ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p508-555

A transição do aritmético ao algébrico no ensino da matemática no Colégio[1]
Primeira parte: A evolução da transposição didática[2]

The transition from arithmetic to algebraic in mathematics teaching at the Collège[3]
Part one: The evolution of didactic transposition

El paso de la aritmética al álgebra en la enseñanza de las matemáticas en el Collège
Primera parte: La evolución de la transposición didáctica

Le passage de l'arithmétique a 'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège
Première partie : L'évolution de la transposition didactique

Yves Chevallard [4]
Université Aix-Marsaille
https://orcid.org/0000-0002-2870-5681

Tradução
Saddo Ag Almouloud[5]
Universidade Federal d Bahia
Doutorado em Matemática e Aplicações
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Resumo

Este artigo trata da transição do currículo aritmético para o algébrico. Tentaremos destacar, de forma específica e necessariamente limitada, a extensão da convulsão que os professores tiveram que enfrentar. Mas, acima de tudo, tentaremos mostrar como as modificações estruturais feitas na época no texto didático impõem seus efeitos até hoje, de uma forma muitas vezes escondida, mas muito real, apesar da "reforma da reforma" que os programas de 1978 deveriam simbolizar para a oitava série.

Palavras-chave: Aritmética, Álgebra, Transição aritmética/álgebra, Transposição didática.

[1] A faixa etária de aluno é, em geral, de 11-12 anos (no sexto ano) a 14-15 anos (no nono ano)
[2] Texto original foi publicado na revista «petit X» nº5, 1984, pp. 51 – 94, IREM de Grenoble - França (original publicado junto com esta tradução).
[3] The age range is, generally, from 11-12 years (in sixth grade) to 14-15 years (in third grade)
[4] y.chevallard@free.fr
[5] saddoag@gmail.com

Abstract

This article deals with the transition from arithmetic to algebraic instruction. We will try to highlight, in a specific and necessarily limited way, the extent of the upheaval that teachers had to face. But above all, we will try to show how the structural modifications made at the time in the didactic text impose their effects even today, in an often hidden but very real way, despite the "reform of the reform" that the 1978 programs were supposed to symbolize for the eighth grade.

Keywords: Arithmetic, Algebra, Arithmetic/Algebra transition, Didactic transposition.

Resumen

Este artículo trata de la transición de la aritmética al álgebra. Intentaremos poner de relieve, de manera puntual y necesariamente limitada, la amplitud del trastorno al que tuvieron que enfrentarse los profesores. Pero, sobre todo, trataremos de mostrar cómo las modificaciones estructurales introducidas entonces en el texto didáctico imponen sus efectos hasta hoy, de manera a menudo oculta, pero muy real, a pesar de la "reforma de la reforma" que los programas de 1978 debían simbolizar para el octavo grado.

Palabras clave: Aritmética, Álgebra, Transición Aritmética/algebraica, Transposición didáctica.

Résumé

Cet article traite du passage de l'arithmétique à l'algébrique. Nous tenterons de mettre en évidence, de manière ponctuelle et forcément limitée, l'ampleur du bouleversement auquel les enseignants ont dû faire face. Mais surtout, nous essaierons de montrer comment les modifications structurelles apportées à l'époque au texte didactique imposent leurs effets jusqu'à aujourd'hui, de façon souvent cachée mais bien réelle, malgré la "réforme de la réforme" que, pour la classe de quatrième, les programmes de 1978 étaient censés symboliser.

Mots-clés : Arithmétique, algèbre, transition arithmétique/algèbre, transposition didactique.

A transição do aritmético ao algébrico no ensino da matemática nos anos finais do ensino fundamental
Primeira parte: A evolução da transposição didática

Nas últimas décadas, o corpo matemático ensinado nos colégios tem passado por uma profunda reorganização. Nesta reestruturação, a "reforma da matemática moderna", que atingiu tantos contemporâneos, foi, sem dúvida, o momento mais espetacular.

É notável, entretanto, que esta mudança, que provocou muita reação e comentários, não se beneficiou –com algumas exceções[6]– do esforço de análise que sua importância objetiva deveria ter engendrado. Neste artigo, tentaremos destacar, de forma específica e necessariamente limitada, a extensão da convulsão que os professores tiveram que enfrentar. Mas acima de tudo, tentaremos mostrar como as modificações estruturais feitas na época no texto didático impõem seus efeitos até hoje, de uma forma muitas vezes escondida, mas muito real, apesar da "reforma da reforma" que os programas de 1978 deveriam simbolizar[7] para a oitava série.

Uma fronteira esquecida

O currículo de 1945 para a oitava série (Apêndice 1) foi claramente organizado em torno de uma grande dicotomia, a da aritmética e álgebra. Esta distinção ainda estrutura o programa de 1958 (Apêndice 2). Ela desapareceu do programa "reformado" de 1971, e não aparece mais no programa de 1978. As palavras "aritmética" e "álgebra" não são mais usadas de forma muito limitada: um título "Aritmética" aparece no programa atual para a sétima série, e "Álgebra" reaparece no programa para a nova série. Mas a oposição entre a aritmética e a álgebra parece ter sido permanentemente apagada.

Esta lembrança da história, sem dúvida necessária[8], nos permite colocar o dedo em um fato essencial, do qual tiraremos algumas consequências mais tarde: o desaparecimento, em poucos anos, de uma forma secular de organizar o corpus matemático do ensino. A oposição entre a aritmética e a álgebra era de fato, até então, tradicional. Uma antiga tradição, aliás –uma

[6] Sobre o ensino de decimais na escola primária, ver Brousseau 1980; para uma análise geral da reforma, consultar Chevallard 1980a.
[7] "O programa de 1978 e seus objetivos, escritos pela equipe editorial do Boletim A.P.M.E.P., são fundamentalmente diferentes dos de 1971" (Activités mathématiques en quatrième - troisième, tome 1, publicação de l'A.P.M.E.P., 33, 1979, p. 9). Veremos que esta declaração deve ser claramente relativizada.
[8] Necessário porque, mesmo no caso em que ele tenha conhecido –como aluno, ou como professor– estágios anteriores da evolução do ensino, o professor tende em princípio a limitar seu horizonte ao estágio atual desta evolução: esta amnésia –que não evidenciaremos aqui– desempenha um papel funcionalmente essencial na denegação da transposição didática (ver Chevallard, 1982), ao permitir que os agentes do sistema de ensino aceitem plenamente como evidente, e natural, o estado atual da transposição didática.

vez que o princípio foi estabelecido pelo próprio Viète, no final do século XXVI[9]– e, de qualquer forma, bem estabelecido no uso: durou todo o século 19 e não se extinguiu até o início dos anos 70.

Esta tradição, que é uma concepção tanto epistemológica quanto didática, produziu um texto didático que permaneceu inalterado por muito tempo, ou pelo menos evoluiu lentamente, e contrasta duas fases. O primeiro tempo é a da aprendizagem da aritmética. Esta constituiu a base para os aprendizados subsequentes por excelência. O corpus aritmético e a disposição didática de suas partes quase não variaram durante vários séculos, desde Jacques Pelletier du Mans (1554), até meados do século XX. A aritmética forneceu o conjunto de requisitos sobre os quais, em uma segunda etapa, os autores de então basearam o curso da álgebra. Apresentando os *Elementos de Álgebra de Euler* (publicados em francês em 1774), seus editores nos contaram um pequeno e significativo conto encantador: "Os pontos de vista do famoso autor", eles escrevem[10], "eram para compor um livro elementar, por meio do qual se podia aprender, sem qualquer outra ajuda, álgebra em profundidade (. ...) O Sr. Euler escolheu para este fim um jovem que tinha levado ao seu serviço ao deixar Berlim, que era bastante versado em aritmética, mas que não tinha conhecimentos de matemática; ele tinha aprendido o ofício de alfaiate, e só podia ser colocado, no que diz respeito à sua capacidade, nas fileiras das mentes comuns. Este jovem não só compreendeu muito bem tudo o que seu ilustre mestre lhe ensinou e lhe ditou[11], mas até se viu em pouco tempo em condições de completar sozinho os cálculos algébricos mais difíceis (...)". Se a aritmética constitui, em um primeiro nível de instrução, um todo coerente e relativamente completo, ela é, portanto, em um segundo nível, a base sobre a qual a aprendizagem da álgebra será baseada.

Transição da aritmética à álgebra

Em qualquer profissão, rudimentos de aritmética tem sido uma exigência muito antiga: em teoria, não foram oferecidos livros de aritmética aos comerciantes e negociantes desde o final do século XV? A aprendizagem da álgebra marcava uma passagem, uma forma de progredir no saber que era também uma forma de ascensão na sociedade. E longe dessa passagem ser apagada (como é o caso hoje, como veremos), foi durante muito tempo destacada por toda uma retórica que tentava situar aritmética e álgebra como extensões uma da outra, ao mesmo tempo em que as contrastava.

---

[9] A obra de François Viète (1540-1603), *ln artem analyticam lsagoge* («Introdução à arte analítica»), foi publicada à Tours em 1591.
[10] No aviso da edição francesa de 1807 (Courcier et Maire, Paris), que seguimos aqui.
[11] Euler ficou cego em 1771.

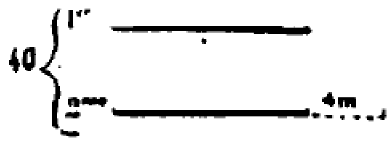
A maioria dos autores utiliza uma estratégia simples e clara de exposição a este respeito: começando com um problema aritmético, eles lembram sua solução "por aritmética" e depois lhe opõe a solução "por álgebra". O Documento 1, a primeira página de um panfleto dedicado à álgebra na escola primária (curso superior) e publicado em Marselha em 1924, fornece uma ilustração concisa e significativa desta abordagem da álgebra.

Documento 1

Emprego de letras na solução de problemas

Problema. - Temos um pedaço de tecido de um determinado comprimento e um segundo pedaço que é 4 metros mais longo. Estes dois fragmentos têm, juntos, 40 metros de comprimento. Pedimos o comprimento de cada fragmento.

Solução matemática



Representamos o comprimento do primeiro fragmento por uma linha.
Uma linha semelhante, aumentada em 4 m, mostrará o 2º fragmento.

Examinando esta representação gráfica, vemos de imediato que pequeno fragmento +pequeno fragmento + 4, ou duas vezes o pequeno fragmento + 4 =40 m.
Consequentemente, 2 vezes o pequeno fragmento – 40 m -4 m = 36 m
Daí temos, pequeno fragmento =36 m : 2 = 18m.
S, o grande fragmento = 18 m + 4 m = 22 m.

Solução algébrica

$$40\ m. \begin{cases} 1^{º}\ x \\ 2^{º}\ x + 4\ m, \end{cases}$$

$$40\ m. \begin{cases} 1^{º}\ x \\ 2^{º}\ x + 4\ m, \end{cases}$$

No lugar de linha, escolhemos x para o primeiro fragmento
Temos para o segundo cupom: x +4

Temos assim à nossa frente, como para a solução anterior, uma imagem muito nítida do enunciado e podemos escrever:

$$x + x + 4 = 40\ m.$$

2 vezes x +4 = 40 m.

2 vezes x = 40 m. – 4 m. = 36 m.

X = 36 : 2 = 18 m.

E, o grande fragmento = 18 m. + 4 m. = 22 m.

Cada vez que empregamos letras na resolução anterior, fizemos álgebra.
A resolução algébrica é mais simples, mais rápida que a solução aritmética. Elimina a necessidade de um longo raciocínio.

Deve-se notar aqui que os autores geralmente encontram uma dificuldade didática acentuada. O ideal seria obviamente propor um problema muito semelhante àqueles que a aritmética permite em princípio resolver, mas de tal complexidade que as únicas luzes da aritmética nos deixam impotentes para resolvê-lo eficazmente; e dar então uma solução por meio de álgebra! Mas como o principiante não domina a ferramenta algébrica –por definição–, ele deve se ater a um problema com uma estrutura suficientemente simples para que a introdução da linguagem e procedimentos algébricos permaneçam facilmente compreensíveis, e ao mesmo tempo, possivelmente, sublinhando que os mesmos métodos, apresentados em um exemplo que reconhecidamente não os exige, tornariam possível resolver problemas "muito complicados", diante dos quais apenas a aritmética já nos deixaria atordoados (Documento 2).

A transição da aritmética para a álgebra foi ainda mais acentuada até o início do século XIX, pois foi somente com o estudo da álgebra que os "sinais algébricos" foram introduzidos. Durante muito tempo, na verdade, a aritmética os ignorou[12].

Os autores, portanto, enquanto apresentam a solução algébrica do problema que tomaram como material de iniciação, apresentam também os sinais habituais, que gostaríamos de chamar de sinais aritméticos, ou seja, +, -, X, =, etc. Em um manual que pode datar do final do século 18, e cujo primeiro capítulo foi apropriadamente intitulado "Noções preliminares sobre a passagem de ARITMÉTICA para ÁLGEBRA, explicação e uso dos sinais algébricos", vemos o autor introduzindo cuidadosamente os sinais de adição, subtração, multiplicação, multiplicação e adição, O autor introduziu cuidadosamente os sinais de adição, subtração, multiplicação e divisão, o sinal de igualdade, e finalmente o x desconhecido, referente ao uso adotado na aritmética para o quarto termo –desconhecido e a ser determinado– de uma proporção (Tabela 2).

Documento 2

2. Os raciocínios, muito simples no problema proposto acima, mas muito complicados em outros, são compostos, em geral, de um certo número de expressões, tais como *adicionar a*, *diminuído de*, *é igual a* etc., repetidas frequentemente, e que dizem respeito às operações pelas quais as quantidades que entram na declaração da questão estão ligadas entre si. É visível que isso se abreviaria muito se se representasse cada uma dessas expressões por um sinal, que é o que se faz a seguir: Para indicar a adição, utiliza-se o signo +, que significa *mais*. Para a subtração, utiliza-se o signo -, que significa *menos*. Para a multiplicação, utiliza-se o signo ×, que significa *multiplicado por*. Para escrever que duas quantidades devem ser divididas uma pela outra, colocamos a segunda debaixo da primeira, separadas por traço: $\frac{5}{4}$ significa que 5 está sendo *dividido por* 4. Finalmente, para marcar que duas quantidades são iguais, colocamos entre suas expressões o sinal =, que significa igual.

[12] Ver Smith 1953, p. 395.

Estas abreviações, embora já sejam muito consideráveis, ainda não são suficientes, pois somos obrigados a repetir com frequência o número a partilhar, o número dado etc., a menor parte, o número procurado etc., que se prolonga muito. Com relação aos dados, o expediente que primeiro se ofereceu foi tomar, para representá-los, números determinados que servem de exemplo, como é usado na aritmética; mas não sendo possível com relação aos números desconhecidos, substituiu-se um sinal de convenção que tem variado com o tempo. Finalmente, concordou-se em usar quase sempre as letras do alfabeto, pois, na aritmética, um x é usado para o quarto termo de uma proporção da qual apenas os três primeiros são conhecidos; e é a partir do uso desses vários sinais que a álgebra tem resultado.

