ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p430-454

Transição do aritmético para o algébrico à luz de ideias de Yves Chevallard

Transition from Arithmetic to Algebra in Light of Yves Chevallard's Ideas

Transición de la aritmética al álgebra a la luz de las ideas de Yves Chevallard

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre à la lumière des idées d'Yves Chevallard

José Carlos de Souza Pereira[1]
Secretária de Estado de Educação do Estado do Pará/Universidade Federal do Pará
Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-4797-0023

José Messildo Viana Nunes[2]
Universidade Federal do Pará
Doutor em Educação Matemática
https://orcid.org/0000-0001-9492-4914

Fernando Cardoso de Matos[3]
Secretária de Estado de Educação do Estado do Pará/Instituto Federal do Pará
Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas
https://orcid.org/0000-0002-4816-4018

Saddo Ag Almouloud[4]
Universidade Federal do Pará
Doutor em Matemática e aplicações
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Resumo

Tem-se como objetivo desse artigo refletir sobre a transição da aritmética para a álgebra a partir de publicações de Yves Chevallard. Para isso, selecionamos quatro artigos desse autor que tratam dessa abordagem, no âmbito do sistema de ensino francês, mas com implicações no ensino de álgebra no Brasil. Os artigos foram selecionados por meio de leituras prévias e pelas relevâncias das ideias contidas nos mesmos. A partir das reflexões busca-se uma possível resposta à questão: Quais aspectos epistemológicos da transição do aritmético para o algébrico são revelados em artigos de Yves Chevallard? Os traços metodológicos assumidos são da pesquisa bibliográfica e da análise de conteúdo. As conclusões indicam que os aspectos

[1] jsouzaper@gmail.com
[2] messildo@ufpa.br
[3] matos2001@gmail.com
[4] saddoag@gmail.com

epistemológicos do aritmético e do algébrico seguem uma modelização matemática algébrico/numérico, intermediada pelo processo de transposição didática.

Palavras-chave: Aritmético e algébrico, Modelização matemática, Transposição didática**.**

Abstract

The aim of this article is to reflect on the transition from arithmetic to algebra based on Yves Chevallard's publications. For this, we selected four of Chevallard's articles focused on that approach within the French education system, but with implications for algebra teaching in Brazil. The articles were selected through previous readings and relevance of the ideas contained in them. From the reflections, we sought to answer the following question: What epistemological aspects of the transition from arithmetic to algebra are revealed in Yves Chevallard's articles? The methodological features assumed are bibliographic research and content analysis. The conclusions indicate that the epistemological aspects of arithmetic and algebra follow an algebraic/numerical mathematical modeling, intermediated by the didactic transposition process.

Keywords: Arithmetic and algebra, Mathematical modeling, Didactic transposition.

Resumem

El objetivo de este artículo es reflexionar sobre la transición de la aritmética al álgebra a partir de las publicaciones de Yves Chevallard. Para ello, seleccionamos cuatro artículos de este autor que abordan este enfoque en el contexto del sistema educativo francés, pero con implicaciones para la enseñanza del álgebra en Brasil. Los artículos fueron seleccionados a través de lecturas previas y relevancia de las ideas contenidas en ellos. A partir de las reflexiones buscamos una posible respuesta a la pregunta: ¿Qué aspectos epistemológicos de la transición de la aritmética al álgebra se revelan en los artículos de Yves Chevallard? Las características metodológicas asumidas son de investigación bibliográfica y análisis de contenido. Las conclusiones indican que los aspectos epistemológicos de la aritmética y del álgebra siguen un modelado matemático algebraico/numérico, intermediado por el proceso de transposición didáctica.

Palabras clave: Aritmética y álgebra, Modelado matemática, Transposición didáctica.

Résumé

L'objectif de cet article est de réfléchir sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre à partir des publications d'Yves Chevallard. Pour cela, nous avons sélectionné quatre articles de cet auteur qui traitent de cette approche, dans le contexte du système éducatif français, mais avec des implications pour l'enseignement de l'algèbre au Brésil. Les articles ont été sélectionnés à partir des lectures antérieures et par la pertinence des idées qu'ils contiennent. À partir des réflexions, nous cherchons une réponse possible à la question : Quels aspects épistémologiques de l'arithmétique à l'algèbre sont révélés dans les articles d'Yves Chevallard ? Les caractéristiques méthodologiques adoptées sont la recherche bibliographique et l'analyse de contenu. Les conclusions indiquent que les aspects épistémologiques de l'arithmétique et de l'algèbre suivent une modélisation mathématique algébrique/numérique, intermédiée par le processus de transposition didactique.

Mots-clés : Arithmétique et algèbre, Modélisation mathématique, Transposition didactique.

Transição do aritmético para o algébrico à luz de ideias de Yves Chevallard

O ensino da Matemática no sistema educativo francês e de outros países (Brasil, Espanha, Alemanha etc.), é marcado por problemáticas diversas que afetam as propostas curriculares há muito tempo, tanto antes, como depois da reforma da matemática moderna (Chevallard, 1984, 1989, 1990, 1994). Nessas reformulações curriculares o *corpus* da Matemática passa a ser questionado e isso motiva discussões sobre as epistemologias do saber matemático relativo à Aritmética, Geometria e Álgebra. Esclarecemos que nossa intenção, neste artigo, não é comparar o sistema de ensino francês com o brasileiro ou de outros países, nem expor as problemáticas de formação docente constituídas antes e depois da inserção da Matemática moderna nas escolas do Brasil, mas revelar estudos existentes que tratam das epistemologias dos objetos da Matemática escolar[5], principalmente, dos objetos matemáticos que estruturam a Aritmética e a Álgebra escolares[6].

A problemática entre o aritmético e o algébrico não é recente, pois retroage ao século XV, com uma Aritmética atrelada às práticas de comerciantes e negociantes (Chevallard, 1984). Na transição do aritmético para o algébrico, a aprendizagem da Álgebra é vista como algo necessário para progredir o conhecimento e elevar uma sociedade (Chevallard, 1984). Esse engrandecimento da Álgebra provoca uma oposição entre o aritmético e algébrico. Além disso, a reforma da matemática moderna, que entrou em vigor, na França, no final dos anos 1960, provoca outra oposição na estrutura curricular, ou seja, entre o ensino do geométrico e das estruturas numéricas (Chevallard, 1994). Esse embate entre o aritmético e o algébrico está reescrito de outra forma nos estudos de Catalán (2003) e Gascón (2011), estudos esses que não serão analisados neste artigo, pois tais pesquisas estão fundamentadas nas ideias de Yves Chevallard. Assim, a problemática aqui é tratada a partir de artigos de Chevallard (1984, 1989, 1990, 1994) que abordaram estritamente o assunto. Além disso, a escolha desses artigos reside no fato de seus conteúdos tratarem de discussões epistemológicas dos saberes da Aritmética e da Álgebra elementar que compõem a Matemática escolar.

Os traços metodológicos das abordagens deste estudo são qualitativos por meio de pesquisa bibliográfica (Severino, 2007) e da análise de conteúdo. A análise de conteúdo vem do fato de termos escolhido os documentos *a priori* (artigos de Chevallard), procedermos à

[5] [...] a história da matemática escolar traduz-se pela história das transposições didáticas realizadas da Matemática para o ensino de Matemática (Valente, 2005, p. 21).
[6] Compreendida em vários estudos como uma aritmética generalizada (Usiskin, 1995; Catalán, 2003; Gascón, 2011).

exploração desse material, em seguida, traduzirmos excertos desses artigos e inferirmos compreensões e interpretações (Bardin, 2011).

Nossa intenção neste artigo é refletir sobre a transição do aritmético para o algébrico a partir de publicações de Yves Chevallard. Assim, da análise de conteúdo dos artigos de Chevallard, elaboramos a possível resposta à questão: Quais aspectos epistemológicos do aritmético e do algébrico são revelados em estudos de Yves Chevallard de 1984, 1989, 1990 e 1994?

Revisitar ideias para novos apontamentos

Iniciamos nosso discurso a partir dos textos de Yves Chevallard, publicados sob o mesmo título: *Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au college* [A transição do aritmético para o algébrico no ensino de matemática no colégio – correspondente ao ensino fundamental no Brasil]. É uma série de três artigos, diferenciados pela denominação de primeira, segunda e terceira parte e pelos subtítulos: *L'évolution de la transposition didactique* [A evolução da transposição didática] (1984); *Perspectives Curriculaires: la notion de modélisation* [Perspectivas curriculares: a noção de modelização] (1989) e *Voies d'attaque et problèmes didactiques* [Vias de enfretamento e problemas didáticos] (1990). Nessas três publicações de Chevallard (1984, 1989, 1990), ele anuncia a problemática que envolve o ensino da Aritmética e da Álgebra no contexto das escolas francesas.

