ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p556-596

A transição do aritmético ao algébrico no ensino da matemática no Colegio[1] Segunda parte: Perspectivas curriculares: a noção de modelização[2]

**The transition from arithmetic to algebraic in mathematics teaching at the Collège[3]
Part two: Curricular perspectives: the notion of modeling**

**El paso de la aritmética al álgebra en la enseñanza de las matemáticas en el Collège
Segunda parte: Perspectivas curriculares: la noción de modelización**

**Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège
Deuxième partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation**

Yves Chevallard [4]
Université Aix-Marsaille
https://orcid.org/0000-0002-2870-5681

Tradução
Saddo Ag Almouloud[5]
Universidade Federal d Bahia
Doutorado em Matemática e Aplicações
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Resumo

O objetivo do artigo é discutir as dimensões epistemológicas e didáticas das reformas curriculares realizadas nos anos 60. Entre elas, a reforma Chevènement que visava o resgate do aritmético em detrimento do algébrico. Esse olhar para o numérico era visto como algo desestabilizador do currículo no sistema de ensino francês, no fim dos anos 1960. Essa reforma compreendia o numérico como algo prático e proveniente da realidade, que não necessitava de ideias tão abstratas, conforme exigia a álgebra. A reforma Chevènement relega os aspectos algébricos em segundo plano, mas não os exclui, e o uso das letras é visto como uma generalização precedente dos estudos dos cálculos numéricos. Revelam-se as problemáticas do ensino da aritmética e da álgebra no sistema de ensino francês que envolviam o processo de transposição didática estabelecido no programa oficial dos anos finais do ensino fundamental. A transposição didática, que modifica o funcionamento dos objetos do saber, imprime certa

[1] A faixa etária de aluno é, em geral, de 11-12 anos (no sexto ano) a 14-15 anos (no nono ano).
[2] Texto original foi publicado na revista *Petit x*, nº5, 1984, pp. 51 – 94, IREM de Grenoble - França (original publicado junto com esta tradução).
[3] The age range is, generally, from 11-12 years (in sixth grade) to 14-15 years (in third grade)
[4] y.chevallard@free.fr
[5] saddoag@gmail.com

especificidade ao programa oficial que o ensino pródigo propõe ao aluno. Esse programa oficial engendra no aluno um programa pessoal que, conforme apresentado no programa oficial, desfrutará de uma adequação limitada como o referido objeto de saber, que deixará de ser uma aposta didática pura, será apenas uma ferramenta da atividade didático-matemática do aluno: por exemplo, a fatoração de uma expressão algébrica pode deixar de ser o objetivo de sua atividade, tornando-se o meio para resolver uma equação do terceiro grau, conhecendo-se uma de suas raízes.
Palavras-chave: Reforma curricular, Aritmética, Álgebra, Transposição didática, Modelização matemática.

Abstract

The objective of the article is to discuss the epistemological and didactic dimensions of the curriculum reforms carried out in the 1960s. Among them, the Chevènement reform that aimed to rescue the arithmetic to the detriment of the algebraic. This look at the numerical was seen as something destabilizing of the curriculum in the French education system in the late 1960s. This reform understood the numerical as something practical and coming from reality, that did not need such abstract ideas, as algebra demanded. The Chevènement reform relegates the algebraic aspects in second place but does not exclude them; the use of letters is seen as a preceding generalization of the studies of numerical calculations. The problems posed in the teaching of arithmetic and algebra in the French education system are revealed, they involved the process of didactic transposition established in the official college program. The didactic transposition, which modifies the operation of the objects of knowledge, gives a certain specificity to the official program that the prodigal school proposes to the student. This official program engenders in the student a personal program that, as it is in the official program, will enjoy limited adequacy as the said object of knowledge, which will no longer be a pure didactic stake, will only be a tool of the student's didactic-mathematical activity: for example, the factoring of an algebraic expression may no longer be the goal of his activity, becoming the means to solve a third degree equation, knowing one of its roots.
Keywords: Curricular reform, Arithmetic, Algebra, Didactic transposition, Mathematical modeling.

Resumen

El objetivo del artículo es discutir las dimensiones epistemológica y didáctica de las reformas curriculares llevadas a cabo en los años sesenta. Entre ellas, la reforma Chevènement que pretendía rescatar lo aritmético en detrimento de lo algebraico. Esta mirada hacia lo numérico fue vista como algo desestabilizador del currículo en el sistema educativo francés, a finales de los años sesenta. Esta reforma entendía lo numérico como algo práctico y procedente de la realidad, que no necesitaba ideas tan abstractas, como exigía el álgebra. La reforma Chevènement relega los aspectos algebraicos en segundo plan, pero no los excluye, el uso de las letras se ve como una generalización precedente de los estudios de cálculo numérico. Se ponen de manifiesto los problemas planteados en la enseñanza de la Aritmética y el Álgebra en el sistema educativo francés, que implicaban el proceso de transposición didáctica establecido en el plan de estudios oficial del colegio. La transposición didáctica, que modifica el funcionamiento de los objetos de conocimiento, da una cierta especificidad al programa oficial que la escuela pródiga propone al alumno. Este programa oficial engendra en el alumno un programa personal que, tal y como está en el programa oficial, gozará de una adecuación limitada ya que dicho objeto de conocimiento, que ya no será una apuesta didáctica pura, será sólo una herramienta de la actividad didáctico-matemática del alumno: por ejemplo, la factorización de una expresión algebraica puede dejar de ser el objetivo de su actividad, para convertirse en el medio para resolver una ecuación de tercer grado, conociendo una de sus raíces.

Palabras clave: Reforma curricular, Aritmética, Álgebra, Transposición didáctica, Modelización matemática.

Résumé

L'objectif de l'article est de discuter les dimensions épistémologiques et didactiques des réformes curriculaires menées dans les années 1960. Parmi elles, la réforme Chevènement qui visait à sauver l'arithmétique au détriment de l'algébrique. Ce regard sur le numérique a été perçu comme quelque chose de déstabilisant pour le curriculum du système éducatif français, à la fin des années 1960. Cette réforme a compris le numérique comme quelque chose de pratique et provenant de la réalité, qui n'avait pas besoin d'idées abstraites, comme l'exigeait l'algèbre. La réforme Chevènement relègue les aspects algébriques au second plan, mais ne les exclut pas, l'utilisation des lettres étant considérée comme une généralisation préalable des études de calculs numériques. Les problèmes posés dans l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre dans le système éducatif français sont révélés, ils impliquent le processus de transposition didactique établi dans les programmes officiels du collège. La transposition didactique, qui modifie le fonctionnement des objets de savoir, donne une certaine spécificité au programme officiel que l'école prodigue propose à l'élève. Ce programme officiel engendre chez l'élève un programme personnel qui, tel qu'il est dans le programme officiel, jouira d'une adéquation limitée puisque ledit objet de savoir, qui ne sera plus un pur enjeu didactique, ne sera qu'un outil de l'activité didactique-mathématique de l'élève : par exemple, la factorisation d'une expression algébrique peut ne plus être le but de son activité, devenant le moyen de résoudre une équation du troisième degré, en connaissant l'une de ses racines.

Mots-clés : Réforme curriculaire, Arithmétique, Algèbre, Transposition didactique, Modélisation mathématique.

A transição do aritmético ao algébrico no ensino da matemática nos anos finais do ensino fundamental
Segunda parte: Perspectivas curriculares: a noção de modelização

A reforma Chevènement e o triunfo empirista.

O quadro que estabelecemos na primeira parte de um trabalho cujo desdobramento apresentamos a seguir, parece ser retrospectivamente premonitório: a reforma conduzida pelo ministério de Jean-Pierre Chevènement, da qual decorre a aplicação, somente prolongou as linhas-diretrizes reforçando o traço do primeiro retrato. A pulsão empirista, da qual sublinháramos a pregnância notável[6], já terrível na geometria[7], traduz-se, no resto do percurso dos anos finais do ensino fundamental, por um impulso vigoroso do numérico, pela dispersão e esvaecimento da aprendizagem das ferramentas algébricas, pela insistência ingênua no concreto e pelo recurso constantemente reafirmado a "atividades" das quais o ensino buscará, justificadamente, mas frequentemente em vão, a substância[8].

Desta evolução –que reconduz à desestabilização do currículo lançada no final dos anos 60–, os indícios poderiam ser multiplicados quase que indefinidamente. É preciso mencionar novamente o desaparecimento de qualquer referência explícita à álgebra, como o fazíamos ao retratar as mudanças de algumas das últimas décadas? Provavelmente não. Pois hoje, são três as rubricas que compõem os programas oficiais: trabalhos geométricos, trabalhos numéricos, organização e gestão de dados e funções. A primeira aparece, numa leitura cursiva, mas não menos atenta, como um renovado elogio às boas maneiras no uso de instrumentos de "desenho"; como a serena administração do refinamento naturalista de um olhar –o que deveria permitir detectar as simetrias de uma "figura simples" e não irá muito além. Mas é na segunda rubrica que se deve procurar os x e y da linguagem algébrica. Aqueles que de bom grado foram deixados nela sobreviver, nela vivem escondidos; suas presenças raras até parecem ser apenas o simples efeito daquela generosidade extravagante do empirismo-naturalismo que, com um disfarce barroco, está inclinado a fazer brotar seres que lhes são ao mesmo tempo aparentemente inúteis e naturalmente indiferentes. Assim será lido o programa da oitava série, na rubrica dos trabalhos numéricos, depois de um parágrafo inteiro consagrado aos "números": "Generalização dos estudos anteriores aos cálculos sobre "escritas literais". Generalização: a confissão sem meio termo"[9].

---

[6] Sobre a noção de empirismo, cf. especialmente Chevallard, 1984a, § VIII.
[7] Cf., particularmente, Schoenfeld 1985, pp. 160-181.
[8] Essa questão será abordada de uma maneira mais ampla na terceira parte deste trabalho.
[9] Sobre o empirismo desta concepção da passagem do numérico para o algébrico, cf. Chevallard, 1984a, pp. 77-78.

A terceira rubrica –"Organização e gestão de dados"– nada subtrai deste triunfo do *numerismo*, pelo contrário, ela o intensificaria. O que fazer com números sem um aparelho matemático minimamente sólido/firme? Produzir novos números, ou novos arranjos de números: classificá-los, contá-los, agrupá-los, arredondá-los, etc. O repertório das operações significativas é rapidamente concluído. Ele esboça e circunscreve uma estatística de primeiro contato que pode gerar efeito por algum tempo. Ele se projeta em atividades "puramente numéricas" nas quais o desejo concretista encontra proveito. Numerismo e concretismo reinam sem páreo, na exclusão de toda álgebra. Um ponto extremo da evolução é aqui atingido[10].

Do cálculo formal ao cálculo funcional

O funcionamento didático do conhecimento de ascendência erudita produz frequentemente um som estranho para quem não participa intimamente do universo matemático que ele define[11]. Afirmação que ilustraremos, inicialmente, com um exemplo de observação banal. Um aluno de uma turma de oitava série está aprendendo a fatorar expressões algébricas. Você é matemático, mas alheio aos caminhos e descaminhos do ensino dos anos finais do ensino fundamental, suponhamos, pelo menos por um instante. Este aluno pede que lhe sejam propostas expressões para fatorar, com a intenção de treinar. Ele fornece como modelo os exercícios feitos em aula. Com essa base, você lhe sugere a fatoração, por exemplo, da seguinte expressão: $(2x-3)^2 - 4(x + 1)(4x - 6) + (4x^2 - 9)$. Ele chega, sem demora, ao resultado "esperado", ou seja: $-4(2x -3)(x + 2)$, por um cálculo cuja riqueza dos detalhes surpreendem, mas nos quais você enxerga o reflexo de um ensino destinado a iniciantes no cálculo algébrico. Este aluno, você pensa, domina muito bem esse tipo de problema de fatoração. Você realmente admira que, tendo chegado à expressão $(2x – 3)(-4x - 8)$, ele pense em colocar como fator o coeficiente -4, e que ele o faça sem nenhum esforço.

Mas eis que ele está esperando a sua aprovação e você diz: Não haveria um engano? Você julga mais sensato sugerir ao aluno que ele poderia tentar verificar por si mesmo, atribuindo a x valores numéricos simples, "como, por exemplo, -2, que anula a segunda expressão e deveria, portanto, anular a primeira também". Seu aluno da vez, porém, parece não entender nada deste discurso. Você se surpreende com a surpresa dele. Você repete sua sugestão. "Nunca fizemos isso...", ele confessa finalmente. E você acaba por entender que para seu aluno não há, neste instante, nenhuma ligação entre a transformação à qual submeteu a

[10] Nos foi necessário anexar (Cf. anexo 1) um desenvolvimento mais difícil sobre as relações do empirismo e do ensino das ciências. Mesmo que lhes façamos referência por diversas vezes, o leitor poderá, em uma primeira leitura, ignorar o anexo. Quero agradecer a Graciela Ricco por chamar minha atenção ao problema que nele abordo.
[11] Cf. anexo 1 (V.O. nota 7).

expressão algébrica proposta, de um lado, e o fato de substituir valores numéricos para esse... pequeno x que ele manipulou tão habilmente, de um outro lado. Nenhuma.

Talvez precise de tempo para descobrir que, nesse caso, não há efeito de nenhuma singularidade tagarela do ensino, nem marca de nenhuma peculiaridade do aluno. Talvez isso até faça você lembrar-se de um ou outro episódio vivenciado em uma sala do primeiro ano do ensino médio: depois de resolver um sistema de duas equações de duas incógnitas, o aluno demonstrara surpresa ao ver que ao repor (instigado pelo professor) os valores encontrados nas equações iniciais, ele obtém duas igualdades. Mas então, o que você descobre tem um alcance mais geral: a relação do aluno com o cálculo algébrico não incorpora a ideia de uma relação entre manipulação algébrica da expressão, de um lado, e substituição de valores numéricos na expressão, de outro. Tal relação parecerá para você estranha, truncada, inacabada. Porém, aí está –e não duvide disso– a relação oficial que, até então, pediu-se ao aluno que fosse exibida; e a conduta dele, que você elogiava mais cedo, é bastante adequada à relação oficial esperada. Você poderá duvidar, em contrapartida, que a relação oficialmente imposta se revele adaptada ou, como diremos, *idônea*, para certos usos efetivos que você tem em mente (por exemplo, a fatoração de um polinômio P(x) do terceiro grau, para resolver a equação P(x)=0).

