants.

Mots-clés: Raisonnement probabiliste, Culture probabiliste, Composantes, Biais de raisonnement.

Resumo

Embora nos últimos anos o ensino da probabilidade tenha sido introduzido em muitos países já no ensino primário e se estenda a todos os níveis de ensino, a investigação nos informa de erros frequentes quando o aplica em contextos quotidianos ou na tomada de decisões profissionais. Este documento começa por analisar os componentes da cultura probabilística, que é a base do raciocínio probabilístico. Em seguida, analisa as características e componentes básicas do raciocínio probabilístico e descreve alguns dos vieses mais frequentes no raciocínio probabilístico. Conclui com algumas sugestões para desenvolver o raciocínio probabilístico dos estudantes.

Palavras-chave: Raciocínio probabilístico, Cultura probabilística, Componentes, Vieses de raciocínio.

La educación del razonamiento probabilístico

La enseñanza de la probabilidad se considera, en países como España, en la educación primaria, secundaria y bachillerato (MEFP, 2022a; 2022b; 2022c), y hay autores y organismos que sugieren iniciarla incluso en el periodo de educación infantil (Alsina, 2021; Batanero et al., 2021; CEMat, 2021). Una de las justificaciones de su estudio es que su comprensión es necesaria para el trabajo con la inferencia estadística, que se aplica en los campos más variados de la actividad humana. Adicionalmente, la simulación, basada en la probabilidad (Eichler y Vogel, 2014), se utiliza con frecuencia para ayudar a los estudiantes a comprender conceptos estadísticos avanzados (Bargagliotti et al., 2020). Otra razón de la importancia de la enseñanza de la probabilidad es que es una rama básica de la matemática, pues permite aplicar muchos de sus métodos debido a sus conexiones con la proporcionalidad, la combinatoria, las funciones y la lógica matemática (Van Dooren, 2014).

Un razonamiento probabilístico adecuado es indispensable en la vida diaria y el desempeño profesional (Gal, 2005), puesto que tiene un campo de aplicación mucho mayor que el pensamiento determinista. Una comprensión suficiente de la probabilidad y el riesgo asociado a la toma de decisiones bajo incertidumbre no sólo es necesaria en campos científicos como la física atómica, la genética o el estudio de la evolución, sino en cuestiones que afectan a cualquier ciudadano como, por ejemplo, la salud, las inversiones o los seguros (Van Dooren, 2014). Otra peculiaridad de la probabilidad es que la forma de validar sus proposiciones no es siempre deductiva, pues a veces se basa en el análisis de datos estadísticos; y es específica también la existencia de proposiciones (como la ley de los grandes números) dadas por medio de un enunciado probabilístico (Batanero, 2006). Una consecuencia directa de todo lo anterior es la necesidad de concienciar al profesorado de la importancia de promover este tipo de razonamiento en sus estudiantes, y prepararse adecuadamente en la didáctica de la probabilidad (Batanero y Díaz, 2012). Esta formación también se extiende a los profesores de ciencias, pues con frecuencia enseñan teorías científicas de carácter aleatorio (Méndez-Hincapié et al., 2022).

Conscientes de esta necesidad, el objetivo de este trabajo es presentar un modelo de componentes del razonamiento probabilístico que sirva de guía a los profesores para desarrollarlo en sus estudiantes. Comenzamos analizando las ideas que Gal (2005) propone para definir la cultura probabilística, que es la base necesaria del razonamiento probabilístico . En segundo lugar, desarrollamos nuestras ideas sobre los constituyentes del razonamiento probabilístico, sintetizando las propuestas de diferentes autores. Seguidamente se resumen los principales sesgos descritos en el razonamiento probabilístico, y se finaliza el trabajo con algunas sugerencias para impulsar la educación del mismo en los estudiantes.

Cultura probabilística

La presencia del azar, asociado a situaciones de incertidumbre y riesgo en diferentes ámbitos de la vida cotidiana, sugiere la necesidad de una cultura estadística y probabilística mínima del ciudadano. Un ejemplo se ha mostrado en la crisis ocasionada por la COVID-19, donde la percepción de la peligrosidad de la enfermedad durante sus primeras etapas llevó con frecuencia a sobreestimar la probabilidad de contagio (Sieroń, 2020). Por otro lado, no se previó la rapidez de su difusión a nivel mundial debido al *sesgo de crecimiento exponencial,* que consiste en asumir un crecimiento lineal en lugar de exponencial debido a la mayor familiaridad de las personas con fenómenos lineales (Stango y Ziman, 2009). Otras situaciones más habituales son la interpretación de un diagnóstico médico o la decisión de contratar un seguro de vida o accidentes. En estas circunstancias, es importante comprender la información probabilística relacionada con la situación para tomar decisiones que pueden afectar nuestra salud, economía, bienestar familiar o psicológico o colaborar con las decisiones tomadas por otros (Evans, 2015; Gigerenzer, 2002).

