ISSN 1983-3156
Qualis A1
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p597-644

A transição do aritmético para o algébrico no ensino da matemática no Colégio[1] Terceira parte: Vias de abordagem e problemas didáticos[2]

The transition from arithmetic to algebraic in mathematics teaching at the Collège[3] Part Three: Approaches and didactical problems

El paso de la aritmética al álgebra en la enseñanza de las matemáticas en el Collège Tercera parte: Enfoques y problemas didácticos

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au Collège Troisième partie : Approches et problèmes didactiques

Yves Chevallard [4]
Université Aix-Marsaille
https://orcid.org/0000-0002-2870-5681

Tradução
Saddo Ag Almouloud[5]
Universidade Federal d Bahia
Doutorado em Matemática e Aplicações
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054

Resumo

Nesta terceira parte sobre o "Trânsito do aritmético para o algébrico no ensino da matemática no *colégio"* tece-se reflexões sobre o termo modelização: a modelização, no sentido em que utilizamos essa palavra, pode basear-se tanto em um sistema *não matemático* como em um *sistema matemático*. A análise didática das perspectivas curriculares que esboçamos revela problemas de didática da matemática que sublinham a necessidade de vínculos muito estreitos, de uma dialética tenaz, que deveria ser a preocupação de todos, entre a pesquisa fundamental em didática e as atividades de desenvolvimento do sistema de ensino. Por contraste, a situação atual deixa transparecer a grande superficialidade da qual a tradição, de inspiração empírica e dogmática, nos fez infelizes herdeiros. Não basta debilitar, decidir e agir para resolver os problemas com os quais estamos e continuamos a nos confrontar. Como em outros campos, a

[1] A faixa etária de aluno é, em geral, de 11-12 anos (no sexto ano) a 14-15 anos (no nono ano)
[2] A versão original deste artigo foi publicada no «petit x» nº 23 pp. 5 à 38, 1989-1990, IREM de Grenoble (versão que publicamos junto com esta tradução)
[3] The age range is, generally, from 11-12 years (in sixth grade) to 14-15 years (in third grade)
[4] y.chevallard@free.fr
[5] saddoag@gmail.com

pesquisa não é mais hoje essa parte de sonho em que sociedades com alto crescimento poderiam oferecer-se como bônus. Cabe a ela explorar, em nome de todos, as vias do possível.

Palavras-chave: Aritmética, Álgebra, Modelização, Análise didática.

Abstract

In this third part on the "Transition from arithmetic to algebraic in the teaching of mathematics in high school" we reflect on the term modeling: modeling, in the sense that we use this word, can be based on a non-mathematical system as well as on a mathematical system. The didactic analysis of the curricular perspectives we have outlined reveals problems in the didactics of mathematics that underline the need for very close links, for a tenacious dialectic, which should be everyone's concern, between fundamental research in didactics and the development activities of the teaching system. In contrast, the present situation reveals the great superficiality of which the empirical and dogmatic tradition has made us unfortunate heirs. It is not enough to weaken, decide, and act to solve the problems we are and continue to be faced with. As in other fields, research is no longer that part of the dream in which high-growth societies could offer themselves as a bonus. It is up to it to explore on behalf of all, the avenues of the possible.

Keywords: Arithmetic, Algebra, Modeling, Didactic Analysis.

Resumen

En esta tercera parte sobre la "Transición de lo aritmético a lo algebraico en la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato" reflexionamos sobre el término modelización: la modelización, en el sentido en que utilizamos esta palabra, puede basarse tanto en un sistema no matemático como en un sistema matemático. El análisis didáctico de las perspectivas curriculares que hemos esbozado pone de manifiesto problemas en la didáctica de las matemáticas que subrayan la necesidad de vínculos muy estrechos, de una dialéctica tenaz, que debería ser preocupación de todos, entre la investigación fundamental en didáctica y las actividades de desarrollo del sistema de enseñanza. Por el contrario, la situación actual revela la gran superficialidad de la que la tradición empírica y dogmática nos ha hecho desafortunados herederos. No basta con flaquear, decidir y actuar para resolver los problemas con los que nos enfrentamos y nos seguimos enfrentando. Como en otros campos, la investigación ya no es hoy la parte de un sueño en el que las sociedades de alto crecimiento podrían ofrecerse como un plus. Le corresponde explorar, en nombre de todos, los caminos de lo posible.

Palabras clave: Aritmética, Álgebra, Modelización, Análisis didáctico.