Nas discussões desses artigos, Chevallard cita e analisa fragmentos de várias obras, para situar em diferentes épocas, de como se deu o predomínio da Aritmética no contexto de práticas sociais e culturais. É por meio da análise desses fragmentos que ele assenta seu texto e, assim, revela elementos epistemológicos do saber matemático sobre Aritmética e Álgebra. Posteriormente, esses elementos epistemológicos servem de teoria para o autor revelar o embate de ideias entre a importância do ensino da Aritmética e da Álgebra no sistema educativo francês. Percebe-se no corpo do texto que Chevallard (1984) tem a intenção de iniciar uma discussão que não se esgotará nesse primeiro artigo, mas avançará em outros, que de fato se concretizou com a publicação de mais dois artigos concatenados ao primeiro.

Logo na introdução do artigo de 1984, o autor anuncia que a reforma no *corpus* da Matemática, advinda por meio da Matemática moderna (ocorrida no fim da década de 1960), trouxe à tona a problemática do currículo posto e legitimado por muito tempo no sistema educativo francês. Para explicitar essa problemática, Chevallard (1984) recorre a várias obras que estruturam o saber matemático no campo aritmético e algébrico: Jacques Pelletier du Mans

(1554), François Viète (1591)[7], Euler (1774)[8], Clairaut (1760)[9], M. Terquem (1827), Newton (1802), A. Lentin e J. Rivaud (1961)[10], Smith (1953)[11], Chevallard e Johsua (1982)[12].

A escolha dessas obras permitiu a Chevallard que expusesse nas seções do artigo, argumentos que revelaram o posicionamento de alguns autores defenderem o saber aritmético como essencial no currículo escolar francês. Segundo a compreensão de alguns destes, as epistemologias dos objetos da Aritmética foram estruturadas por diversas civilizações ao longo da cultura humana e constituem o currículo escolar há muitos séculos. Entretanto, outros autores viam na Álgebra a estrutura de um *corpus* matemático necessário para superar as limitações das práticas aritméticas que começaram a ser questionadas, mais incisivamente, no fim do século XVI (Chevallard, 1984).

> Este lembrete da história, sem dúvida necessário, permite apontar o dedo sobre um fato crucial, do qual tiraremos mais algumas consequências: o desaparecimento em anos recentes de uma maneira secular de organizar o *corpus* matemático do ensino. A oposição da aritmética e da álgebra era de fato, até então, tradicional. Tradição antiga, que é afirmada desde o princípio pelo próprio Viète no fim do século XVI –, e, em qualquer caso, bem estabelecido no uso: abrangendo todo o século XIX, só se extinguiu no início dos anos de 1970 (Chevallard, 1984, p. 52, tradução nossa).

A força das ideias de Viète vem do fato dele propor o simbolismo para a Álgebra. Isso imprimiu um novo olhar para o ensino dos objetos aritméticos, culturalmente, estabelecidos em práticas sociais diversas. Vemos assim que Chevallard (1984) vê que “esta tradição – que equivale ao mesmo tempo a uma concepção epistemológica e didática, que produz um texto de ensino inalterado por muito tempo, ou pelo menos com uma evolução lenta – se opõe em duas fases [...]” (Chevallard, 1984, p. 52, tradução nossa). Na primeira fase está o *corpus* da Aritmética, essencial às aprendizagens futuras da Matemática, na segunda estão às ideias do *corpus* da álgebra, querendo ocupar seu espaço como saber cultural e escolar. Porém, Chevallard (1984, p. 52, tradução nossa) infere que: “[...] A aritmética fornece o conjunto requisitos sobre os quais, numa segunda fase, os autores fundamentam então o curso da álgebra [...]”. Chevallard exemplifica essa segunda fase, citando o livro de Euller: Elementos de Álgebra – traduzido para o idioma francês, em 1774.

[7] O mesmo que François Viète (1630).
[8] Idem Euler (1795).
[9] Idem Clairaut (1746).
[10] Idem A. Lentin e J. Rivaud (1967).
[11] Idem Smith (1958).
[12] Idem Chevallard e Johsua (1991).

Nas seções seguintes do artigo, Chevallard (1984) expõe: *Une frontière oubliée* (p. 52) [Uma fronteira esquecida], *Le passage de l'arithmétique a l'algèbre* (p. 53) [A transição da aritmética para a álgebra], *Le devenir de l'arithmétique dans la reforme* (p. 58) [O futuro da aritmética na reforma], *Une algèbre introuvable?* (p. 61) [Uma álgebra não encontrada?], *L'algèbre sans algèbre?* (p. 64) [Álgebra sem álgebra?], *La dialectique numérique/algébrique* (p. 72) [*A dialética numérico/algébrico*] e *Une conception empiriste du réel mathématique* (p. 76) [Uma concepção empirista do real matemático]. Todas essas seções são discutidas por Chevallard (1984)[13] de forma interligada, revelando epistemologias aritméticas imbricadas nas algébricas, mas anuncia que o *habitus*[14] da prática aritmética coexistirá com o *habitus* da prática algébrica.

> A eliminação da oposição aritmética/álgebra, com efeito, altera as condições da ligação em relação ao aritmético e ao algébrico. A antiga relação da ferramenta de trabalho ao objeto trabalhado parece perdida. Os dois domínios – o numérico, o literal – coexistirão em uma simples justaposição, existentes que encontram em si sua própria justificativa. As relações, comuns entre essas duas ordens da realidade matemática, parecem agora abolidas. Ou melhor, elas abrem espaços para novas relações invertidas: não é mais o algébrico que permite estudar o numérico, é o numérico que "justifica" e "permite compreender" o algébrico [...] (Chevallard, 1984, pp. 76-77, tradução nossa).

Sobre o enxerto, Chevallard argumenta tratar-se de um trecho extraído de um manual do *quatrième du collège*[15], da década de 1970, conforme exposto no Tabela 1.

Tabela 1.

O algébrico como essência do numérico (Chevallard, 1984, p. 77, tradução nossa)

III – DIFERENÇA DE DOIS DECIMAIS	
$x \in \mathbb{D}$, $y \in \mathbb{D}$, $z \in \mathbb{D}$, $z = x - y$ significa que $z + y = x$.	
Como é chamado z em lugar de x e y nesta ordem?	
$z = 13 - (-7)$	$z = x - y$
$z + (-7) = 13$	$z + y = x$
$[z + (-7)] + 7 = 13 + 7$	$(z + y) + (-y) = x + (-y)$
$z + [(-7) + 7] = 13 + 7$	$z + [y + (-y)] = x + (-y)$
$z + 0 = 13 + 7$	$z + 0 = x + (-y)$
$z = 13 + 7$	$z = x + (-y)$
Para todo x de $\mathbb{D}$, para todo y de $\mathbb{D}$, $x - y$ é um decimal e $x - y = x + (-y)$.	

[13] Recomendamos o artigo original como leitura complementar para ampliar as compreensões dessas seções.
[14] [...] sistemas de *disposições* duráveis e transponíveis, estruturas estruturadas predispostas a funcionar como estruturas estruturantes, ou seja, como princípios geradores e organizadores de práticas e representações [...] (Bourdieu, 2013, p. 87).
[15] Equivalente ao oitavo ano do Ensino Fundamental no Brasil

Exemplos: 8 – (–7) = 8 + 7 = 15; 9 – 14 = 9 + (–14) = –5. A operação que, para cada par $(x; y)$, $x \in \mathbb{D}$, $y \in \mathbb{D}$, faz corresponder o decimal $x - y$, é a subtração em $\mathbb{D}$.

Entenda-se que os decimais, aos quais Chevallard (1984) se refere[16], devem ser compreendidos por decimais inteiros relativos, ensinados no sistema educativo brasileiro como números racionais relativos (simbolizados nos livros didáticos por $\mathbb{Q}$, de tal forma, que os números inteiros relativos ($\mathbb{Z}$) e os números fracionários – positivos e negativos – estão contidos nesse conjunto). As ideias reveladas na Tabela 1, compuseram o programa de 1971 para a classe do *quatrième* do colegial.

Chevallard conclui essa primeira parte sobre a transição do aritmético para o algébrico, enfatizando que:

> Tal concepção do conhecimento perde o real do qual se trataria precisamente de produzir conhecimento, porque lhe falta a sua constituição como objeto de conhecimento. O algébrico não é mais usado para conhecer o numérico. De agora em diante, é apenas uma estenografia essencializante, que descreve, resume e separa a essência do acidente. O surgimento "moderno" da dicotomia da "observação" e da "teoria" – que os livros atuais retomam à vontade – é assim correlativa de uma dissolução do objeto de conhecimento em favor do objeto real, agora mostrado em uma abstração que se considera imediata e fácil. A ordem didática será organizada em torno dessa epistemologia imaginária (Chevallard, 1984, p. 81, tradução nossa).