Tal é, com efeito, a contradição essencial. A transposição didática –que modifica o funcionamento dos objetos de saber– imprime certa especificidade na relação oficial que o ensino prodigalizado oferece ao aluno. E essa relação oficial gera no aluno uma relação pessoal que –tão conforme for quanto à relação oficial– gozará de uma idoneidade limitada desde que o objeto do saber em questão (ao deixar de ser desafio didático puro) seja apenas uma ferramenta da atividade didático-matemática do aluno: a partir do momento em que, por exemplo, a fatoração de uma expressão deixar de ser o *fim* de sua atividade para se tornar o *meio* que permitirá resolver uma equação do terceiro grau da qual se conhece uma raiz.

Da mesma forma que pode existir uma contradição entre funcionamento didático e funcionamento sábio do saber[12], entre “interior” e “exterior”, pode haver uma contradição dentro do sistema de ensino mesmo, entre dois tipos de regime de um mesmo objeto de saber. O passado do aluno vem aqui hipotecar seu desenvolvimento atual e futuro.

A propensão ao empirismo que sinalizamos desempenha, neste aspecto, um papel eminente[13]. Acreditamos que ela é a origem do hiato que se afirmar dentro dos próprios anos finais do ensino fundamental, na passagem do ciclo das sextas séries e sétimas séries turmas à oitava série, em relação ao ensino da geometria; ou, de uma forma mais geral (já que não se

[12] Cf anexo 1. (V.O. nota 8).
[13] Cf anexo 1. (V.O. nota 9).

dissolve uma dificuldade ao dividi-la, ao contrário do que parece ser a intenção dos novos programas dos anos finais do ensino fundamental), na passagem de uma “geometria desenhada” para uma “geometria demonstrada”. Ao dar crédito concreto à ideia segundo a qual a geometria se faz pela consideração naturalista de figuras sensíveis e bem apreendidas em um traçado exato e cuidadosamente elaborado, o empirismo ostentatório das turmas iniciais forja uma dívida que o aluno de oitava série, em vários casos, terá bastante dificuldade para quitar. E o que poderíamos chamar, de modo mais geral, de “endividamento empirista”, não se atenuará no caso da álgebra. O caráter formal da relação com a figura geométrica –que põe em primeiro plano o cuidado, a precisão, a exatidão (todas as coisas geralmente pouco pertinentes na atividade geométrica *matemática*[14])– se desdobra de um tratamento igualmente formal das expressões algébricas, confinadas em um mundo fechado de manipulações supostamente significativas em si mesmas. Mas é aí, exatamente, que um passivo vai se aprofundar.

A manipulação das expressões algébricas durante a primeira aprendizagem organizada nos anos finais do ensino fundamental (ou fundamental II), de fato, não tende para nenhum fim (matemático) externo ao cálculo algébrico que deve, por sua vez, encontrar em si mesmo a fonte de suas próprias exigências. Assim, as “regras” para esta manipulação são imotivadas, puramente formais e se manifestam por instruções também padronizadas (desenvolver, fatorar etc.). Essa especificidade aparecerá melhor, de modo contrastado, nos exemplos de emprego funcional do cálculo algébrico –que surgirá massivamente no ensino médio, evidenciando a falta de idoneidade da relação com o cálculo algébrico oficialmente inculcada no fundamental II.

Dos anos finais do ensino fundamental ao ensino médio e além

Seja a função f definida pela expressão:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$$

A fatoração do denominador (por resolução da equação do segundo grau correspondente), $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, é inicialmente necessária para determinar o domínio de definição. Ainda é preciso verificar que um prolongamento por continuidade não é possível –seria o caso, aqui, se o numerador se anulasse com x = 2 ou x = 3. A determinação dos limites em x = 2 e x = 3 tirará, assim, vantagem de uma *reescrita adaptada* da expressão f(x) –que separa as partes “inertes” (postas no numerador) da parte “sensível” (ou seja, x - 2 no primeiro caso)– que vem no denominador:

[14] Explicitar este ponto supõe desdobramentos que não encontram lugar aqui (V.O. nota 10).

$$f(x) = \frac{\frac{x^3 + x^2 - 2x}{x - 3}}{x - 2}.$$

O novo numerador (ele próprio uma fração racional) tende então para um limite *finito não nulo*, aqui -8. Deduz-se, imediatamente, que f(x) tende para menos infinito quando x tende para 2 por valores superiores e para mais infinito quando x tende para 2 por valores inferiores.

A reescrita acima corresponde, *mas "ao reverso"*, ao esquema (a/b)/c=a/bc. Não tem, naturalmente, nenhuma razão para aparecer no manuseio formal de expressões algébricas, já que não responde nem a uma instrução de desenvolvimento, nem a uma instrução de fatoração etc. Na verdade, justifica-se inteiramente, aqui, por um fim extrínseco ao próprio cálculo, um fim para o qual o cálculo constitui um meio: a determinação de limites.

Da mesma maneira, é uma outra reescritura de f(x), sendo

$$f(x) = x + 6 + \frac{22x - 36}{x^2 - 5x + 6}$$

que se revelará adaptada à determinação de uma eventual assíntota oblíqua e ao estudo de posição correspondente. Porém, sabe-se que em quase todas as terceiras séries do ensino médio, recusa-se a estabelecer tal igualdade; os enunciados se contentam seja em fornecê-la aos alunos, pedindo aos mesmos que a "verifiquem", segundo os hábitos de cálculo interiorizados de longa data; seja dando-lhe a forma, ao pedir o cálculo (por identificação) de seus coeficientes indeterminados. Acrescentemos que ainda uma outra reescritura será necessária, se quisermos calcular uma primitiva de f, o termo fracionário sendo então decomposto em elementos simples[15]:

$$\frac{22x - 36}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-8}{x - 2} + \frac{30}{x - 3}$$

Estes exemplos, aqui limitados ao campo dos problemas relativos ao estudo de uma função dada por uma expressão algébrica, poderiam ser multiplicados. A cada passo no ensino médio, o aluno enfrentará novamente a inadaptação da relação com o cálculo algébrico estabelecida no ensino fundamental II –inadaptação que a investigação clínica de alunos "com dificuldade" destaca frequentemente, sob o aspecto de patologias variadas, como uma origem importante dos fracassos constatados. Mas, ao contrário do caso da geometria, a contradição não está mais presente no colégio e, como resultado, não é realmente visível nem para os

[15] Notemos que as técnicas usuais de decomposição em elementos simples fazem um uso exemplar do que chamamos de dialética do numérico e do algébrico (Chevallard, 1984a, § VII). (V.O. nota 11).

professores do fundamental (que quase nunca encontram os efeitos do desajuste), nem para os professores do ensino médio (que observam, no máximo, que os alunos "não sabem como calcular"). Não é menos central, tanto na teoria (como pode ser reduzida?) quanto na prática, devido ao seu papel na etiologia do fracasso no ensino médio e além dele.

Um problema de engenharia curricular

Isso nos leva, então, a um problema didático geral que pode ser formulado da seguinte forma: é possível definir e realizar um *estado do sistema de ensino* (ou seja, um *currículo*) que determine uma relação oficial com o algébrico mais *idônea* às tarefas nas quais o algébrico será empregado, sobretudo, no ensino médio?

Trata-se aqui, essencialmente, de um problema de *engenharia curricular* (de "*curriculum development*", como dizem os autores de língua inglesa). Veremos, na continuação deste trabalho, que a resolução de um tal problema levanta, infalivelmente, problemas didáticos profundos que tentaremos explicitar.

Nessa perspectiva, uma primeira demarcação deve ser traçada. O currículo, estado do sistema de ensino em um momento dado, não é inteiramente definido pelos programas oficiais. Estes fixam um *quadro diretor* que se impõe como um sistema de restrições explícitas no processo de transposição didática, mas que não saberia determiná-lo exatamente[16]. Mais importantes, todavia (mas também largamente negligenciadas ou até ignoradas) são, nesse sentido, as restrições didáticas permanentes que exercem seus efeitos, com bastante frequência –na ausência de um mínimo de análise didática aprofundada–, *sem que os agentes do sistema de ensino tomem conhecimento.*

Um dos maiores exemplos dessas restrições é a compatibilidade entre saber "*ensinado*" e saber "*sábio*", que tem, como um de seus principais seus efeitos, a "pulsão empirista" que aqui se expressa –de longa data e como que indiferente às reformas oficiais dos programas– pela exacerbação de duas tendências concretas solidárias, a tendência numerista, de um lado, e a tendência concretista, do outro.

A tarefa da análise didática, nessa perspectiva, é remontar, para além do contrato devidamente escorado das tendências concretas, até *os sistemas de regras que as impõem* e estabelecer: sob quais condições algumas delas poderiam ser anuladas, ou, mais geralmente, qual é a exata margem de liberdade curricular e didática que as restrições, das quais essas

[16] Sobre esta questão, cf. Chevallard, 1986. (V.O. nota 12).

liberdades aparecem como efeitos, nos oferecem. É nessa perspectiva ambiciosa, mas fundamental, que situamos os desenvolvimentos que seguirão.

Cálculos algébricos e sistemas de números

Domínios de cálculos e cálculos algébricos

A elaboração de um cálculo algébrico supõe, à título de motivação ou de pano de fundo, um ou alguns *domínios de cálculo*. Entenderemos por isso um conjunto de objetos matemáticos em que *se possa calcular*. Os números, os vetores, ou até os pontos do plano (cálculo baricêntrico), fornecem exemplos elementares de tais domínios de cálculo.

Quando, numa sexta série, o professor passa da observação que 2 + 3 = 5 e 3 + 2 = 5, para a escrita da relação geral a + b = b + a, ele então passa do cálculo *sobre números* (inteiros naturais) para um cálculo *algébrico* (de coeficiente de inteiros naturais). Em outros termos, um cálculo algébrico (que não definiremos com mais detalhes aqui) coloca em jogo a *sintaxe* na qual o domínio de cálculo associado fornece uma *semântica*[17].

Para qualquer domínio de cálculo correspondem, assim, formas (ou estruturas) algébricas que oferecem uma imagem formal do domínio de cálculo considerado. Aos inteiros naturais, poder-se-á dar em correspondência a estrutura de meio-anel (unitário, comutativo, íntegro); aos inteiros relativos, a estrutura de anel (euclidiano) com os racionais, a estrutura de corpo etc. O estudo destes cálculos algébricos é um dos objetos da álgebra.

Uma incontornável dialética.

Os primeiros domínios de cálculo encontrados –tanto na história, quanto na escola– são constituídos pelos diferentes *sistemas de números* sucessivamente introduzidos e estudados no ensino fundamental: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, D, \mathbb{Q}\ e\ \mathbb{R}$. Mesmo que esses sistemas não sejam os únicos domínios de cálculo presentes nesse nível –é preciso pensar aqui no cálculo vetorial–, nos referiremos a eles a seguir.

O problema didático estudado –o lugar e o papel do cálculo algébrico no ensino fundamental II– conduz inevitavelmente à questão dos sistemas de números. Veremos que existe entre os dois problemas um elo necessário e incontornável, que a “solução” empirista atual simplesmente tende a ocultar, a despeito dos efeitos negativos que resultem disso.

O problema didático da construção de diferentes sistemas de números fica no centro do currículo do ensino fundamental II. Trata-se, objetivamente, de um problema difícil, diante do

[17] Os termos de sintaxe e de semântica estão considerados aqui no sentido da lógica matemática e menos em sua acepção linguística (V.O. nota 13).

qual alguns dos melhores autores puderam recuar[18], e do qual pode-se pensar que ele não tenha recebido até agora solução satisfatória. Dessa patologia do currículo, a situação que evocamos sobre as estruturas numéricas (sua proliferação, esta "cancerização" do *corpus* ensinado realizada por elas) constitui um dos sintomas mais gritantes[19].

Tentaremos mostrar que o problema do cálculo algébrico (de sua construção formal, assim como de seus empregos) está duplamente ligado a isso. De um lado, com efeito, os sistemas de números fornecem os domínios de cálculo sobre os quais o cálculo algébrico se erguerá, assim como já o sublinhamos. Mas, por outro lado, o cálculo algébrico constituirá um *móbile* essencial e a *ferramenta* fundamental da construção dos sistemas de números sucessivos[20]. Com esse fim, em primeiro lugar examinaremos rapidamente a questão dos sistemas de números ensino fundamental II.

A noção de sistema de números

A noção de sistema de números pode, certamente, ser "definida", em extensão, pela enumeração dos sistemas de números efetivamente estudados –aqueles que mencionamos mais cedo. Todavia, deve-se dar para uso do leitor a definição formal de uma primeira classe de tais sistemas. Chamamos aqui de *sistema de números* todo conjunto SN no qual, primeiramente, definimos:

*uma adição (anotada +), operação binária associativa, comutativa, possuindo um elemento neutro (anotado 0)

*uma multiplicação, operação binária associativa, comutativa, possuindo um elemento neutro (notado 1) e distributiva em relação à adição.

Os sistemas de números efetivamente visados possuem, ademais,

*uma *relação de ordem* (total), compatível com a adição e a multiplicação.