Résumé

Dans cette troisième partie sur le " Passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège ", nous réfléchissons sur le terme de modélisation : la modélisation, au sens où nous utilisons ce mot, peut s'appuyer aussi bien sur un système non mathématique que sur un système mathématique. L'analyse didactique des perspectives curriculaires que nous avons esquissées révèle des problèmes de didactique des mathématiques qui soulignent la nécessité de liens très étroits, d'une dialectique tenace, qui devrait être l'affaire de tous, entre la recherche fondamentale en didactique et les activités de développement du système d'enseignement. En revanche, la situation actuelle révèle la grande superficialité dont la tradition empirique et dogmatique a fait de nous les héritiers malheureux. Il ne suffit pas de faiblir, de décider et d'agir pour résoudre les problèmes auxquels nous sommes et restons confrontés. Comme dans d'autres domaines, la recherche n'est plus aujourd'hui que la part d'un rêve dans lequel les sociétés à forte croissance pourraient s'offrir en prime. Il lui revient d'explorer, au nom de tous, les voies du possible.

Mots-clés : Arithmétique, Algèbre, Modélisation, Analyse didactique.

A transição do aritmético para o algébrico no ensino da matemática no ensino fundamental II
Terceira parte: Vias de abordagem e problemas didáticos

A modelização como conceito

O conhecimento prévio do objeto de estudo

Na segunda parte deste trabalho (Chevallard 1989 a), mostramos que a noção de *modelização* permite dar conta da atividade matemática. Essa noção é fundada sobre uma distinção clássica: aquela do *sistema* (a ser estudado) e de seus *modelos* (que permitem seu estudo). Mas o remanejamento que se tentou operar neles conduziu, nos parece, a uma noção estendida, triplamente unificadora.

Antes de tudo, como enfatizado (*ibid*., pp. 60-61[6]), a perspectiva proposta permite ter uma visão do ensino da matemática, desde *a educação infantil* até a universidade[7]. No entanto, vamos nos centrar agora em outra contribuição, talvez ainda mais impressionante para quem se refere ao uso hoje corrente do termo modelização: a modelização, no sentido em que utilizamos essa palavra, pode basear-se tanto em um sistema *não matemático* como em um *sistema matemático*.

Eis uma afirmação que, por parecer ignorar as fronteiras entre a matemática e a física, a biologia etc., não agradará nem ao físico, nem ao biólogo, nem mesmo a todos aqueles que dizem praticar a "modelização matemática" ou recorrer a ela. O que vocês fazem, eles dirão talvez, do *conhecimento* – físico, biológico etc. – *do sistema* que se tratará de modelizar "matematicamente"? Vocês dirão –e, desde já, o creem– que à matemática basta, a ela sozinha, conduzir corretamente a matematização visada?

A resposta a esta impaciência é que, precisamente, trata-se de *importar essa inquietação até o próprio cerne do trabalho matemático*, ao menos, tal como a escola o representa e o realiza tradicionalmente. Se é realmente verdade que o manejo da ferramenta matemática supõe um conhecimento do objeto –do sistema– a ser matematizado, isso não é verdade somente para

[6] NT. PP. 30-31 da tradução.
[7] NT. Optou-se por deixar na língua original as referências aos níveis escolares. Há três níveis de ensino na França, a *École Primaire*, dividida em dois ciclos: *École Maternelle* e *Élémentaire*; o secundário, dividido em dois ciclos: o *Collège* e o *Lycée*, que antecedem o nível superior, o terceiro nível. O ensino no *collège* dura quatro anos, nas turmas de *sixième* ["sexta"], *cinquième* ["quinta"], *quatrième* ["quarta"] e *troisième* ["terceira"]. O aluno entra geralmente com 11 para 12 anos e sai com 14 para 15 anos. A *sixième* é um ciclo de adaptação, as *cinquième* e *quatrième* constituem o ciclo central, enquanto a *troisième* serve como orientação. Depois do *collège*, que se finaliza com o *Diplôme National du Brevet des Collèges* (BEPC) sem ser excludente para prosseguir nos estudos, ainda são 3 anos de *lycée* [liceu] – *seconde* ["segunda"], *première* ["primeira"] *e terminale* ["terminal"] – antes de um eventual acesso à universidade, terceiro nível de ensino.

sistemas estudados pela física, pela biologia etc. *Isso é verdadeiro também para o estudo dos sistemas matemáticos mais simples.*

A relação entre o matemático e o matematizado

Que o assunto não seja enfatizado ordinariamente, é evidente. O nome que engloba matemáticas, e mais ainda o substantivo singular "matemática", testemunham isso. Esta obliteração parece ter pouco efeito enquanto houver, de certa forma, homogeneidade entre o sistema e o modelo. Mas assim que a distância entre um e outro aumenta, assim que, por exemplo, se quer dar a si mesmo um modelo algébrico de um fenômeno geométrico (ou vice-versa), então as coisas se dão de maneira diferente.