O texto da citação é o anúncio, implícito, de que as ideias discutidas na primeira parte de *A transição do aritmético para o algébrico no ensino de matemática no colégio* continuarão. Isso acontece na segunda parte, publicada em 1989. Nessa segunda parte, Chevallard aborda as perspectivas curriculares e a noção de modelização (modelagem): *Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college – Deuxieme Partie – Perspectives Curriculaires: La Notion de Modelisation* [A transição do aritmético para o algébrico no ensino de matemática no colégio – Segunda Parte – Perspectiva Curriculares: A Noção de Modelização (Modelagem)]. Logo na introdução, Chevallard (1989) retoma a discussão iniciada no primeiro artigo da série, mais precisamente, na seção intitulada de *Uma concepção empirista do real matemático*, mas agora, ele expõe sobre *La réforme Chevènement et le triomphe empiriste* (Chevallard, 1989, p. 43) [A reforma *Chevènement* e o triunfo empirista].

A reforma *Chevènement* propôs o resgate do numérico (aritmético) em detrimento do algébrico. Esse olhar para o numérico era visto como algo desestabilizador do currículo no

[16] Chama-se número decimal qualquer número racional x para o qual exista $a \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = \frac{a}{10^n}$. Em outros termos, um racional x é um número decimal quando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \cdot 10^n$ seja inteiro (Dumas, 2005, p. 36, tradução nossa).

sistema de ensino francês, o que ocorreu no fim dos anos 1960 (Chevallard, 1989). Essa reforma compreendia o numérico como algo prático e proveniente da realidade, que não necessitava de ideias tão abstratas, conforme exigia a álgebra. A reforma *Chevènement* relega os aspectos algébricos em segundo plano, mas não os exclui, o uso das letras é visto como uma generalização precedente dos estudos dos cálculos numéricos (Chevallard, 1989).

Chevallard trata, ainda, na seção introdutória desse segundo artigo, de outras três subseções: *Du calcul formel au calcul fonctionnel*; *Du collège au lycée et au-delà*; *Un problème d'ingénierie curriculaire* (Chevallard, 1989, pp. 46-49). [Do cálculo formal ao cálculo funcional"; "Do colégio ao liceu e mais adiante"; "Um problema de engenharia curricular]. Essas subseções revelam problemáticas postas no ensino da Aritmética e da Álgebra no sistema de ensino francês. Problemáticas estas que envolvem o processo de transposição didática estabelecido no programa oficial do colegial.

> Esta é, de fato, a contradição essencial. A transposição didática, que modifica o funcionamento dos objetos do saber, imprime certa especificidade ao programa oficial que o ensino pródigo propõe ao aluno. Esse programa oficial engendra no aluno um programa pessoal que, conforme está no programa oficial, desfrutará de uma adequação limitada como o referido objeto de saber, que deixará de ser uma aposta didática pura, será apenas uma ferramenta da atividade didático-matemática do aluno: por exemplo, a fatoração de uma expressão algébrica pode deixar de ser o objetivo de sua atividade, tornando-se o meio para resolver uma equação do terceiro grau, conhecendo-se uma de suas raízes (Chevallard, 1989, p. 47, tradução nossa).

Os objetos do saber sobre os quais Chevallard se refere na citação (expressão algébrica e equação do terceiro grau) transitam do colégio ao liceu e alcançam a formação universitária (no Brasil, do Ensino Fundamental ao Ensino Médio e Ensino Superior). Esses objetos têm sua problemática no currículo escolar, ou melhor, no ensino da Álgebra escolar. Estão no currículo oficial e são ensinados, portanto, compõem um dos problemas da engenharia curricular há muito tempo. Dessa forma, inserem-se na problemática anunciada por Chevallard (1989):

> O problema didático geral para o qual somos conduzidos pode ser formulado assim: é possível definir e realizar um *estado do sistema de ensino* (ou seja, um *currículo*) que determina um programa oficial para o algébrico mais *apropriado* as tarefas nas quais o algébrico será empregado, principalmente, no liceu? (Chevallard, 1989, p. 49, tradução nossa, grifos do autor).

A problemática da citação foi anunciada na década de 1980, na França, mesmo assim, vemo-la como atual no ensino da Matemática no Brasil. E para propormos uma possível resposta, temos que compreender a epistemologia dos objetos algébricos da Matemática escolar

(Valente, 2005). Isso pode ser iniciado a partir da seção que Chevallard (1989, p. 49) denomina de *Calcul algébrique et systèmes de nombres* [Cálculo algébrico e sistemas de números (ou de numeração)]. Essa seção do segundo artigo é peculiar porque reconduz a reflexões do saber matemático em transição no sistema de ensino francês, mas possui conexões no sistema de ensino brasileiro. Não dá para negar que as amplitudes das ideias contidas lá e aqui são próximas, mesmo que décadas tenham passado e vivamos com pensamentos em tecnologias do futuro. Um ponto importante dessa seção é a subseção *Une incontournable dialectique* [Uma incontornável dialética] (Chevallard, 1989, p. 50). Essa subseção ressalta a importância histórica dos sistemas de numeração ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$) e sua inserção na escola, transita pela escola primária, colégio, liceu e chega à universidade.

Vemos nos sistemas de numeração epistemologias subjacentes que precisam ser compreendidas pelo docente de Matemática (professor ou outros), principalmente, no ensino básico. Essas epistemologias, que são pontes de acesso ao saber numérico e algébrico, coexistem, conforme anunciamos anteriormente e não vivem sós. Há *habitus* de práticas de ensino que conduzem as etapas (anos, séries, ciclos etc.) do sistema de ensino como todo. Isso é percebível nas palavras de Chevallard (1989):

> Os primeiros domínios dos cálculos encontrados – na história, bem como, na escola – são constituídos pelos diferentes *sistemas de números*, sucessivamente, introduzidos e estudados da escola primária ao colégio: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Embora esses sistemas de números não possuam seus domínios de cálculo somente para esses níveis – que nos leva a pensar aqui no cálculo vetorial [...] (Chevallard, 1989, p. 50, tradução nossa, grifo do autor).

De maneira formal, Chevallard (1989) explicita que a noção de sistema de números é definida da seguinte forma:

> ∗ uma *adição* (denotada por +), operação binária associativa, comutativa, possuindo um elemento neutro (denotado por 0);
> ∗ uma *multiplicação*, operação binária associativa, comutativa, possuindo um elemento neutro (denotado por 1), e distributividade em relação à adição.
> Os sistemas de números, efetivamente, visados possuem além disso
> ∗ uma *relação de ordem* (total), compatível com a adição e a multiplicação (Chevallard, 1989, pp. 50-51, tradução nossa, grifos do autor).

Essa maneira formal da definição de sistemas de números tem implicações epistemológicas relativas ao saber matemático, que fica, na maioria das vezes, restrito a grupos específicos (matemáticos e professores que ensinam Matemática nas universidades). O professor de Matemática do ensino básico estuda isso como parte de sua formação inicial ou continuada, mas, na maioria das vezes, dissociado do processo transpositivo dos objetos da Álgebra escolar, que permita [...] *uma escolha didática explícita*, que insira a noção nova no texto do saber ensinado, *satisfazendo a dialética do antigo e do novo* [...] (Chevallard & Johsua, 1991, p. 171, tradução nossa).

Para Chevallard (1989), a noção de sistema de números e a relação de ordem, compatíveis com as operações binárias de adição e multiplicação são fundamentais para verificação da regra da simplificação. Por exemplo, se tivermos dois polinômios do primeiro grau, com seus coeficientes no sistema de números (SN), ou seja, P(x) = ax + b e Q(x) = cx + d (a, b, c e d em SN), chamaremos "equação do primeiro grau sobre SN" quando tivermos a igualdade do tipo P(x) = Q(x). Portanto, *qualquer equação do primeiro grau sobre SN, que não é identicamente verificável nesse SN, possui mais de uma solução* (Chevallard, 1989, p. 51). A regra da simplificação pode ser visualizada como segue:

Sejam P(x) = ax + b e Q(x) = cx + d. Se P(x) = Q(x), então ax + b = cx + d. Simplificando-se a igualdade, obteremos a solução da equação:

$$ax + b = cx + d \Leftrightarrow ax + b + (-cx) + (-b) = cx + d + (-cx) + (-b) \Leftrightarrow$$

$$ax + (-cx) = d + (-b) \Leftrightarrow x \cdot [a + (-c)] = [d + (-b)] \Leftrightarrow$$

$$x \cdot [a + (-c)] \cdot \frac{1}{[a+(-c)]} = [d + (-b)] \cdot \frac{1}{[a+(-c)]} \Rightarrow x = \frac{[d+(-b)]}{[a+(-c)]}, \text{ com } [a + (-c)] \neq 0.$$

A compreensão da regra da simplificação leva ao que Chevallard (1989, p. 51) denomina de *Un problème fondamental* [*Um problema fundamental*]. Esse problema fundamental remete ao estudo das propriedades dos sistemas de números.