Este requisito exclui os sistemas de "números" que não se originam do problema historicamente e didaticamente fundamental neste nível, o *da medida das grandezas* discretas ou contínuas[21]. A existência de uma estrutura de ordem total compatível permite dispor de propriedades que participam essencialmente da noção de sistema de números, no nível em que nos situamos, sendo que

---

[18] É assim que, por meio de algumas observações rápidas, Gustave Choquet evita, em seu livro *L'enseignement de la géométrie* ["O ensino da geometria"] (Hermann, Paris, 1964), o problema do numérico, que se supõe desde sempre resolvido, ao menos até que sua utilização seja indispensável (V.O. nota 14).

[19] Remeteremos aqui a Chevallard, 1985a. (V.O. nota 15).

[20] Esta questão será examinada com mais detalhes na terceira parte do trabalho (V.O. nota)16.

[21] Assim, descartam-se os sistemas Z/nZ, C etc. (V.O. nota 17).

*a adição e a multiplicação verificam *a regra de simplificação*[22].

Enfim, um último requisito, raramente enunciado, deve ser introduzido. P(x) e Q(x) sendo polinômios de primeiro grau de coeficientes em SN (P(x) = ax + b, Q(x) = cx + d, a, b, c, d em SN), denominamos “equação de primeiro grau em SN” uma igualdade do tipo P(x) = Q(x). Colocaremos então que

* toda equação do primeiro grau em SN que não é nele identicamente verificada, *nele possui no máximo uma solução*.

Provavelmente, esta última propriedade decorre –imediatamente, sob certas condições (às quais retornaremos) – da validade em SN das regras de simplificação. Mas ela aparta mais visivelmente –ainda que isso já estivesse feito– os domínios de cálculo *não íntegros*, tais como o anel das matrizes quadradas de ordem 2 etc. Ela nos fornece, ademais, um primeiro exemplo da maneira com que a álgebra vai permitir a *formulação* e o *estudo* das propriedades dos sistemas de números[23].

Um problema fundamental

Acrescentaremos, por fim, uma última propriedade à definição dos sistemas de números. Esta propriedade é motivada pelo problema recorrente e fundamental levantado pelos sistemas de números estudados no ensino fundamental II: Tais sistemas, com efeito, *nunca contêm números suficientes*. A necessidade da extensão repetida (de $\mathbb{N}\, a\, \mathbb{Z}, de\, \mathbb{Z}\, a\, \mathbb{Q}$, etc.) decorre dessa insuficiência, para a qual podemos encontrar uma dupla origem.

A primeira é, pode-se assim dizer, extrínseca, e nasce do uso original que se pretende fazer dos números: *medir grandezas*. Neste aspecto, notaremos que a definição da noção de sistema de números dada logo acima ainda não permite definir a diferença de dois números a e b, a > b[24]. Para fazer frente a essa necessidade imposta pelos problemas de medida (que irão impor também, mais adiante, a existência de uma raiz quadrada etc.), convém acrescentar à nossa definição a seguinte exigência:

*se a > b, então existe c tal como que b + c = a.

[22] Na ausência de uma relação de ordem compatível com as leis [aditivas e multiplicativas], essa propriedade permitirá definir uma primeira extensão da classe de sistemas de números definida aqui (Z/pZ com primo, C etc.) (V.O. nota 18).

[23] A aproximaremos, por sua forma, da propriedade pela qual são definidos os corpos algébricos fechados. Cf. *infra* nota 21 da V.O. ou nota 30 da presente tradução (V.O. nota 19).

[24] Tomar como SN o conjunto de reais n + m 2, no qual n e m são inteiros positivos ou não nulos: tem-se $2 + \sqrt{2} > 3 + 2\sqrt{2}$ [$2 + \sqrt{2} > 3 + 2\sqrt{2}$ no original], mas a diferença destes dois números, ou seja $-1 + \sqrt{2}$[$-1 + \sqrt{2}$ no original], não pertence a SN (V.O. nota 20).

Nestas condições, uma equação do primeiro grau é escrita com a forma ax + b = c, e as regras de simplificação acarretam imediatamente que tal equação tenha no mais uma solução em SN, desde que ela não seja uma identidade.

Notaremos que a exigência recém-introduzida se expressa com o auxílio de uma equação (do primeiro grau) e de uma desigualdade: *se a > b, logo a equação x + b = a possui uma solução (e uma só) em SN*. De uma maneira geral, a noção de equação (algébrica) é a *ferramenta essencial* para gerenciar as extensões sucessivas dos sistemas de números estudados, até ao menos $\mathbb{Q}$[25].

Um segundo tipo de insuficiência dos sistemas de números usados é, se for possível assim dizer, intrínseco: deve-se ao fato de que, num determinado momento, dispõe-se de muitos poucos números para que resulte dele um cálculo algébrico "agradável". Daí a passagem para os números negativos, depois para os números racionais (seja de $\mathbb{N}\ a\ \mathbb{Z}$, etc.) e depois, para os números complexos, pelo prolongamento de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{C}$[26].

Estes dois tipos de insuficiência se sobrepõem em certos casos: assim a passagem $D\ (ou\ \mathbb{Z}) a\ \mathbb{Q}$, domínio de cálculo no qual a equação ax = b sempre tem uma solução, enquanto a não for nulo, permite simultaneamente medir mais grandezas (por exemplo uma parte de um segmento de medida 1 que foi dividida em 3 partes iguais) e dispor de um cálculo mais manejável (no qual a divisão por um número não nulo sempre é possível).

O domínio formal do cálculo funcional

Através dessa rápida descrição –da qual o leitor assimilará facilmente a distância relativa àquilo que nos mostra o ensino atual dos anos finais– podemos apreender, já um pouco melhor, ao que parece, os elos vitais historicamente tecidos pela matemática –de Diofanto a Viète e para além deles (passando pelos matemáticos árabes)– entre algébrico e numérico.

Porém, tudo isso se situa exclusivamente, só em nível matemático. Será preciso aprofundar a análise para que surjam os problemas propriamente didáticos –que serão tantos

[25]A passagem de $\mathbb{Q}\ a\ \mathbb{R}$ (definido como corpo ordenado, arquimediano e completo) não entra nessa categoria, mas pode-se mostrar que a matemática do fundamental II se satisfaz com um domínio de cálculo que seja um subcorpo de $\mathbb{R}$ no qual, para qualquer polinômio P de grau inferior ou igual a 3 – e para qualquer par numérico (a, b), se P(a) < 0 e p (b) > 0, então, P se anula entre a e b. Porém, tal domínio de cálculo não permite medir os ângulos e essa operação exige a passagem efetiva para o corpo dos reais completo. Cf. Dieudonné 1964, capítulo 1 e o anexo I (V.O. nota 21).

[26] Sublinhemos que a introdução (atualmente implícita) do corpo dos reais no nível do ensino médio prolonga essa linha de desenvolvimento. Ela é de fato contemporânea à extensão dos tipos de manipulação que é possível fazer dos números, por exemplo com a aparição das funções transcendentes elementares. Acrescentemos também que com o desenvolvimento da análise não *standard*, a análise real pode se tornar mais agradável ainda pela passagem para um sobrecorpo de $\mathbb{R}$ no qual existem, sobretudo, infinitamente grandes e infinitamente pequenos. Cf. por exemplo Reeb, 1981 ou Lutz e Goze, 1985 (V.O. nota 22).

obstáculos em direção a mais idoneidade. Neste aspecto, sublinhamos somente algumas das restrições que imporemos à perspectiva curricular que será explicitada a seguir. Qualquer que seja a estratégia didática adotada, distinguir-se-á, por método, dois grandes objetivos do ensino dos anos finais relativos à álgebra.

Primeiro objetivo, este ensino deve proporcionar um manuseio formal e satisfatório do cálculo algébrico, ou seja, na sua versão mais desenvolvida, do cálculo no corpo [*corps*] R(x) das frações racionais[27] –objetivo especialmente importante para os alunos que prosseguirão os estudos para além do fundamental II.

A esse respeito, convém resolver um mal-entendido que pesa muito na análise didática dos objetivos do ensino da matemática nos anos finais do ensino fundamental (*fundamental II*, ou, simplesmente, *anos finais*). O ensino dos *aspectos formais* da matemática –ou seja, em particular o ensino que visa um domínio de seus *formalismos* (cálculo algébrico, cálculo vetorial etc.)– não é absolutamente sinônimo de ensino "formal" ou "formalista". É então necessário distinguir entre formalismos e formalismo: se podemos desejar lutar contra o formalismo no ensino, não se pode, sem ignorar a história da matemática e seu próprio funcionamento, minorar o lugar que deve ser dado ao ensino *dos formalismos* matemáticos.

O estudo do lugar e das funções de cálculo algébrico no fundamental II se apoia necessariamente sobre esta constatação. Ora, o domínio formal do cálculo algébrico supõe por natureza um bom conhecimento dos sistemas de números sobre os quais se constrói o cálculo algébrico; em outros termos, ele não pode apoiar-se somente no ensino *in vácuo*, ou seja, formal, dos formalismos. Em contrapartida, a expansão do cálculo algébrico somente pode ser cumprida por meio dessas extensões sucessivas. É a consideração da equação ax = b (a não nulo) que convida a passar para um sistema de números sobre o qual a divisão (por um número não nulo) seja possível; e é essa extensão que então convida a estender o cálculo algébrico às frações racionais que ela permite agora definir.

O domínio de dialética entre manuseio formal do cálculo algébrico (ou antes: dos cálculos algébricos) e conhecimento dos sistemas de números constitui então um *segundo objetivo* do ensino da álgebra no ensino fundamental II. Este objetivo deriva de uma dupla observação: nesse caso, não se pode ter um domínio do cálculo algébrico *funcional* que faça jus aos *empregos do cálculo algébrico*; e não se pode ter emprego do cálculo algébrico sem que se instaure uma dialética entre numérico e algébrico. A noção-chave de modelização, apresentada na sequência, permitirá detalhar esta afirmação. Ela fará os dois objetivos citados acima

[27] Nas quais ℝ designa um subcorpo adequado do corpo dos reais. (V.O. nota 23).

aparecerem como intermediários em relação ao objetivo final implicitamente colocado mais acima, que chamaremos de *domínio formal do cálculo funcional*.

A modelização matemática

Da extramatemática à intramatemática

A questão da funcionalidade do cálculo algébrico, com efeito, deve ser analisada mais adiante, tanto em seus princípios gerais como em suas modalidades concretas. Na prática, ela requer *domínio de emprego*[28]; mas ela primeiro reclama um largo quadro conceitual, que *permita detalhar a própria noção de emprego*.

Aqueles aos quais até agora fizemos alusão permanecem empregos *intramatemáticos*, no sentido em que se referem ao estudo destes objetos matemáticos que são os sistemas de números. Outros empregos dizem respeito ao estudo matemático de objetos *extramatemáticos*: sistemas físicos, biológicos, sociais etc. E é normalmente para o estudo matemático de tais sistemas não matemáticos que reservamos o nome de *modelização matemática*.

A fim de pensar em um único movimento, esses dois tipos de empregos e de estudos (habitualmente separados, como são testemunhas as oposições tradicionais entre matemática e aplicações da matemática, entre problemas "abstratos" e problemas "concretos" etc.), referirmo-nos a seguir a um esquema geral de modelização, no ensejo de apreender, em categorias comuns, os empregos intramatemáticos e extramatemáticos que nos interessaram.

Sistemas e modelos

Introduziremos inicialmente apenas um esquema simplificado, que supõe essencialmente *dois registros* de entidades: um *sistema*, matemático ou não matemático, e um modelo (matemático) deste sistema[29]. O processo de *modelização* comporta, esquematicamente, três etapas.

1. Definimose o sistema que pretendemos estudar, detalhando seus "aspectos" *pertinentes* em relação ao estudo que pretendemos fazer deste sistema, sendo esse o conjunto das *variáveis* pelas quais o recortamos no campo de realidade em que nos aparece. Designaremos essas variáveis pelas letras x, y, z, a, b, c etc., podendo voltar à essa questão –de grande importância– que alça esse uso um pouco mais além.

[28] A questão dos domínios de emprego do cálculo será examinada de uma maneira mais sistemática na terceira parte deste trabalho (V.O. nota 24).
[29] Para uma apresentação geral das noções de sistema e de modelo, queira o leitor conferir os artigos correspondentes da *Encyclopaedia Universalis*. (V.O. nota 25).

2. Construimos então o modelo propriamente dito, ao estabelecer um certo número de relações – $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}'$, $\mathbb{R}''$ etc., entre as variáveis levadas em conta durante a primeira etapa–, sendo *o conjunto destas relações* o modelo do sistema a ser estudado.

3. "Trabalhamos" o modelo assim obtido, com o fim de produzir *conhecimentos* relativos ao sistema estudado, conhecimentos que tomam a forma de novas relações entre as variáveis do sistema.

A terceira etapa sempre é uma fase propriamente matemática, enquanto as etapas anteriores estão sob a jurisdição do campo de realidade sobre o qual presume-se erguer o sistema –a matemática quando se trata de um objeto matemático etc.

Este esquema de base, como veremos, exige muitas observações. Para esclarecer o leitor, o completaremos inicialmente com um primeiro exemplo bastante acadêmico.

O caso do pêndulo simples

O sistema considerado é físico: um pêndulo oscilando no campo gravitacional. Notemos que é uma questão, por vezes não trivial, determinar de qual domínio de realidade provém o sistema que se quer estudar[30]. Sublinhamos ainda, nesse aspecto, que o estudo a seguir toma como objeto o elemento genérico de uma *classe de sistemas* –e não um ou outro sistema particular.

1. Para o percurso da primeira etapa, acompanharemos aqui o físico: "Ao observar com muita atenção o movimento do pêndulo, nos diz ele[31], pode-se convencer de que se as fricções são negligenciáveis, as únicas grandezas características do problema são aquelas que a figura 1.5 define", sendo, o peso P, a massa M, o comprimento L e o ângulo A do pêndulo em relação à vertical. Aquilo pelo qual nos interessamos (por motivos que deixaremos de lado) é o período T do pêndulo; este deveria poder ser expresso unicamente em função das variáveis precedentes.