Do mesmo modo, em sua obra *Eléments d'algèbre* (edição de 1760), vemos que Clairaut inunda seu texto de notas de rodapé para esclarecer o leitor sobre o episódio em andamento (Documento 3), apresentando esses novos elementos do discurso matemático um a um.

Documento 3

Para melhor dar os princípios desta Ciência, vamos retomar a mesma questão, vamos escrever em linguagem comum os raciocínios que a álgebra faz para resolver o Problema e em caracteres algébricos, o que é suficiente para ela escrever para ajudar a memória. A menor ou terceira parte, seja ela qual for, expresso ela por uma única letra que será, por exemplo •••• *x*	Método algébrico para expressar o problema acima
A segunda será, portanto, mais 115, que está escrito como x +115, escolhendo o signo + que é pronunciado *mais* para designar a adição das duas quantidades entre as quais é colocado. Quanto à primeira ou maior parte, como excede em 180, será expressa como .... 3x +115 +180	O signo + indica a adição
ou reduzindo .... 3x+410 Mas esta soma das três partes deve ser igual a 890, que é expressa como 3x+410 = 890, usando o caractere = que é pronunciado *igual* para expressar a igualdade das duas quantidades entre as quais é colocado.	O signo = indica a igualdade
A questão, por este cálculo, é assim transformada em outra, em que se trata de encontrar uma quantidade cujo triplo adicionado com 410 faz 890. Encontrar a solução de tais questões é o que se chama resolver uma equação, a equação neste caso é 3x - 410 =890, é assim chamada, pois indica a igualdade de duas quantidades, resolvendo esta equação, é encontrar o valor da incógnita x por esta condição que seu triplo mais 410 faz 890.	Uma equação é a igualdade de duas quantidades. Uma equação é resolvida quando o valor da incógnita na equação é encontrado.
III	
Para resolver esta equação, eis como o algebrista raciocina, e como ele escreve os raciocínios. A equação a resolver 3x - 410 =890	Resolução da equação que expressa o problema acima.

Diz-me que 410 deve ser adicionado a 3x para fazer a soma 890, portanto 3x é menos de 890 de 410, que escrevo como 3x =890 - 410. Tomando o caráter - que é pronunciado *menos* para me lembrar que a quantidade que ele precede deve ser subtraída da quantidade que ele segue.	O caráter - indica a subtração

Naturalmente, a introdução de signos "algébricos" a partir de elementos da aritmética, que definitivamente se impõe no século XIX, atenuou um pouco a marca formal da transição da aritmética para a álgebra. Mas a transição é sempre enfatizada: ela faz parte da retórica do ensino em torno da dialética do antigo e do novo, que apresentamos em outros lugares[13]. Em seguida, flui em outras análises, e em particular na apresentação da álgebra como memória, tornando possível manter um rastro das operações realizadas. Esta propriedade foi notada há muito tempo, ao que parece, e Clairaut, reconhecidamente em uma perspectiva mais didática do que epistemológica[14], aponta mesmo o interesse e a necessidade da álgebra [15].

Assim, a álgebra é oposta à aritmética por uma propriedade que lhe confere um poder superior. Mas, numa segunda etapa da dialética que os autores tecem entre a aritmética (a antiga) e a álgebra (a nova), a álgebra aparece, positivamente, como a realização da aritmética. Originalmente aplicada ao mesmo conjunto de problemas, é uma aritmética livre da opacidade e do esquecimento que esconde dos nossos olhos a estrutura dos problemas estudados. É um instrumento superior para uma tarefa semelhante. É uma aritmética universal –como Newton a denominou– ou uma aritmética generalizada, como Poinsot observou um bom século depois, em uma definição que um autor de livros didáticos do final do século 19 e início do século 20, como muitos outros antes e depois dele, assumiu por conta própria e propôs à reflexão dos alunos dos anos finais do ensino fundamental: "A álgebra elementar nada mais é do que uma aritmética generalizada, ou seja, estendida de números particulares para quaisquer números e, consequentemente, das operações reais que

[13] Cf. Chevallard 1980b.
[14] A intenção retórica e didática de tais observações, não deve ser negligenciada.
[15] Tendo apresentado –segundo a técnica didática habitual– a solução aritmética de um problema aritmético e depois comparando-a com a solução por meio de álgebra, Clairaut escreve: "É provavelmente desta forma que os primeiros algebristas raciocinaram quando se colocaram questões semelhantes; sem dúvida que, ao avançarem para a solução de uma questão, carregaram sua memória com todo o raciocínio que os tinha levado ao ponto que tinham chegado; e quando as questões não eram mais complicadas do que as anteriores, não havia razão para serem adiadas; mas assim que suas pesquisas ofereceram mais ideias a serem retidas, eles tiveram que procurar uma maneira mais curta de se expressar, que tinham algumas linhas simples, com as quais, por mais avançadas que estivessem na solução de um problema, podiam perceber o que tinham feito e o que ainda faltava fazer. Ora, o tipo particular de linguagem que eles desenvolveram para este fim é a Álgebra. (Eléments d’Algèbre, troisième édition, Paris 1760, p. 3).

costumávamos realizar para operações que agora só indicamos por sinais; de modo que nesta primeira especulação da mente, pensamos menos em estabelecer o resultado destas sucessivas operações do que em traçar a tabela delas, e assim descobrir fórmulas para a solução de todos os problemas do mesmo tipo"[16].

O futuro da aritmética na reforma

Na França, a reforma da matemática moderna foi implementada no final dos anos 60: afetou as classes de sexta série e o primeiro ano do ensino fundamental no início do ano letivo em 1969, as classes de sétima série e segundo ano do ensino médio em 1970, as classes de oitava série e terceiro ano do ensino médio em 1971, e finalmente, em 1972, a classe de nona série. É obviamente dentro desta estrutura geral que o fenômeno estudado aqui deve ser situado. Do ponto de vista que nos preocupa aqui, esta reforma trouxe uma mudança profunda na organização do corpus matemático ensinado. O currículo reformado para a oitava série tem quatro títulos. Os dois últimos são dedicados à geometria[17]. Os dois primeiros títulos dizem respeito, um às relações, o outro aos números decimais e à abordagem dos números reais (apêndice 3). Formalmente, então, a estrutura aritmética/álgebra desapareceu, como notamos acima. O que aconteceu?

Para responder a esta pergunta, vale a pena dar uma rápida olhada nos conteúdos dos corpos tradicionais de aritmética e álgebra "elementares" (deixando de lado, por um momento, considerações sobre os níveis no currículo de ensino). Aritmética primeiro. Em um livro publicado em 1934 para os cursos médios e superiores do primeiro grau[18], encontramos uma primeira parte que trata da numeração, as quatro operações, problemas de aplicação destes conceitos, incluindo problemas "práticos" (compra e venda por dúzia, por cem; problemas de compartilhamento; compras duplas sucessivas; etc.), depois, "conceitos geométricos" (circunferência etc.), e finalmente um capítulo sobre números "complexos"[19]. A segunda parte, intitulada "Sistema métrico", é dedicada às medidas (áreas, volumes, pesos, capacidades etc.).

[16] Félicien Girod, *Traité d'algèbre élémentaire, théorie et pratique à l'usage des lycées, des collèges et de tous les établissements d'instruction (premier cycle),* vingt deuxième édition, Paris, s.d., p. 9.
[17] Vamos deixá-los de lado aqui.
[18] *Arithmétique, par une commission d'instituteurs*, Vannes, segunda edição de 1934.
[19] Recordemos que um número complexo é "um número concreto composto de várias partes referentes a diferentes unidades, e cujo sistema de numeração não é decimal". Assim, 3 anos 4 meses 15 dias, 43 graus 18 minutos 17 segundos são números complexos". (F.J., *Eléments d'arithmétique*, Tours et Paris, 1913, p. 182). "Diz-se que um número é concreto quando é acompanhado pelo nome da unidade", como em "vinte árvores, seis mármores, cinco francos e sessenta cêntimos" (conforma a aritmética citada na nota 13,, p.2).

Finalmente, uma terceira parte trata da divisibilidade, frações, razões e proporções, e regras (de três etc.) e sua aplicação a problemas práticos (poupança, ações e títulos etc.).

De uma forma mais desenvolvida, e abordando um nível mais elevado do currículo (matemática elementar), um livro de 1913[20] propõe um plano não muito diferente: o livro I trata da numeração e operações; o livro II, das propriedades dos números (divisibilidade, maior divisor comum, números primos etc.); o livro III, das frações; o livro IV, de potências e raízes; o livro V trata de medidas (sistema métrico, números complexos); o livro VI, de razões suas aplicações (regras de três, sociedade etc.); o livro VII trata de aproximações numéricas (operações abreviadas, erros relativos).

Corpus tradicional –com alguns acréscimos–, dizíamos. Na aritmética de Jacques Pelletier du Mans (1554), o primeiro livro aborda números e operações, a regra de três, direto e "reversa"; o segundo livro, frações; o terceiro livro, extração da raiz quadrada; o quarto e último livro, a regra dupla do falso (de dupla posição falsa), da regra da sociedade etc. Esta organização da aritmética, que não sobreviveu em nosso sistema de educação geral, pode ser encontrada hoje nas periferias ou nas margens do sistema de educação oficial: dentro, como em certos cursos vocacionais; fora, como no livro de aritmética[21], dirigido às pessoas "autodidatas", que ainda hoje é publicado no Reino Unido (como parte de uma coleção intitulada *Teach Yourself Books*), simplesmente atualizado: apresentado ao leitor como "*fully decimalised and metricated*", inclui, além das partes tradicionais (números e operações, fatoração de números, frações, razões e proporções, juros simples e compostos etc.), um capítulo sobre o imposto sobre valor agregado e um capítulo sobre máquinas de calcular e números binários.

Um bom testemunho do estado de equilíbrio alcançado na véspera da reforma é fornecido pela edição de 1958 da *Enciclopédia Autodidática Quillet* em sua seção "Aritmética", cujo índice é reproduzido abaixo (Apêndice 4a).

Foi este corpo tradicional de trabalho que se rompeu definitivamente –pois já estava bem desgastado– com a reforma do início dos anos setenta[22]. Mas a explosão da nebulosa aritmética não significou o desaparecimento da aritmética. As partes tradicionais deste corpus, liberadas de sua integração dentro de uma organização multissecular de saber ensinado, experimentarão doravante destinos relativamente independentes. O núcleo

[20] Ver a nota 13.
[21] L.C. Pascoe, *Arithmetic, Decimalised and Metricated*, Houdder and Stoughton, Londres, 1971.
[22] Esta –óbvia– ruptura revela, contudo, a um nível mais profundo, elementos que atestam a contiguidade: voltaremos a este assunto mais tarde.

essencial –números e operações sobre números– que constituía a base do sistema anterior, não desapareceu e encontrou uma súbita extensão associada a uma promoção na dignidade matemática: enquanto, de fato, o estudo "aritmético" dos números antes tratava apenas de números inteiros e frações, agora há uma progressão no estudo das estruturas numéricas que, de acordo com a lógica da filiação das estruturas, popularizada pela escola Bourbakista, é idealmente pensada como não oferecendo uma solução de continuidade dos números inteiros para os números reais, passando pelos números relativos, os números decimais e os racionais. Neste conjunto progressivamente desenvolvido, as frações ocuparam, no âmbito do programa de 1978 para a oitava série, produzido para atenuar os "excessos" do programa de 1971, um lugar de importância primordial[23]. A "teoria dos números", ou seja, o estudo da fatoração de números, MDC (Máximo Divisor Comum) etc., que recebe o rótulo de aritmética, foi incluído no programa da sétima série (e foi mantido sem alterações até o programa de 1977). Apenas a parte constituída por "problemas práticos" foi realmente modernizada e desapareceu quase completamente, exceto por alguns vestígios, como o estudo de "sequências finitas proporcionais" na sexta série (que prolonga um tema abordado no CM2[24] –estudo eventualmente concebido como uma preparação, embora curta, para a noção de aplicação linear, incluída no programa da nona série[25].

O que desapareceu, de fato, com a notável exceção –vamos repetir– de problemas práticos, não foi a aritmética (mesmo que a própria palavra não se refira mais a uma das partes do corpus aritmético tradicional), mas a dialética da aritmética e da álgebra. Entretanto, este colapso de uma estruturação tradicional pesou menos no componente aritmético do que no componente algébrico da matemática ensinada nos anos finais do ensino fundamental (alunos a partir de 11 anos de idade): foi a álgebra (entendida no sentido tradicional desta palavra neste nível de estudos matemáticos) que foi mais violentamente desafiada pelas mudanças feitas.

Uma álgebra indetectável?

Agora devemos lembrar rapidamente o que era a antiga organização do corpus algébrico. Obviamente formado depois do corpus aritmético, o corpus algébrico atingiu rapidamente uma estabilidade notável, que o deixou mais ou menos inalterado por dois séculos ou mais. Deixando de lado o tratado de Newton sobre álgebra, publicado sob o

[23] "Em cálculo, de acordo com as instruções oficiais, a novidade reside na ênfase dada ao conceito de fração. (...)" (Ministère de l'Education, *Mathématiques, classes des collèges, 6ême, 5ême, 4ême, 3ême,* 1980, p. 29).
[24] CM2 – alunos de sexta, sétima, oitava e nona séries na França.
[25] Os livros didáticos correspondentes aos programas de 1978 deram lugar a "problemas concretos"; contudo, estes surgiram essencialmente como aplicações, e não como problemas que permitem a construção e apropriação dos conceitos a serem ensinados.

título *Arithmetica Universalis* –altamente instrutivo em todos os aspectos, mas relativamente atípico– consideremos o trabalho de Euler, que já foi mencionado. Seu primeiro volume tem quatro seções. O primeiro volume aborda "diferentes métodos de cálculo para quantidades simples ou incompletas", ou seja, cálculo sobre números, mas sobre números (que denominamos) relativos, cuja introdução traz um exemplo com "a explicação dos Signos+ (Mais) e - (Menos)" (capítulo lI), e sobre números fracionários. As quatro operações aritméticas, raízes, potências, mas também as "quantidades impossíveis ou imaginárias" e os logaritmos são longamente apresentados. A segunda seção discute os "diferentes métodos de cálculo para quantidades compostas ou complexas", ou seja, cálculo algébrico; a terceira seção apresenta "razões e proporções"; a quarta, as "equações algébricas e a solução destas equações". Quanto ao segundo volume, é dedicado à "análise indeterminada", que não vamos examinar aqui[26]. Esta organização, obviamente, sofre variações de acordo com o nível visado, e evolui com o tempo, levando, na primeira metade do século 20, a um conjunto relativamente estabilizado de regras das quais, às vésperas do grande movimento de reforma, a *Enciclopédia Quillet* nos fornece uma versão conveniente (Apêndice 4b).

Pelo menos nos primeiros tempos da álgebra, três temas parecem essenciais: números algébricos (isto é, números relativos), cálculo sobre expressões algébricas, equações algébricas. O que aconteceu com eles no contexto da reforma? A dificuldade em responder a esta pergunta reside, pelo menos em parte, no fato de que os significantes e significados são dissociados, redistribuídos e, no que diz respeito ao conteúdo, lançados em novas estruturas conceituais que quebram as velhas concordâncias. Isto é particularmente verdadeiro no caso dos números algébricos, que perderam seu qualificador, como já observamos, para se tornarem números relativos. Sob este rótulo, o lugar a eles atribuído não foi diminuído, pelo contrário, foi aumentado (e nisto, eles se beneficiaram do movimento geral de amplificação do qual as estruturas numéricas também se beneficiaram). Seu estudo, incluído no currículo da sexta série, foi desenvolvido na sétima série: nos currículos destas duas séries, eles constituíram um título por direito próprio, tanto em 1969-1970 como em 1977-1978.