> Adicionaremos, finalmente, uma última propriedade à definição dos sistemas de números. Essa propriedade é motivada pelo problema recorrente e fundamental que sustenta os sistemas de números estudados no colégio: tais sistemas, na verdade, *não contém números suficientes*. A necessidade de sua extensão repetida (de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ etc.) decorre dessa insuficiência, para qual podemos encontrar uma dupla origem (Chevallard, 1989, p. 51, tradução nossa, grifo do autor).

A dupla origem para a insuficiência numérica decorre, segundo Chevallard (1989), de *medir grandezas e da existência de números resultantes de um cálculo algébrico aceitável*. Consequentemente, a extensão dos naturais ($\mathbb{N}$) para os inteiros relativos ($\mathbb{Z}$), dos inteiros relativos para os racionais ($\mathbb{Q}$), dos racionais para os reais ($\mathbb{R}$) e, mais adiante, dos reais para os complexos ($\mathbb{C}$), torna-se necessária para dar conta dos cálculos algébricos, como os dos processos resolutivos de equações. O efeito dessa extensão dos sistemas de números está em

La maîtrise formelle du calcul fonctionnel [A maestria formal do cálculo funcional] (Chevellard, 1989, p. 52). Para Chevallard essa maestria se pauta em dois objetivos.

> O *primeiro objetivo* deve assegurar o ensino de uma manipulação *formal* satisfatória do cálculo algébrico, ou, na versão mais desenvolvida, do cálculo no corpo R(x) das frações racionais – objetivo, especialmente, importante para os alunos que prosseguirão seus estudos além do colégio.
> A maestria dialética entre manipulação formal do cálculo algébrico (ou melhor: dos cálculos algébricos) e conhecimento dos sistemas de números constitui então um *segundo objetivo* do ensino da álgebra no colégio. Esse objetivo deriva de uma dupla observação: ele não pode ter maestria do cálculo algébrico *funcional* sem que faça os corretos *empregos* do cálculo algébrico; não pode haver emprego do cálculo algébrico sem que se estabeleça uma dialética entre o numérico e o algébrico [...] (Chevallard, 1989, pp. 52-53, tradução nossa, grifos do autor).

Os dois objetivos, e com mais intensidade o segundo, levam Chevallard (1989, p. 53) a tratar da *La modélisation mathématique* [A modelização matemática]. Essa seção está subdividida em oito subseções: *De l'extramathématique à l'intramathématique, Systèmes et modèles, Le cas du pendule simple, Mathématique et mathématisé, La production de connaissances, Réversibilité de la relation de modélisation, Récurrence du processus de modélisation e Modèles locaux, modèles régionaux* [Do extramatemático para o intramatemático, Sistemas e modelos, O caso do pêndulo simples, Matemática e matematizado, A produção de conhecimentos, Reversibilidade da relação de modelização, Recorrência do processo de modelização e Modelos locais, modelos regionais] (Chevallard, 1989, pp. 53-58).

Nessas oito subseções, Chevallard expõe aspectos epistemológicos que revelam compreensões sobre o uso dos objetos aritméticos e algébricos no processo de modelização matemática (ou modelagem matemática). Compreenda-se que essa modelagem matemática não se assenta nas características de metodologia para ensinar Matemática. A modelização matemática, conforme está em Chevallard (1989), constitui-se como parte da atividade matemática e, essa modelização permite estudar os objetos da Matemática e criar outros objetos matemáticos a partir dos já existentes. É com esse olhar que o autor revela as implicações epistemológicas do saber algébrico no campo da Matemática.

Na subseção “Do extramatemático ao intramatemático”, Chevallard (1989) indica algo fundamental: “A questão da funcionalidade do cálculo algébrico [...]” (p. 53, tradução nossa). Essa funcionalidade “[...] deve ainda ser analisada em seus princípios gerais como em suas modalidades concretas [...]” (Chevallard, 1989, p. 53, tradução nossa). Para o autor, o intramatemático é o estudo dos objetos matemáticos, como por exemplo, os sistemas de números. O extramatemático refere-se ao emprego dos estudos dos objetos matemáticos nos sistemas físicos, biológicos, sociais e outros. Chevallard esclarece que "[...] é usual no estudo matemático de tais sistemas não matemáticos para o qual se emprega o nome de *modelização matemática*" (Chevallard, 1989, p. 53, tradução nossa, grifo do autor). A modelização matemática, segundo o autor, precisa ser bem compreendida, por isso ele esclarece sobre sistemas e modelos.

> Introduziremos primeiro um esquema simplificado, que supõe, essencialmente, dois registros de identidades: um sistema, matemático ou não matemático, e um *modelo* (matemático) desse sistema. O processo de modelização comporta, esquematicamente, três etapas.
>
> **1.** Define-se o sistema que se destina estudar, especificando os "aspectos" *pertinentes* com relação ao que queremos fazer desse sistema, ou o conjunto das *variáveis* as quais decompomos nos domínios de realidade onde elas aparecem. Designaremos essas variáveis pelas letras x, y, z, a, b, c etc., reservando o direito de voltar à questão – principal – que eleva o uso dessas variáveis.
>
> **2.** Constrói-se então o modelo para apropriadamente se falar em estabelecer certo número de relações, R, R', R'' etc., entre as variáveis levadas em conta na primeira etapa, sendo *o conjunto dessas relações*, o modelo do sistema a estudar.
>
> **3.** Trabalha-se o modelo assim obtido, com objetivo de produzir *conhecimentos* relativos aos sistemas estudados, conhecimentos que tomam a forma de novas relações entre as variáveis do sistema.
>
> A etapa 3 é sempre uma fase propriamente matemática, enquanto as etapas anteriores são originadas do domínio da realidade, o qual supõe-se revelar o sistema – a matemática que age sobre o objeto matemático etc. (Chevallard, 1989, p. 53, tradução nossa, grifos do autor).

Os sistemas e modelos, conforme Chevallard (1989) aponta, servem de conexão para visualizarmos o trabalho matemático envolto num processo de modelização. Tanto que ele exemplifica isso por meio do modelo obtido para o caso do pêndulo simples: "Um trabalho matemático elementar sobre esse modelo "bruto" conduz à relação fundamental $T = f(A)\sqrt{L/g}$, que permite, por sua vez, produzir os conhecimentos sobre o sistema estudado [...]" (Chevallard, 1989, p. 54, tradução nossa).

A subseção *La production de connaissances* [A produção de conhecimentos] revela a complexidade de um modelo matemático de larga escala, o teorema de Pitágoras, que, em uma de suas formas algébricas, pode assumir a seguinte representação: $z^2 = x^2 + y^2$. Porém, esse modelo é mais evidenciado no estudo dos triângulos retângulos, pelo qual as medidas dos lados de um triângulo retângulo estão na relação pitagórica: *a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados das medidas dos dois catetos*. Até aqui nada de novo, mas Chevallard (1989. pp. 55-56, tradução nossa, grifo do autor) alarga essa discussão:

> Mas geralmente, um modelo é interessante quando permite produzir conhecimento que de outra forma não nos daria muito facilmente. Consideremos o teorema de Pitágoras:

ele fornece uma relação característica dos triângulos retângulos, o qual constitui um *modelo dos triângulos retângulos* (modelo cujas variáveis são as medidas a, b e c dos lados): $c^2 = a^2 + b^2$. Essa igualdade tem uma interpretação clássica no registro do sistema: a área do quadrado construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas construídas sobre os dois lados do ângulo reto; além disso, como sabemos, demonstrando (por considerações geométricas de igualdades de áreas) essa última igualdade é que podemos estabelecer a relação algébrica de Pitágoras. Mas isso parece produtivo a partir de relações que obtemos não diretamente do ponto de vista geométrico: multiplicá-la por $\pi/8$; obtendo-se a igualdade $\pi c^2/8 = \pi a^2/8 + \pi b^2/8$, cuja interpretação geométrica imediata é: a área do semicírculo que tem de diâmetro a hipotenusa é igual à soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os dois lados do ângulo reto. E multiplicando a igualdade de Pitágoras por um coeficiente numérico adequado ($kc^2 = ka^2 + kb^2$), poderia se dizer a mesma a propósito dos triângulos equiláteros (k = $\sqrt{3}/4$, ou quaisquer outras figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo.