[30] Essa questão não é tão evidente como pode parecer. Assim considerou-se por muito tempo que os fenômenos elétricos relevavam da biologia, ou até da química – e não da física. Cf. Bachelard, 1949, capítulo VIII (V.O. nota 26).

[31] Valentin 1983, pp. 15-16. Notaremos a maneira claramente empirista de apresentar o processo de construção do modelo: "Ao *observar com atenção* este movimento de pêndulo..." (nossa ênfase). Um simples "olhar atento" dado à coisa estudada permitiria, então, penetrar-lhe a essência! Aqui novamente se pode verificar nossa afirmação (Cf. anexo 1), na qual o empirismo se torna uma segunda natureza de todo aquele que se faz docente (V.O. nota 27). [VERIFICAR SE ENTENDI CORRETAMENTE]

2. O estabelecimento do modelo, aqui, recorre a uma ferramenta geral da física, a análise dimensional. Estabelecendo que o período T é dado por uma igualdade com a forma $T = M^x L^y P^z f(A)$, obtém-se[32] o sistema das três relações

$$x + z = 0, \qquad y + z = 0, -2z = 1,$$

que –com a igualdade inicial e a relação "geral" P = Mg (em que g é a intensidade da força gravitacional) – constitui um modelo do sistema.

3. Um trabalho matemático elementar em cima deste modelo "bruto" conduz à relação fundamental $T = f(A) \sqrt{L/g}$, que permite, por sua vez, produzir conhecimentos sobre o sistema estudado. Por exemplo, este a seguir[33]: "O período de um pêndulo aumenta como a raiz quadrada de seu comprimento" (donde podemos concluir por exemplo que, para dobrar o período de um pêndulo, é preciso quadruplicar seu comprimento).

Matemática e matematizado

Ontologicamente clara –no caso de sistemas não matemáticos, como no exemplo anterior–, a distinção dos registros do sistema e do modelo torna-se nebulosa (a ponto da ideia de modelização *intramatemática* ser geralmente ignorada) quando o sistema considerado é um objeto matemático.

[32] Um cálculo imediato (que leva em conta a equação das dimensões do peso P e o fato de que o coeficiente f(A) é sem dimensão) mostra que a expressão $M^x L^y P^z f(A)$ tem como dimensão x + z (em relação à massa), y + z (em relação ao comprimento), -2z (em relação ao tempo); a expressão T tendo como dimensão 1 (em relação ao tempo) e 0 (em relação à massa e ao comprimento), disso deduzimos as igualdades indicadas. A aplicação da análise dimensional para o caso do pêndulo simples é antiga: ela se deve –ao que parece– ao matemático francês Joseph Bertrand (1878). Cf. Bachelard, 1928, capítulo VI (V.O. nota 28).

[33] Ibid., p. 16. Falamos aqui mais em termos de conhecimento do sistema estudado (conhecimento que o modelo permite produzir) do que em termos de preditividade do modelo. Esta última noção, familiar para o físico, apresenta, de fato, delicados problemas epistemológicos (pode-se pensar, porém, que seu estudo tem seu lugar na educação científica contemporânea). No próprio quadro do uso clássico dos modelos, a preditividade sempre é condicional e ligada à noção de sistema pseudo-isolado: o pêndulo, cujo comprimento foi quadriplicado, terá um período duas vezes maior –sob a condição de que nada que aconteça no tempo (por exemplo, perturbações ligadas a uma série de choques aleatórios) modifique de maneira imprevista (pelo modelo) o estado do sistema; a preditividade aqui é mais teórica do que real, qualquer que seja o conjunto das variáveis integradas no modelo. Ademais, no caso de sistemas não clássicos, a despeito do caráter determinista do modelo, o comportamento do sistema pode aparecer tipicamente aleatório, logo, imprevisível: a preditividade se perde (ao passo que o modelo conserva seu caráter explicativo) e permite sobretudo explicar por que a predição é difícil – ou até impossível (pensaremos aqui nos modelos meteorológicos): sobre isso, ver Ekeland, 1984. Finalmente, a preditividade teórica permitida pelo modelo pode induzir a uma tomada de decisão (consciente) ou a uma retroação (mais ou menos inconsciente) por parte dos atores humanos –que, tomando a decisão na evolução do sistema com o objetivo de evitar o que o modelo revela: seja a revelação sobre o estado presente ou sobre um estado futuro "teórico" (pensaremos aqui nos modelos e nas evoluções demográficos, por exemplo). O acento é, então, muito mais dado no conhecimento trazido pelo modelo do que em seu caráter preditivo stricto sensu; no caso, um sistema humano contém propriamente um conjunto de modelos de si mesmo, cujo uso (meteorológico, demográfico, econômico etc.) determina a evolução do sistema (cf. Fischer, no prelo, quando escrito o artigo) (V.O. nota 29).

Para estender a tais casos a noção de modelização matemática, designaremos[34] o registro do sistema como aquele do *matematizado*, aquele no qual se conduz a modelização como registro do *matemático*. O matematizado tem então a função de *objeto de estudo*, o matemático sendo a *ferramenta de estudo*.

A distância entre o matematizado e o matemático pode ser deveras grande: pensemos aqui na teoria dos números –cujo objeto de estudo, os inteiros naturais ou relativos, é substancialmente conhecido já desde o fundamental II, e cujas ferramentas de estudo são tomadas de empréstimo dos domínios mais avançados da matemática. Veremos, sobretudo, que a distinção entre o matematizado e o matemático constitui um dos esclarecimentos essenciais das análises que seguirão: para ser operante, a dialética ferramenta/objeto deve começar pela distinção dos termos que ela unirá dialeticamente.

Em alguns casos, tal distinção toma formas concretas, objetivadas: assim acontece, sobretudo, quando matematizado e matemático pertencem a dois setores considerados diferentes da matemática. Seja, por exemplo, a classe desses sistemas que são os *retângulos* (dos quais não se conhece a posição no plano: os retângulos, então, com um deslocamento aproximado). Conhecemos estes sistemas pela teoria geométrica, da qual eles são objetos notáveis".

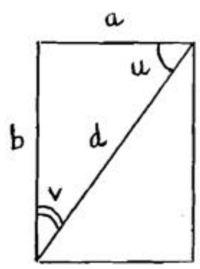

Figura 1.

Representação de retângulos com deslocamento aproximada

Pode-se construir um modelo métrico pelo processo seguinte: com a e b designando as medidas dos lados, a medida das diagonais, S, a medida da área, u e v as medidas dos ângulos (Figura 1) formados pelas diagonais e o pelos lados, obteremos o repertório de relações: S=ab, $d^2 = a^2 + b^2$, u = Arctg(b/a), v = Arctg (a/b). Em tal caso, o modelo se distingue bastante do sistema modelizado –ao menos para o senso comum matemático, que não considera que a geometria não seja nada além da álgebra linear[35].

[34] Os termos de matemática e matematizado são emprestados de Raymond, 1975, pp. 63-71 (V.O. nota 30).
[35] Como faz Jean Dieudonné em seu livro, já citado. (V.O. nota 31).

Um trabalho matemático simples, neste modelo, fornece um conhecimento novo que poderíamos ter produzido ao permanecer na teoria geométrica sem "métrica": o sistema, aqui parametrados pelas medidas a e b, poderia também sê-lo também pelas medidas d e u. De fato, temos inicialmente $a^2 + b^2 = d^2$, $b/a = tgu$, donde as igualdades $b=a.tg(u)$ e $a^2 + a^2tg^2u = a^2(l + tg^2u) = a^2/cos^2u = d^2$, que tão logo implicam $a = d \cos (u)$ e $b = d$ seno (u).

A produção de conhecimentos

Essas relações, como observado, poderiam ser estabelecidas "diretamente", "olhando a figura". Não ocorre da mesma maneira para este outro conhecimento relativo aos sistemas "retângulos": eles também podem ter seus parâmetros estabelecidos *a partir das medidas u e S*. É o *trabalho do modelo* que aqui trará esclarecimento: das relações $ab = S$ e $b/a = tgu$, deduziremos que se tem também $b = \sqrt{Stgu}$ e $a = \sqrt{Scotgu}$. Essas relações constituem um *conhecimento novo* –do qual talvez não se tenha vislumbrado até então a possibilidade (pode-se definir um retângulo por sua área S e a medida u do ângulo de uma diagonal com um dos lados)– e que poder-se-á agora tentar demonstrá-lo "geometricamente".

De uma maneira mais geral, um modelo é interessante quando ele permite a produção de conhecimentos que outra via não nos forneceria com tanta facilidade. Consideremos o teorema de Pitágoras: ele enuncia uma relação característica dos triângulos-retângulos que constitui *um modelo dos triângulos-retângulos* (modelo cujas variáveis são as medidas a, b e c dos lados): $c^2 = a^2 + b^2$. Esta igualdade tem uma interpretação clássica no registro do sistema: a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos nos dois lados do ângulo reto; é, além disso, como é bem conhecido, é demonstrando (por considerações geométricas de igualdade de áreas) esta última igualdade que a relação algébrica pitagórica pode ser estabelecida. Mas esta aparece como produtora de relações que não obtemos tão diretamente do ponto de vista geométrico: multipliquem-na por $\pi/8$; obtém-se a igualdade $\pi c^2/8 = \pi a^2/8 + \pi b^2/8$, cuja interpretação geométrica é imediata: a medida da área do semicírculo de diâmetro a hipotenusa, é igual à soma das medidas das áreas dos semicírculos construídos nos dois lados do ângulo reto. E, multiplicando a igualdade de Pitágoras por um coeficiente numérico adequado ($kc^2 = ka^2 + kb^2$), poderíamos dizer a mesma coisa sobre os triângulos equiláteros ($k = \sqrt{3}/4$) ou de quaisquer outras figuras semelhantes, entre si construídas sobre os lados do triângulo[36].

[36] Sobre esse ponto, cf. Bachelard, 1949, pp. 91-97 (V.O. nota 32).

Como no exemplo anterior, a distância é aqui bastante nítida entre o sistema e o modelo que se constrói dele: este aparece como um dispositivo do qual se pode tirar conhecimentos a respeito do sistema que ele modeliza. Mas o contraste que se pode assim salientar, em alguns casos, nem sempre é tão vivo; as inter-relações entre sistemas e modelos são, na matemática, mais ricas e mais sutis. Logo abaixo, mostramos dois aspectos essenciais disso.

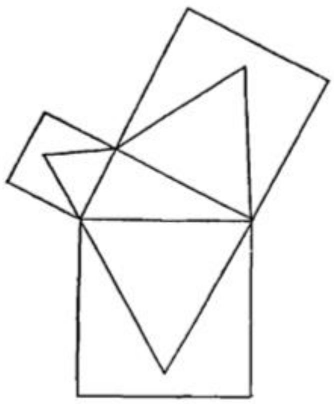

Figure 2

Modelo 1

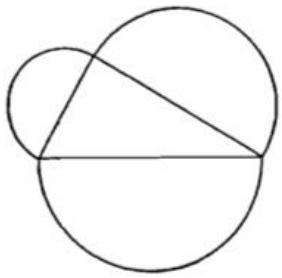

Figure 3

Modelo 2

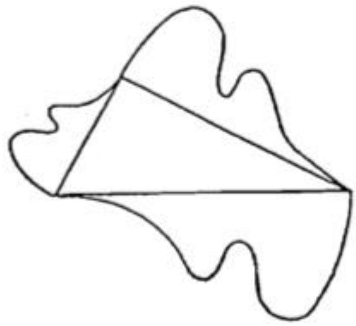

Figure 4

Modelo 3

Reversibilidade da relação de modelização

A relação do sistema com o modelo pode de fato *inverter-se*; o sistema pode aparecer, no sentido inverso, como um modelo do seu modelo. Ou seja, a Figura 5:

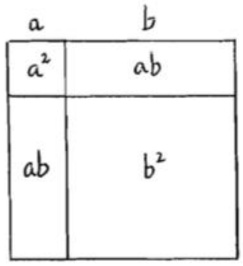

Figure 5

Relação do sistema com o modelo

As relações entre as áreas são modelizadas pela igualdade algébrica $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$. Inversamente, a figura logo acima pode ser contemplada como um modelo *geométrico* desta igualdade algébrica. E, historicamente, foi levando em consideração tais modelos geométricos que Al-Khwarizmi estudava e resolvia as equações do segundo grau[37].

Há aqui um fato geral, tão mais presente na matemática do que sistemas e modelos; mesmo quando pertencem a setores diferentes, eles são, ambos, objetos matemáticos. O movimento de estudo pode mudar de sentido, pelo menos parcialmente; um conhecimento, ao ter como objeto um dos dois termos da relação de modelização, pode ser transferido para o outro termo. A linguagem usual dos matemáticos falará aqui de interpretações. O estudo algébrico de um sistema de duas equações lineares de duas incógnitas (que modeliza um sistema de duas retas do plano) permite mostrar que duas retas dadas são ou coincidentes, ou estritamente paralelas ou transversais em um único ponto; inversamente, o estudo algébrico de um sistema dado pode apoiar-se no sistema correspondente de duas retas no plano, como modelo geométrico. No limite, pode-se assimilar uma reta com sua equação (ou antes, com uma classe de equivalência de equações), e, de uma maneira mais geral, identificar geometria elementar e álgebra linear.