Expuesta la importancia de la cultura probabilística, resumimos a continuación los componentes que Gal (2005) atribuye a una persona probabilísticamente culta:

- Dicha persona debe *comprender las ideas fundamentales de probabilidad* en forma suficiente para poder aplicarlas, que según el autor son las de aleatoriedad, variabilidad, independencia, y predictibilidad/incertidumbre. La aleatoriedad, al igual que la probabilidad, se interpreta con diferentes significados, por lo que sería necesario diferenciarlos y relacionarlos (Batanero, 2015). La variabilidad está ligada a los resultados del experimento aleatorio, la variable aleatoria y el muestreo (Gal, 2005). La independencia es una hipótesis asumida en el muestreo aleatorio y en diferentes distribuciones de probabilidad, como la binomial, aunque en la práctica debe ser comprobada. La predictibilidad (juzgar si un suceso ocurrirá o no) va siempre acompañada de incertidumbre, pues incluso un suceso altamente probable puede no ocurrir.

- Se debe tener *competencia mínima para obtener probabilidades*. Es importante reconocer las situaciones en que es necesario utilizar la probabilidad y comprender el papel de la probabilidad en tales circunstancias. En situaciones sencillas, se deben identificar el tipo de probabilidades que intervienen (simples, compuestas o condicionales), la mejor forma de asignarlas (clásica, frecuencial o subjetiva), y calcularlas o estimarlas. Evans (2015) denomina *inteligencia sobre riesgos* a la habilidad para estimar correctamente las probabilidades que aparecen en situaciones cotidianas, e indica que su aplicación es constante en la vida actual. Ser preciso en la estimación de estas probabilidades proporciona a las personas argumentos poderosos, por lo que la inteligencia sobre riesgos ofrece un alto grado de certeza y se convierte en una habilidad cognitiva importante.

- Es necesario un *dominio del lenguaje del azar,* tanto de los términos matemáticos asociados (por ejemplo, dispersión o muestreo), como de los utilizados en la vida diaria y medios de comunicación. Dependiendo de la situación, la probabilidad se expresa mediante información numérica (proporciones, porcentaje, fracción o decimal), o cualitativamente con expresiones como “estoy casi seguro” o “no apostaría por ello”, que no se pueden trasladar a valor numérico de forma unívoca. Por otro lado, algunas expresiones de la vida diaria (como “independencia”) en matemáticas adquieren un significado más preciso.
- Es preciso un *conocimiento del contexto* de la situación que se analiza para interpretar la probabilidad en dicho contexto. Este conocimiento es importante tanto desde el punto de vista educativo como funcional, y se refiere a dos aspectos: (a) conocer cuál es el papel o el impacto del azar y la aleatoriedad en diferentes eventos y procesos que intervienen en la situación que se analiza y otras que nos rodean; y (b) identificar cuáles son las áreas o situaciones comunes donde las nociones del azar y la probabilidad pueden surgir en la vida de una persona.
- Se requiere una *capacidad para plantear preguntas críticas* al encontrar información referida a una situación aleatoria como, por ejemplo, si se incluyen o no todos los datos relevantes al problema que se expone, si en el contexto dado se puede aceptar la existencia de aleatoriedad, o si se conoce la base o población sobre la que se ha calculado la probabilidad. Otras cuestiones importantes serían la fiabilidad y objetividad de la fuente de información, el tamaño o sesgo de la muestra, si se trata de un estudio observacional o experimental y, en este caso, si se han controlado las variables principales que influyen en los resultados.

Gal (2005) también incluye en su modelo un grupo de disposiciones, que llevan a utilizar la probabilidad correctamente en la vida cotidiana:

- *Actitudes positivas*, como valorar la probabilidad como instrumento para trabajar en situaciones aleatorias, estar dispuesto a aprender probabilidad y sentir confianza en la propia capacidad de aprendizaje o de resolución de problemas.
- *Control de las creencias infundadas sobre el azar*. Fischbein (1975) señaló que la enseñanza formal no basta para desterrar todas las creencias e intuiciones incorrectas.

Kahneman et al. (1982) lideraron un amplio programa de investigación sobre el razonamiento probabilístico en la toma de decisiones, y sugirieron que el ser humano no es un estadístico intuitivo; por lo que debe ser consciente de que sus creencias e intuiciones sobre el contexto pueden influenciar sus interpretaciones. Explicaremos alguna de estas creencias y sesgos de razonamiento en una sección posterior.

- *Comprender los propios sentimientos personales sobre la incertidumbre*. Un ejemplo es la *aversión al riesgo* (Lilleholt, 2019), por la que se prefiere una opción segura o con alta probabilidad a otra menos probable, aunque el beneficio esperado de la segunda sea mayor. Se deben entender y tratar de modificar estos sentimientos cuando sean inadecuados; por ejemplo, en algunas situaciones relacionadas con la salud personal la aversión excesiva al riesgo puede entorpecer nuestras decisiones y tener consecuencias negativas.

Razonamiento probabilístico y sus componentes

Además de los elementos culturales descritos, una adecuada resolución de los problemas probabilísticos que se presentan en la vida cotidiana y profesional requiere del desarrollo del razonamiento probabilístico. Muchas de estas situaciones son problemas abiertos, en los que intervienen tanto factores matemáticos como extramatemáticos y tienen más de una solución. Por ejemplo, al tomar una decisión no siempre se decide por la alternativa que da la mayor esperanza matemática. Así, en los juegos de azar como la lotería, la esperanza matemática es negativa para los jugadores; sin embargo, la utilidad que para el jugador tendría conseguir un premio importante, aunque muy improbable, le compensa por la pérdida casi segura del coste de participar en el juego (Batanero, 2006).