A modelização que Chevallard indica como o estudo do modelo dos triângulos retângulos gera conhecimentos e promove um fazer matemático mais abrangente. Nele reconhecemos elementos epistemológicos próprios da Álgebra escolar, mas justificados pelo raciocínio aritmético, ou seja, notamos a dialética algébrico/numérico.

As outras seções do segundo artigo solidificam as ideias sobre a noção de modelização: [Matemática e Modelização, As Ferramentas da Matematização, O Mundo Fechado e o Universo Infinito]. Entretanto, não os discutiremos aqui, mas deixamos a critério do leitor conferir o texto integral de Chevallard (1989).

Nossa atenção volta-se agora para o último artigo da série sobre *A transição do aritmético para o algébrico no ensino de matemática no colégio* (Chevallard, 1990). Com esse artigo, Chevallard fecha a trilogia de uma discussão que se inicia na década de 1980. O terceiro artigo da série retoma as ideias do segundo, mas com novas perspectivas, percebidas já no subtítulo: *Voies d'attaque et problèmes didactiques* [Vias de enfretamento e problemas didáticos] (Chevallard, 1990, p. 5). Esse artigo está dividido em cinco seções: *La modélisation comme concept*, *Constructions croisées: le numérique et l'algébrique*, *Les entiers naturels comme objet d'étude*, *Premiers repères d'un programme de recherche* e *Problématique du programme de recherche* [A modelização como conceito, Construções interligadas: o numérico e o algébrico, Os inteiros naturais como objeto de estudo, Primeiras referências de um programa de pesquisa, Problemática do programa de pesquisa] (Chevallard, 1990, p. 5-37). Cada uma dessas seções possui subseções. É sobre as ideias contidas em algumas dessas subseções que trataremos a seguir.

Começaremos pela segunda seção, a qual na sua primeira subseção intitulada *Un outil fondamental: les entiers naturels* [Uma ferramenta fundamental: os inteiros naturais] (Chevallard, 1990, p. 13) revela a importância de se estudar os números naturais. Os números inteiros naturais possuem, historicamente e didaticamente, uma constituição que os garantem como "[...] a primeira ferramenta da modelização matemática" (Chevallard, 1990, p. 13, tradução nossa). Esse sistema de números é tomado como referência para o ensino de outros sistemas numéricos, o que garante a ele uma particular atenção no currículo do sistema de ensino francês (Chevallard, 1990). Estenda-se essa ideia ao currículo do sistema de ensino brasileiro.

Os inteiros naturais merecem atenção porque como ferramenta de estudo intervêm "[...] em dois níveis no processo de modelização algébrica [...]" (Chevallard, 1990, p. 14, tradução nossa). Esses dois níveis são assim compreendidos: "[...] por um lado, as variáveis que definem o sistema estudado podem ser valores de SN. Por outro lado, a formulação das relações que regem o sistema que pode utilizar expressões algébricas com coeficientes em SN" (Chevallard, 1990, p. 14, tradução nossa). Mesmo os inteiros naturais recebendo tanto destaque, eles são insuficientes, problemática que discutimos anteriormente, que revela a necessidade da extensão de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ (números inteiros relativos). Isso implica no que Chevallard (1990) considera ser *L'insuffisance des entiers naturels comme outil* [A insuficiência dos inteiros naturais como ferramenta].

A extensão de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ é algo importante para a epistemologia da Álgebra, porque antes os números *relativos* eram denominados de números *algébricos* (Chevallard, 1990). Essa informação nos leva ao que o autor denomina de números "artificiais". Os números "artificiais" são assim mencionados por Chevallard (1990, pp. 17-18, tradução nossa):

> Os números negativos são, portanto, introduzidos na prática matemática, não como números inteiros "naturais", ou seja, como números usados na contagem ou "medida" de conjuntos finitos, mais como um meio de cálculo, como um *artifício* de cálculo – da mesma forma que o automóvel pode ser considerado como um "artifício de transporte". Por essa razão, eles foram há muito tempo categorizados – incluindo as frações – na categoria dos números artificiais (Smith, 1925, capítulo IV), permitindo serem usados, flexivelmente, e assim mais agradavelmente, como uma poderosa ferramenta matemática, o cálculo algébrico.

O surgimento dos números negativos impulsionou o saber matemático no campo algébrico. Essa poderosa ferramenta matemática deu uma nova dimensão ao cálculo algébrico, principalmente, para o jogo da "regra de sinais", conhecida muito antes da invenção desses números (Chevallard, 1990). Na Tabela 2 temos mais explicações sobre os números "artificiais".

Tabela 2.

Fragmentos da história dos números "artificiais" (Chevallard, 1990, p. 18, tradução nossa)

Os números "artificiais" – aqui, os negativos – não são, portanto, primeiro motivados pelo estudo dos sistemas com variáveis, que tomam valores inteiros positivos e negativos, assim como queremos obstinadamente acreditar, apresentando raros sistemas deste tipo – altitude, elevador, perdas e ganhos etc. Eles nascem *de exigências internas ao trabalho matemático* (exatamente: algébrico). Sem dúvida, sua introdução, que estende o domínio numérico, levantará muitas perguntas históricas, que necessariamente encontram eco no currículo do Colégio. Sabe-se que Diophante, no século III depois de Jesus Cristo, rejeitava como absurdo a equação 4x + 20 = 4, que daria x = – 4. Cardano, no século XVI, falava, tratando-se dos negativos, de números falsos, e Descartes, em 1637, chamava ainda de *raízes falsas* para as raízes negativas de uma equação. Considerar os números negativos como números "verdadeiros" exigiu que arriscássemos escrever igualdades do tipo (+15) + (–20) = –5 (Bombelli, 1572), o que será realmente aceito no século XVII. Notemos, sobretudo, que na progressiva normalização do status dos negativos, na trivialização do seu emprego, *o uso das letras jogará um papel unificador essencial*. A ideia de utilizar uma única letra, *não afetada de um sinal*, para designar, indiferentemente, um número positivo ou negativo parece ter surgido por volta de 1659 em Hudde (Smith, 1925, p. 259).

A Tabela 2 contém fragmentos da epistemologia dos números inteiros relativos. Isso permite refletirmos sobre e de como se estruturou a extensão de ℕ para ℤ. Veremos as principais ideias dessa extensão na Tabela 3.

Tabela 3.

A transição de ℕ para ℤ (Chevallard, 1990, pp. 18-19, tradução nossa)

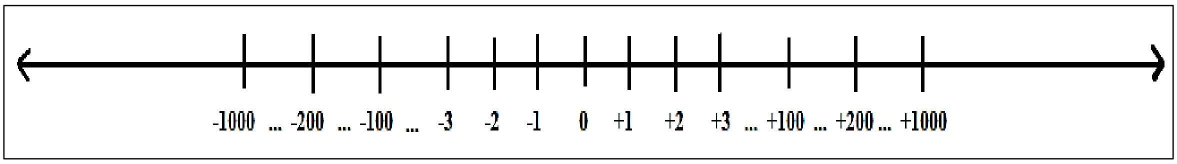
A transição de ℕ para ℤ, no espírito indicado, parte então do seguinte problema. Para todo a > 0, é necessário introduzir um "numero", denotado por –a, tal que, para quaisquer inteiros naturais b e c, verifica-se que b > ac, pode-se escrever: b – ac = b + (–a)c. Seja então um número tal que, de acordo com a definição (em ℕ) de b – ac, tem-se: b = ac + b + (–a)c. 1. Tomemos b = a e c = 1. O número –a deve, portanto, verificar a igualdade a = a + a + (–a), ou ainda a + (–a) = a – a = 0. Em outros termos, –a é *solução da equação x + a = 0*. Se o conjunto que se quer obter a partir de ℕ por adição de "números" –a (*a* inteiro natural > 0), é efetivamente um *sistema de números* ℤ (conforme definido acima), então esta equação tem sobre ℤ apenas uma solução, e, assim, a equação x + a = 0 *caracteriza* –a *completamente*. 2. Assumindo-se que ℤ é um bom sistema de números, da igualdade a + (–a) = 0 se deduz primeiro (pela multiplicação por c) a igualdade ac + (–a)c = 0, e, daí (pela adição de b) , a igualdade ac + b + (–a)c = b. Se os inteiros naturais a, b, c são tais que b > ac, temos então: b – ac = b + (–a)c. *Assim, para constituir ℤ a partir de ℕ, é necessário e suficiente associar, para todo inteiro a > 0, um número –a tal que a + (–a) = 0.* A hipótese que pode existir tal sistema de número é muito forte. Isso implica particularmente que, sobre ℤ, qualquer equação da forma x + a = 0 possui uma solução: se, de fato, *a* pertence a ℕ, então –a pertence a ℤ e é solução da equação; se *a* pertence a ℤ – ℕ, existe b em N tal que a = –b, e a equação considerada é então satisfeita para x = b. Notamos em geral que –a é a solução (única) da equação x + a = 0, para *a* pertencendo a ℤ. Se a = –b, com b em ℕ, temos então: b = –a = –(–b). Mas geralmente, para todo *a* em ℤ, tem-se: –(–a) = a. A hipótese que ℤ é um sistema de números permite então ver como é conveniente *calcular* em ℤ. Sejam assim os números –a e –b, com a e b em ℕ. Qual o valor da *soma*, (–a) + (–b)? Têm-se as igualdades (–a) + a = 0 e (–b) + b = 0. Deduz-se, por adição membro a membro, e em virtude das propriedades emprestadas para ℤ, a igualdade: ((–a) + (–b)) + (a + b) = 0. Esta última igualdade fornece a resposta esperada, porque nos mostra que