[26] Quando a pergunta estudada "não fornece tantas equações quanto somos obrigados a admitir desconhecidas, há algumas que permanecem indeterminadas e que dependem de nossa vontade; e isto faz com que nomeemos este tipo de questões como problemas indeterminados. Eles são objeto de um ramo particular de análise, e esta parte é chamada de "Análise Indeterminada". (Euler, op. cit., tome second pp. 1-2).

No entanto, não aconteceu o mesmo com o cálculo algébrico e o estudo das equações. Estas questões formavam tradicionalmente o núcleo da álgebra elementar. Em um *Manual de Álgebra* publicado em 1827, "para o uso de pessoas privadas da ajuda de um professor", o autor[27] iniciou sua primeira lição como segue:

1. A álgebra é a arte de atuar sobre quaisquer quantidades, por meio de signos gerais, de todas as operações de aritmética, e de representar, por meio dos mesmos signos, todas as relações entre essas quantidades.

2. A parte da álgebra que ensina as regras para a realização de operações aritméticas sobre quaisquer quantidades é denominada cálculo literal.

3. A parte da álgebra que trata de como representar, por meio de signos, as relações entre as quantidades é denominada cálculo por equação.

4. Veremos depois que em cálculo por equação, o cálculo literal é sempre necessário, portanto, é com o cálculo literal que se deve começar.

Este grupo (cálculo algébrico, equações algébricas) foi fortemente reduzido nos programas reformados. Para dar aqui apenas uma ilustração desta brutal deflação, reunimos no Apêndice 5 (e pedimos desculpas por seu tamanho) as listas de exercícios relativos à multiplicação de expressões algébricas, por um lado (a, b), em dois livros-texto de estilo antigo[28], por outro lado (c), em um manual considerado de nível elevado[29], conforme ao currículo de 1971: o confronto fala por si.

O termo álgebra desapareceu do programa de estudos (com exceção do programa da nona série), como já observamos. Mas, com a palavra, a coisa em si é varrida: a álgebra desaparece! Este desaparecimento é na verdade seletivo: as partes "numéricas" da álgebra resistem bem. Os números relativos são um elemento essencial do ensino na sétima série. As frações que foram colocadas de lado por algum tempo (em 1971), foram então repostas como elemento central do programa da quarta série (em 1978). São as partes "algébricas" da álgebra - cálculo e equações algébricas - que sofrem com a modernização. Parece haver várias razões para isso. Antes de mais nada, vamos apresentar uma razão puramente didática, que pode ter tido um efeito negativo. O cálculo algébrico, originalmente uma simples preliminar para o estudo das equações, de fato se tornou prolífico, como pode ser visto

---

[27] M. Terquem, autor do *Manual de álgebra ou exposição elementar dos princípios desta ciência*, publicado em Paris em 1827. A citação está nas pp. 1-2.
[28] Trata-se (a) do manual de F. Girod (cf. acima. nota 11) e (b) do manual de Lebossé et Hémery da oitava série, na sua edição de 1962 (Fernand Nathan, Paris).
[29] Trata-se do manual da coleção *Oueysanne-Revuz*, série vermelha, na sua edição de 1973 (Fernand Nathan, Paris).

em particular no documento do Apêndice 5a, sufocando gradualmente as outras partes do *corpus* ensinado. Era saudável tentar limitar seu desenvolvimento, e a tendência anterior à própria reforma estava de fato nesta direção: os livros didáticos haviam iniciado o trabalho deflacionário (como pode ser visto na comparação dos documentos a. e b. no Apêndice 5). Mas este tipo de fenômeno, que foi mais a regra do que a exceção na evolução do texto didático (pense aqui na degeneração do estudo das equações do segundo grau no famoso "trinômito" que atingiu as classes do segundo ciclo mais ou menos ao mesmo tempo), e a reação que provocou, foi encontrar outra força de mudança, sem dúvida muito mais poderosa: o aparecimento da álgebra *moderna*, sobre a qual é necessário fazer uma pausa por um momento.

Em seus *Elementos da álgebra moderna*, cuja quarta edição foi publicada em 1961 (a primeira foi em 1956), A. Lentin e J. Rivaud[30], que situaram a aparência da álgebra moderna por volta de 1910, a colocaram no prolongamento da aritmética e álgebra tradicionais (mas sem nomeá-las): "Na escola primária", escreveram, "a criança raciocina sobre coleções e quantidades concretas a partir das quais ela progressivamente tira a noção de número abstrato, independente da natureza das coisas contadas ou medidas". O ensino do segundo grau ensinou os adolescentes a manipularem x e y independentemente dos números que estas letras representavam. Mais um passo no cálculo, e foi o cálculo dos polinômios, depois a compreensão das transformações formais. Bem, a álgebra moderna formou o estudante para raciocinar sobre as propriedades das operações independentemente dos elementos (números, polinômios, transformações...) sobre os quais estas operações são realizadas[31]. Na verdade, as partes tradicionais da álgebra (cálculo e equações algébricas) estão bem integradas na álgebra moderna aqui apresentada. Mas elas não constituem a parte essencial, nem, acima de tudo, o começo. Os autores citados, cuja obra consiste em cinco livros, dedicaram seu último livro a "complementos sobre grupos e equações algébricas" (um desenvolvimento mais amplo do assunto levou à teoria das extensões dos corpos e à teoria de Galois, cujos rudimentos são apresentados neste livro). Assim, o tratamento das equações algébricas foi abandonado em um longo caminho na exposição moderna da álgebra. O cálculo algébrico, por sua vez, é encontrado no Livro 11, na forma do estudo dos anéis polinomiais. Mas o verdadeiro início da álgebra moderna é o estudo das estruturas (leis de composição, grupos, anéis, corpos), que ocupa todo o Livro 1. Ao homem honesto que em 1958 já foi introduzido à álgebra e recebeu números algébricos, expressões algébricas, equações etc., lhe foi oferecido, alguns anos mais tarde, relações

[30] A. Lentin et J. Rivaud, *Eléments d'algèbre moderne*, Vuibert, Paris, quatrième édition, 1961.
[31] Loc. cit., pp. V-VI,

binárias, elementos neutros etc. O capítulo sobre álgebra que M. Glaymann escreveu no início dos anos setenta para uma obra dirigida ao público em geral (apareceu na coleção *Les dictionnaires du savoir moderne)* é significativo a este respeito: a lei de composição, elemento neutro, comutatividade, elemento simétrico, associatividade, elemento regular, distributividade, e estruturas, monóide, grupo, subgrupo, grupo cíclico, morfismo de grupos, anel, anel integral, corpo etc., são as palavras-chave[32].

Em poucos anos, portanto, houve uma real substituição de objetos, cuja marca logo foi vista no texto didático: os programas reformados para a sexta, sétima e oitava séries incluíram todos um título: *Relações*. E o programa da oitava série introduziu as noções de grupo e divisão em grupo, o que levou ao exame da equação $ax = b$ no grupo multiplicativo de reais não-nulos. O cálculo algébrico foi reduzido ao mínimo: é o assunto do ponto 4 da rubrica 11 do programa (Apêndice 3). O estudo das equações, de acordo com o plano moderno de exposição de álgebra, foi destituído de seus títulos, e adiado para a nona série.

Álgebra sem álgebra?

A situação criada pela reforma por volta de 1970 consagrou a promoção de estruturas numéricas (ao lado das geométricas, que não discutiremos aqui), ao mesmo tempo em que provocou uma inflação teórica óbvia, tanto no que diz respeito às estruturas numéricas como geométricas. É este teoricismo que, depois de ter despertado inicialmente grande entusiasmo, deparou-se com uma multiplicidade de críticas, que levaram à elaboração dos programas de 1977-1978, atualmente em vigor.

O foco do debate está na forma como o conteúdo é tratado –em particular, a rejeição do "purismo" que permeou o espírito da reforma anterior[33]–, e não na distribuição dos conteúdos em si e na estruturação e equilíbrio das diversas partes do corpus ensinado. Como resultado, esta aparece mais como uma versão "reduzida" do corpus dos anos 70 do que uma versão fundamentalmente nova: ao lado do geométrico, que se pretende "desaxiomatizar", o numérico permanece predominante, mesmo que não inclua mais os mesmos materiais. Os números reais, de fato, são os grandes perdedores na reorganização. E são as frações e os racionais que, tendo ocupado o lugar assim liberado no currículo da oitava série, constituem agora a peça central do

[32] Maurice Glaymann, "L'algèbre", in *Les mathématiques*, Centre d'études et de promotion de la lecture, Paris, 1973, pp. 16-54.

[33] Na apresentação acima mencionada dos programas de 1978 (ver nota 2 acima), a equipe editorial do Bulletin de l'A.P.M.E.P. denunciou o purismo matemático que, de fato, "é um purismo de exposição, não de aprendizagem ou de funcionamento, e, portanto, não tem lugar no primeiro ciclo (...)".

estudo do numérico –os números relativos (inteiros e decimais) conservam na sétima série o papel preeminente que lhes era dado anteriormente.

Neste ponto é necessário dizer algumas palavras sobre a promoção dada nestes programas às frações e aos racionais. Por razões que não discutiremos aqui, as frações (associadas a razões e proporções) eram tradicionalmente rasgadas entre aritmética, geometria e, desde o nascimento do corpus algébrico, a própria álgebra. Apresentando seus *Eléments d'algèbre*, Clairaut não deixa de sensibilizar o leitor para o embaraço que esta pergunta lhe causou: "Eu tinha originalmente a intenção de ceder no mesmo livro", escreveu ele, "tanto os *Eléments d'arithmétique* quanto aqueles de Álgebra, e eu não teria deixado de lidar com proporções mais profundas do que as que fiz em meus *Eléments de géométrie*...". Naturalmente, ao passar da aritmética à álgebra, também se passou de frações aritméticas (proporções de inteiros, isto é, inteiros naturais) para frações algébricas (proporções de inteiros "algébricos", isto é, inteiros relativos) e para frações racionais (proporções de polinômios). Mas estes reavivamentos são significativos do interesse didático concedido ao tema: as frações constituem um tema de escolha para o ensino.

Como já foi salientado [34], "A ênfase colocada na noção da fração constitui, nas palavras das instruções relativas ao programa da oitava série de 1978, o elemento "novo" deste programa. Uma novidade de memória antiga! Henri Lebesgue, quase meio século antes, havia convidado firmemente os professores a se livrarem deste monstro do Loch Ness matemático: "... acho que as pessoas concordarão comigo", escreveu ele, "em declarar que casar 22^{imo} e 37^{imo} é um martírio que infligimos a crianças de doze anos por puro sadismo, sem nenhuma utilidade como circunstância atenuante... Mas ele acrescentou imediatamente: "Ouço todos os professores protestando. Alguns, porque as frações proporcionaram inúmeros exercícios para seus jovens alunos; após um momento de medo, eles perceberão que nunca lhes faltarão exercícios. Estou mais emocionado com a reclamação de outros e gostaria de deixar claro: "Remover a teoria das frações da sala de aula de matemática é remover um capítulo admirável". O único, talvez, entre os que nos restam, que não está lá apenas por sua utilidade imediata e que dá a sensação de pura beleza"[35]. No entanto, esta admirável construção torna-se, dentro da estrutura da matemática moderna, ainda mais admirável, ou digamos mais sutil: o manuseio sem complicações das frações dá lugar a uma ontologia refinada, na qual as frações, tendo se tornado pares de números, não são nada mais –em teoria mais do que na prática, é claro–do que o material para a construção dos racionais, classes de equivalência de frações. Para dizer a verdade, esta

[34] Ver 18.
[35] lbid., pp.25-26.

apresentação moderna não foi favorecida pelo programa de 1971 (na qual os reais seguiam diretamente dos decimais, sendo então os racionais apenas reais particulares, os quocientes dos inteiros). Mas o programa de 1978 lhe deu uma nova chance, e alguns livros didáticos, sem saber disso, a implementaram (Documento 4a). Esta perspectiva construtivista pode de fato ser facilmente evitada, em favor de uma concepção realista (a mesma que o programa de 1971 impulsionou: os reais supostamente dados –eles foram "construídos" no programa de 1971–, um racional é um real que pode ser escrito como um quociente de inteiros), e a maioria dos livros didáticos utiliza esta possibilidade (Documento 4b), que é conceitual e tecnicamente menos difícil, e, sem dúvida, mais próxima da representação do número que é efetivamente o dos alunos, e até mesmo do "matemático trabalhador". Mas a preocupação com o purismo não desapareceu: o gosto pelo "rigor" (sic) leva alguns deles (Documento 4c) a uma verdadeira confusão sobre o significado do signo de igualdade (o que, em princípio, não significa que os dois membros da igualdade sejam expressões idênticas - formal ou sintática -, o que já proibiria escrever que 6 = 2 X 3, mas que o que eles designam é uma e a mesma coisa, o signo de igualdade não significa nada além de uma identidade semântica). Dito isto, o problema – elegante, mas expansivamente resolvido por meio de classes de equivalência– existia antes da matemática moderna, e continua a existir: mas o antigo *corpus* o tratava (inconscientemente?) com grande discrição (Documento 4d), distinguindo, sempre que necessário, a fração (então implicitamente considerada como um escrito, ou seja, como uma razão) e o valor da fração (ou seja, o número racional designado por este escrito). Em todo caso, todo este jogo, deixado implícito no passado, e explicado mais ou menos profundamente hoje, participa da admirável construção de frações, que assim seduz os professores, como diz Lebesgue.

Documento 4a

6- Conjunto $\mathbb{Q}$
Números racionais
Lembremos:
No conjunto $\mathcal{F}$ das frações, nós definimos a relação $\mathfrak{R}$ seguinte:
Quaisquer que sejam as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, temos: $\frac{a}{b}\mathfrak{R}\frac{c}{d} \leftrightarrow (ad = bc)$
Estabelecemos (p. 48) que $\mathfrak{R}$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}$.
Para traduzir que duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são ligadas por $\mathfrak{R}$, nós escrevemos: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,
E nós dissemos que as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes.

Definição:
Damos a seguinte definição: “Cada classe de equivalência segundo $\mathfrak{R}$ é denominada um número racional.”
Designamos por $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais.