El razonamiento matemático depende de la experiencia y el conocimiento de cada persona y puede tener diferentes grados de formalización, dependiendo del uso más o menos riguroso de los instrumentos matemáticos como el álgebra. También se apoya en intuiciones personales (Borovcnik, 2016), que pueden ser primarias (formadas fuera de la escuela) o secundarias (adquiridas con la instrucción) (Fischbein, 1975). El razonamiento matemático se inicia con la identificación de un modelo para representar adecuadamente la situación bajo estudio y continúa trabajando con el modelo para llegar a una solución de dicha situación. Su importancia se destaca en los estándares de NCTM (2000) y se incrementó a partir del trabajo de Steen (1999), quien defiende que este razonamiento es la base de la matemática, por su utilidad en la vida diaria y profesional, por lo que su adquisición debe ser un fin de la enseñanza.

Estas mismas conclusiones se pueden deducir para el caso particular del razonamiento probabilístico, que tiene una especificidad dentro de la matemática, puesto que esta última produce conclusiones que necesariamente son correctas o incorrectas. Esta certeza, sin embargo, no se da en la probabilidad, que trabaja con fenómenos aleatorios, donde la incertidumbre está presente. Van Dooren (2014) indica que, además de retos matemáticos, las situaciones probabilísticas plantean desafíos emocionales, pues el resolutor no es siempre neutro, sino que la solución tiene relevancia personal para él.

Méndez-Hincapié et al. (2022) describe seis tipos de razonamiento usados en las ciencias, que Hacking (2015) denominó como: matemático, exploración experimental, modelado hipotético, taxonómico, probabilístico y explicación histórico-genética. El razonamiento probabilístico se centra en el análisis estadístico de las regularidades de poblaciones y el cálculo de probabilidades. Sus métodos incluyen el muestreo de datos, la identificación de las distribuciones y sus regularidades, para dar conclusiones sobre las poblaciones estudiadas. Este razonamiento hace posible comprender y estudiar la incertidumbre de los fenómenos naturales (Méndez-Hincapié et al., 2022)

El razonamiento probabilístico implica una amplia gama de actividades intelectuales, incluyendo el análisis de la credibilidad de la evidencia (fenómenos observables en los que se basan las inferencias sobre temas que nos atañen) y el desarrollo de hipótesis sobre dichos fenómenos (Schum, 2001). Este autor indica que las inferencias probabilísticas sencillas sólo aparecen en los libros de texto, pero en la vida real cualquier situación aparentemente simple se puede descomponer en partes elementales, en la mayoría de las cuáles surgen nuevos elementos de incertidumbre. Dicha complejidad hace que necesariamente simplifiquemos la situación, con la consecuencia de que, si se olvidan aspectos importantes, se puede llegar a conclusiones erróneas. Por otro lado, no siempre toda la evidencia está disponible y es necesario buscarla o desarrollarla.

Fischbein y Schnarch (1997) indican que en la probabilidad no sólo intervienen las técnicas y procedimientos, sino la intuición. Schum (2001) sugiere que el razonamiento probabilístico requiere, además, muchos juicios difíciles en el proceso de establecer la credibilidad de la evidencia en función de su relevancia (¿es la información pertinente y suficiente para el problema analizado?), credibilidad (¿es válida y fiable la información?) y fuerza inferencial (¿hay posibilidad de generalización o predicción?), lo que implica llevar a cabo diferentes tareas intelectuales.

Componentes del razonamiento probabilístico

Una vez analizadas las características del razonamiento probabilístico, pasamos a describir sus componentes, a partir de diversos trabajos. Así, en el proyecto GAISE (Franklin et al., 2007; Bargagliotti et al., 2020) se destaca el rol de la probabilidad en el análisis inferencial y se describen los siguientes requisitos del trabajo con la inferencia, que, desde nuestro punto de vista son también parte del razonamiento probabilístico:

- *Comprender la probabilidad en sus diferentes significados*. Aunque la probabilidad, como herramienta matemática, permite enfrentarse a la incertidumbre y aleatoriedad, dependiendo de la situación se aplica una de sus diferentes acepciones (Batanero et al, 2005; Borovcnik, 2021; Borovcnik y Kapadia, 2014). En la enseñanza no universitaria se sugiere considerar las siguientes acepciones, que se deben entender y relacionar para conseguir un adecuado razonamiento probabilístico: a) probabilidad clásica, como cociente entre el número de casos favorables y posibles; b) probabilidad frecuencial o límite a largo plazo de la frecuencia relativa; y c) probabilidad subjetiva como grado de creencia personal, revisable a partir de la experiencia y el teorema de Bayes. Es decir, "medio para actualizar las probabilidades cuando se conoce más información" (Bargagliotti et al, 2020, p. 74)

- *Comprender la diferencia entre resolver un problema de probabilidad y usar la probabilidad para la toma decisiones*. Cuando se toma una decisión, no siempre se elige la mejor solución de un problema, sino que en ocasiones se elige la que nos reporta más utilidad. Por ejemplo, aunque la probabilidad de tener un accidente o enfermedad sea baja, se decide contratar un seguro para poder afrontar el coste en caso de que ocurra (Borovcnik, 2011). Dicha decisión debe estar fundamentada en un análisis de los datos del problema y no en creencias o teorías sin fundamento, lo que requiere comprensión de nociones referidas al muestreo, independencia y probabilidad condicionada, entre otras.