Quando um sistema foi estudado e, por isso, é "supostamente conhecido", ele fornecerá, por translação, indicações sobre um de seus modelos. Consideremos aqui a classe dos sistemas "urnas contendo bolas vermelhas e bolas pretas". O estudo destes sistemas leva a modelizar a noção intuitiva de "proporção das bolas vermelhas (em número r) na urna (contendo um número total t de bolas)" pela fórmula[38] $p = r/t$. Tomemos então as frações 12/13 e 13/24. A primeira pode ser interpretada como a proporção de bolas vermelhas dentro de uma urna contendo 23 bolas, das quais 12 são vermelhas; a segunda é, então, a proporção da urna obtida ao *acrescentar uma bola vermelha* na urna precedente. Sabe-se que, neste caso, a proporção de bolas vermelhas *aumenta*; foi então estabelecida, sem cálculo, a desigualdade $12/13 < 13/24$.

Recorrência do processo de modelização

O termo de matematizado, introduzido mais acima, tem a função de lembrar que todo objeto matemático é o fruto de uma matematização (eventualmente intramatemática). Sua acoplagem ao termo de matemática, dentre outras coisas, marca o fato de que todo objeto matemático pode, por sua vez, ser tomado por matematizado, em um estudo de nível superior, chamando outras ferramentas de estudo. Chegamos a uma sucessão de modelos e uma sequência de modelos. Seja o sistema de duas equações de duas incógnitas $x + y = 11/2$ e $xy =$

[37] Cf. Smith, 1925, pp. 446-448 (V.O. nota 33).

[38] Encontrar-se-á, no anexo 2, uma modelização matemática da noção de proporção (V.O. nota 34).

6, que modeliza o sistema constituído por um retângulo de medida de área 6 e de perímetro 11. Podemos dar dele um modelo matematicamente equivalente, sob a forma da equação do segundo grau $2x^2 - 11x + 12 = 0$. Considerada, por sua vez, como um sistema matemático, esta equação tem então um modelo "standard", a formula $x = \frac{11 \mp \sqrt{11^2 - 4 \times 2 \times 12}}{4}$. Aquilo que denominamos, mais acima, "trabalho no modelo", pode assim ser interpretado como a *construção de modelos sucessivos*, melhor adaptados ao estudo.

Essa "recorrência" dos modelos se conjuga com a reversibilidade da relação de modelização que já notamos[39]. Seja a equação: $x^2 - 4x + 3 = 0$. Se invertermos a relação de modelização vista anteriormente, poderemos encontrar vantagens em pegarmos o modelo constituído pelas equações $x + y = 4$, $xy = 3$, que mostra imediatamente que os números 1 e 3, cuja soma vale 4 e o produto 3, são soluções da equação proposta –a qual não admite outras soluções, pois uma propriedade geral destes sistemas matemáticos que são as equações do segundo grau, é não admitir mais de duas soluções.

Modelos locais, modelos regionais

Acrescentaremos aqui mais uma distinção. Pode-se ver a *Geometria* de Descartes (1637) como a tentativa de elaborar *um modelo algébrico da geometria do plano*. Este modelo, em seguida, será estendido para o espaço (a equação da esfera é escrita pela primeira vez em 1700) e só tomará toda sua amplitude, ao final do século XVIII – com a publicação por Gaspard Monge, em 1795, de suas *Feuilles d'analyse* [Folhas de análise] (ou seja, de álgebra) aplicada à geometria. Mas ele se revela insuficiente para o estudo de outros fenômenos do plano ou do espaço, e a elaboração de modelos mais poderosos se torna necessária: geometria diferencial (cuja rápida ascensão está ligada àquela do cálculo infinitesimal) e geometria algébrica (com passagem para o corpo dos complexos, introdução do ponto ao infinito etc.), que nasce especialmente do desejo de modelizar os fenômenos de interseção das curvas e das superfícies[40].

O modelo algébrico, ou "analítico", da geometria (cuja introdução é hoje iniciada na nona série), é o que denominamos um modelo *regional*, ou, ainda, uma *teoria* (aqui: uma teoria matemática de um objeto matemático). Na sequência, a palavra "modelo" terá como referência, por vezes, modelos regionais, por outras, modelos "locais" –aqueles nos quais pensamos mais

[39] Retorna-se aqui ao tema do "Jogo de quadros" desenvolvido por Régine Douady (cf. Douady, 1986) (V.O. nota 35).
[40] Cf. Houzel, 1985, p.481a (V.O. nota 36).

geralmente quando se fala de modelos, sem que se busque sempre os distinguir claramente um do outro. Porém, será preciso manter presente em mente que a produção de um modelo local se inscreve em referência a uma teoria (ou seja, a uma modelização regional), mais ou menos aprofundada, do setor de realidade em questão. Sublinharemos finalmente que, como para os modelos locais, a construção de modelos regionais (ou seja, de teorias matemáticas) se apoia em uma forma ou outra de conhecimento dos sistemas que serão modelizados e do setor ao qual pertencem, e, então, supõe pelo menos uma *teoria parcial prévia* dos sistemas estudados –o novo modelo a ser construído devendo permitir a extensão do corpo de conhecimentos que temos sobre eles. Esta teoria prévia poderá ser matemática (se o sistema a ser modelizado é um objeto matemático) ou diversa (física etc.)[41].

Matemática e modelização

O milagre grego

Em Vie, doctrine et sentence des philosophes illustres [*Vida, doutrina e sentença dos filósofos ilustres*], Diógenes Laércio escreve: “Hierônimo diz que Tales mediu as pirâmides segundo sua sombra, ao observar o tempo em que nossa própria sombra é igual a nossa altura”. Michel Serres, citando esta parte, a comenta da seguinte maneira[42]: “A geometria é uma astúcia, ela faz um desvio, ela toma um caminho indireto para acessar aquilo que ultrapassa a prática imediata. A astúcia, aqui, é o modelo: construir em redução, com módulo constante, um resumo, um esqueleto de pirâmide. De fato, Tales não descobriu nada além da possibilidade da redução, da ideia de módulo, da noção de modelo. A pirâmide é inacessível; ele inventa a escala.”.

Milagre grego, indefinidamente reiniciado! Comte, na terceira lição de seu *Curso de Filosofia Positiva*, anota justamente: “Devemos enxergar como suficientemente constatada a impossibilidade de determinar, ao medi-las diretamente, grande parte das grandezas que desejamos conhecer. É este fato geral que a formação da ciência matemática necessita (...) Pois renunciando, quase em todos os casos, à medida imediata das grandezas, o espírito humano precisou buscar determiná-las indiretamente; e assim, ele foi conduzido à criação da matemática”.

Sem esquecer que a passagem da extramatemática à intramatemática é apenas a face visível de um processo geral, em obra mesmo dentro do trabalho matemático, tentaremos agora

[41] No exemplo dado aqui, Descartes se apoia na teoria da geometria do plano que o *corpus* euclidiano traz, modelo regional que, aliás, se desenvolverá na sequência –sob o nome de geometria sintética (“pura”)– mais ou menos em oposição ao modelo analítico (cartesiano) (V.O. nota 37).
[42] Serres, 1972, p. 163 (V.O. nota 38).

dar destaque a esta dimensão da atividade matemática, porque ela funda, epistemologicamente e culturalmente, o recurso explícito à noção de modelo em uma percepção de evolução curricular.

De fato, já a matemática mais primitiva –aquela que o ensino tornou transparente para nós e muitas vezes sem brilho– pode ser frutuosamente reexaminada e aproveitada à luz desse aspecto. A título de exemplo, examinaremos um problema dentre os mais tradicionais e mais elementares. Dispõe-se de um pacote de balas que queremos repartir equitativamente entre um certo número de crianças; como fazer? Em que, e como, a matemática pode intervir para resolver esse problema[43]?

Do empírico ao simbólico

Primeira observação: o problema pode ser resolvido *sem o socorro da matemática*, por um procedimento efetivo que denominamos procedimento 1. Dispomos as crianças em uma linha, depois, distribui-se uma bala para cada criança ao percorrer uma primeira vez a linha; se sobram balas, retoma-se a distribuição, e assim se recomeça até que haja mais balas não distribuídas do que crianças na linha. Para assegurar-nos desta última condição (que parece *a priori* implicar a contagem e a comparação dos números), não há uma necessidade maior, em realidade, de recorrer à matemática: se a distribuição se interromper no meio do caminho por falta de balas, volta-se atrás para recuperar as balas já distribuídas durante a última passagem.

Porém, este procedimento empírico apresenta certas desvantagens e limitações. Não poderá ser executado se as crianças não puderem ser reunidas efetivamente (por exemplo, se as balas devem ser repartidas entre crianças geograficamente afastadas, que receberão o devido pelo correio). Em todos os casos, ademais, sua aplicação não deixa de ser acompanhada de inconvenientes práticos. As crianças podem fazer barulho, o que pode ser desagradável para a pessoa encarregada da distribuição e levá-la a cometer erros; sobretudo, elas podem se mexer, trocar de lugar na linha, com o objetivo –por exemplo– de trapacear, recebendo uma bala a mais. Para obviar a essas dificuldades, ou até para que a distribuição seja simplesmente possível (se as crianças não puderem ser reunidas efetivamente), pode-se pensar então em um segundo procedimento.

No procedimento 2, supõe-se que dispomos de uma lista com os nomes das crianças. A cada um dos nomes, fazemos a correspondência com um círculo traçado no chão. Na sequência,

[43] O exemplo tratado aqui é matematicamente elementar, mas epistemologicamente fundamental –em parte, porque ele se dedica à um problema elementar...). Não hesitamos em apresentá-lo longamente, como todos os detalhes que nos pareceram necessários, a fim de aproveitá-lo várias vezes nos desenvolvimentos que seguem (V.O. nota 39).

as balas são distribuídas segundo a técnica do procedimento 1, os círculos substituindo as crianças. Ao passarmos do procedimento 1 ao procedimento 2, vemos que há um deslocamento de uma realidade "humana" (as crianças) para uma *representação simbólica* dessa realidade (os nomes, depois os círculos); de uma situação concreta para uma situação menos concreta e ao menos parcialmente simbólica (não vamos esquecer que as balas ainda estão presentes). O barulho cessa; as crianças não bagunçam mais – óbvio. Enfim, a ordem reina, assim como a calma. Passa-se assim de uma reunião amável ou caótica para uma atividade serena, em que o distribuidor de balas fica sozinho com seus nomes, seus círculos e suas balas. O que se constata então é uma separação, vantajosa em diversos aspectos, entre a realidade e um certo *modelo* desta realidade: as crianças poderão não encontrar nunca a pessoa que terá, em proveito deles, repartido as balas em partes iguais, que depois lhes serão distribuídas.

O advento da atividade matemática

Mas o procedimento 2 também apresenta limitações. Supõe que a pessoa que reparte com equidade tenha as balas à sua disposição. Supõe ainda –se há muitas crianças e muitas balas– um recinto bastante amplo onde ele possa acontecer. Um passo a mais, poderemos nos libertar destas exigências, entrando mais francamente no mundo da matemática, ao recorrermos ao procedimento 3, que formularemos agora:

1. Contamos o *número* de balas a serem repartidas, a, e o *número* de crianças dentre as quais será feita a repartição equitativa, b;
2. Efetuamos a *divisão* (chamada de euclidiana) do inteiro a pelo inteiro b, ou seja, determina-se o quociente inteiro q e o resto r, tais como $a = bq + r$, $r<b$;
3. Reagrupamos as balas por pacotes de q unidades –pacotes que serão distribuídos para as b crianças.

Não é fácil decidir se, com a invenção e a execução do procedimento 2, não se passa de uma atividade não matemática (procedimento 1) a uma atividade matemática. Com o procedimento 3, em contrapartida, enfrentamos uma atividade autenticamente matemática –que até foi considerada como muito erudita por muito tempo[44].

[44] Nem mencionando a divisão, a multiplicação permaneceu por muito tempo fora de alcance aos reles mortais. O historiador Lucien Febvre relata a seguinte anedota: "Sempre me lembro da bela história do secretário de um presidente do Tribunal de Contas, brutalmente intimado por um bando a abrir sua porta: "Se não abrir, nós somos 50 aqui que te darão, cada um, 100 pancadas com um bastão". O solicitado responde na hora: "Como! 5000 pancadas!". E Tallemand, que conta a história, fica maravilhado: "Admiro a presença de espírito deste homem. Me parece que precisava ser o secretário de um presidente do Tribunal de Contas para fazer o cálculo tão rapidamente! O cálculo, o impossível cálculo: 100 x 50" (Febvre, 1942, p. 363) (V.O. nota 40).

Este procedimento permite uma separação ainda mais minuciosa do que a anterior. Se a etapas 1 e 3, ao começo e ao fim do procedimento, fazem a ligação com a realidade modelizada, a etapa 2 retém apenas um aspecto da realidade: a cardinalidade ou “numerosidade” do conjunto das crianças de um lado, e do conjunto das balas do outro lado. Em outros termos, constrói-se um modelo da realidade que leva em conta apenas os aspectos dessa realidade que aparecem pertinentes em relação à pergunta que se faz a seu respeito.

Este modelo, como sempre na atividade científica, não é a imagem mais completa possível do real. Em extremo oposto, ele fornece uma imagem (voluntariamente) empobrecida do real –eis onde está a sua força. Se se quisesse expressar este fato em referência à atividade do pintor, poder-se-ia dizer que a modelização se aproxima mais de uma vista de estilização do que de uma vontade de hiper-realismo. O modelo não é, a bem dizer, exatamente uma cópia ou uma reprodução do real, mas um *acréscimo* ao real, uma construção artificial, sendo estabelecida a relação com o real de uma maneira determinada, supostamente adequada[45].