Representação de um Racional:
Sejam x um elemento de $\mathbb{Q}$ e $\frac{a}{b}$ uma fração, elemento de $\mathcal{F}$.
Dizemos que x é um número racional do qual um representante é a/b se e somente se x é a classe de equivalência segundo $\mathfrak{R}$ da fração $\frac{a}{b}$.
O número racional x é pois, o conjunto de $\frac{c}{d}$ equivalentes a $\frac{a}{b}$; temos:

$$x = \left\{\frac{c}{d} / c \in \mathbb{Z}, \quad d \in \mathbb{Z}, \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\right\}$$

Notemos que toda fração equivalente à $\frac{a}{b}$ é um representante do número racional x.
Capítulo 6: Conjunto $\mathbb{Q}$***, p.67***
(Fim da tradução do documento 4a)

Documento 4b

DOCUMENTO 4b
(Mathématiques/Quatrième, collection Monge, 1979)

Capítulo 4 (Álgebra)
Conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais
1 – Definição do conjunto Q dos racionais.
2 – Propriedades do conjunto Q dos racionais.
3 – Escrita decimal limitada de um racional.
4 – Notações fracionárias de um racional.
5 – Operações em Q.
6 – Comparação de dois racionais.
* * *

1. Definição do conjunto Q dos racionais

Definição: “Um número real (ou real) é chamado **número racional** (ou racional) se ele é igual a um quociente de dois inteiros relativos.”
Em outras palavras:
Um real x é um racional se existir um inteiro relativo não nulo b tal que x seja igual ao quociente a/b.
Exemplos:
- Os quocientes seguintes são racionais:

$$\frac{2}{3}; \frac{-4}{78}; \frac{-13}{-5}; \frac{248}{-614}; \frac{57}{57}; \frac{-29704}{1}; \frac{37}{-1000}; \frac{0}{-14}; \frac{359}{1}$$

- O real r igual ao quociente $\frac{-2,7815}{0,013}$ é um racional?
-2,7815 e 0,013 não são inteiros relativos.
Sabe-se que (propriedades dos quocientes reais):

$$\frac{-2,7815}{0,013} = \frac{-2,7815 \times 10^4}{0,013 \times 10^4} = \frac{-27815}{130}$$

Conclusão: r é um racional. (Fim da tradução do Documento 4b)

Figura 7.

Documento 4c

DOCUMENTO 4c
(Mathématiques, classe de quatrième, collection Queysanne et Revus, 1979)

Conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais
1 – **definição e exemplos**
No capítulo 4, encontramos números que poderíamos obter como quociente exato de um inteiro relativo a dividido por um inteiro relativo não nulo b. Esses números são chamados números racionais (ou simplesmente racionais). Eles são representados por frações, assim:

Número racional x	Exemplos de frações representando x
O inteiro -2	$\frac{-2}{1}; \frac{-6}{3}; \frac{-18}{9}; \frac{2}{-1}; -$
O decimal relativo 3,5	$\frac{7}{2}; \frac{14}{4}; \frac{35}{10}; \frac{-7}{-2}; -$
O racional $\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}; \frac{10}{6}; \frac{50}{30}; \frac{-5}{-3}; -$

Recapitulemos algumas definições principais:
Definições. Seja a um inteiro relativo qualquer e seja b um inteiro relativo não nulo.
1. A dupla (a, b), escrita na forma $\frac{a}{b}$ é denomina fração de numerador a e de denominador b.
2. Essa fração representa o quociente exato de a dividido por b, que se escreve também a/b. Temos pois, por definição:

$$b \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times b = a$$

3. Chama-se número racional todo número que pode ser obtido como quociente exato de um inteiro relativo dividido por um inteiro relativo não nulo.

Atenção! A mesma notação $\frac{a}{b}$ é utilizada para designar duas coisas diferentes:
- a dupla (a, b)
- o quociente exato de a dividido por b

o racional $\frac{14}{4}$ é igual ao racional de $\frac{7}{2}$;
a fração $\frac{14}{4}$ não é igual à fração de $\frac{7}{2}$

Quando escrevemos $\frac{14}{4}$, deve-se precisar se tratar-se da fração $\frac{14}{4}$ (a dupla (14; 4) ou do racional $\frac{14}{4}$ (que é igual a 3,5):
(dado que as duplas (14, 4) e (7, 2) são distintas.
Uma convenção cômoda

Para evitar esse inconveniente, sempre concordemos que, nesses cálculos, $\frac{a}{b}$ designa o número racional $\frac{a}{b}$, quociente exato de a dividido por b. Assim, podemos escrever:

$$\frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Quando você quiser falar da dupla (14, 4), será necessário precisar: “a fração 14/4“.
(Fim da tradução do Documento 4c)

Figura 8.

Documento 4d

DOCUMENTO 4d
Aritmética da Enciclopédia Quillet, 1958

(Mathématiques, classe de quatrième, collection Queysanne et Revus, 1979)

Simplificação das frações
149. Simplificar uma fração é substituí-la por uma fração igual, mas que tenha os termos menores.
150. **Propriedades fundamentais**.
1° Medimos duas fitas com o sétimo de uma largura dada A B. Uma delas mede 2 sétimos, a outra 4 sétimos da unidade. É evidente que a segunda tem o dobro da primeira:
$\frac{4}{7} = \frac{2\times2}{7} = \frac{2}{7} \times 2$, logo:
Teorema I. – Se multiplicamos o numerador de uma fração por um número, a fração é multiplicada por esse número.
2° Uma fita mede 5 sétimos do comprimento AB; uma segunda fita vale 5 quatorze avos da mesma unidade.
Um quatorze avos sendo duas vezes menor que um sétimo, o segundo comprimento é duas vezes menor do que o primeiro.
$\frac{5}{14} = \frac{5}{7\times2} = \frac{5}{7} : 2$. por conseguinte:
Teorema II. – Se multiplicamos o denominador de uma fração por um número, a fração está dividida por esse número.
3° Seja a fração $\frac{3}{5}$.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$$

Ela não muda de valor se multiplicamos seus dois termos por 3. Na verdade, se multiplicamos seu numerador, ela se torna 3 vezes maior; se multiplicamos o seu denominador, ela se torna 3 vezes menor. Por conseguinte:
Teorema III. – Se multiplicamos os dois termos de uma fração por um mesmo número, a fração não muda de valor.
Vê-se que uma mesma grandeza pode ser medida por uma infinidade de frações todas iguais.
Corolário. – Se dividimos os dois termos de uma fração por um mesmo número (a operação sendo possível), obtemos uma fração igual à primeira.
Seja a fração $\frac{18}{21}$ cujos dois termos são divisíveis por 3.
Pode-se escrever: $\frac{18}{21} = \frac{6\times3}{7\times3}$
E, segundo o teorema precedente: $\frac{6}{7} = \frac{6\times3}{7\times3}$
Temos então $\frac{18:3}{21:3}$; a fração $\frac{6}{7}$ tem seus termos menores do que a fração $\frac{18}{21}$, donde decorre a regra de simplificações de frações:
151. Regra. – *Para simplificar uma fração, dividimos seus dois termos por um mesmo número*.

Frações e racionais, de fato, não são apenas uma construção matemática admirável: eles também constituem um objeto didático interessante em muitos aspectos. O lugar do aluno (ou seja, o que pode ser exigido do aluno a este respeito) está claramente delineado: Lebesgue apontou judiciosamente que o capítulo está cheio de exercícios, cuja dificuldade (ou seja, grosso modo, a complexidade) pode ser finamente nivelada. O lugar do professor também está preparado para isso: o professor experimenta toda sua especificidade, diante do aluno, como arquiteto e construtor –funções nas quais o aluno não pode competir com ele por seu lugar em uma construção matemática que é ao mesmo tempo simples, rigorosa, rica, e cuja transparência completa é adquirida apenas ao preço de alguma sutileza intelectual, inacessível para o aluno, mas relativamente exigente. No entanto, há mais. De certa forma, qualquer objeto de saber didaticamente aceitável mostra dois "lugares": ele deve conter o "lugar" que o aluno virá a ocupar (as tarefas que o contrato didático lhe atribuirá), deve conter também um lugar especificamente atribuído ao professor. Esta marcação de lugares, consubstancialmente ligada ao funcionamento didático do saber, é um processo geral, que eu propus[36] denominar topogênese (do greco *topos*, lugar). Mas a dialética topogenética pode ser mais ou menos apertada, mais ou menos relaxada: neste último caso (que corresponde, como tentarei indicar mais adiante, ao que vemos hoje em dia na maior parte das vezes no uso da linguagem algébrica), os intercâmbios entre alunos e professor permanecem pobres, a comunicação é distante, porque não se medem contra as mesmas tarefas (o professor demonstra uma igualdade literal, o aluno a aplica a casos numéricos particulares). Com frações, uma vez estabelecida a arquitetura geral do edifício, a situação é diferente: uma vez passados os cálculos mais simples, os cálculos que não são triviais para o aluno –embora permaneçam dentro do intervalo do que pode ser razoavelmente pedido a ele– não são menos triviais também para o professor. Os parceiros da interação didática se aproximam em torno de uma tarefa única, até que às vezes parecem unir seus esforços na busca de uma resposta comum. Assim como a geometria (que se opõe à álgebra em geral do ponto de vista didático), as frações oferecem uma oportunidade para um verdadeiro convívio em sala de aula. As distinções qualitativas (marcadas por tarefas de naturezas diferentes) se desvanecem em favor de simples diferenças quantitativas (o professor vai mais rápido, mais seguramente, mas ele não sabe nada mais do que o aluno, e não faz nada mais do que ele). O grupo se reúne, ganha em coesão e, ao mesmo tempo, se diferencia continuamente sem perder sua identidade.

Estas são algumas das razões didáticas que explicam a preeminência de fato do estudo das frações nas classes atuais da oitava série. No entanto –e aqui voltamos ao nosso assunto, que na verdade não tínhamos deixado– no vocabulário dos professores, as frações fazem parte da álgebra! Mesmo que o programa oficial não use o termo, parece que o uso surgiu espontaneamente para chamar "álgebra", na prática da classe, o que não é geometria: álgebra é, globalmente, a outra da geometria. Este uso talvez irrefletido da palavra não é sem justificativa. As hesitações históricas que mencionamos também refletem (além da oposição entre frações de números aritméticos e frações de números algébricos) uma realidade que persiste: as frações (de números inteiros) não são algébricas no sentido de que não contêm letras (as letras são essencialmente usadas pelo professor para formular as leis que regem seus cálculos); mas são "algébricas" no sentido de que são o local de um jogo formal

[36] Voir Chevallard 1980b.

envolvendo a escrita. Eles oferecem, portanto, a oportunidade de uma álgebra sem álgebra, que é a parte principal da álgebra ensinada hoje. É precisa ver como se chegou lá.

A dialética numérico/algébrico

A fim de explicar mais completamente tanto o desbotamento das partes algébricas da álgebra quanto –correlativamente– o retorno das frações, temos que complicar um pouco o quadro que desenhamos até agora. À oposição estrutural da aritmética e álgebra correspondia - em princípio - uma dialética funcional entre numérico e algébrico. É sobre esta dialética que devemos primeiro discutir por um momento.

Para isso, devemos dar um passo atrás. Esta dialética, de fato, existe historicamente antes da álgebra (antes da construção de uma linguagem algébrica própria). Os gregos distinguiram entre dois sistemas aritméticos, o vulgar, ou logístico, aritmético dos calculadores, e o aritmético "próprio dos filósofos", como disse Platão, ou seja, mais ou menos falando, a teoria dos números. Os calculadores calculam. Os aritméticos estudam a estrutura dos números. Todos eles utilizam uma linguagem numérica para este fim, mas nem todos a utilizam para as mesmas tarefas, e nem todos reconhecem os mesmos valores. Na aritmética prática, a análise do numérico procurado pela linguagem adotada é um meio, ordenado a um fim: realizar contagens, realizar cálculos. Se eu quiser calcular 12 x 12 em nosso atual sistema de numeração, por exemplo, não preciso de outra análise do número 12 além daquela que me é dada imediatamente na escrita (decimal) deste número (dígito de dezenas: 1; dígito das unidades: 2). Mas se, como o escriba do papiro Rhind, só sei multiplicar por duplicações e adições sucessivas, terei que recorrer a uma análise menos imediata do número 12 (que não me é oferecido pela escrita decimal atual). Terei que observar que 12 = 4 + 8, e calcular da seguinte forma[37]:

1	**12**
2	**24**
4	**38**
8	**96**

do qual deduzo que 12 X 12 = 12 X (4 + 8) = 48 + 96 = 144. Tais formas de fazer as coisas, que ainda se encontram em tempos recentes[38], aparecem para o usuário contemporâneo como sobreviventes de uma era imperfeita. Um bom sistema de numeração-algoritmos deve ser tal que todas as informações necessárias para implementar os algoritmos de cálculo sejam fornecidas desde o início com os números dados escritos na linguagem numérica utilizada, ou

[37] Ver Smith 1953, p. 106.
[38] ibid.

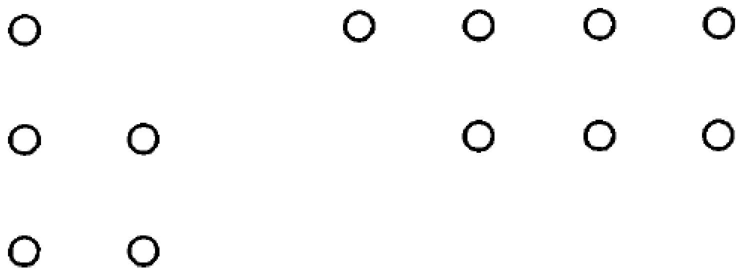
seja, aparente na escrita desses números em si. Em outras palavras, um bom sistema numérico-algorítmico rejeita qualquer apelo à matemática, mesmo em uma forma aparentemente ineficaz.

O usuário de tal sistema deve obviamente ser capaz de calcular que 4 + 8 = 12 (é o que pelo qual o sistema é feito); mas o contrato de uso que regula suas relações com o sistema o excluí de pensar que 12 = 4 + 8. Paradoxalmente, talvez um dos efeitos, e sem dúvida o objetivo (perseguido mais ou menos intencionalmente), da atividade matemática é propor procedimentos não matemáticos para uso social, obtidos pela desmatematização progressiva de procedimentos que originalmente eram propriamente matemáticos. O fato é banal e geral: o progresso da eletrônica me isenta hoje do ajuste que os usuários do conjunto galena eram obrigados a fazer...

De fato, o reino do cálculo numérico é regido pela lei da simplificação, internalizada como um *habitus*[39], sendo uma das cláusulas o princípio da conclusão dos cálculos. De acordo com este "princípio", a expressão "4 + 8" não pode, em cálculo numérico, aparecer como resposta, sendo o cálculo, nesta fase, "inacabado"[40].

A expressão "4 + 8" pode assim ser apenas uma forma transitória, lábil (porque quatro mais oito é igual a doze), e não existe de forma livre, assim como o átomo de oxigênio não existe fora da molécula O_2-.

A tradição "nobre" da "teoria dos números" é bem diferente. Os pitagóricos, logo no início da ciência grega, desenvolveram todo um conceito de representação "geométrica" dos números, ou seja, uma aritmético-geometria[41]. Por exemplo, considere os números inteiros 5 e 7. Suas representações podem ser organizadas da seguinte forma:



5 7

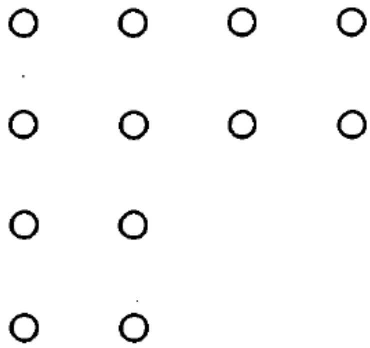
---

[39] P. Bourdieu refere-se ao *habitus* como "sistemas de disposições duráveis, estruturas estruturadas predispostas a funcionar como estruturas estruturantes, ou seja, como um princípio de geração e estruturação de práticas e representações (...)". (Bourdieu 1974, p. 175).