Borovcnik (2011; 2016) analiza la importancia del razonamiento probabilístico, que se aplica al resolver problemas de probabilidad, tanto en contexto escolar como en la vida diaria, sugiriendo los siguientes componentes en este razonamiento:

- *Capacidad de equilibrar los elementos psicológicos y formales al trabajar con la probabilidad,* especialmente cuando se aplica su acepción subjetiva, como grado de creencia. El conocimiento formal se utiliza al elegir correctamente el modelo de probabilidad que se debe utilizar (por ejemplo, una distribución normal), mientras que el equilibrio del elemento psicológico implica el control de las creencias subjetivas – como la aversión al riesgo – cuando se toma una decisión o se asigna la probabilidad. Sin embargo, algunas intuiciones erróneas se mantienen en personas que han estudiado el tema (Fischbein, 1975), como veremos en una sección posterior.

- *Comprender que no existen criterios directos o algoritmos para lograr un resultado deseado en situaciones aleatorias*, por lo que no puede predecirse el resultado de un experimento aleatorio aislado. Este hecho es contrario a la creencia popular en la posibilidad de idear un algoritmo para adivinar el resultado de la lotería o cualquier juego de azar, porque una característica de la aleatoriedad es la ausencia de patrones en cualquier serie de resultados (Batanero, 2015; Bar-Hillel y Wagenaar, 1991). Lo que sí es posible es realizar una predicción de la distribución de todos los resultados si se repite el experimento un número grande de veces.
- *Capacidad de discriminar aleatoriedad y causalidad*, pues tendemos a buscar una relación de causa y efecto cuando encontramos dos variables asociadas, sobre todo en problemas de probabilidad condicional, pero a veces esta asociación es fruto del azar. Es importante entender que el condicionamiento o la asociación conceptualizan una forma de relación mucho más débil que la dependencia funcional. Además, es importante aceptar que la asociación puede incrementarse, generarse o cambiarse debido a otras variables que a menudo no se han considerado en un estudio. Una interpretación adecuada de la asociación y su diferenciación con la causalidad marca un gran paso hacia el razonamiento probabilístico.

Otras componentes del pensamiento probabilístico descritas en Batanero y Borovcnik (2016) son las siguientes:

- *Tomar conciencia de la influencia de las probabilidades previas* para realizar un juicio de probabilidad. Es decir, constatar que muchas probabilidades dependen de otras probabilidades previas y por esta razón debemos tenerlas en cuenta en el nuevo cálculo. Por ejemplo, la probabilidad de que una mujer con una mamografía positiva tenga cáncer de mama depende de la incidencia del cáncer de mama entre las mujeres de la misma edad y país, del estilo de vida y de los antecedentes familiares.
- *Reconocer la asimetría de las probabilidades condicionales.* La probabilidad condicional y la independencia son conceptos relacionados, pero tienen diferentes propiedades: mientras que la independencia es una relación simétrica, la probabilidad condicional no lo es, aunque es frecuente atribuirle esta propiedad (Bar-Hillel y Falk, 1982). Comprender que las probabilidades condicionales establecen una relación no simétrica entre sucesos es clave para tratar las probabilidades e interpretarlas correctamente. Un ejemplo lo encontramos en contextos legales, donde se conoce como *falacia del fiscal*, cuando al encontrar un cierto ADN en la escena de un crimen que coincide con el de una persona se acusa a ésta del crimen en base sólo a esta evidencia (Thompson y Schumann, 1987). Otro ejemplo son las pruebas de control

de dopaje en las competiciones deportivas donde puede resultar que un atleta sea retirado de una competición con la única evidencia de una prueba positiva (Berry, 2008).

- *Interpretar correctamente las probabilidades pequeñas.* Cuando un suceso tiene una probabilidad muy pequeña, se asume que no ocurrirá, es decir, se confunde el suceso muy poco probable con imposible. Pero, aunque un suceso de probabilidad pequeña es difícil que ocurra, al repetir muchas veces el experimento suelen aparecer y a veces con consecuencias indeseables, como sería el caso de un atentado terrorista. Tenemos otro ejemplo en el inicio de la pandemia de COVID (Sieroń, 2020), donde una incidencia de 1000 entre 100000 habitantes (1%) nos parecía un riesgo de contagio pequeño; pero cuando, antes de disponer de vacunas, se reunían sin protección de mascarilla 6, 10, 30 o 100 personas, la probabilidad de que hubiese al menos un contagiado crecía muy deprisa. De ello se derivaron algunas de las restricciones impuestas al comienzo de la pandemia sobre el número de personas reunidas o la limitación de aforos. También aparecen pequeñas probabilidades en la evaluación de riesgos, como terremotos intensos o accidentes nucleares, y son difíciles de estimar (Burns et al., 2010), pues si un suceso ocurre muy raramente, será difícil obtener casos del mismo en una muestra. Sin embargo, muchos de estos sucesos pueden tener consecuencias desastrosas y de ahí el interés de su estudio. En otro ejemplo, cuando no se tiene una estimación precisa de la prevalencia de una enfermedad, muchos casos positivos podrían ser falsos positivos. Es por ello dudoso la utilidad de programas masivos de detección cuando en una población la incidencia de una enfermedad es pequeña (Gigerenzer, 2002). En este caso, las probabilidades pequeñas tienden a ser sobrestimadas y también cuando las consecuencias suponen un gran beneficio como, por ejemplo, la probabilidad de obtener un premio en la lotería.