há: (–a) + (–b) = –(a + b). Todas as propriedades de ℤ no que concerne às operações de adição, de subtração, todas as relações de compatibilidade entre ordem e leis de composição podem ser obtidas dessa maneira. Além disso, a função *valor absoluto* pode então ser definida e a desigualdade triangular estabelecida. ℤ se diferencia de ℕ, porque a subtração sempre está definida nele, e que a propriedade da boa ordem não é mais satisfeita apenas para os conjuntos menores, mas é suficiente para aproximar a ordem de ℤ, com a ordem de ℕ, que é discreta.

A Tabela 3 possui um modelo epistemológico simplificado para explicar a extensão do sistema dos números naturais (ℕ) para o sistema dos números inteiros (ℤ). Essa extensão é complexa e está alicerçada na Teoria de Grupos e de Anéis da álgebra moderna (que não é o propósito deste estudo). O que se observa na Tabela 3 é um estudo de modelização essencial para quem ensina Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental. Mas, não só isso, é um processo de modelização matemática que produz objetos matemáticos cruciais à Matemática escolar. De forma não tão simples, mas prática, a ideia da extensão de ℕ para ℤ pode ser resumida por meio de uma reta numérica graduada com números inteiros positivos de um lado (direito) e negativos do outro (esquerdo), separados no "meio" da reta pelo algarismo zero, conforme vemos na Figura 1.

Figura 1.

Reta graduada com números inteiros relativos (ℤ) (Elaborada pelos autores)



Com o sistema dos números inteiros relativos, o trabalho algébrico ganhou outro patamar. A limitação da subtração em ℕ é superada e isso impulsiona o saber matemático em relação ao cálculo algébrico, mas também cria problemas para o ensino da Matemática no contexto escolar. Tanto que Chevallard (1990) trata de forma breve dos *Problèmes ouverts et curriculum* [Problemas abertos e currículo]. Ele exemplifica esse entrave recorrendo à problemática relacionada ao estudo e ao ensino das frações e a geração destas por meio de uma modelação algébrica. Essa modelação está intrinsecamente associada aos problemas abertos e isso aproxima a atividade matemática escolar com a atividade do matemático (Chevallard, 1990).

As duas seções finais, do terceiro artigo, anunciam as *Premiers repères d'un programme de recherche* [Primeiras referências de um programa de pesquisa] e a *Problématique du programme de recherche* [Problemática do programa de pesquisa] (Chevallard, 1990). Não iremos expor aqui os enfoques dessas duas seções, mas o leitor que se interessar deve consultar Chevallard (1990). Avançaremos à próxima seção deste estudo, retomando uma ideia inicial – a transposição didática.

Transposição didática e Álgebra escolar

Yves Chevallard, em 1994, publicou o artigo intitulado *Enseignement de l'algèbre et transposition didactique* [Ensino da álgebra e transposição didática] (Chevallard, 1994, p. 175). Nesse artigo ele amplia as discussões expostas nos artigos da série *A passagem do aritmético para o algébrico no ensino de matemática no colégio* (Chevallard, 1984, 1989, 1990). Porém, a atenção de Chevallard (1994) é centrada no ensino da álgebra e o processo de transposição didática. É um artigo denso, com mais de cinquenta páginas. Está dividido em dois temas: A) *Sur le processus de transposition didactique* (p. 175) e B) *Sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire* (p. 180) [A) Sobre o processo de transposição didática e B) Sobre o ensino da álgebra elementar]. De início, esclarecemos que não esmiuçaremos em detalhes esse artigo, mas apenas as ideias mais relevantes sobre o processo de transposição didática que vemos como pertinentes e ampliam as discussões dos artigos de Chevallard (1984,1989, 1990).

O processo de transposição didática possui elementos estruturais, centrados num universo característico: *a sociedade*. No interior da sociedade *o sistema de ensino* se constitui. Uma vez constituído o sistema de ensino, no interior deste, *os sistemas didáticos* se formam, vivem e desaparecem (Chevallard, 1994). Os componentes dos sistemas didáticos são *o ensinante* (professor), *os ensinados* (alunos, aprendizes etc.) e *um saber* (por exemplo, operações algébricas) (Chevallard, 1994).

Chevallard (1994) esclarece que o sistema de ensino *stricto sensu* é circundado por uma zona de interface com a sociedade: a *noosfera*[17]. Segundo Chevallard (1994, p. 175, tradução nossa), "o conjunto do sistema de ensino e de sua noosfera é designado como o sistema de ensino *lato sensu*. A noosfera contém, em particular, os professores atuantes, suas associações, produtores e defensores de qualquer doutrina didática etc." Além disso, Chevallard chama atenção para os grupos sociais que estão envoltos como elementos estruturais da transposição didática.

> No interior da sociedade, e no exterior do sistema de ensino *lato sensu*, duas instâncias desempenham um papel essencial nos mecanismos examinados mais a frente: a comunidade sábia relativa ao saber ensinado – aqui, a comunidade dos matemáticos –, por um lado; o grupo de pais, por outro.
> A esses dois grupos sociais podem ser acrescentados vários outros grupos, cuja importância tem sido até agora (pelo menos no que concerne ao ensino geral)

[17] A noção de noosfera do sistema de ensino foi introduzida por Chevallard (1985/1991) no contexto da teoria da transposição didática para designar a esfera onde se pensa o funcionamento do sistema didático. Trata-se do verdadeiro filtro por onde se opera a interação entre o sistema de ensino e a sociedade. A noosfera relaciona a instituição produtora do saber com a escola. As produções da noosfera (programas oficiais, livros textos, recomendações para professores, materiais didáticos etc.) condicionam fortemente as características e até a natureza do conhecimento que deve ser ensinado na escola (Farras et al., 2013, p. 3-4, tradução nossa).

> relativamente fraco: em particular os grupos de profissionais (Chevallard, 1994, pp. 175-176, tradução nossa).

A transposição didática envolve a compreensão da *L'écologie du savoir enseigné* [A ecologia do saber ensinado] (Chevallard, 1994). Essa ecologia está interligada à gênese do saber ensinado e as condições que possibilitam a existência desse saber, ou seja, é "o conjunto dessas condições (e das análises que as tomam como objeto)" (Chevallard, 1994, p. 176, tradução nossa). É a ecologia do saber ensinado que leva ao processo de transposição didática, assim anunciado por Chevallard (1994):

> O processo de transposição didática surge então como o conjunto dos mecanismos pelos quais é gerado o saber ensinado, em formas compatíveis com o conjunto das condições que lhe são impostas e em relação às quais deverá provar sua viabilidade – a menos que desapareça dos sistemas didáticos (desaparecimento que é, aliás, um fenômeno banal e periodicamente observável) (p. 176, tradução nossa).

Tal como é anunciado o processo de transposição, cabe um questionamento, que o próprio Chevallard (1994) o faz e responde.

> De onde vem o saber ensinado? Vem, essencialmente, do saber sábio correspondente. Ao qual devem ser acrescentados elementos de saber endógenos, especificamente produzidos no interior do sistema de ensino (*lato sensu*), que designaremos aqui como *criações didáticas* (p. 179, tradução nossa).

A ideia do saber sábio estava associada ao produzido e legitimado pela comunidade sábia (acadêmica). Essa era a concepção inicial do fenômeno da transposição didática, modificada, posteriormente, pelo próprio Yves Chevallard, em outros artigos e com a proposição da Teoria Antropológica do Didático (Almouloud, 2007).