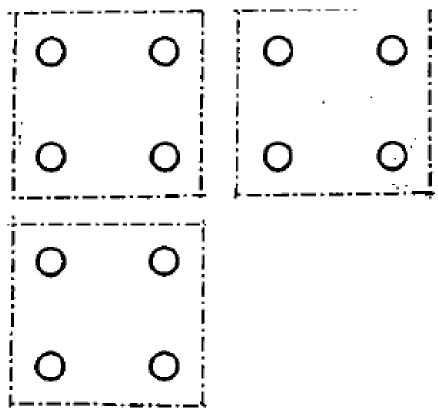
[40] As instruções de janeiro de 1957 (às quais voltamos mais tarde) falam explicitamente de "cálculo realizado até à sua conclusão": um fato raro e notável, pois é da natureza de um *habitus* não pressupor a explicitação dos princípios na origem de sua eficácia.

[41] Sobre a aritmético-geometria dos gregos, ver Michel 1959, pp. 295-325.

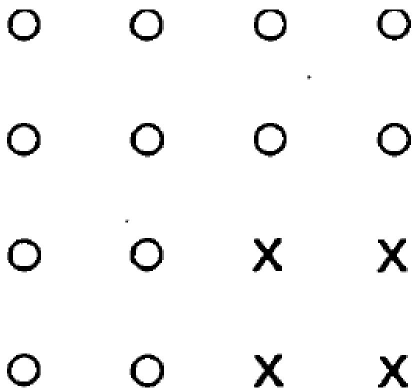
Reunimos estas representações da seguinte forma:



Ao agrupá-los corretamente, parece que a soma 5 + 7 é o múltiplo de 4 (mais precisamente 5 + 7 = 3 X 4):



Além disso, se "completarmos" o quadrado, vemos imediatamente que 5 + 7 é uma diferença de dois quadrados (mais precisamente que $5 + 7 = 4^2 - 2^2$):



Estas explicações, que, no sentido estrito, têm força demonstrativa apenas para os valores numéricos particulares tratados, têm, de fato, um valor genérico, como as figuras (e as demonstrações que permitem) em geometria: não estamos longe de uma demonstração válida para todos os pares ímpares consecutivos. Podemos, em retrospectiva, admirar a fineza intelectual que a invenção e o uso de tais procedimentos pressupõem. Mas também podemos ver que nossa linguagem algébrica atual (criada por Viète, Descartes e alguns outros) é uma extensão desta análise do numérico, indo além dela em termos de flexibilidade. Sobre o mesmo problema, hoje, obtemos, por exemplo, o seguinte: sejam 2p - 1 e 2p + 1 dois números ímpares consecutivos; sua soma, (2p - 1) + (2p + 1) = 4p, é um múltiplo de 4; e, uma vez que 4p = $(p + 1)^2 - (p - 1)^2$, também pode ser escrita como uma diferença de dois quadrados. A nova linguagem, em primeiro lugar, permite que o problema seja formulado em sua generalidade, e depois, resolvido de forma igualmente sistemática.

O cálculo numérico utiliza a linguagem numérica principalmente por seu poder designativo: "3/4" e "0,75", ou ainda "4 + 8" e "12", são equivalentes nesse sentido, pois designam o mesmo número (simplesmente, "3/4" é uma fração "não realizada", "4 + 8", uma soma não realizada): são nomes diferentes para o mesmo ser matemático. A aritmética "algébrica", por outro lado, distingue esses nomes, porque, embora designem a mesma coisa, eles não mostram a mesma coisa (eles não fornecem a mesma informação demonstrativa) sobre o ser matemático do qual são dois nomes diferentes ("4 + 8", ou melhor, "$2^2 + 2^3$", mostra que 12 é uma soma de potências de dois, etc.). É assim que, no coração da linguagem numérica, surge uma divisão, e para ser mais preciso, uma tensão entre dois modos de funcionamento: a eficácia designativa (própria do uso calculatório da linguagem numérica) tende a ignorar o valor demonstrativo da expressão escrita; o princípio de conclusão dos cálculos condena à efemeridade os "nomes intermediários", e "4 + 8" se torna "12", sem que nenhuma evidência seja preservada da história desse "12". Em contrapartida, a linguagem algébrica - principalmente porque é uma memória - permite preservar de maneira mais eficiente a informação demonstrativa e, acima de tudo, tornar visível a informação demonstrativa relevante: a passagem, na simplificação, da expressão (2p - 1) + (2p + 1) para a expressão 4p, mostra que (2p - 1) + (2p + 1) designa um número múltiplo de 4; a passagem, na complexificação, de 4p para $(p + 1)^2 - (p - 1)^2$, mostra que (2p - 1) + (2p + 1) é uma diferença de dois quadrados.

A criação da linguagem algébrica permite identificar mais claramente a problemática do estudo do numérico, colocando-a –sem se opor a ela– ao lado da perspectiva calculista. Assim, explicita o que ficou em grande parte implícito: a co-presença de duas formas de lidar com o numérico, o que alivia as tensões. Mas, acima de tudo, seu surgimento histórico permite dominar melhor a dialética do numérico e do algébrico, que até então era conduzida com meios matemáticos insuficientemente adequados. O algébrico é uma ferramenta para o estudo da ferramenta numérica, a primeira e mais elementar (a um nível avançado, por exemplo, a teoria das séries inteiras, a teoria das funções analíticas etc.). Mas, ao contrário (e é isto que nos autoriza a falar de dialética), para que o funcionamento desta ferramenta seja eficaz, é necessário estudar um pouco esta ferramenta, por exemplo, para levantar os problemas de fatoração de expressões algébricas (para resolver equações algébricas, em particular). Mas neste ponto, o próprio numérico é uma ferramenta para o estudo do algébrico: o fluxo é invertido. Sem mencionar todos os métodos numéricos, que na maioria das vezes invocam propriedades de análise (ou seja, relativas ao campo de reais e funções de uma variável real, por exemplo), podemos citar –para tomar um exemplo suficientemente grande para ser bem visível– o teorema de Eisenstein sobre a fatoração em Q[X][42]. Newton, em sua *Arithmetica Universalis* já mencionada, mostra grande atenção a este tipo de "retorno" do numérico para o algébrico. Assim, ele dá um método engenhoso para encontrar os fatores de uma expressão algébrica[43]:

Por exemplo, se a quantidade proposta for $x^3 - x^2 - 10x + 6$, em vez de usar x, eu substituir sucessivamente os termos da progressão aritmética 1, 0, -1, terei como resultado os números -4, + 6, + 14. Coloco cada um deles com todos os seus divisores na linha do termo da progressão 1, 0, -1 que o produziu, como pode ser visto no exemplo a seguir:

1	4	1, 2, 4	+ 4
0	6	1, 2, 3, 6	+ 3
– 1	14	1, 2, 7, 14	+ 2

Então, como o termo mais alto x^3 não tem divisor de unidade, procuro entre os divisores alguma progressão cujos termos diferem apenas por uma unidade, e que, descendo do mais alto para o mais baixo, diminuem como os da progressão 1, 0, -1. Encontro apenas uma dessas progressões, que é 4, 3, 2. Portanto, tomo o termo + 3 que está na mesma linha do 0 da primeira progressão 1, 0, -1, unindo-o ao x, e tento dividir por x + 3, com sucesso, e obtenho como quociente $x^2 - 4x + 2$.

Além do desaparecimento da estrutura do *corpus* matemático ensinado em aritmética e álgebra, é a dialética do numérico e do algébrico –implicitamente presente através da "oposição" da aritmética e da álgebra– que será afetada. Mais do que nunca, as ligações entre o numérico e o algébrico serão afrouxadas.

Uma concepção empirista do real matemático

O apagamento da oposição entre aritmética e álgebra altera as condições da relação entre o numérico e o algébrico. A velha relação de ferramenta de trabalho com objeto de

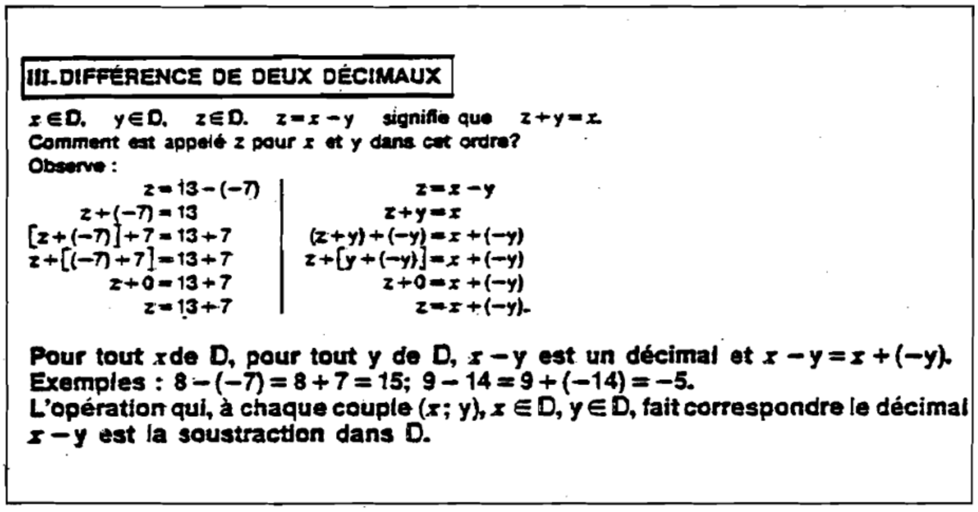
---

[42] Seja $P(t) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n t^n$ um polinômio de coeficiente em Z. Se existe um número primo p tal que: 1) p não divide a_n ; 2) p divide $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$; p^2 não divide a_0, então P é irredutível em Q.

[43] Arithmétique universelle (Aritmética Universal), vol. 1, pp. 47-48. Deixamos para o leitor a justificativa matemática necessária.

trabalho parece ter sido perdida. Os dois domínios –o numérico e o literal– coexistirão em uma simples justaposição, existindo em si mesmos e encontrando sua própria justificativa. As relações, que antes eram comuns entre estas duas ordens de realidade matemática, agora parecem ter sido abolidas. Ou melhor, dão lugar a relações novas e invertidas: não é mais o algébrico que permite estudar o numérico, mas o numérico que "justifica" e "nos permite compreender" o algébrico. Documento 5, extraído de um livro didático atual da oitava série[44] nos dá um exemplo claro deste fenômeno: a intenção didática aqui é justificar o fato de que x - y = x + (-y). Para o matemático, a "justificação" –que é então, estritamente, uma demonstração– está toda contida na coluna da direita: se eu definir -y em geral como sendo o número tal que y + (-y) = 0, e se as propriedades comuns –associatividade, etc.– ainda se aplicam ao novo conjunto de números assim definido, então o número z que devo acrescentar a y para obter x –o que é chamado de diferença entre x e y e que é notado como x - y– nada mais é do que x + (-y). Na didática aqui examinada, a "justificativa" envolve um apelo ao concreto, ou seja, ao numérico: este é o papel da coluna da esquerda.

Documento 5 – A álgebra como essência do numérico



III. DIFFÉRENCE DE DEUX DÉCIMAUX

$x \in D,\quad y \in D,\quad z \in D.\quad z = x - y$ signifie que $z + y = x$.
Comment est appelé z pour x et y dans cet ordre?
Observe :

$z = 13 - (-7)$	$z = x - y$
$z + (-7) = 13$	$z + y = x$
$[z + (-7)] + 7 = 13 + 7$	$(z + y) + (-y) = x + (-y)$
$z + [(-7) + 7] = 13 + 7$	$z + [y + (-y)] = x + (-y)$
$z + 0 = 13 + 7$	$z + 0 = x + (-y)$
$z = 13 + 7$	$z = x + (-y)$.

Pour tout x de D, pour tout y de D, $x - y$ est un décimal et $x - y = x + (-y)$.
Exemples : $8 - (-7) = 8 + 7 = 15$; $9 - 14 = 9 + (-14) = -5$.
L'opération qui, à chaque couple $(x; y)$, $x \in D$, $y \in D$, fait correspondre le décimal $x - y$ est la soustraction dans D.

São os cálculos numéricos na coluna da esquerda que sustentariam o significado (para o estudante) dos cálculos literais na coluna da direita. Infelizmente, o conteúdo da coluna da esquerda é, se assim se pode dizer, altamente improvável, porque o numérico não funciona dessa forma. Na verdade, os cálculos numéricos aqui apresentados existem apenas como uma imagem em espelho dos cálculos literais na coluna da direita! E é precisamente para permitir

[44] Este é o livro didático *Mathématique contemporaine pour la classe de quatrième*, publicado pela Magnard e de acordo com o programa de 1978.

tais cálculos que a linguagem algébrica é necessária... Há, portanto, um equívoco quanto à especificidade das duas ordens de cálculo e, consequentemente, do tipo de relação entre eles: a justificação do algébrico se baseia em um modo de operação do numérico que, na verdade, é apenas um decalque da operação do algébrico, e que, portanto, pressupõe o algébrico.

Não é fácil elucidar a nova relação que é assim afirmada. Entretanto, essa elucidação é necessária para esclarecer, além dos programas, os movimentos profundos que produzem decisões didáticas que seriam considerados por nós apenas como "truques", elementos atômicos de estratégias encontrando em si mesmos e em seus supostos efeitos seu único motivo. Voltemos ao exemplo que examinamos. O algébrico aparece como a "teoria" desta "realidade" que seria o numérico. Mas as relações em ato entre teoria (permitindo o estudo) e realidade (objeto do estudo) são inquestionavelmente baseadas em uma concepção empírica (e até mesmo, como veremos, empírico-sensualista) do conhecimento. Este é de fato o motivo –vivido, sem dúvida, como certo, na evidência que a ideologia fornece– da tentativa de "tirar" a teoria (algébrica) da realidade (numérica). Há aqui uma inversão da relação entre teoria e realidade. Pois o surgimento do teórico –preciso lembrá-lo– autoriza-se por si mesmo e, longe de vir da realidade, constitui-a (ou renova-a) como um objeto de conhecimento. Se eu escrever, por exemplo, 13 + 7 = 13-(-7), de acordo com um funcionamento do numérico antinômico à prática calculatória (isto é, à aritmética) do numérico, que nos faria escrever 13 + 7 = 20 -, estou fazendo álgebra no numérico: é a ferramenta algébrica, e só ela, que me permite trabalhar com o numérico. Entre o funcionamento aritmético e o funcionamento algébrico do numérico, há uma distância –um salto– que nenhum processo de "abstração" pode preencher.