Como en cualquier otra rama de las matemáticas, resolver un problema probabilístico implica un proceso de modelización, en el cual se involucran los componentes descritos del razonamiento probabilístico (Figura 1). Numerosos autores han descrito las características y pasos esenciales en el proceso de modelización en matemáticas, por medio del cual se simplifica una situación real utilizando aspectos teóricos de la disciplina y datos de la realidad, con la finalidad de analizar las relaciones entre sus componentes y adquirir nuevo conocimiento (Lehrer y Schauble, 2010). Estas componentes se organizan en torno a los pasos principales de la modelización.

El proceso parte de un problema de la realidad, que necesita ser estudiado, para lo cual, es necesario formularlo dentro de un dominio de investigación, en este caso la probabilidad, lo que requiere reconocer la situación como aleatoria y discriminar aleatoriedad y causalidad. Seguidamente, si no hay algorizmos disponibles para su resolución, se fijan las variables a estudiar, determinando el significado de la probabilidad que se va a aplicar y se sistematizan para construir un modelo probabilístico, equilibrar elementos psicológicos y formales. En la fase de trabajo con el modelo será importante determinar y utilizar las probabilidades previas, reconocer la asimetría en la probabilidad condicional y estimar el impacto de las probabilidades pequeñas.

Finalmente queda la fase de evaluación del modelo y eventual toma de decisiones. En esta etapa se valora si los resultados obtenidos se ajustan a la realidad y son útiles para describirla. En este paso final, en ocasiones, surgen nuevos problemas que inducen nuevos ciclos de modelización y otras se aplican los resultados para realizar predicciones o comparar y sopesar alternativas en la toma de decisión sobre la situación de estudi, eliigiendo la decisión más favorable.

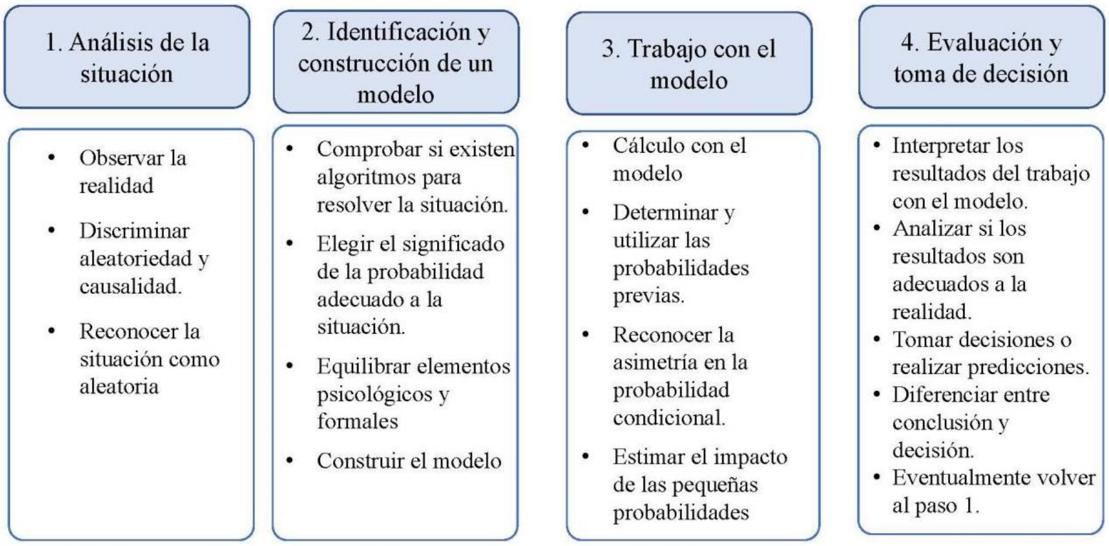

Figura 1.

Competencias del razonamiento probabilístico implicados en el proceso de modelización

¿Es intuitivo el razonamiento probabilístico?

Un tema que ha interesado por igual a psicólogos y educadores es analizar si el razonamiento probabilístico correcto se desarrolla intuitivamente sin necesidad de una enseñanza explícita. La conclusión de muchas de estas investigaciones es que, en ocasiones, la intuición engaña en las decisiones y juicios de probabilidad, y aparecen sesgos de razonamiento que no se corrigen con un aprendizaje formal de la probabilidad (Benjamin, 2019). Seguidamente hacemos un breve resumen de los principales sesgos de razonamiento asociados a la percepción de la aleatoriedad, las probabilidades condicionales y el muestreo.

Percepción de la aleatoriedad

Aunque la aleatoriedad rodea muchas de nuestras acciones, no hay una comprensión intuitiva de la misma, por lo que diferentes autores han identificado sesgos en su percepción.