No exemplo examinado, esta ligação se dá durante as etapas 1 e 3, aquela da construção do modelo, por um lado, e aquela do retorno ao real, por outro lado. Estas duas etapas delimitam uma fase de atividade –a etapa 2– que se encontra liberada de toda relação, que não simbólica, com a realidade modelizada[46]. Na prática, isso se traduz pelo fato de que a pessoa encarregada de levar a bom termo a etapa 2 pode nunca estar em contato, nem com as crianças, nem com as balas. Bastará comunicar-lhe os números a e b; e bastará comunicar-lhe de volta o número q (e eventualmente o número r, com fins de averiguar, por exemplo). Sua atividade pode agora ser completamente desconectada da realidade “concreta” com a qual ela se relaciona, mesmo assim. O barulho das crianças é substituído pelo silêncio de uma sala de trabalho, onde nosso personagem, tornado matemático, se encontra sozinho com um problema matemático (quais são os números q e r tais que...). A manipulação efetiva das balas –que exigia um uso e um planejamento específicos do recinto– dá lugar a uma organização sempre igual –por exemplo, uma mesa de trabalho, folhas de papel, um lápis[47].

[45] Em Platão, o paradigma é o objeto fácil, de valor propedêutico, com o qual se pratica tendo em vista apreender adequadamente um objeto cuja compreensão apresenta uma dificuldade superior: assim o pescador à linha nos dá uma imagem do sofista, o tecelão do... soberano. A origem da noção de modelo se encontra na tecnologia: “O modelo é primeiro uma ’maquete’, o objeto reduzido e manejável que reproduz dentro de si, sob uma forma simplificada, “miniaturizada”, as propriedades de um objeto com grandes dimensões –trate-se de uma arquitetura ou de um dispositivo mecânico; o objeto reduzido pode ser submetido à medidas, cálculos, testes físicos que não são aplicados comodamente à coisa reproduzida” (Mouloud, 1985, p. 401) (V.O. nota 41).

[46] Esta libertação se torna completa com a *experiência de pensamento*, que pode proceder livremente (“na cabeça”) ou –como hoje faz o computador– se concretizar em uma verdadeira simulação (que supõe um modelo que é substituído no sistema, real ou imaginado, que se tem em vista) (V.O. nota 42).

[47] A atividade matemática é, seguramente, uma atividade concreta; mas de um gênero particular. Em grego, *mathêma* significa estudo, *manthanein* significa estudar: o matemático se entrega ao estudo. Que se regozije ou

As ferramentas da matematização

O alcance do esquema de modelização

Ao olharmos as análises precedentes, reconhecemos que, no nosso ensino, uma atividade matemática autêntica encontra-se, realmente, *desde a escola primaria*. Consideremos por um instante um destes problemas que os didatas classificam entre os problemas aditivos: “Paul tem 8 bolas de gude; ele ganha um certo número de bolas de gude e fica com 13 bolas de gude; quantas bolas de gude ele ganhou?”. O sistema real estudado aqui é apenas *evocado*. A resolução do problema passa pela construção de um *modelo do sistema*.

Em um primeiro nível, o modelo com qual o aluno vai trabalhar pode ficar muito concreto (seria o procedimento 2 de nosso exemplo): ele alinha 8 fichas vermelhas sobre sua escrivaninha, depois acrescenta fichas pretas uma por uma, até obter 13 fichas; ele conta então o número de fichas pretas acrescentadas, que é o número de bolas de gude que Paul ganhou[48].

Em um segundo nível (aquele do procedimento 3), a resolução do problema supõe apenas os instrumentos estabelecidos mencionados acima: papel e lápis. O aluno constrói um modelo que pode ser escrito como 8 + ... = 13, e que prefigura a notação clássica da equação do primeiro grau 8 + x = 13. Pelo trabalho com esse modelo, ele obterá então o valor procurado, que será encontrado por um algoritmo de resolução da equação obtida: por exemplo, ao enumerar os inteiros a partir de 1, calculando-se as somas sucessivas até se obter 13: 8 + 1, 8 + 2, 8 + 3, etc.; mais para frente, ao efetuar a subtração de 8 a 13 com um algoritmo de cálculo extensamente estudado.

A noção de modelização permite assim tomar uma visão de conjunto sobre a atividade matemática, do primário à universidade. Grade de leitura e de questionamento, ela fornece um quadro de referência dentro do qual se torna então possível que diferenças significativas apareçam –sobretudo entre aritmética e álgebra.

As práticas semióticas

Os exemplos anteriores nos põem diante de uma das dimensões essenciais da atividade humana, presente desde a linguagem[49]: a atividade de *simbolização* e a utilização regulada de *sistemas de signos* –que permitem “falar” de seus referentes, mesmo na ausência deles. Trata-se de designar um problema que nenhuma antropologia pode deixar de encontrar. Neste tema

que se entristeça com isso, sua atividade não é uma atividade ao ar livre, nem ao menosuma atividade que pode, por natureza, apartar-se do mundo (V.O. nota 43). [VERIFICAR SE ENTENDI O CONCEITO]

[48] Como se sabe, numerosos comerciantes recorrem a uma variante deste procedimento para dar o troco (V.O. nota 44).

[49] Para uma análise que se tornou clássica, cf. Freud, 1920, pp. 15-20 (V.O. nota 45).

difícil, nós nos restringiremos ao mínimo necessário para situar as questões que examinaremos na sequência. Colocaremos primeiro, como princípio, que toda atividade empresta sua forma e sua substância concretas na pluralidade coordenada de *registros semióticos*; ou, que para expressá-lo de outra maneira, nenhuma atividade humana pode satisfazer-se com um código único, ela logo é dotada de certa *espessura semiótica*. Ao mesmo tempo, ela deixa aparecer um ou vários códigos dominantes, aos quais os outros códigos semióticos –que denominamos de secundários– se sujeitam de certa maneira. A articulação do conjunto dos registros postos em movimento forma o que indicamos por *complexo* semiótico –em que o registro da língua natural sempre está presente, pelo menos como metalinguagem.

Recordemos a este respeito o procedimento 2, relativo à distribuição de bombons: a atividade que se desdobra em sua execução nos aparece como uma mistura. Em pelo menos uma de suas modalidades concebíveis, utiliza tanto a linguagem escrita natural como a oral (que permitem constituir a lista de nomes e lê-la), e um código simbólico gráfico-espacial, o dos círculos colocados em correspondência com os nomes, um código “momentâneo”, inventado para a circunstância, mas que a repetição da atividade em um determinado grupo social pode muito bem estabilizar de forma duradoura. Entretanto, esta descrição continua incompleta: devemos acrescentar a ela um sistema de sinais gestuais, no ponto de encontro do corpo e do espaço, de que ela supõe a boa coordenação -ou seja, o padrão motor repetido que consiste em mover os bombons, de maneira regulada de acordo com o tempo e o espaço, da bolsa que originalmente os contém para os círculos entre os quais devem ser distribuídos.

Tudo isso faz com que uma atividade, que, para não ser ainda matemática no sentido convencional que se pode atribuir a essa palavra, já seja bastante complexa. O exemplo em si dá uma ideia de um problema geral para qualquer atividade humana: a utilização adequada de registros semióticos articulados juntos –problema no centro de qualquer aprendizagem, em qualquer nível que seja. Mas o exame comparativo que se pode fazer do procedimento 3, traz outra lição. A atividade matemática *estreita a espessura semiótica acerca de códigos específicos* –aqui, do numérico– sem, entretanto, eliminar a pluralidade dos códigos: a utilização gráfica do espaço que mostrava a efetuação do procedimento 2, que supõe o domínio do gesto adequado, aqui se encontra concentrado no espaço normalizado da folha de papel na qual se ordenam as operações; a língua natural permanece esse escrínio que encrava e comenta as outras práticas semióticas etc.

Nesse estreitamento acerca de um código privilegiado, específico de um tipo de atividade, ganha-se em potência de efetuação, ao mesmo tempo em que a economia dos meios semióticos se torna mais parcimoniosa e mais bem regulada: apresenta-se aqui a motivação –

indefinidamente reconduzida– dos formalismos científicos, que asseguram à atividade produtora de conhecimentos, línguas bem-feitas e adequadas a seus objetos. Deste ponto de vista, a invenção da "língua algébrica" constitui um salto, do qual se pode dizer –quando observamos seu destino no ensino do ensino fundamental II– que seu alcance e significação até hoje ainda não foram totalmente medidos.

A adequação das ferramentas e dos modelos

As práticas semióticas que cercamos nas anotações anteriores são necessárias já para extrair –de um real mais ou menos indiferenciado– sistemas que a matematização quererá dispor de meios de reter. Por sua estabilização e articulação em códigos determinados, elas permitem a emergência de conceitos, métodos, procedimentos. Este ressalto se afina e fica mais preciso ao estilizar-se com o empreendimento de modelização. A escolha dos meios semióticos se torna central: é ela que irá determinar o *controle* do processo de modelização e de seu resultado, o modelo e o trabalho do modelo.

O primeiro –sem dúvidas– dos meios da modelização de sistemas (naturais ou artificiais) é constituído pelos números *inteiros* (naturais). A familiarização com esta ferramenta ocupa bastante tempo a criança no ensino fundamental. Sua disponibilidade não é natural –nem na ordem da história, nem na da formação da relação com o saber matemático[50]. Suponhamos que o saber matemático está adquirido se ao contar as bolas de gude vermelhas de Paul de um lado, e as pretas do outro lado, eu chegar a 8 e 5, respectivamente; e se, ao contá-las todas juntas, eu chegar a 13, terei um modelo (numérico) das bolas de gude que Paul possui sob a forma da igualdade 8 + 5 = 13. Sob esta igualdade, que para nós é óbvia, se esconde uma dificuldade recorrente: o primeiro problema posto por qualquer empreendimento de modelização é a *adequação* do modelo ao sistema que ele permite estudar. E esta adequação depende, como visto, do tipo de estudo que se pretende fazer.

Problema constante, mesmo que seja mais visível em outros níveis de estudo: se eu tenho 2 bolas de gude e for ganhar mais 3, terei 2 + 3 bolas de gude; se, por três vezes, eu for ganhar 2 bolas de gude, ganharei 3 x 2 bolas de gude; se me convidam a escolher uma bola de gude dentro de cada um dos lotes de um conjunto de 3 lotes de 2 bolas de gude, meu estoque ficará somente com mais 3 bolas de gude, mas poderei fazê-los de 2^3 maneiras; etc. Passa-se

[50] Pensemos aqui –como exemplo um pouco menos familiar– nesta consequência da ausência (ao longo do ensino secundário e para além dele) do conceito de cardinal transfinito: a dificuldade em aceitar a ideia de que haja –entre 0 e 1, por exemplo– mais reais do que racionais (V.O. nota 46).

bem rapidamente de problemas de aritmética do ensino fundamental para pequenos problemas de combinatória, cuja dificuldade aumenta rapidamente[51].

Em princípio, a questão da adequação encontra-se no mais humilde nível. Ela está tradicionalmente resolvida, para todo e cada um, *pela aprendizagem de modelos standards que permitem enfrentar situações standards*. Mas até o modelo aditivo mais simples –que comentávamos acima– pode ser examinado deste ponto de vista, como fez outrora Henri Lebesgue ao sublinhar que, na formação de tais modelos, a experiência repetida foi a primeira garantia da adequação, mesmo e, sobretudo, na aritmética elementar: "... sabemos sem hesitação –ele escreve– quais são os casos em que a aritmética se aplica, quais são os casos em que ela não se aplica. Nesses últimos casos, a ideia de aplicar a aritmética não nos aflora à cabeça nem por um instante; pensamos em aplicar a aritmética somente quando ela é aplicada tão intensamente, que esquecemos que há casos em que ela não se aplica: dois mais dois são quatro, afirmamos. "Ponho dois líquidos em um copo, no outro dois líquidos. Ponho tudo em um vaso. Este vai conter quatro líquidos? – É má fé, você diz, não é uma questão de aritmética. – Ponho dois animais em uma gaiola, em seguida mais dois; quantos animais a gaiola contém? – Sua má fé, você diz, fica ainda mais óbvia; depende da espécie destes animais, um deles poderia devorar os demais; precisa saber se a contagem deve acontecer imediatamente ou daqui a um ano, já que os animais poderiam ter morrido ou tido filhotes. Em suma, você fala de coleções que não se sabe se são imutáveis, se cada objeto conserva sua individualidade, se não há objetos que aparecem ou que desaparecem".[52]

Temos aqui, com efeito, uma condição para que, segundo a expressão de Lebesgue, "a aritmética se aplique". "A equação *um dá dois* da reprodução, poderá assim escrever um biólogo em uma obra de vulgarização[53], é substituída pela equação *dois dá um* da sexualidade (...). A verdadeira equação da sexualidade é assim, *um mais um dá um outro*": nenhum paradoxo, claro, nestas formulações que atiçam os olhos. Mas vai-se ver que o controle que permite a aritmética tradicional e até sua própria potência –sem controle da ação, não há potência da ação– sofrem com a insuficiência das ferramentas semióticas nas quais a aritmética se encolheu medrosamente.

O mundo fechado e o universo infinito

[51] Devo escolher uma bola de gude dentro de cada um dos lotes de um conjunto de 3 lotes de 2 bolas de gude. Estas bolas de gude diferem apenas pela cor. Aquelas do primeiro lote são uma verde, a outra vermelha; aquelas do segundo lote são vermelhas; aquelas do terceiro lote são uma verde, outra preta; posso eu escolher quantos conjuntos de diferentes bolas de gude? (V.O. nota 47).

[52] Lebesgue, 1935, pp. 5-6 (V.O. nota 48).

[53] Langaney, 1979, p. 18 (V.O. nota 49). (

Ferramentas aritméticas, ferramentas algébricas

Tenho 23 bolas de gude, das quais 7 são azuis. As outras são pretas. Quantas bolas de gude pretas eu tenho? O problema pertence ao fundo mais clássico da aritmética tradicional. O contrato didático, mais frequente do que a análise da situação matemática, auxiliou o aluno a resolver: tenho 23 - 7, sendo 16 bolas de gude pretas.