Seria errado pensar que a análise anterior só é válida para o exemplo em que a ilustramos. Na realidade, seu escopo é muito mais amplo e, para entender seu pleno significado, é necessário voltar ao auge da evolução da transposição didática representada pela reforma de 1971 (a da "matemática moderna"). Ao contrário das opiniões dominantes de hoje que, segundo um oportunismo necessário e uma inconstância constante, rejeitam esta reforma por seus excessos e a veem como a aberração de um momento, deve-se considerar que esta aberração não é uma aberração, que apenas precipita, cristaliza e torna explícitas as características já visíveis na evolução das décadas anteriores. É um momento que dá sentido, em retrospectiva, ao que veio antes, e em grande parte determina o que virá depois dele. Pois, se há de alguma forma uma pausa, ela se baseia em uma superdeterminação muito ampla. Em profundidade, o programa de 1971 –para se referir à oitava série– constituiu uma impressionante radiografia de uma evolução que o programa de 1978 só suavizaria na superfície. É esta imagem "dura" que deve ser questionada.

Muito tem sido dito sobre a inflação modernista, o viés teórico, a ambição de rigor em matemática promovida pela reforma, e muito pouco tem sido dito sobre dois movimentos correlativos, menos espetaculares, mas determinantes, por trás desta tela. A primeira –que já mencionamos várias vezes– é a invasão do campo de estudo por estruturas numéricas. Os "excessos" do programa de 1971 foram o preço a ser pago por este golpe de força, que foi então realizado –uma tática simples por um momento: o programa de 1978 instalaria uma versão mais calma da mesma estratégia– com a artilharia pesada da "abordagem dos reais", "cálculos aproximados" e "enquadramentos", todos eles de grande ambição matemática. A segunda é a penetração de um tema que se tornará central, o da "observação" matemática e da "experimentação".

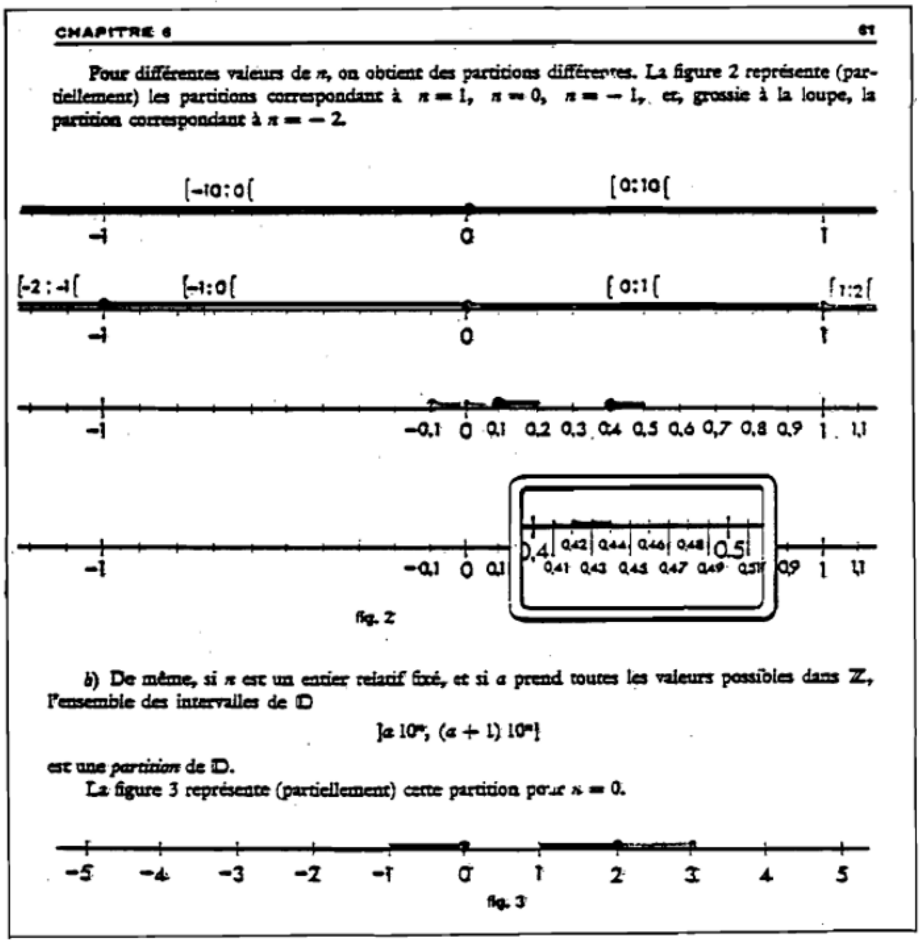
Falsa modernidade: este tema foi introduzido nas instruções de janeiro de 1957 (Apêndice 6a), o que as instruções de 1971 não iriam exigir em demasia. Em seguida, assumiu a aparência de uma reflexão sobre as ligações entre matemática e extramatemáticas. A garantia Bergsonian invocada aqui –*homo faber*, *homo sapiens*–, embora datada, é muito significativa a este respeito. A perspectiva proposta não leva a muito longe: os problemas de ensino são "resolvidos" por uma didática eufórica (Apêndice 6b). Na verdade, o contexto histórico que verá o estabelecimento da matemática moderna só está incompletamente formado. O que ainda faltava, para que a ideia de experimentação pudesse ser posta em prática, era um assunto que poderia ser submetido à observação e à experimentação. A este respeito, as instruções de 1957 ainda raciocinam da maneira antiga: a noção de experimentação é, acima de tudo, a ocasião para uma retórica que se volta contra si mesma, por falta de capacidade de aplicação. Mas a reforma deveria trazer uma abundância desta matéria de aplicação que faltava: era para ser numérico, e agora podemos entender melhor o lugar especial que os programas reformados deveriam dar a ela. Sua expansão foi de fato exigida pela exigência "experimental" induzida por uma certa concepção epistemológica e didática.

O palco está preparado para a ação, em consonância com uma encenação empírica do processo de conhecimento[45]. Há a "realidade", que é um dado cuja presença se impõe com a máxima força; e há a "teoria" deste dado, que se afirma derivar, por abstração, do objeto ao qual é dedicado. A dialética do numérico e do algébrico é então perdida: um de seus termos (o algébrico) dissolve-se no outro (o numérico), a que é concedido pela natureza uma existência quase material, e do qual o algébrico procederá geneticamente. A reforma de 1971 reordena assim o campo de estudo para produzir objetos sólidos "reais", com altos coeficientes de

[45] Para a compreensão do que se segue, recorremos a Althusser 1968, em particular, pp. 38-45.

existência: estruturas numéricas, e a misteriosa "linha física" cuja súbita promoção ontológica seria de outra forma ainda mais inexplicável[46]. Assim sendo, a introdução do literal (o algébrico) é identificada com o movimento pelo qual, no processo empírico do conhecimento, representa-se a essência do real, que é todo o conhecimento que o sujeito pode derivar do objeto pela abstração: permite distinguir entre um real essencial e um real não essencial, uma casca ou um acidente que o processo de abstração abandona como um resíduo impensado. A abstração, que visa trazer à tona o que pode ser conhecido do objeto, atua por meio de lavagem e decapagem: este tema geral do conhecimento empírico é corretamente respondido nos programas pela noção de "aproximação" ou "aproximação" do "real" (que nunca foi tão bem nomeado). Estes são alcançados por meio de purificações sucessivas, que gradualmente eliminam a gangue não essencial. Tal manual, escolhido entre muitos - oferece uma ótima ilustração (documento 6): a imagem da lupa –um emblema do conhecimento empírico, do qual é o instrumento privilegiado, pois permite ver melhor e fazer ver– é necessária e simboliza, melhor que um longo comentário, esta concepção do conhecimento como visando trazer o invisível à vista de todos.

[46] Ver Chevallard e Johsua 1982, especialmente pp. 200-203.



CHAPITRE 6 61

Pour différentes valeurs de n, on obtient des partitions différentes. La figure 2 représente (partiellement) les partitions correspondant à $n = 1$, $n = 0$, $n = -1$, et, grossie à la loupe, la partition correspondant à $n = -2$.

fig. 2

b) De même, si n est un entier relatif fixé, et si a prend toutes les valeurs possibles dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des intervalles de $\mathbb{D}$

$$]a\,10^n; (a+1)\,10^n]$$

est une *partition* de $\mathbb{D}$.

La figure 3 représente (partiellement) cette partition pour $n = 0$.

fig. 3

Uma concepção como essa do conhecimento não consegue capturar a realidade para a qual precisaria produzir o conhecimento, porque ela perde a constituição da realidade como objeto de conhecimento[47]. A álgebra não serve mais para conhecer o numérico. Agora, é apenas uma estenografia essencialista que descreve, resume e separa a essência do acidente. O surgimento "moderno" da dicotomia entre "observação" e "teoria" – que os manuais atuais adotam com frequência– é, assim, correlativo a uma dissolução do objeto de conhecimento em favor do objeto real, agora apresentado em uma abstração supostamente imediata e fácil. A ordem didática se organizará em torno dessa epistemologia imaginária.

Referências.

Althusser, L. (1968), *Lire le Capital,* François Maspéro, Paris. BOURDIEU P. (1974), *Le sens pratique,* éditions de Minuit, Paris.

Brousseau, G. (1980), Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques,* 1, ·1, pp. 11-59.

---

[47] Sur la distinction entre « objet réel » et «objet de connaissance», voir Althusser 1968, pp. 46°49.

Chevallard Y. (1980a), Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante, *Recherches,* 41, pp. 71-99.

Chevallard, Y. (1980b), *La transposition didactique,* 1 REM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1982), *Pourquoi la transposition didactique ?* Publication du séminaire de didactique et pédagogie des mathématiques, 32, Grenoble.

Chevallard, Y. et Johsua M.A. (1982), Un exemple d'analyse de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* 3, 2, pp. 157-239.

Michel, P.H. (1950), *De Pythagore à Euclide,* Les Belles Lettres, Paris.

Smith, D.E. (1953), *History of mathematics,* volume 11, Dover publications, lnc., New York.

APÊNDICE 1

CLASSE DE *QUATRIÈME* CLÁSSICA A E B e DE *QUATRIÈME* MODERNA (oitava série no Brasil)

PROGRAMA DE 1945

(excertos)

Aritmética

Prática, sobre exemplos, da decomposição de um número inteiro em fatores primos, da busca pelo máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum de dois ou mais números. Aplicações às frações.

Álgebra

Números algébricos (positivos, nulos, negativos). Operações sobre esses números expostos a partir de problemas concretos. Desigualdades.

Medidas algébricas de vetores em uma reta orientada. Relação de Chasles. Localização de um ponto sobre um eixo.

Elementos do cálculo algébrico: propriedades de somas e produtos. Potências. Produto e quociente de duas potências de um número: uso do expoente nulo e de expoentes negativos.

Monômios. Produto de monômios. Quociente de dois números. Soma de monômios semelhantes (limitando-se a monômios de uma, duas ou três variáveis). Polinômios de uma variável; adição, subtração, multiplicação por uma constante.

Equações numéricas do primeiro grau de uma incógnita.

Problemas conduzindo a uma equação numérica do primeiro grau de uma incógnita.

APÊNDICE 2

CLASSE DE *TROISIÈME* (nona série no Brasil) - PROGRAMA DE 1958

(excertos)

Aritmética

Prática, sobre exemplos, da decomposição de um número inteiro em um produto de números primos; prática da busca pelo máximo divisor comum e pelo mínimo múltiplo comum de dois ou mais números. Aplicações.

Álgebra

I. - Números relativos (positivos, nulos, negativos).

Orientação de um segmento (vetor); orientação de uma reta (eixo); medida algébrica de um segmento orientado em um eixo; localizar um ponto em um eixo (abscissa).

II. - Operações básicas com números relativos: adição e subtração, multiplicação e divisão.

Extensão para os números relativos das propriedades fundamentais estabelecidas para números aritméticos (classe de *cinquième* (7º ano do ensino fundamental do Brasil)), concernindo as somas, as diferenças, os produtos, as potências quadradas, os quocientes, o inverso de um número não nulo. Condição para que um produto seja nulo.

Definição dos expoentes negativos e expoente nulo.

Comparação de números relativos; desigualdades.

Desigualdades relativas ao valor absoluto de uma soma ou diferença.

Relação de Chasles para três pontos localizados em um eixo. Segmento definido pelas abscissas dos pontos que o limitam: medida algébrica deste segmento orientado, medida do comprimento desse segmento, abscissa do ponto médio deste segmento.

III - Noções de variáveis e correspondência entre variáveis.

Expressões algébricas dependentes de uma ou mais variáveis; cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica para valores numéricos atribuídos às variáveis.

Monômios com uma ou mais variáveis, multiplicação; adição de monômios similares.

Polinômios; forma reduzida. Polinômios ordenados; adição; multiplicação.

Produtos notáveis: $(x+y)^2$, $(x-y)^2$, $(x+y)(x-y)$

IV - Equações: posição do problema; significado do símbolo = neste problema. Equações de primeiro grau de uma incógnita, de coeficientes numéricos. Resolução de problemas simples usando tal equação.

APÊNDICE 3

CLASSE DE *QUATRIÈME* - PROGRAMA DE 1971

(excertos)

1. - Relações

Revisão das noções apresentadas nas aulas anteriores e complementos; produto cartesiano, relação, aplicação, composição das aplicações; bijeção de um conjunto em um conjunto e bijeção recíproca.

Noção de grupo: definição (extrairemos exemplos do programa).

II. - Números decimais relativos e abordagem dos reais.

1. Grupo de potências de dez.

Números decimais relativos escritos $a \cdot 10^n$ com $a \in \mathbb{Z}\, e\, p \in \mathbb{Z}$ e na forma de números com virgula: adição, multiplicação, ordem, valor absoluto. Resumo das propriedades fundamentais do conjunto assim estruturado de decimais relativos.

2. Cálculos aproximados

a) Aproximação [*encadrement*] de um número decimal por intervalos do tipo:

$[a.10^p, (a+1.10^p[,]a.10^p, (a+1).10^p[, [a.10^p + (a+1).10^p]$ com $a \in \mathbb{Z}\, e\, p \in \mathbb{Z}$

Em exemplos: aproximação [*encadrement*] de uma soma, de um produto.

b) Exercícios de determinação, para um decimal estritamente positivo dado e para um número inteiro relativo n, do número decimal $a.10^n, com\ x\epsilon\mathbb{N}$, verificadas suas desigualdades $0 \leq d.x.10^n \leq 1 < d(x+1).10^n$.

c) Exercícios de determinação, para um decimal estritamente positivo d e para um inteiro relativo n dado, do número decimal $y.10^n$y com $x \in \mathbb{N}$ tal que sejam verificadas as desigualdades: $[y.10^n]^2 \leq d < [(y+1).10^n]^2$.

d) Sequências decimais ilimitadas, números reais, classes de um número real.

3. Enumeração das principais propriedades que estruturam o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais: adição, ($\mathbb{R}$, +) é um grupo comutativo; multiplicação, associatividade, distribuição em relação à adição; ordem e valor absoluto. Será admitido que, para qualquer número real diferente de 0, existe um número real a^{-1} e apenas um tal que $aa^{-1} = 1$. Para qualquer par de números reais (a, b), com $a \neq 0$, existe um número real único x, denominado quociente de b por a, e escrito $ab^{-1}\ ou\ \frac{a}{b}$ tal que $ax = b$.

Exercícios simples de cálculo com tais quocientes.

Em exemplos numéricos, equações e inequações de primeiro grau com uma incógnita.

Uso de expoentes inteiros; grupo de potências de um número real não nulo.