É aqui que surge um hiato epistemológico: aquele para o qual os físicos e biólogos chamam nossa atenção, e que não pode deixar de ter sua tradução didática. A delimitação do sistema, a construção do modelo e a própria problemática do trabalho do modelo baseiam-se em nosso conhecimento prévio do domínio da realidade, do qual se busca estudar um dos fragmentos –o sistema em consideração. Como podemos pensar que só nossas forças "matemáticas" estão envolvidas na aventura?

Por um princípio de continuidade que não tentaremos justificar aqui, a suspeita pode, então, ser razoavelmente direcionada para aqueles casos em que a suposta homogeneidade do sistema e seu modelo parece eliminar desde o início qualquer problema desta ordem. Isto é, digamos, nosso postulado: *toda atividade matemática*, por mais transparente que pareça, deve ser reexaminada deste ponto de vista.

Nossa tese, para recordá-la brevemente, é que existem sempre, se não estruturalmente, pelo menos *funcionalmente*, dois planos, o do *sistema* –o "matematizado"–, e o do *modelo* –o "matemático"; cada um destes planos tem seu próprio registro de conhecimento; e a *ligação* destes dois planos no e sobre o trabalho de modelização pressupõe um *terceiro tipo* de conhecimento, que a ausência ou evitação do conceito de modelização torna possível esconder.

Esconder; não ignorar por completo. Este terceiro tipo de conhecimento é de fato bem representado, mas de forma parcial e distorcida, na linguagem comum da sala de aula: ele se reduz à palavra *aplicação* (à qual voltaremos). Em tempos recentes, ele tem sido representado e reduzido por meio de alguns outros significantes "mágicos", notadamente os de *atividade* e *resolução de problemas*: claro, veremos que tudo isso não é sem razão.

A escola e a sociedade: um exemplo

Do mesmo modo que o conceito de modelização permite tomar uma visão do conjunto das atividades de produção de conhecimentos advindos de disciplinas de saber diferentes (física, biológica etc.), ou de setores diferentes de uma mesma disciplina (numérica, algébrica, geométrica etc.), a leitura da atividade matemática como atividade de *modelização* matemática ademais permite apontar, *a partir da própria escola*, um aspecto fundamental *da gestão social dos conhecimentos*.

Muitos dos conhecimentos com os quais "entramos em contato" todos os dias, por intermédio dos meios de comunicação ou dos modos tradicionais de transmissão (família, grupo de amigos etc.), são, de fato, produzidos com a *ajuda das matemáticas*. Eles são o resultado de uma modelização matemática. Neste sentido, como a maioria dos "objetos" –objetos materiais ou objetos de saber– produzidos hoje, eles "incorporam" as matemáticas; mas, no nível da prática social na qual encontramos estes objetos, estas matemáticas "cristalizadas" nos objetos *geralmente se tornaram quase inteiramente invisíveis* (Chevallard, 1988 b).

O conceito de modelização permite então interrogar a própria *produção* desses conhecimentos, e reestabelecer desse modo uma *certa visibilidade cultural da pregnância e do funcionamento social do saber matemático*. Daremos aqui apenas um exemplo.

Uma afirmação frequentemente ouvida a respeito das sociedades europeias atuais concerne ao *envelhecimento* da população. Acrescenta-se que, com a finalidade de combater essa evolução, é conveniente favorecer o nascimento de um *terceiro filho* (donde decorrem, especialmente, políticas de auxílio "ao terceiro filho"). Mais precisamente ainda, o número de famílias que acolhem três crianças (ou mais) deve, diz-se, ser suficientemente elevada para que o número *médio* de crianças por família ultrapasse 2, e mesmo, mais exatamente, 2,10. De onde provém essa cifra? É deste ponto que partirá a investigação.

Para responder a essa questão, é conveniente identificar o saber a partir do qual tal conhecimento foi posto em circulação. Trata-se aqui, seguramente, da *demografia* (Legrand, 1979, pp. 25-27). Assim, o prosseguimento da investigação evidencia um conceito demográfico que é, no presente caso, a noção chave: aquela de "substituição das gerações". O primeiro ponto que se pode notar, neste contexto, é o seguinte: essa noção é formulada levando em conta apenas a população de *mulheres*. Supõe-se, com efeito, que sempre há suficientemente homens, e isso porque, se há suficientemente mulheres, ocorrerá o mesmo no caso dos homens, *pois nasce quase o mesmo tanto de homens que de mulheres*.