- Lecoutre (1992) describió el *sesgo de equiprobabilidad*, que consiste en pensar que todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio son equiprobables. Posiblemente, es debido a un estudio de la probabilidad basado en juegos de azar haciendo uso de dispositivos como dados, cartas, etc. en los que se puede aplicar el principio de indiferencia en sus resultados. Sin embargo, son pocos los ejemplos de experimentos aleatorios con sucesos equiprobables en la vida real.
- Konold (1989) describió el *enfoque en el resultado* como la búsqueda de esquemas causales para explicar la aleatoriedad y la interpretación de una pregunta sobre la probabilidad de un suceso como si se tratase de una pregunta sobre la predicción de si el suceso ocurrirá o no.
- Es también difícil aceptar *la independencia de los ensayos repetidos* de un experimento aleatorio; así, al lanzar una moneda, después de varios resultados iguales (varias caras o cruces seguidas), se piensa que aumenta la probabilidad de obtener el suceso contrario (Bryant y Nunes, 2012). Esta creencia es frecuente entre los jugadores, por lo que se ha denominado *falacia del jugador* (Benjamin, 2019). En otros casos, se confunden sucesos independientes y sucesos mutuamente excluyentes, o se piensa que dos sucesos que ocurren simultáneamente no pueden ser independientes (de la Fuente y Díaz-Batanero, 2004).
- *Ilusión de control* o creencia en la posibilidad de controlar los resultados de los fenómenos aleatorios (Langer, 1975). Esta creencia explica el éxito de adivinos o profesionales del tarot u otras formas de adivinación. En la creencia opuesta, se piensa que no es posible aplicar métodos matemáticos para estudiar los fenómenos aleatorios.

Probabilidades condicionales

Otras dificultades provienen del trabajo con la probabilidad condicional, como describen de la Fuente y Díaz-Batanero (2004). Así, algunos estudiantes no restringen el espacio muestral al calcular las probabilidades condicionales o confunden probabilidades condicionales, conjuntas y simples. Otras dificultades son las siguientes:

- *Confundir condicionamiento con relación causal.* Cuando A es causa de B, P(B|A) es diferente de P(B), por lo cual una relación de causalidad implica una asociación estadística entre los sucesos implicados. Sin embargo, lo contrario no es cierto, ya que dos sucesos pueden estar asociados sin que uno de ellos sea causa del otro. Al evaluar una probabilidad condicional P(A|B) puede haber dos relaciones diferentes entre A (suceso evaluado) y B (suceso condicionante): a) Una *relación causal,* si B es causa de A, como por ejemplo la probabilidad de que una persona con gripe (B) tenga fiebre (A); b) una *relación diagnóstica*, si A es causa de B, como la probabilidad de que la fiebre de una persona se deba a la gripe (Tversky y Kahneman, 1982). Aunque las situaciones diagnósticas son frecuentes, son poco intuitivas para los estudiantes.

- *Falacia temporal*, por la que los estudiantes interpretan la probabilidad condicional P(A|B) como una relación temporal, donde el evento condicionante B siempre precede al suceso A (Gras y Totohasina, 1995). Para estos estudiantes tiene mucha dificultad calcular la probabilidad condicional si el suceso condicionante ocurre con posterioridad al suceso evaluado.

- *Falacia de la condicional transpuesta* (Falk, 1986): Consiste en no diferenciar entre las dos probabilidades condicionales P(A|B) y P(B|A). Este error se ha observado en problemas de contextos médicos; por ejemplo, confundir la probabilidad de que una mamografía sea positiva si se tiene un cáncer de pecho, con la probabilidad de tener un cáncer de pecho si el resultado de una mamografía es positivo. Mientras la primera probabilidad es muy alta, la segunda es pequeña debido a que los cribados periódicos que se realizan a todas las mujeres a partir de cierta edad, que llevan a un alto número de falsos positivos.

Muestreo

Kahneman y Tversky (1972) estudiaron el razonamiento de sujetos adultos cuando se enfrentan a la toma de decisiones, basándose en información tomada de una muestra de la población de interés. A partir de sus observaciones formularon la hipótesis de que en estas situaciones se utilizan estrategias intuitivas inconscientes que denominan *heurísticas* (Kahneman et al., 1982). Dichas estrategias simplifican generalmente el problema abordado, pero pueden llevar a sesgos en las conclusiones obtenidas, como mostramos en algunos ejemplos a continuación.

- En la *heurística de representatividad* (Kahneman y Tversky, 1972), al juzgar la probabilidad de obtener una muestra de una población dada, esperamos que se reproduzca casi en forma exacta la distribución de la variable de estudio en la población. Un ejemplo ocurre cuando una persona con un hijo varón, intuitivamente piensa que el segundo hijo probablemente será mujer, sin tener en cuenta que el género de los hijos es independiente y en el nuevo nacimiento las dos posibilidades (varón y mujer) siguen siendo equiprobables. Kahneman y

Tversky hablaron de la *creencia en la ley de los pequeños números* a la aplicación de la ley de los grandes números en muestras pequeñas. Otro sesgo relacionado es el *olvido de las tasas base,* cuando se desestima la probabilidad general de un suceso en una población teniendo en cuenta solo la información del caso específico. Uno de los casos que más se ha descrito ocurre en el diagnóstico médico, donde los falsos positivos en alguna prueba clínica se confunden con enfermos (Benjamin, 2019).