Ao aceitar que a aritmética aqui se aplica (que as bolas de gude nem se volatilizam nem se reproduzem), e não sendo o hábito adquirido de longa data, seria preciso recorrer a algum modelo formal com o qual se trabalhará para conseguir a resposta: no mais alto nível, a equação $x + 7 = 23$; em um nível menos elaborado, um esquema adequado (em forma de diagrama de Venn) etc. A situação é mais nítida ainda quando se trata da divisão[54].

A aritmética antiga se vangloriou de fazer a economia destes meios formais, dado que não os disponibilizou para si. Retomemos o problema segundo o esquema da modelização. O sistema estudado –o conjunto das bolas de gude que possuo– está descrito por três variáveis: “o número total de bolas de gude”, “o número de bolas de gude azuis”, “o número de bolas de gude pretas”. Os valores destes parâmetros definem um estado do sistema. Numerosos problemas, –elementares ou não– são então, à semelhança deste, do seguinte tipo: conhecendo os valores de certas variáveis, encontrar os valores das outras variáveis. O conhecimento desses últimos valores é obtido pela consideração das relações que governam o conjunto das variáveis.

A aritmética tradicional reconhece aqui uma relação que ela enunciará assim: “o número total de bolas de gude é igual ao número de bolas de gude azuis aumentado pelo número de bolas de gude pretas”. Sua ferramenta essencial é a linguagem ordinária, aumentada pelo cálculo *dos números*. Não se calcula sobre os enunciados da linguagem ordinária: para isso, será atribuída à aritmética a virtude de nos obrigar a “raciocinar” sobre os enunciados da linguagem ordinária, e se recusará ao cálculo qualquer valor diverso daquele de uma mecânica, que só pode descarrilhar e falhar.

A álgebra fornece um meio mais potente, essencialmente ligado ao uso de *letras* (para designar as variáveis), e com possibilidade de *calcular sobre as expressões literais* que ela leva a formar. O “raciocínio” se faz cálculo, “a Arte” – ou seja, a arte analítica, a álgebra – “descobriu muito a propósito do uso da escritura”, nota Descartes na décima sexta das *Regras para a Direção do Espírito*. O problema precedente será resolvido pelo cálculo a partir da relação $x + 7 = 23$; ao repartir 7 com os dois membros da igualdade, obtém-se, com efeito, x =

[54] Cf. Chevallard, 1986, pp. 38-40 (V.O. nota 50).

23 - 7. Eis *o porquê* –segundo o modelo utilizado– do número de bolas de gude pretas ser dado pela diferença 23 - 7.

A aritmética, em compensação, permanece essencialmente um saber oral, que apenas deixa para o papel a efetuação das operações com os números. Também, não passa muito dos problemas de primeiro grau –que ela torna como sua especialidade ao impor-se neles por muito tempo, excluindo qualquer outra abordagem. Seu arsenal logístico é composto por formulinhas (dos quais a regra de três, de antiga memória, fornece um exemplo emblemático) que permitem memorizar e pôr em prática esquemas de cálculo, por vezes muito hábeis, como o método da posição falsa. Esta habilidade –que pode ser admirada– é explicada por uma ausência: aquela de um formalismo adequado.

O problema seguinte –bem à maneira da antiga aritmética– esclarecerá esse ponto: um comerciante compra um fardo de tecido de lã por 4 francos o metro; ele revende: um quinto do fardo por 8 francos o metro; um quarto, por 7 francos o metro; o resto, ele vende por 6 francos o metro. Assim, ele obtém um lucro de 424 francos. Qual era o comprimento inicial do tecido?

A aritmética tradicional operava neste tipo de problema com o método da *falsa posição*. Suponhamos que a peça de tecido de lã foi de 20 metros; o valor de compra é 4 x 20 = 80 francos, e a renda da venda é igual a.

8 x 4 + 7 x 5 + 6(20 - 4 - 5) = 133 francos

O benefício é de 133 - 80 = 53 francos, sendo 8 vezes menos do que o benefício que foi recebido de fato; a peça de tecido de lã media então 8 x 20 = 160 metros.

A solução “pela álgebra” tem como ferramenta essencial a equação

8(x/5) + 7(x/4) + 6(x - x/5 - x/4) - 4x = 424

que se quer aqui resolver pelo cálculo algébrico, enquanto a aritmética a resolvia (pelo método indicado) sem manipulá-la, *sem nem mesmo escrevê-la* –o que ela não sabe fazer.

A solução aritmética é aqui econômica[55], por certo. Ela se tornará, fora desse contexto, arriscada –ou até impossível. O universo matemático da antiga aritmética é, por isso, um mundo fechado. Os problemas são nela estereotipados, como as soluções que ela ensina a lhes dar.

Parâmetros e fórmulas, variáveis e funções

Por contraste, a introdução das letras (as “espécies” dos autores antigos), sinônima à algebrização do *corpus* matemático, opera uma abertura indefinida: dissemos em outra

[55] Nota-se de passagem que a equação (de primeiro grau) aqui apresentada já é relativamente complexa (para um aluno do *quatrième* por exemplo). Por contraste, a solução aritmética é claramente mais fácil: graças ao uso pertinente de suas “formulinhas” [“*formulettes*”] (Cf. nota 65 da tradução, NT), a aritmética assim é capaz de proezas relativas –que já fascinaram mais de uma pessoa (V.O. nota 51).

ocasião[56] como aquilo que podemos nomear revolução algébrica foi justamente saudado por seus promotores e seus contemporâneos. Mas a chave do sucesso não advém somente desse pequeno x que figura a incógnita do problema. De largada, a potência algébrica é posta em relação com o fato de designar por letras –ao lado das *quantidades não conhecidas*– o que se procura, as próprias quantidades conhecidas –os dados.

Em uma nota à sua tradução (1630) de *La nouvelle algèbre de M. Viète*, Vaulézard escreve[57]: "A utilidade que se tira desta nova álgebra é admirável, em respeito à confusão, da qual são recheadas as álgebras dos antigos (...), pois eles exerciam e faziam as operações de suas álgebras pelos números; é por isso que dessas álgebras não há nenhum teorema ou solução geral para toda proposição similar àquela de onde ela deve ser tirada –como se faz nesta recém-instituída, na qual os raciocínios e as operações acontecem sob as espécies".

O que faz a força da álgebra, então, é o que denominamos hoje emprego de *parâmetros*, ou seja, as variáveis do sistema, cujos valores são supostamente conhecidos. Em termos de modelização, a introdução de parâmetros faz a passagem de uma modelização "aritmética" –em que os enunciados da linguagem ordinária, quase inertes do ponto de vista do cálculo, convivem com o único cálculo sobre os números– para uma modelização (algébrica), na qual os enunciados vernacularizados cedem lugar a expressões literais (ou numérico-literais), nas quais o cálculo algébrico opera e que poderemos avaliar ao fim do cálculo, voltando então para aos números particulares que definem o estado do sistema que nos interessa. Em sua 16ª regra já citada, Descartes indicou muito bem a lógica deste procedimento de abstração: "Deve-se também fazer um sumário, onde escreveremos os termos da questão tais como nos terão sido eles propostos pela primeira vez; em seguida, como são eles abstraídos, e por quais notações são designados. De sorte que, depois de ter encontrado a solução graças a essas mesmas notações, aplicaremos facilmente esta solução, sem nenhum socorro da memória, ao assunto particular que estivermos tratando, pois, nunca nada pode ser abstrato, a não ser de uma matéria menos geral."

Esta lição foi progressivamente perdida no nosso ensino secundário. Possuo r bolas de gude vermelhas e n bolas de gude pretas, ou seja, um total de t de bolas. O sistema é modelizado pela relação $t = r+n$. A partir daí, eu obtenho com facilidade o número de bolas de gude pretas possuídas, n, em função do número total de bolas de gude, t, e do número de bolas de gude vermelhas, r, pela formula $n = t - r$. Sobre outro problema, tão clássico também, mas em um

[56] Chevallard, 1984a (V.O. nota 52).
[57] Vaulézard, 1630, p. 15, nota g (V.O. nota 53).

nível levemente superior[58], retomando o tema da álgebra como memória[59], um autor do final do século 18 escreverá assim: "sem designar nenhum número em particular, os números dados passam, sem alteração, de uma frase para outra, enquanto se efetua à medida todas as operações que se apresentam sobre esses números; quando chegou-se ao resultado, nada retraça ao espírito, como o número 2 –ao qual se pode chegar por uma infinidade de operações diferentes– foi formado pelos números dados 9 e 5".

O uso de parâmetros coloca a noção de fórmula no centro dos estudos matemáticos a partir do nível mais elementar. Esta noção está imediatamente ligada à de uma função: a medida b do lado de um retângulo de área S, cujo outro lado tem a medida a, é dada pela fórmula b = S/a; vamos supor que S é fixo e vamos variar x = a; a medida do outro lado, isto é, y = b, é uma função (homográfica) de x, dada por y = S/x.

A funcionalidade do cálculo algébrico que uma perspectiva de renovação curricular deve visar pressupõe, portanto, numa fase inicial, o uso de *parâmetros*; incentiva a reapropriação da noção de *fórmula* (enfatizando tanto sua *produção* quanto sua implementação); e leva à consideração da familiarização, numa fase também precoce, com a noção de *função*. O programa de pesquisa, que resumimos acima em dois objetivos inter-relacionados, recebe aqui uma extensão decisiva.

Referências

Bachelard G. (1928), *Essai sur la connaissance approchée,* Jules Vrin, Paris, quatrième édition 1973.

Bachelard G. (1949), *Le rationalisme appliqué,* Presses universitaires de France, Paris, quatrième édition 1970.

Chevallard Y. (1984a), «Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au colégio - première partie: l'évolution de la trans- position didactique», Petit x, nO 5, pp. 51-94.

Chevallard Y. (1985b), *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné,* La pensée sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1986), «Les programmes et la transposition didactique», *Bulletin de l'APMEP,* nº 352 (février 1986), pp. 32-50.

Chevallard Y. et Mercier A. (1987), *Sur laformation historique du temps didactique,* Editions de l'IREM d'Aix-Marseille, Marseille.

Choquet G (1964), *L'enseignement de la géométrie,* Hermann, Paris. DIEUDONNE J. (1964), *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire,* Hermann, Paris.

[58] O problema colocado é o seguinte: encontrar dois números, sabendo que sua soma é 9 e sua diferença 5 (V.O. nota 54)

[59] Cf. Chevallard, 1984a, p.57 (V.O. nota 55)

Douady R. (1986), «Jeux de cadres et dialectique outil-objet», *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 7-2, pp. 5-31.

Ekeland I. (1984), *Le calcul, l'imprévu*, Editions du Seuil.

Febvre L. (1942), *Le problème de l'incroyance au 16ème siècle,* Albin Michel, Paris 1968.

Fischer R. (à paraître), «The «Human Factor» in Pure and Applied Mathe- matics», in M.S. Arora, A. Rogerson et F. Mina (éds) : *Mathematics Education into the 21st Century.*

Freud S. (1920), *Essais de psychanalyse,* Payot, Paris, 1976. HOUZEL C. (1985), «Géométrie algébrique», *Encyclopaedia universalis,* nO 8, pp. 481-488.

Langaney A. (1979), *Le sexe et l'innovation,* Editions du Seuil, Paris.

Lebesgue H. (1935), *La mesure des grandeurs,* Albert Blanchard, Paris, 1975.

Lutz R. et Goze M. (1985), «Analyse non standard», *Encyclopaedia univer- salis,* nO 2, pp. 13-16.

Mouloud N. (1985), «Modèle», *Encyclopaedia universalis,* nO 12, ppA01-402.

Raymond P. (1975), *L'histoire et les sciences,* François Maspéro, Paris.

Reeb G. (1981), «Analyse non standard (essai de vulgarisation)>>, *Bulletin de l'APMEP,* nO 328 (avril 1981), pp. 259-273.

Schoenfeld A.H. (1985), *Mathematical Problem Solving,* Academie Press, Orlando.

Serres M. (1972), *Hermès II - L'interférence,* Editions de Minuit, Paris. SMITH D.E. (1925), *History of mathematics,* volume II, Dover, New York, 1958.

Valentin L. (1983), *L'univers mécanique - Introduction à la physique et à ses méthodes,* Hennann, Paris.

Vaulezard (1630), *La nouvelle algèbre de* M. *Viète,* Fayard, Paris, 1986.

ANEXO 1

O Empirismo, Solução E Problema.

A consolidação do empirismo, que é inicialmente um fato, levanta um problema delicado de análise didática. Por que esse recurso – espontâneo, impensado em outras palavras – a tal solução empirista? Uma solução, aliás, para qual problema? Tantas questões nas quais convém deter-se por um momento – e que, talvez saibamos, valem apenas para o ensino da matemática[60].

A chave deste enigma se encontra, nos parece, no processo de transposição didática[61]. Umas das maiores restrições às quais se encontra submetido o sistema de ensino é a **compatibilidade entre saber ensinado e saber sábio** – regra sob a qual deve ser resolvido o problema da viabilidade, da viabilização, dos sistemas didáticos[62]. Ora, a viabilidade didática supõe, de maneira geral, a conquista de uma **autonomia relativa** da esfera didática em relação à esfera erudita. Uma tal autonomia é necessária porque os regimes – sábio e ensinado, do saber – diferem. Os sistemas de restrições didáticas internas têm, com efeito, um caráter ***sui generis*** que impõe a força da lei específica das regras no tratamento do saber no interior dos sistemas didáticos. Tal é uma das lições que traz, nessa consideração, a teoria da transposição didática.