A influência do processo de transposição didática do *corpus* da Álgebra para a Álgebra escolar pode ser visualizada na Tabela4.

Tabela 4.

Um modelo resumido para caracterizar um processo de transposição didática (Chevallard, 1994, p. 201, tradução nossa)

Nada é mais revelador dessa pressão da cultura sobre o ensino de matemática que as concepções, que dominam as análises explicitadas e produzidas na noosfera tanto quanto as práticas de ensino, concernentes "à noção de número", "à aprendizagem do número", etc. A fim de aprofundar um pouco mais esse tema, vamos primeiro dar um contraponto de vista, partindo da questão dos números *negativos*. Longe de surgirem da relação de uma realidade extramatemática, eles aparecem dentro de uma determinada prática matemática, a resolução de equações. O número inteiro natural é solução da equação x = 3. Ora, o que acontece se tivermos a equação x + 3 = 0? Nenhum inteiro natural é a solução. Há um mistério, mas um mistério *intramatemático*. E a chave desse mistério não é, de modo algum, procurar na realidade extramatemática. Serão necessários quase dez séculos, dos algebristas árabes do século IX até os algebristas do século XIX e a Hermann Hankel (1867), para que os conceitos pertinentes fossem explicitados: não "o número", mas o de *sistema de números*, e o *princípio de permanência* associado a ele. Uma vez que, com efeito, a solução de uma equação desse tipo não pode ser um

número natural, consideremos (adotando aqui um ponto de vista realista que, tecnicamente, pode traduzir-se imediatamente de um ponto de vista construtivista) que existe um sistema de números, satisfazendo as "leis usuais" dos números inteiros (para simplificar, não especificaremos os detalhes dessas leis), que são soluções das equações $x + n = 0$, onde n é qualquer inteiro natural não nulo. Denotaremos n^* o "número" solução da equação $x + n = 0$, de tal forma que $n^* + n = 0$. Como então calcular com tais números? Seja, por exemplo, efetuar 5 + 7*. Tem-se: (5 + 7*) + 7 = 5 + (7* + 7) = 5. Da igualdade (5 + 7*) + 7 = 5, deduz-se então que (5 + 7*) + 2 = 0, ou seja, que 5 + 7* = 2*. Da mesma forma, para calcular 5* × 7. Partimos da igualdade 5 + 5* = 0. Multiplicando por 7, obtém-se: 5 × 7 + 5* × 7 = 0, ou então 5* × 7 + 35 = 0, de onde se deduz que 5* × 7 = 35*. Do mesmo modo, obter-se-á por tais manipulações de igualdades o valor de 5* × 7*. Multiplicando 7* + 7 = 0 por 5*, têm-se 5* × 7* + 5* × 7 = 0. Como 5* × 7 + 5 × 7 = 0, obtêm-se em fim, por adição de 5 × 7 aos dois membros da igualdade precedente, 5* × 7* = 5 × 7. A famosa *regra dos sinais*, que é um quebra-cabeça quase não visto pela cultura dominante, encontra aqui a sua origem: ela é "forçada" por uma hipótese do trabalho matemático – o "princípio de permanência" (na transição dos inteiros naturais aos inteiros relativos) das leis que regem os inteiros naturais.

A modelização matemática contida na Tabela 4 possui um modelo algébrico característico para explicar a regra de sinais, no sistema de números inteiros relativos ($\mathbb{Z}$). Esse modelo algébrico é um exemplo simplificado do processo de transposição didática, que aproxima a axiomática da álgebra moderna com o *habitus* da prática da Álgebra escolar.

Vamos tornar mais explícitas as ideias de Chevallard (1994) em relação à modelização da Tabela 4. Ou melhor, faremos um processo simples de transposição didática.

As equações na forma $x + n = 0$ (com $n \in \mathbb{N}$) podem ser equações do tipo: x + 6 = 0; x + 5 = 0; x + 8 = 0; x + 23 = 0; x + 140= 0. A solução $x = n*$, para cada uma delas, está no sistema de números inteiros relativos. E quem é $n*$? Ele é nada mais que o simétrico de $+n$, ou seja, $n* = -(+n)$, portanto, na equação x + 140 = 0, x = n* = 140* = – (+ (140)). Daí $n + n* = 0 \Leftrightarrow 140* + 140 = -(+ (140)) + 140 = 0$.

Retomando a situação (5 + 7*) + 7 = 5 + (7* + 7) = 5, da Tabela 4. Ela é compreendida assim: (5 + (– (+7))) + 7 = 5 + (– (+7) + 7) = 5 + 0 = 5. Da igualdade (5 + (– (+7))) + 7 = 5, temos que:

$(5 + (-(+7))) + 7 + (-(+5)) = 5 + (-(+5)) \Leftrightarrow (5 + (-(+7))) + \mathbf{7} + (-(+5)) = 0 \Leftrightarrow$

$(5 + (-(+5) + (-(+2))) + (7 + (-(+5))) = 0 \Rightarrow (0 + (-(+2))) + (2 + 5 + (-(+5))) = 0 \Leftrightarrow$

$-(+2) + (2 + (5 + (-(+5))) = 0 \Rightarrow -(+2) + (2 + 0) = 0 \Leftrightarrow -(+2) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2^* + 2 = 0$

O que se conclui, portanto, que 5 + 7* = 2*. Essa operação está na Álgebra escolar, mas na sua forma final ("econômica"): $5x - 7x = (5 - 7)\,x = -2x$. Ela é soma algébrica de inteiros relativos com sinais opostos: (+5) + (– 7) = –2.

Da extensão do raciocínio anterior, podemos calcular 5* × 7, partindo-se de 5 + 5* = 0. Então,

$5 + (-(+5)) = 0 \Rightarrow (5 + (-(+5))) \times 7 = 0 \times 7 \Leftrightarrow (5 \times 7) + ((-(+5)) \times 7) = 0 \Leftrightarrow 35 + ((-(+5)) \times 7) = 0 \Leftrightarrow ((-(+5)) \times 7) + 35 = 0 \Leftrightarrow ((-(+5)) \times 7) + 35 + (-(+35)) = 0 + (-(+35)) \Leftrightarrow$

$((-(+5)) \times 7) + (35 + (-(+35))) = (-(+35)) \Leftrightarrow ((-(+5)) \times 7) + 0 = (-(+35)) \Leftrightarrow ((-(+5)) \times 7) = (-(+35)) \Leftrightarrow 5^* \times 7 = 35^*$.

Na Álgebra escolar essa operação aparece na forma "econômica", conforme vemos nos exemplos: $-5\ (+7x) = -35x$; $-5(7x + 3y + 2b + 5xy) = -35x\ -15x\ -10x\ -25xy$**.** Ela é a multiplicação algébrica de números inteiros relativos com sinais opostos: $(-5) \cdot (+7) = -35$. De forma semelhante, $5^* \times 7^* = 5 \times 7$, é equivalente a: $(-5) \cdot (-7) = (+5) \cdot (+7) = +35$.

O prosseguimento do discurso analítico de Chevallard (1994) revela uma espécie de *laminação cultural e ideológica* no ensino da Álgebra, assegurada principalmente pela noosfera. Essa laminação está na prática de ensino: "Esse esmagamento cultural da álgebra, retransmitido mesmo dentro da noosfera, como já foi dito, e que pesa sobre as práticas de ensino [...]" (Chevallard, 1994, p. 202, tradução nossa). Chevallard (1994) destaca que "[...] a álgebra elementar é, matematicamente falando, um autêntico *instrumento para a criação de conceitos* [...]" (p. 202, tradução nossa, grifo do autor). Para mostrar o efeito transpositivo de criação de conceitos, o autor estende a ideia "forjada" para o conceito de "sistema de números negativos", conforme vemos a seguir:

> [...] Foi dito como ela permite forjar o conceito de "sistemas de números negativos" (do sistema de números relativos); porém, aparentemente, ela fornece a ferramenta para criar o conceito de "sistema de números racionais": a e b sendo dois inteiros naturais (ou dois inteiros relativos) e a sendo não nulo, a equação $ax = b$ tem uma única solução, denotada por b/a. Se k é um inteiro não nulo, as equações $ax = b$ e $kax = kb$ são equivalentes, de modo que kb - $ka = b/a$ (um mesmo número racional tem assim uma infinidade de nomes na forma b/a) [...] (Chevallard, 1994, p. 202, tradução nossa).