- En la *heurística de la disponibilidad* parecen más probables los casos que se recuerdan mejor, sin tener en cuenta su probabilidad real (Tversky y Kahnmenan, 1973). Así, se supone más probable morir en un accidente de avión que en uno de coche, porque los primeros tienen una gran repercusión en los medios de comunicación, aunque, de hecho, son menos frecuentes que los segundos.
- Son también numerosos los sesgos relacionados con la *relación entre el tamaño de la muestra y la variabilidad muestral*, y son muchas las investigaciones que informan de errores de los estudiantes en este tema. Por ejemplo, Begué et al. (2018) informan que muchos estudiantes esperan mayor variabilidad en muestras grandes que en muestras pequeñas.

Reflexiones finales

A lo largo del trabajo hemos reflexionado sobre la importancia de un razonamiento probabilístico adecuado y descrito un modelo de componentes del mismo. Será importante, por tanto, conseguir que los estudiantes adquieran este razonamiento de manera progresiva a lo largo de su formación (Franklin et al., 2007; Bargagliotti et al., 2020).

Podría parecer que esta es una tarea difícil, dado la extensión con que aparecen los sesgos de razonamiento que hemos descrito en el trabajo. Afortunadamente, son varios los autores que describen recursos didácticos que se pueden utilizar para ayudar a superar estas dificultades. Así, Gigerenzer (1994) sugirió que la dificultad en la resolución de problemas de probabilidad condicional disminuye cuando las preguntas se plantean en términos de frecuencias absolutas, en lugar de utilizar probabilidades o porcentajes. La razón es que estamos más acostumbrados en nuestra vida diaria a trabajar con las primeras. Sería importante, en consecuencia, acostumbrar a los estudiantes a transformar los datos de los problemas de probabilidad a frecuencias absolutas, pensando el número de casos que corresponde a cada suceso, por ejemplo, en una población de 100000 habitantes.

Una representación adecuada de los datos del problema facilita el cálculo y produce soluciones acertadas a los problemas tratados (Martignon y Wassner, 2002). Ya Fischbein (1975) sugirió el uso del diagrama en árbol como instrumento productivo en el trabajo con probabilidades compuestas y condicionales. Hoy en día se investigan muchas visualizaciones diferentes para trabajar con la probabilidad, que mejoran la competencia de los estudiantes para resolver los problemas. Estos recursos incluyen los diagramas de Venn, tablas de contingencia, diagramas en árbol, cuadrado unidad y matriz de iconos (Böcherer-Linde y Eichler, 2019).

Otro recurso importante es el análisis de noticias de la prensa que contengan contenido probabilístico. En esta línea se enmarca una experiencia previa con estudiantes de Bachillerato (Álvarez-Arroyo et al., 2022), en la que estudiamos sus respuestas a diferentes preguntas sobre una noticia de la COVID-19. El cálculo de probabilidades simples y complementarias resultó sencillo, pero muchos estudiantes confundieron la probabilidad condicional con su transpuesta. Fue también difícil identificar la información que faltaba en la noticia para calcular cierta probabilidad y tomar una decisión basada en los cálculos realizados. La discusión de los resultados de estas tareas permite desarrollar el razonamiento probabilístico de los estudiantes y hacerles apreciar su utilidad en la vida real.

Para finalizar, esperamos que la identificación de componentes del razonamiento probabilístico que se han descrito a lo largo del trabajo, junto a las características del mismo, sirvan a preparadores y formadores de profesorado para diseñar planes de formación específicos en los que desarrollar la competencia profesional del profesor de matemáticas.

Agradecimiento: Esta publicación es parte del proyecto de I+D+i *PID2019-105601GB-I00* financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Alsina, Á. (2021). 'Ça commence aujourd'hui': alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. *PNA*, *15*(4), 243-266. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.21357

Álvarez-Arroyo, R., Lavela, J. F., y Batanero, C. (2022). Razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato al interpretar datos de la COVID-19. *Journal of Research in Mathematics Education, 11*(2), 117-139. https://doi.org/10.17583/redimat.9741

Bar-Hillel, M., y Falk, R. (1982). Some teasers concerning conditional probabilities. *Cognition, 11*(2), 109-122. https://doi.org/10.1016/0010-0277(82)90021-X

Bar-Hillel, M., y Wagenaar, W. A. (1991). The perception of randomness. *Advances in applied mathematics, 12*(4), 428-454. https://doi.org/10.1016/0196-8858(91)90029-I

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. En P. Flores y J. Lupiáñez (eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar* (pp. 1-17). Sociedad de Educación Matemática Thales.

Batanero, C. (2015). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9)* (pp. 34-49). Praga, República Checa: ERME.

Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R., Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. *PNA, 15*(4), 267-288. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349

Batanero, C., y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school.* Sense Publishers.

Batanero, C., y Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics, 3*(1), 3-13.Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Springer.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Pérez, L. y Sàngler, D. (2020). *Pre-K-12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (Gaise II).* American Statistical Association & National Council of Teachers of Mathematics.