Cálculos aproximados com números reais.

4. Exemplos de funções polinomiais (aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$). Grau.

Exercícios de cálculo em polinômios.

Produtos $(x+y)^2$, $(x-y)^2$, $(x+y)(x-y)$. Exercícios de fatoração.

APÊNDICE 4

ENCYCLOPEDIE QUILLET (1958)

TABLE DES MATIERES

(extraits)

ARITHMÉTIQUE

APÊNDICE 4a

Pages

ALGÈBRE

APÊNDICE 4b

EXERCÍCIOS DE MULTIPLICAÇÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Em diversos manuais

EXERCICES

Effectuer les multiplications suivantes :

133. $ab \times cd$	134. $xy \times dh$.	135. $gt \times xz$.
136. $ab^2x \times c^2d$.	137. $a^2bc \times dx^2$.	138. $fg \times hk^2$.
139. $5a^2b \times 3cd^2$.	140. $0,45am \times 3bc^4$.	141. $3\frac{1}{8}ax^3 \times 2\frac{1}{4}c^2d$
142. $0,3838\ldots a \times 0,4545\ldots b$.	143. $\frac{9}{4}a^2c \times \frac{10}{3}dy^4$.	144. $\frac{12}{7}a^4b \times 3\frac{1}{5}c^2y^2$.
145. $3a^4b$ par $\frac{5}{6}c^3d$.	146. $4a^4b$ par $5\frac{1}{3}cz$.	147. $\frac{2}{9}a^5b^3$ par $4\frac{3}{4}hy^2$.
148. $\frac{4}{7}pq$ par $+\frac{2}{9}rt^2$.	149. $\frac{5}{9}a^3b$ par $6\frac{1}{4}x^2y^2$.	150. $0,48a$ par $0,33\ldots$ [illegible].
151. $3a^2$ par $4a^3$.	152. $\frac{5}{8}a^3b$ par $6\frac{3}{4}ab^2c^3$.	153. $8a^4x$ par $\frac{2}{3}ax^2y$.
154. $20b^2z$ par $0,4a^2b^3$.	155. $2mx$ par $\frac{1}{5}b^2x^4$.	156. $4\frac{5}{8}a^3bc^2$ par $0,65ab^2y^2$
157. $0,2a^4xy^3$ par $8ay^2$.	158. $\frac{3}{7}a^2$ par $\frac{5}{8}a^3y$.	159. $7a^3b$ par $2a^4by^2$.
160. $4a^m$ par $2a^n$.	161. $\frac{2}{9}b^{m+n}$ par $\frac{4}{5}b^{m-n}$.	162. $3\frac{1}{4}a^3$ par $2\frac{1}{9}a^m$.
163. $3a^i$ [illegible] par $2a^kc^{k-1}$.	164. $4ax^{m+n}$ par $3x^my^n$.	165. $\frac{2}{3}ab^x$ par $\frac{3}{4}a^xb^{1-x}$.
166. $4c^{x-1}dy^4$ par $3c^{3-x}d^{4-y}$.	167. $3x^{m-3n}$ par $\frac{2}{3}x^{m+8n}$	
168. $0,48a^{x-y-2}$ par $\frac{3}{4}a^{x-3y+2}$.	169. $4\frac{5}{8}p^{r-t}q^{s-t}$ par $0,456p^{r+2t}q^{s+t}$.	
170. $(2a^{m+1}b^{n-2}cy)^2$.	171. $\left(\frac{5}{8}a^2b^mc^p\right)^2$.	

APÊNDICE 5a (continuação)

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ALGÈBRE. 67

172. $(2x - 4y + 3) \times 3x.$ 173. $(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) \times a^2b$

174. $(3a^3 + 2a^2b - 4ab^2) \times 5a^2b^3.$ 175. $(3ax - 2by - 4c^2) \times 2bcy.$

176. $(4x^2 - 5xy^2 + 7y^3) \times 2ax^2.$ 177. $(8b^4 - 5cy^3 - 2b^2x^2) \times \frac{2}{7} b^2cy.$

178. $\left(\frac{3}{5}a^2b^3 - \frac{5}{8}a^4b^5 - \frac{2}{3}a^3b\right) \times \frac{15}{4} a^3bc.$ 179. $(8a^2 - 3b^2 + 4c^2) \times 3a^m b^n c^p.$

180. $(7a^{m-4} - 3a^{m-3} + 4a^{m-2}) \times 0.5a^{n+1}b^p.$

181. $\left(\frac{2}{3}a^m - \frac{4}{9}a^{m-1}b - \frac{3}{8}a^{m-2}b^2 + 4a^{m-3}b^3\right) \times 6\frac{2}{3}a^{2m-1}b^{2n-2}.$

182. $(0{,}3535\ldots x^{2-m}y^{2-3n} + 4{,}5x^my^n - 0{,}48x^4y^{4-3n}) \times 5\frac{3}{8}x^{2m}y^{3n}.$

183. $(3y^{m-n+p} - 8y^{2-3m-1} + 5y^{2-4m} - 6y^2) \times 6y^{m+n-p}.$

184. $\left[3a^2 - (4a^2 - 3b) + 8a^2 - 5b^2(2a + b^2)\right] \times 4a^2b^2.$

185. $\left\{3b + (2b - c) - 4c + \left[2a - (3b - c)\right]\right\} \times 3a^2bc^2.$

186. $\left\{4a^{m-n}b^p - \left[2a^m(b^n - c^p) - \frac{2}{3}b^{n-1}(2a^{m-2}b^{p+n} - 3ab^{n+1})\right]\right\} \times 4\frac{2}{3}a^{2m-n}b^{p+nm}.$

187. $(3a^2 - 2a + b) \times (4a - 2b).$

188. $(7a^2 - 2ab - 3b^2) \times (6a^2 - 3ab).$

189. $(3a^4 - 2a^3b - 5a^2b^2 + 6ab^3 - 8b^4) \times (3a^2 - 2ab + b^2).$

190. $(6a^3 - 2a^2x + 8ax^2 - 3x^3) \times (a^2 - 4ax + x^2)$.

191. $(x^2 - 3ax + 2a^2) \times (5x^2 + 8ax - 3a^2)$.

192. $(2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - 4xy^3) \times (2x^2y - 3xy^2 + y^3)$.

193. $(2m^3 - 3m^2n + 4mn^2 + 5n^3) \times (6m^2n - 3mn^2 + n^3)$.

194. $(2x^4 - 3x^3y - 5x^2y^2 + 7xy^3) \times (-2x^2 + 3xy - 4y^2)$.

195. $\left(0{,}4a^4 - \frac{3}{8}a^3 + 6{,}35a^2 - \frac{7}{16}a\right) \times \left(0{,}56a^2 - \frac{3}{8}a\right)$.

196. $\left(0{,}1212\ldots a^3b - \frac{4}{9}a^2b^2 + 0{,}2727\ldots ab^3 + 0{,}4646\ldots b^4\right) \times \left(\frac{5}{6}a^2 - \frac{3}{8}ab + 2b^2\right)$

197. $(3a^2 - 2a + 3a^3 - 1) \times (2a + 3 - 5a^2)$.

198. $(4a^3 - 3a^2 + 5a + 2) \times (1 - 3a + 2a^2)$.

199. $(3ax^3 + 2a^4 - 5a^2x^2 - 6a^3x + 7x^4) \times (15ax^2 - 3a^2x + 4x^3)$.

200. $(8p^2y^2 + 4y^4 - 5p^3y - 8p^4 + 6py^3) \times (2p^2y - 3y^3 + 2py^2 - p^3)$.

201. $\left(\frac{x^3}{4} - \frac{2x}{5} + \frac{3}{4} - \frac{6x^2}{7}\right) \times \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{7x}{5} - \frac{3}{4}\right)$.

202. $\left(\frac{4p^2y^2}{5} - \frac{3p^4}{8} - \frac{2p^3y}{5} + \frac{7py^3}{3} - \frac{9y^4}{11}\right) \times \left(\frac{2p^2}{7} - \frac{5py}{6} + \frac{4py^2}{3} + \frac{2y^3}{13}\right)$

203. $(mx^3 - q - px + nx^2) \times (m'x^3 - n'x^2 - p'x + q')$.

204. $(ax^3 + d - cx + bx^2) \times (fx^2 + h - gx)$.

205. $(4pz - 2qz^3 + 5rz^2 - rs) \times (3az^2 - 5bz + 3cz^3 - 4d)$

206. $(a - bx + cx^2) \times (-2bx - 3a + 5cx^2) \times (a - 3bx - cx^2)$.

[illegible] EXERCICES SUR LA MULTIPLICATION.

207. $(a - 3bx^2 - 2cx^3 + 3dx) \times (5dx - 4bx^2 - a + 6cx^3) \times (3a - bx^2 - kx^3)$.

208. $[(a - b)x^2 - (a - b)x + (1 - b)] \times (ax - b)$.

209. $[(a^2 + ab + b^2)x^2 - (a + b)x + ab] \times [(a - b)x^2 + 2x - 1]$

210. $[(2m - 3n)p^2 - (m - n)p + (2m + n)] \times [(2m + 3n)p^2 + (m + n)p - (2m - n)]$.

211.
$[y^3 + (a + b)y^2 + (a^2 - b^2)y + (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)] \times [y^2 - (a - b)y + (a^2 - 2ab + b^2$

212. $[x^3 + (2a - 1)x^2 - (a^2 - 2a + 1)x + (a^2 - 4a + 2)] \times [x^2 + (2a + 1)x + (a + 1)]$.

213.
$(x^2 - y^2)(2x^3 - 4x^2y - 5xy^2) - (y^2 - x^2)(4x^3 + 8x^2y + 5xy^2) + \frac{x^2 - y^2}{7} \times (63x^2y - 42x^3)$.

214. $(4x - 3y)(7x + 8y) - (8x - 9y)(5x + 7y) - (3x - 2y)(5x - 8y)$.

215. $(2a - 3b)(5a - 8b) - [(4a - 5b)(2a - 6b) - (3a - 4b)(7a - 2b)]$.

216. $(2x^2 - 3x + 1)(5x^3 - 4x^2 - 2x + 1) - (4x^4 - 3x^2 + 1)(x - 1)$.

217. $(x^m - x^{m-1}y + x^{m-2}y^2 - x^{m-3}y^3 + y^4) \times (x + y)$.

218. $(a^{m+1} + 3a^m - 4a^{m-1} - 2a^{m-2}) \times (a^{2m-1} - a^{2m-2} + a^{2m-3})$.

219. $(3x^{m+n-1}y^p - 4x^{2m-3n}y^{p-n} - 2x^{m-2n+1}y^{p+2}) \times (5x^{m-n+1}y^{4-p} - 2x^{3n+2m}y^{n+p})$.

220. $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)$.

221. $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$.

222. $(y^3 + y^2 + y + 1)(my^3 + ny^2 + oy + p)$.

APÊNDICE 5b

EXERCICES

— Effectuer les produits suivants :

- **443.** $(3a^2b^3)\left(\frac{2}{3}ab^4\right)$.
- **444.** $\left(\frac{4}{5}a^3b^2c\right)\left(-\frac{3}{4}abc^4\right)$.
- **445.** $\left(\frac{4}{7}a^2xy^3\right)\left(-\frac{5}{2}a^3y^4\right)$.
- **446.** $\left(-\frac{3}{4}x^2y\right)\left(+\frac{3}{5}a^2y^3\right)$.
- **447.** $\left(\frac{9}{4}a^4x^2y^3\right)\left(-\frac{4}{3}ax^3\right)$.
- **448.** $\left(\frac{14}{3}a^3b^2x\right)\left(-\frac{6}{7}a^2b^4\right)$.
- **449.** $\left(-\frac{7}{2}ax^2y\right)\left(-\frac{8}{15}b^3xy^2\right)\left(\frac{5}{21}abx^3\right)$.
- **450.** $\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)^2(-4x^3y)$.
- **451.** $\left(\frac{5}{12}a^4b^3x\right)\left(-\frac{2}{7}ax^2y^3\right)\left(-\frac{14}{5}b^2xy^4\right)$.
- **452.** $\left(\frac{3}{5}x^2y\right)^2\left(-\frac{5}{4}xy\right)$.

— Calculer les expressions suivantes :

- **453.** $\left(-\frac{2}{5}ab^3\right)^2$.
- **454.** $\left(\frac{5}{3}a^2b^3x^4\right)^2$.
- **455.** $\left(-\frac{3}{2}a^4b^3y^2\right)^2$.
- **456.** $\left(\frac{7}{2}a^3b^4x^3\right)^2$.
- **457.** $\left(-\frac{9}{4}a^4b^3x^4\right)^2$.
- **458.** $\left(-\frac{6}{5}ax^4y^4\right)^2$.

— Effectuer les produits suivants :

- **459.** $\left(\frac{3}{2}a^2b-\frac{5}{4}ab+3a\right)\left(-\frac{4}{3}a^2b^3\right)$.
- **460.** $\left(\frac{5}{4}ax^2+\frac{3}{2}bx-4c\right)\left(-\frac{4}{5}abx^4\right)$.
- **461.** $\left(\frac{2}{5}a^2x-3ay-4by\right)(4a^3x^4y)$.
- **462.** $\left(-\frac{3}{2}x^4+\frac{15}{4}x^3-\frac{2}{5}x\right)\left(-\frac{20}{3}x^4\right)$.
- **463.** $(2x-3y)(4x-2)$.
- **464.** $(2a+3b)(-4a+6b)$.
- **465.** $(-4x+3y+1)(y-3)$.
- **466.** $(-2a+3b-5)(a-b)$.
- **467.** $(2x^3-3y^2+5)(x^2-y)$.
- **468.** $(4a^3-5b^4+ab)(a^4-b)$.
- **469.** $(5xy+3x-2y)(2x-y)$.
- **470.** $(-3xy+4x-2y)(x+5)$.
- **471.** $(14a^2b+5a^3-b)(a^2-2b)$.
- **472.** $(7a^2b-4b^3+2a^3)(2a^3+4b^3)$.
- **473.** Soient les polynômes : $A = -2x^2+3x+5$ et $B = x^2-x+3$.

  1° Calculer le produit A.B.

  2° Vérifier, pour $x = -3$ en calculant les valeurs numériques de A, B et du produit A.B.

APÊNDICE 5b (continuação)

- **474.** Soit le polynôme : $A = x^2 - 3x + 2$.

  1° Calculer le carré, puis le cube de ce polynôme.

  2° Vérifier pour $x = -4$, en calculant les valeurs numériques du polynôme et des résultats trouvés.

— Effectuer les produits suivants, réduire et ordonner les résultats :

- **475.** $(2x - 7)(-3x + 2)$.
- **476.** $(4x^3 + 7 - 2x^2)(x^2 - 2x)$.
- **477.** $(5x^2 - 2x)(3x - 4x^2)$.
- **478.** $(2x - 7x^3 + 5x^2)(3x - 5x^2 + 8)$.
- **479.** $\left(-2x + \frac{3}{2}\right)(4x + 3)$.
- **480.** $\left(\frac{8}{3}x - \frac{3}{2}x^2 + 5\right)(4x^3 - 5x^2 + 7)$.
- **481.** $(7x^4 - 2x^3 + 4x^2)(3x^2 - 5)$.
- **482.** $(2x^3 - 4x^2)(x^2 - 2x)$.
- **483.** $(2x^2 - 4 + 2x)(x^2 + 5 - 2x)$.
- **484.** $\left(\frac{5}{4}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + x^3\right)$.