Chevallard finaliza esse artigo de 1994 com um questionamento: "[...] é possível, dentro da sociedade, chegar a um consenso sobre a importância e maestria da ferramenta algébrica e do seu lugar correlativo no ensino obrigatório?" (p. 208, tradução nossa). O desdobramento desse questionamento no sistema de ensino francês, segundo o próprio Chevallard, era algo pouco provável que ocorresse num futuro próximo

Considerações finais

As ideias desse artigo perpassaram por aspectos epistemológicos contidos em quatro artigos de Yves Chevallard. A análise de conteúdo desses artigos visou responder: Quais aspectos epistemológicos do aritmético e do algébrico são revelados em artigos de Yves Chevallard de 1984, 1989, 1990 e 1994? Da leitura desses quatro artigos, extraímos as principais ideias relacionadas ao objetivo formulado: expor uma análise de artigos de Yves

Chevallard sobre a transição do aritmético para o algébrico que legitima o ensino dos objetos matemáticos no currículo escolar, mas que durante séculos passou por processos de transposição didática. Esse objetivo nos conduziu a uma possível resposta, mesmo que parcial, para a questão formulada.

Os artigos de 1984, 1989 e 1990 são de uma série intitulada: A transição do aritmético para o algébrico no ensino de matemática no colégio. Os subtítulos seguem uma lógica temática: A evolução da transposição didática; Perspectivas curriculares: a noção de modelização e Vias de enfrentamento e problemas didáticos. O artigo de 1994 centra-se no ensino da Álgebra elementar escolar e a relação que este tem com o processo de transposição didática: Ensino da álgebra elementar e transposição didática.

Nos artigos de Chevallard identificamos aspectos epistemológicos intrinsecamente interligados à Álgebra escolar. Entre este destacamos: 1) o contexto histórico – cultural do saber matemático; 2) a aritmética no habitus das práticas sociais; 3) o simbolismo algébrico; 4) o predomínio da aritmética no currículo do sistema em ensino francês; 5) a resistência de se aceitar a dialética algébrico/numérico, com predomínio do numérico/algébrico; 6) a insuficiência numérica dos sistemas de números: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, etc.; 7) a necessidade da extensão do sistema de números inteiros naturais ($\mathbb{N}$) para o sistema de números inteiros relativos ($\mathbb{Z}$); 8) o surgimento dos números "artificiais" (números negativos); 9) a extensão de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ pela modelização matemática algébrica e 10) a extensão dos sistemas de números pelas propriedades operatórias provenientes da álgebra moderna por meio da teoria de corpos e anéis.

O artigo de 1994 retoma as ideias dos artigos de 1984, 1989 e 1990, mas numa perspectiva epistemológica do processo de transposição didática. Identificamos que os aspectos epistemológicos relacionados à Álgebra elementar escolar são vários nesse artigo. Assim, selecionamos um fragmento, Tabela 4, que contém um modelo epistemológico simplificado para a regra do jogo de sinais pertinentes às operações algébricas do sistema de números inteiros relativos, principalmente, para as operações aditivas e multiplicativas. Outro ponto é a extensão das ideias para criação de conceitos matemáticos, por exemplo, dos números racionais e irracionais a partir de estudos de equações.

O que se infere, a partir dos artigos de Chevallard, que os aspectos epistemológicos da álgebra escolar seguem uma dialética algébrico-numérico, por meio de equações. Essa dialética revela que a modelização matemática está intrinsecamente relacionada ao processo de transposição didática dos objetos da Álgebra elementar ensinados no sistema de ensino francês. Por outro lado, vemos que a Álgebra escolar, quando compreendida como uma aritmética generalizada, permite que se modele incialmente um processo de transposição didática com o saber da Aritmética, mas a evolução desse processo transpositivo leva a uma modelização matemática adequada e independente da Álgebra elementar, ou seja, a modelização do cálculo algébrico por meio do caráter funcional das expressões algébricas polinomiais.

A modelização funcional das expressões algébricas requer compreensões epistemológicas das propriedades das extensões dos sistemas de números ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$). É nessas compreensões que o corpus da Álgebra ganha certa independência epistemológica do corpus da Aritmética e da Geometria. Assim, identificamos nos artigos de Yves Chevallard (1984, 1989, 1990, 1994) compreensões plausíveis que revelam vários aspectos epistemológicos relativos à transição do aritmético para o algébrico, mas essas são apenas algumas delas, existem outras nesses artigos que comtemplam a resposta para a questão que nos propusemos responder. Além disso, as ideias que expomos neste artigo não contemplam todo o conteúdo dos quatro artigos de Chevallard, o que merece atenção e estudo mais refinados para sabermos como essas ideias estão transpostas em outros sistemas de ensino, como o sistema educacional brasileiro.

Referências

Almouloud, S. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. Editora da Universidade Federal do Paraná.

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo*. Tradução: Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. Edições 70.

Bourdieu, P. (2013). *O senso prático*.(3a. ed.) Tradução: Maria Ferreira; Revisão da tradução:

Odaci Luiz Coradini. Vozes. (Coleção Sociologia).

Catalán, P. B. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Zaragoza: Prensas Universitárias de Zaragoza:Departamento de Matemática Aplicada, Universid de Zaragoza, 2003.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college - premiere partie – l'évolution de la transposition didactique. *Petit x, n. 5*, p. 51-94.

<https://irem.univgrenoblealpes.fr/medias/fichier/5x3_1570714298158-pdf >

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college – deuxieme partie – perspectives curriculaires: la notion de modelisation. *Petit x, n. 19*, p. 43-72.

<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/19x5_1570440008367-pdf>

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college – troisième partie – voies d'attaque et problemes didactiques. *Petit x, n. 23*, p. 05-38.

<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/23x1_1570438461783-pdf>

Chevallard, Y. (1994). Enseignement de l'algebre et transposition didactique. *Rend. Sem. Mat.*

Univ. Pol. Torino., v. 52, n. 2. <http://www.seminariomatematico.polito.it/rendiconti/cartaceo/52-2/175.pdf>

Chevallard, Y. & Johsua, M-A. (1991). *La Transposition Didactique: du savoir savant au savoir enseigné suivie de un exemple d'analyse de la transposition didactique*. La Pensee Sauvage.

Clairaut, A. C. (1746). *Élémens d'algèbre.*

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1510143r.r=Clairaut%2C%20Alexis%20Claude%20%281713-1765%29.?rk=21459;2>

Dumas, F. (2005). *Entiers, Rationnels, Decimaux*.

<http://math.univ-bpclermont.fr/~fdumas/fichiers/ZQDcapes.pdf>

Du Mans, J. P. (1554). *L'algèbre de Jaques Peletier Du Mans, départie en 2 livres*.

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62470z/f2.image.r=L'Algebre%20de%20Jaques%20Peletier%20Du%20Mans>

Euler, L. (1795). *Élémens d'algèbre.*

<http://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-8611>

Farras, B. B., Bosch, M. & Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico \

de la modelización matemática. *Revista Educação Matemática e Pesquisa*, *v. 15*, p. 1-28, <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12757>

Gascón, J.(2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico: el caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *v. 14, n. 2*, p. 203-231.

<https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362011000200004>

Lentin, A. & Rivaud, J. (1967). *Algebra Moderna. Vérsion española de Emilio Motilva Ylarri.* 2a. ed. Aguilar.

<https://pt.scribd.com/doc/50309584/Algebra-Moderna-Lentin-y-Rivaud>

Mendoza, M. A. G. (2005). La transposición didáctica: historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, v. 1,* p. 83-115.

<http://200.21.104.25/latinoamericana/downloads/Latinoamericana1_5.pdf >

Newton, I. (1802). Arithmétique universelle. Tome 1 – traduite du latin en français ; avec des notes explicatives, par Noël Beaudeux. Libraire Bernard. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3043885g/f9.image.r=l'Arithm%C3%A9tique%20universelle%20isaac%20newton>

Rónai, P. (2012). *Dicionário francês-português, português-francês*. 4a. ed. Lexikon.

Severino, A. J. (2007). *Metodologia do trabalho científico*. 23a. ed. rev. atual. Cortez.Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics*. v. II. Dover.

<https://archive.org/details/historyofmathema031897mbp>

Terquem, M. (1827). *Manuel D'Algèbre.* Libraire Roret.

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k37404r/f1.image.r=Manuel%20d'alg%C3%A8bre%20des%20M>

Usiskin, Z. (1995). Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In A.F. Coxford, & A.P. Shulte (orgs). *As ideias da Álgebra*. (pp.9-22) Tradução: Hygino H. Domingues. Atual.

Valente, W. R. (2005). A matemática escolar: epistemologia e história. *Revista Educação em Questão, v. 23, n. 9*, p. 16-30. <https://periodicos.ufrn.br/educacaoemquestao/article/view/8340/5996>

Viète, F. (1630). *Introduction en l'art analytic, ou nouvelle algèbre.*

<http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-4788>

Texto revisado por Maria Isabel de Castro Lima (baulima@gmail.com)