Begué, N., Batanero, C. y Gea, M. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudiantes de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 63-79. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2256

Benjamin, D. J. (2019). Errors in probabilistic reasoning and judgment biases. En B. D. Bernheim, S. DellaVigna, y D. Laibson (Eds.), *Handbook of behavioral economics - Foundations and applications, Vol. 2* (pp. 69–186). Elsevier. https://doi.org/10.1016/bs.hesbe.2018.11.002

Berry, D. A. (2008). The science of doping. *Nature*, *454*(7205), 692-693. https://doi.org/10.1038/454692a

Böcherer-Linder, K., y Eichler, A. (2019). How to improve performance in Bayesian inference tasks: a comparison of five visualizations. *Frontiers in Psychology, 10*, 267. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.00267

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education*: A Joint ICMI/IASE Study (pp. 71-83). Springer.

Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(3), 1491-1516.

Borovcnik, M. (2021). Mutual influence between different views of probability and statistical inference. *Paradigma*, *42*(Extra 1), 221-256. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p221-256.id1024

Borovcnik, M., y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 7-34). Springer.

Bryant, P., y Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: a literature review*. Nuffield Foundation.

Burns, Z., Chiu, A., Wu, G. (2010). Overweighting of small probabilities. En J. Cochran, L. A. Cox, P. Keskinocak, J. Kharoufeh y J. C. Smith (Eds.), *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. Jonh Wiley & Sons. https://doi.org/10.1002/9780470400531.eorms0634.

CEMat (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de matemáticas en educación no universitaria*. CEMat. Disponible en https://matematicas.uclm.es/cemat/wpcontent/uploads/bases2021.pdf

de la Fuente, I., y Díaz-Batanero, C. (2004). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Épsilon*, *59*, 245-260.

Eichler, A. y Vogel, M. (2014). Three approaches for modelling situations with randomness. En E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting plural perspectives* (pp. 75-99). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0

Evans, D. (2015). *Risk intelligence: How to live with uncertainty.* Free Press.

Falk, R. (1986). Misconceptions of statistical significance. *Journal of Structural Learning*, *9*(1), 83–96.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Vol.85). Reidel.

Fischbein, E., y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96-105.

Franklin, C., Kader. G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K-12 curriculum framework*. American Statistical Association.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Springer.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice versa). En G. Wright, y P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp. 129-161). John Wiley & Sons.

Gigerenzer, G. (2002). *Reckoning with risk: Learning to live with uncertainty*. Penguin Books.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *15*(1), 49-95.

Hacking, I. (2015). Probable reasoning and its novelties. En Arabatziz, T., Renn, J y Simoes, A. (Eds.), *Relocating the history of science* (pp. 177 -192). https://doi.org/10.1007/978-3-319-14553-2

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.). (1982). *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge University Press.

Kahneman, D., y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, *3*(3), 430-454. https://doi.org/10.1016/0010-0285(72)90016-3

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, *6*(1), 59-98. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0601_3

Langer, E. J. (1975). The illusion of control. *Journal of Personality and Social Psychology*, *32*(2), 311–328. https://doi.org/10.1037/0022-3514.32.2.311

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(6), 557-568. https://doi.org/10.1007/BF00540060

Lehrer, R. y Schauble, L. (2010). What kind of explanation is a model? En M. K. Stein (Eds.), *Instructional explanations in the disciplines* (pp. 9-22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0594-9

Lilleholt, L. (2019). Cognitive ability and risk aversion: A systematic review and meta analysis. *Judgment and Decision Making, 14*(3), 234-279.

Martignon, L., y Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics (ICOTS6)*. Ciudad del Cabo: IASE.

MEFP, Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022a). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.* Madrid: MEFP.

MEFP, Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022b). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.* Madrid: MEFP.

MEFP, Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022c). *Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.* Madrid: MEFP.

Méndez-Hincapié, N., Garzón-Barragán, I., y Castro-Moreno, J. A. (2022). Análisis del razonamiento probabilístico en futuros profesores de ciencias. *Investigações em Ensino de Ciências*, *27*(3), 254-269. https://doi.org/10.22600/1518-8795.ienci2022v27n3p254

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM. Disponible en http://standards.nctm.org/

Schum, D. A. (2001). *The evidential foundations of probabilistic reasoning*. Northwestern University Press.

Sieroń, A. (2020). Does the COVID-19 pandemic refute probability neglect? *Journal of Risk Research*, *23*(7-8), 855-861. https://doi.org/10.1080/13669877.2020.1772346

Stango, V., y Zinman, J. (2009). Exponential growth bias and household finance. *The Journal of Finance*, *64*(6), 2807-2849. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2009.01518.x

Steen, L. A. (1999). Twenty questions about mathematical reasoning. En L. V. Stiff y F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp 270-285). NCTM.

Thompson, W. C., y Schumann, E. L. (1987). Interpretation of statistical evidence in criminal trials: The prosecutor's fallacy and the defense attorney's fallacy. *Law and Human Behavior*, *11*(3), 167.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1973). Availability: A heuristic for judging frequency and probability. *Cognitive psychology*, *5*(2), 207-232. https://doi.org/10.1016/0010-0285(73)90033-9

Tversky, A., y Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge University Press.

Van Dooren, W. (2014). Probabilistic thinking: Analyses from a psychological perspective. In E, Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 123-126). Springer.