— Calculer les expressions suivantes :

- **485.** $(2x + 3)(3x + 2)(x - 4)$.
- **486.** $(5x - 1)(2x + 3)(7 + 4x)$.
- **487.** $(3x^2 - 1)(x + 1)(x - 1)$.
- **488.** $\left(x - \frac{3}{5}\right)(5x^2 - 1)(5x + 3)$.
- **489.** $(2x^2 + 3x - 4)^2$.
- **490.** $(4x^3 - 7x + 2x^2 + 5)^2$.
- **491.** $(7x - 5)^3$.
- **492.** $(x^2 - x + 2)^2$.

— Développer et réduire les expressions suivantes :

- **493.** $5(3a^2 - 4b^2) - [9(2a^2 - b^2) - 2(a^2 - 5b^2)]$.
- **494.** $3a^2(2b - 1) - [2a^2(5b - 3) - 2b(3a^2 + 1)]$.
- **495.** $(2a + 5b)(3a - 2b) - (2a - 1)(3a + 2b) - (a - 2b)(5b - 1)$.
- **496.** $(2x - 3y)(5x - 2y) - (3x - 2y)(2x + 1) - (5x - y)(3y + 1)$.
- **497.** $(ax^2 - b)(ax^2 - 2b) + 3b(ax^2 - b) + b(b - 1)$.
- **498.** $(x - 1)(x - 2)(x - 3) + 6(x - 1)(x - 2) + 7(x - 1)$.
- **499.** $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)(x - y) + xy(x^2 + y^2)$.
- **500.** $\frac{2}{3}x^2y\left(2x^2 - \frac{y}{3}\right) - 2x^2(2x^2 - 1) + \left(2x^2 - \frac{y}{3}\right)\left(1 - \frac{y}{3}\right)(2x^2 - 1)$.

APÊNDICE 5c

CHAPITRE 14

5

Calculez les produits suivants (exercices 13 à 18).

13. $2 \times \left(x^2 - 5x + \frac{7}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^3 - x + \frac{1}{9}\right)$. $\frac{11}{4}x^2(x^2 + 12x - 5)$

14. $(x - 2)(2x + 3)$; $(x^2 + x - 1)(2x - 5)$; $(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 1)$

15. $(x^2 - 2x + 5)(x^4 - 2x^3 + x^2 - 1)$; $\left(\frac{x^2}{3} - 2x + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{2}x^2 - 2x - 1\right)$

16. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$; $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$; $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

17. $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$; $(2x - 3)(3x + 1)(x^2 + 1)$; $-\frac{5}{2}(x + 2)(-x + 5)$

18. $(x + 2)^2$; $(2x - 5)^2$; $(3x + 2)^2$; $(2x - 1)^2$; $(3x - 4)(3x + 4)$

19. Réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes de la variable z :

$$2(z - 3)(z + 3) - 8\left(\frac{1}{2}z + 1\right)^2; \quad z(z + 1)(z + 2) - 3(z - 1)^2$$

20. Ordonnez suivant les puissances décroissantes de la variable x le polynôme

$$P(x) = (4x - 9)(5x + 7) - 1 + x$$

Calculez le plus rapidement possible $P\left(\frac{9}{4}\right)$ et $P\left(-\frac{7}{5}\right)$.

APÊNDICE 6a

AS INSTRUÇÕES DE JANEIRO DE 1957

a) Observação e experimentação

Observação e experimentação: trata-se realmente de alinhar as matemáticas com as outras disciplinas científicas?

Não há dúvidas de que no início, na elaboração de todas as ciências, os percursos intelectuais são de mesma ordem: uma discriminação intervém depois, quando o matemático, tendo criado entes de razão, vai esforçar-se a estudar as propriedades deles. Mas, seu trabalho não tem valor profundo se sua construção, por mais abstrata que seja, toma sólido apoio sobre o real, se ela é capaz de juntar-se a ele de nele adaptar-se na medida do possível.

Não é essencial fazer com que a criança, e depois o adolescente, compreenda plenamente os laços estreitos entre a matemática e o mundo sensível? Esta seria uma das melhores maneiras –sem dúvida– de dar confiança ao iniciante, para evitar que ele ou ela se sinta rapidamente adiado por um estudo no qual, se permanecer privado de qualquer luz real, ele ou ela poderá vê-lo como uma espécie de ato de malabarismo, muitas vezes puramente verbal, e sem sentido aparente?

Nos estágios iniciais de iniciação e aprendizado, é através da observação e experimentação que esta conexão pode ser feita e tornada evidente. Seu papel aparece claramente na criação de seres matemáticos, com sua definição completa. Não é menos importante quando se trata de descobrir algumas de suas propriedades e, nesta ocasião, de acessar os caminhos do raciocínio.

A observação dos fatos, dos indivíduos, de seu comportamento, sejam os elementos envolvidos concretos ou abstratos, é a primeira operação, sensorial e mental, envolvida em qualquer pesquisa. Mas a experimentação, ou seja, a observação de fenômenos provocados voluntariamente, sob condições determinadas antecipadamente, e não impostas de fora, apresenta-se naturalmente à mente ativa e curiosa como uma espécie de necessidade. É claro que não se trata necessariamente de objetos materiais; pode ser, ou tornar-se, uma espécie de experimentação figurativa, envolvendo uma série de gestos imaginados, mas que de fato seriam viáveis.

A fase essencial de tal pesquisa é, naturalmente, a da interpretação dos resultados, que permitirá tirar conclusões: requer uma análise que deve ser feita com extremo cuidado e, em matemática, a natureza dos seres envolvidos obriga a tomar precauções particulares que é importante fazer compreender aos iniciantes. Pois um experimento, seja ele qual for, apenas coloca em jogo um número limitado de objetos particulares: portanto, mesmo que seja repetido várias vezes e modifique alguns dados, apenas revela, com todo rigor, um resultado válido sob tal e tal condição. Este é o primeiro ponto que deve ser explicado e adquirido. Depois vem a crítica: "As operações que realizei, ou que imaginei, são inevitavelmente condicionadas pelas situações e pelos elementos particulares sobre os quais trabalhei? Se sim, as consequências obtidas têm valor apenas para estas situações e elementos; se não, surge uma nova pergunta, ou melhor, uma série de perguntas, em que a abstração gradualmente se torna dominante: "As operações ainda são possíveis e os resultados ainda são válidos se eu modificar certos dados? Estas modificações, por sua vez, estão sujeitas a algumas restrições? Os resultados permanecem válidos independentemente destas modificações"? Desta forma, organiza-se uma reflexão lenta e progressiva, que deve captar e manter a atenção, e dar acesso às formas, abstratas e gerais, próprias do pensamento matemático.

Naturalmente, os tipos de "experiências" deste tipo podem ser muito variados, e é importante, para cada um deles, identificar claramente sua natureza e escopo, tentando chegar ao fundo das coisas. Aqui estão alguns exemplos simples, tomados ao acaso: No início da aritmética, definimos o produto de um inteiro a por um inteiro b como sendo a soma dos números b iguais a; os dois números a e b desempenham papéis diferentes; se representamos tal produto pelo símbolo a X b, não há razão para pensar que a X b pode ser igual a b X a. Entretanto, algumas experiências simples, se apenas aquelas realizadas para construir uma tabela de multiplicação, mostram que esta igualdade ocorre quando os cálculos são feitos a partir de dois números realmente dados. Estas observações, mesmo que sejam repetidas muitas vezes, não nos permitem afirmar que o resultado ainda é exato com dois números diferentes daqueles que já "testamos". Sugere-se outra ideia para uma experiência: voltar à origem, analisar o multiplicando "realizando" por alguns meios a coleção de unidades que ele simboliza, e depois reunir um número dessas coleções igual ao multiplicador; o número de unidades assim reunidas é igual ao produto da multiplicando e do multiplicador. Se todas estas unidades foram montadas a granel, não vemos mais nada, não estamos mais à frente do que antes, os dois números ainda desempenham papéis diferentes. Uma nova ideia deve ser descoberta: colocar ordem em cada uma das coleções, depois no grupo dessas coleções; a dificuldade talvez seja "inventar" um arranjo utilizável como a disposição retangular, em linhas e colunas, em seguida a simetria dos papéis aparece muito rapidamente, e se notará que, para os dois números parciais que foram utilizados para construir este esquema, os produtos do primeiro pelo segundo e do segundo pelo primeiro são iguais, sem necessidade de calcular estes dois produtos efetivamente. Esta é uma experiência que foi feita; é útil repeti-la mudando os números ou a natureza dos objetos que representam as unidades? Claro que não. Então o resultado obtido ainda é válido para dois outros números? Para dois números quaisquer? Sejam quais forem os dois números? Surge assim a propriedade geral que, uma vez bem declarada, pode ser representada simbolicamente por uma "fórmula" cujo significado é improvável de ser esquecido.

Naturalmente, a organização sistemática do trabalho manual, concebido não como uma pré-aprendizagem em um determinado ofício, mas como uma educação, é inteiramente desejável; não vale a pena mencionar o quanto o aluno pode ganhar com uma compreensão e colaboração bem compreendidas entre o professor de trabalho manual e o professor de matemática.

Vale lembrar, neste contexto, algumas frases de Henri Bergson, a primeira das quais deveria, de fato, servir como epígrafe para qualquer ensaio sobre educação: "Acreditamos que está na essência do homem criar material e moralmente, fazer coisas e fazer a si mesmo. *Homo faber* é a definição que propomos. O *Homo sapiens*, nascido da reflexão do *homo faber* sobre sua própria fabricação, nos parece igualmente digno de estima na medida em que ele resolve, através da inteligência pura, os problemas que dependem unicamente de sua inteligência, h*omo faber*, *homo sapiens*, antes que ambos, além disso, tendam a se fundir, nós nos curvamos. O único que não nos é simpático é o *homo loquax*, cujo pensamento, quando pensa, é apenas uma reflexão sobre sua palavra." –Esquecemos que a inteligência é apenas a faculdade de manipular a matéria, que pelo menos começa dessa forma– Como então a inteligência não se beneficiaria da educação da mão? Vamos mais longe. A mão da criança naturalmente tenta construir. Ajudando-a a fazer isso, proporcionando-lhe pelo menos oportunidades, obteríamos, mais tarde, do homem feito, uma produção superior; aumentaríamos singularmente o que há de inventivo no mundo. O saber imediato do livro comprime e suprime atividades que estão apenas esperando para decolar. Vamos, portanto, formar a criança no trabalho manual, e não deixar este ensino para um operário. Vamos nos voltar para um verdadeiro mestre, para que ele possa aperfeiçoar o toque a ponto de torná-lo um tato: a inteligência subirá da mão para a cabeça.

APÊNDICE 6b

b) Um adidática eufórica

Nas observações anteriores, a natureza dos seres matemáticos foi mencionada em várias ocasiões: sem dúvida, o caráter abstrato com o qual são marcados é um obstáculo susceptível de parar ou dificultar os iniciantes. Mas, com raras exceções, parece que uma criança pode normalmente compreender as convenções elementares que correspondem aos primeiros símbolos de aritmética, álgebra e geometria; uma iniciação cuidadosa deve obter este resultado.

Entretanto, uma vez que as primeiras noções foram adquiridas, quando se trata de lidar com estes símbolos e trazer em jogo as ideais que eles representam, o principiante muitas vezes parece ser atingido por uma espécie de paralisia, impedindo seu progresso, arriscando-o ao fracasso. Sem dúvida, as possibilidades intelectuais da criança –ou do adulto– desempenham um papel neste assunto, mas esta é uma desculpa bastante pobre, de escopo limitado, e a questão deve ser colocada em outro nível.

Estamos suficientemente preocupados, desde o início, em deixar claro que esses seres da razão que criamos são dotados de uma verdadeira vida, condicionada apenas pela definição de suas propriedades fundamentais? Não podemos tentar manter por tanto tempo quanto possível o frescor e o poder de seu "estado nascente"? Tudo isso é tanto mais fácil quanto eles possuem, por sua própria natureza, o privilégio de poder ser recriados a qualquer momento. Não há o risco de sufocá-los, de secá-los, de fazê-los perder toda a vida por uma avalanche de "regras" e restrições, muitas das quais são inúteis, se não prejudiciais?

Por que, por exemplo, enunciar uma "regra" –e depois impor sua memorização – relativa à multiplicação de um produto de fatores por um número, quando esta operação, se a encontrar, deve ser imediatamente reconhecida como muito familiar, uma vez que se pode facilmente encontrar nela a própria definição da multiplicação de mais de dois números? Em vez de esperar e exigir a aplicação de um mecanismo, muitas vezes mal registrado, não é mais interessante e mais frutífero ter o símbolo (a, b, c) X d analisado, que já possui as propriedades de um produto de dois fatores, e que, uma vez identificado, é dotado de todas as propriedades de um produto de quatro fatores? É então um jogo de descobrir as diferentes formas, e então, se necessário, escolher entre elas para continuar uma transformação ou um cálculo.

A teoria elementar dos polinômios e das frações racionais não perderia a aridez que às vezes tem, se se demonstrasse, por ocasião de todos os problemas que oferece, que se trata apenas de colocar em jogo as definições de adição, multiplicação, suas operações inversas e as propriedades de comutatividade, associatividade e distributividade? A observação cuidadosa, e não passiva, dos símbolos e sinais envolvidos, e de seu comportamento, quase sempre levará a uma solução. E os "produtos notáveis" e outras formas surgirão assim em uma atmosfera viva que, sem dúvida, garantirá sua conservação melhor, e talvez definitivamente.

Toda a teoria das proporções é contida na definição do quociente exato de um número por outro, e não podemos fazer com que ela tome forma a partir daí?

Muitas palavras da linguagem matemática evocam vida e ação: variáveis, funções correspondentes, transformações, equações, inequações. Devemos ter cuidado para não "esclerosá-los", para tornar inertes os seres que eles representam e passivos os atos que eles designam, pois seu manuseio e implementação são então rapidamente reduzidos a tediosos exercícios, o que um apelo à memória, o uso de algum automatismo talvez nos permita "resolver" corretamente, formalmente, mas sem qualquer extensão, qualquer visão de conjunto, qualquer razão real de interesse.

Não seria a quantidade de capítulos nos quais as questões relativas ao binômio do primeiro grau e ao trinômio do segundo grau são tratadas iluminadas por uma luz saudável, se se começasse, sobretudo, por "apresentar" estes dois seres que segurarão o cartaz por muito tempo (equações, desigualdades, variações de funções, representações gráficas, "problemas do primeiro e segundo graus")? Apresentar, ou seja, conhecê-los realmente, procurar as diferentes formas que eles podem assumir, para poder identificá-los e depois, como desejamos, transformá-los, para poder escolher. Isto não reduziria a nada as infelizes acusações que são feitas com frequência: "trinomite" castiga, "inicia-se" pelo trinômio?

É inútil multiplicar os exemplos; encontramo-los a cada passo, em álgebra, em trigonometria, em geometria.