Existe, por conseguinte, uma verdadeira **contradição** no cerne do problema fundamental da viabilidade didática. Por um lado, deve ser capaz de se afirmar também como saber *sábio* e, tal como um vassalo para com seu suserano, jurar sua fidelidade, fazer reconhecer que, por uma ordenação de cavaleiro em boa e devida forma, ele se instalou em uma legitimidade tanto cultural quanto epistemológica[63]. Mas, por outro lado, o saber ensinado não pode ser um reflexo puro e simples do saber acadêmico. Ele deve, de certa forma, distanciar-se, marcar sua especificidade, assumir valores e usos que o regime dos saberes acadêmicos reconhece. É então para o problema didático constituído por esta contradição intrínseca (e permanente) que a opção empírica traz uma solução.

Ao afirmar, com efeito, que o segredo do conhecimento do mundo se encontra nos objetos do mundo, ao refutar – implicitamente – essa ideia essencial segundo a qual o conhecimento constitui um **acréscimo** ao mundo dos objetos “reais”, ao lhe dar o estatuto de **um certo olhar** mais afinado e justamente mais discriminador quanto aos assuntos do mundo, o empirismo afirma também que **todo conhecimento pode ser engendrado com autonomia em relação ao saber sábio**.

Paradoxo e contradição, esta conclusão, que permite ao saber ensinado desdobrar-se em uma feliz autarquia, pode valer-se de sua fidelidade à lição da esfera erudita. Tanto cá, quanto lá, a produção do saber seria endógena; não tomaria emprestado nada que ela não pudesse tirar de seu próprio fundo; não proporia nada que ela não elaborasse segundo uma lógica produtiva autônoma, tida como único

[60] Conferir no trabalho de S. e M.H. Johsua, «Le rapport à l'expérimental dans l'enseignement des sciences». No prelo da « Recherche en didactique des mathématiques ». (Quando publicado o artigo, NT). (V.O. nota 56)
[61] Faremos uso no que segue de noções apresentadas por Chevallard (1985b) que convidamos o lector consultar.
[62] Sobre as noções de viabilidade e de viabilização, cf. Chevallard 1986. (V.O. nota 58)
[63] E cultural porque epistemológica. (V.O. nota 59)

fundamento e reconhecida como única autoridade. Em resumo, o ensino seria o recomeço da ciência, seu segundo nascimento.

Esse modo de fidelidade, que legitima o didático no que tange o sábio, é também um modo de se desfazer do sábio, de repeli-lo ao dar-lhe o estatuto de um gesto primordial, que o ensino performaria, a cada dia, em uma autodeterminação simultaneamente aprendida do saber sábio, e negadora do saber sábio[64]. Concretamente, entretanto, o empirismo conduzirá a minar os gestos da produção sábia do saber, esvaziando esses gestos da função estratégica que lhes assinalava a gênese erudita na qual eles apareceram primitivamente. Sabe-se assim que a experiência (da biologia, da química ou da física sábias) presente em aula como representação, nela perde, no entanto, seu papel ativo na dialética da construção do saber: a infidelidade empirista eclode. Pois a ciência não se recomeça; ela se aprende ou se continua.[65]

A « solução » empirista ao problema didático das relações entre o didático e o erudito é, se podemos assim dizer, de fato apenas parcialmente ideal. Ardil habilidoso, ela permite ganhar batalhas, sem muitas dúvidas, mas deixa o fim de guerra incerto. Ela será a causa direta de muitos reveses ulteriores, cuja origem é, em seu princípio, sempre a mesma. O processo de transposição didática transforma em objetos de ensino elementos tomados do saber sábio. É desse modo que a filiação sábia do saber ensinado aparece mais concretamente: ensina-se, por exemplo, "os sistemas de equações lineares de duas incógnitas", que a matemática sábia pode autenticar como sendo "da matemática". Mas, ao mesmo tempo, ao largo de tais invariáveis, são produzidas modificações funcionais, alterações notórias no **funcionamento** desses objetos do saber "eruditoides" [*savantoïdes*]. As palavras da tribo matemática são (parcialmente) conservadas e, mais geralmente, um certo número de significantes (formalismos de cálculo, etc.) são efetivamente mantidos; entretanto, o universo que eles acabam de constituir, as relações (que eles estabelecem) aparecem rapidamente, ao observador matemático alheio à esfera didática, como que modelando um mundo matemático surpreendente, marcado localmente por aberrações matematicamente inexplicáveis e, globalmente, dissonante em relação à esfera erudita. Um modo de dizer que as relações de compatibilidade entre o didático e o sábio entram então em crise.

Uma tal crise pode assumir diferentes formas e tomar uma amplitude e alcance variáveis, provavelmente. Mas, é preciso sobretudo sublinhar aqui que essa crise germina permanentemente no seio do sistema de ensino; que sua vertente externa, mais ou menos espetacular, é o direito de um avesso muito mais familiar ao usuário do sistema; que há, em suma, **uma solidariedade na crise**, que une em

[64] Compreende-se assim que, tomados no jogo incerto no qual essa solução os engaja, numerosos autores da cena didática tenham podido reagir à teoria da transposição didática lamentando que se introduza nela, "artificialmente" segundo eles, considerações sobre o saber sábio, do qual não se saberia dizer ao certo em quê ele é sábio, etc., em uma denegação do saber sábio que vale adesão à solução empirista. (V.O. nota 60)

[65] Mediremos a dificuldade do problema da construção de um ensino não empirista ao observar que o paradigma histórico do tempo didático, sendo o epistemológico cartesiano (*Cf.* Chevallard e Mercier 1987), se apresenta como uma recusa erudita do mundo erudito. Essa denegação de historicidade da formação do saber sábio, conforme os princípios segundo os quais o saber sábio se organiza, pode culminar na esfera erudita – é o caso em Descartes – em um racionalismo puro. Na esfera didática, ele conduz diretamente às formas de empirismo das quais nós esboçamos aqui a descrição. (V.O. nota 61)

um destino compartilhado interior e exterior.

Anexo 2

A noção de proporção.

Suponhamos que queremos matematizar – para estudá-la – a noção intuitiva de proporção das bolas vermelhas em uma urna contendo bolas vermelhas e bolas pretas, por exemplo. O sistema estudado – a urna – pode ser descrito com variáveis inteiras: quantidade de bolas vermelhas r, quantidade de bolas pretas n, quantidade total de bolas t. (Outros aspectos do sistema – tal como a localização no espaço das diferentes bolas – são observados *a priori* como não pertinentes em relação ao tipo de fenômeno que se quer estudar e com os quais o modelo não lidará). Em um primeiro momento, pode-se pensar que a teoria matemática a ser escolhida é aquela das expressões algébricas em $\mathbb{N}$. Obtém-se assim uma primeira igualdade pertencente ao modelo, $t = r + n$. Esta permite representar certos fenômenos relativos à classe de sistemas estudados, como a **mescla de duas urnas** caracterizadas respectivamente pelas tríades (r, n, t) e (r’, n’, t’): a urna mesclada é então caracterizada pela tríade:

$(r + r', n + n', t + t')$

As equações seguintes

$t = r + n$; $t' = r' + n'$; $R = r + r'$; $N = n + n'$; $T = t + t'$; $T = R + N$,

constituem um modelo (superabundante) da mescla de urnas. Da mesma maneira, poder-se-á representar na mesma teoria matemática o fenômeno do **preenchimento de urna** (na qual se introduz r’ bolas vermelhas suplementares) pelo modelo formado com as seguintes igualdades algébricas:

$t = r + n$; $R = r + r'$; $N = n$; $T = R + N$.

Mas, nesses dois casos, porquanto não se disponha de uma modelização da noção de proporção, não se pode expressar nem estudar, **no modelo**, as variações (eventuais) da proporção de bolas vermelhas. O conhecimento intuitivo que se tem dos sistemas estudados faz com que se saiba – ou no mínimo que se pense – que o preenchimento da urna por adjunção de bolas vermelhas aumenta a proporção das bolas vermelhas, mesmo que não se saiba definir numericamente essa proporção: essa propriedade nos parece, com efeito, constitutiva de nossa noção de proporção. Se, no modelo que construiremos, não fosse possível **demonstrar** essa propriedade, seríamos conduzidos seja a rever o modelo, seja a pôr em dúvida nossa intuição a respeito do fenômeno considerado (os modelos permitem descartar muitas intuições falsas, na matemática como na física). Observamos, em todo caso, que já podemos demonstrar, no modelo elaborado até aqui, uma propriedade suficiente na prática para inspirar uma manipulação judiciosa do preenchimento de urnas: o número de bolas vermelhas aumenta. Essa propriedade, múltiplas vezes verificada empiricamente, é agora escrita $r+r' >r$ e pode ser demonstrada verdadeira (desde que $r' > 0$). (Notaremos que essa demonstração é de natureza que uma simples verificação do fato que se, por exemplo, $r = 9.456$ e $r' = 400$, então $r = 9.856$ é superior a 9.456). Entretanto, é mais difícil de dizer, “intuitivamente”, qual será a proporção de bolas vermelhas na urna resultada da mescla de duas urnas. Pode-se ainda imaginar que ela será intermediária entre as proporções das duas urnas – mas todo mundo não está espontaneamente de acordo sobre esse assunto, longe disso.

Tomemos agora uma situação ligeiramente mais complexa. Suponhamos que, partindo de uma urna contendo uma quantidade par (não nula) de bolas vermelhas assim como de bolas pretas, retira-se a metade das bolas vermelhas. Se nos referimos a uma propriedade evocada mais acima (a adjunção de bolas vermelhas aumenta a proporção de bolas vermelhas), assim como à ideia de que a proporção é conservada por uma "homotetia"[66] da urna, culmina-se, raciocinando "ao avesso", nesta conclusão: a proporção de bolas vermelhas diminui. Mas como ela se situa, então, em relação à proporção inicial? Ela é igual a metade de seu valor, menor ou maior? Para ver no caso clara e nitidamente, um modelo de cálculo seria bastante útil. É certo que não se pode modelizar a noção intuitiva de proporção com a ajuda de expressões algébricas de coeficientes em $\mathbb{N}$. Pois teríamos então p = P (r, n), P sendo um polinômio de coeficientes em $\mathbb{N}$. Sabe-se que p diminui, para v dado, enquanto b aumenta. Ora, um polinômio P (r, n) de coeficientes em $\mathbb{N}$ é uma função crescente de r (o que é conveniente) mas não pode se uma função decrescente de n. Pode-se tentar procurar então uma expressão de n com a ajuda de um polinômio P (r, n) **de coeficientes em $\mathbb{Z}$**. Mas, um tal modelo seria incapaz de dar conta da invariância da proporção por homotetia. É preciso então procurar em outro lugar. O primeiro momento da modelização concerne o que se sabe (ou que se crê saber) de mais seguro no que concerne o sistema estudado. Afora as propriedades já enunciadas, há a seguinte: se consideramos uma urna contendo 2 vezes mais bolas vermelhas do que a urna dada e **o mesmo número total de bolas**, a proporção das bolas vermelhas é multiplicada por 2. É desse modo que ocorre para todo número k (desde que se tenha kr < n). Se se coloca p = f(r, t), deve-se então ter: $f(r, t) = rf(1, t)$, para todo r < t. Mas, dualmente, "sabe-se" que, o número de bolas vermelhas ficando inalterado, se t é multiplicado por k (por adjunção de bolas pretas), então p é dividido por k, em outros termos $f(r, t) = kf(r, kt)$. Daí resulta que $tf(r, t) = trf(1, t) = rtf(1, t) = rf(t, t)$. Sabe-se ademais que a proporção é invariável por uma homotetia da urna: f(kr, kt) =f(r, t). Obtém-se então f(t, t) = $f(1, 1)$ e, por conseguinte, p é solução da equação $tp = rf(1, 1)$. Se colocarmos convencionalmente $f(1, 1) = 1$ (a proporção é igual a **1** enquanto só houver bolas vermelhas), p é dado como solução da equação tp = r. Essa equação não tem solução em $\mathbb{N}$ (salvo se n = 0). É preciso, pois, **estender o sistema de números** e colocar aqui S = Q+. Donde p = f(r, t) =r/t.

Essa igualdade dá um **modelo matemático** da noção de proporção. O conhecimento do **cálculo algébrico em Q+** permite então encetar a verificação de certas propriedades atribuídas à noção de proporção e concluir sobre questões deixadas (mais ou menos) abertas pela intuição. Retomemos as propriedades enunciadas mais acima. Antes de tudo, aquelas que foram utilizadas na elaboração do modelo: a proporção é bastante invariante por uma homotetia da urna, pois r/t = kr/kt; quando se multiplica por k o número de bolas vermelhas, sem mudar o número total de bolas, a proporção é multiplicada por k, kr/t = k(r/t); quando se multiplica por k o número total de bolas, sem mudar o número

[66] NT. Derivado do grego *homo* (similar) e *tetia* (posição).

de bolas vermelhas, a proporção é dividida por k, pois r/kt = (r/t)/k. Por conseguinte, aquelas que foram evocadas como certas, sem que as tenhamos, entretanto, utilizado na elaboração do modelo: o preenchimento da urna (por adjunção de bolas vermelhas) aumenta bastante a proporção: tem-se com efeito: $(r + r')/(t + r') > r/t$, pois, essa desigualdade equivale à $t(r + r') > r(t + r')$, então à $tr' > rr'$, ou seja, enfim, à $t>r$, desigualdade verificada desde que a urna contenha efetivamente bolas pretas (na verdade, de nada adiantaria, **do ponto de vista da proporção,** preencher uma urna que só contivesse bolas vermelhas!). Examinemos por fim os problemas deixados mais ou menos abertos. A mescla de duas urnas inicialmente: as proporções p e p' das urnas mescladas devendo supostamente verificar $p < p'$ (e, por certo, $0 < p, p' < 1$), a proporção da urna mesclada, $P = R/T = (r+r')/(t/t')$ é contida entre p e p' (verificaremos); quanto à proporção p' de bolas vermelhas na urna obtida ao retirar a metade das bolas vermelhas de uma urna de proporção p, ela continua superior a p/2 (resultado cuja demonstração é deixada ao leitor).