Dir-se-á então que, do ponto de vista pelo qual nos interessamos aqui, a "substituição das gerações" é assegurado, dado que, *em média*, uma mulher *em idade de procriar* é "substituída", na geração seguinte, por uma mulher (ao menos) em idade de procriar. Mas o que é uma mulher "em idade de procriar"? A definição escolhida pelos demógrafos, ligeiramente arbitrária, é bastante simples: é uma mulher entre 15 e 49 anos. Os nascimentos são então negligenciados, pois muito pouco numerosos, antes dos 15 ou depois dos 49 anos.

Assim, pois raciocina-se "em média", pode-se, a fim de compreender a questão da substituição de gerações, recorrer à seguinte imagem (que se refere a cada mulher tomada individualmente e não constitui então um modo de dizer): chegada à idade de procriar, toda mulher deve buscar ser substituída por uma mulher em idade de procriar, ou seja, deve haver uma moça que ela conduzirá até a idade de quinze anos; ela terá então cumprido seu "dever" de "substituição das gerações".

Decerto, é em nível do *conjunto das mulheres*, e não naquele de cada mulher tomada individualmente, que o fenômeno de substituição é estudado. Suponhamos então que, em uma população dada, o número médio de *nascimentos* por mulher (em idade de procriar) seja x. Pode-se determinar, em função de x, o número médio, F(x), de mulheres em idade de procriar que resultará? Se isso for possível, poderemos dizer então que a substituição das gerações será assegurada se houver: $\mathbf{F(x) \geq 1}$.

Como agora determinar F(x)? Pode-se pensar em proceder em duas etapas. Determina-se inicialmente o número médio, f(x), de mulheres que nascem, depois, consideramos dentre estas apenas aquelas que atingem a idade de procriar, ou seja, 15 anos. A primeira etapa é facilmente solucionada: nascem sempre em torno de 105 meninos para cada 100 mulheres. Para assegurar o nascimento de 100 meninas, é preciso então (em média!) assegurar 205 nascimentos. Deduz-se disso que se tem: f(x) = (100/205)x.

Dessas meninas, uma fração não atingirá a idade de procriar. Coloquemos que um nascimento feminino conduzirá em média a k mulheres em idade de procriar, com k < 1. Advém então: F(x) = (100/205)kx. Tal é o *modelo* obtido: trata-se de uma função linear, contendo um parâmetro k.

O coeficiente k é variável. Ele diminuiu muito há um século e meio, essencialmente porque a mortalidade infantil abaixou. A resolução da inequação $\mathbf{F(x) \geq 1}$ conduz então a: $\mathbf{x \geq 205/(100k)}$. Essa desigualdade mostra que, em todos os casos, o valor *mínimo* de x que assegura a substituição de gerações *será superior a 2,05*. Suponhamos, por exemplo, que para cada 128 nascimentos femininos, 122 conduzirão a mulheres em idade de procriar. Tem-se k = 122/128, e então, $x \geq (205.128)/(100.122)$, ou seja, em torno de 2,15.

Essa cifra corresponde à geração de 1929. O aumento de k, sendo a diminuição da mortalidade antes dos 15 anos, a baixar hoje para algo em torno de 2,10. Se remontarmos no tempo, verificaremos que o número médio de nascimentos por mulher que assegura a substituição das gerações era de 4 por volta de 1800, de 3 por volta de 1896, etc. O problema que os demógrafos sublinham então, e que as mídias nos permitem conhecer, é que o número médio de nascimentos por mulher, há muitas décadas, caiu *abaixo de* 2. Ele era de 1,83 por volta de 1976, por exemplo. A substituição das gerações não é assegurada e, por conseguinte, a população francesa envelhece.

Deixemos aqui nosso exemplo. De uma maneira geral, o ensino praticado na escola (e sobretudo no colégio) pode ser olhado *como um meio social de conhecer a sociedade, de identificar conhecimentos e os saberes que lhe conferem forma e organização, e de investigar seu modo social de produção.*

A escola aparece então como o lugar em que é *dada visibilidade* à sociedade. Tratar-se-á menos de “reinventar o saber” na escola (e por exemplo de pretender “redescobrir” o teorema de Pitágoras) do que de investigar os saberes e seus modos de produção.

Veremos então que uma relação crítica com os saberes, que é a verdadeira significação do que há de melhor na nossa tradição de ensino –que, entretanto, também se encontra frequentemente muito minimizado– terá alguma chance de emergir.

Investigar os conhecimentos e saberes

Tomaremos aqui, voluntariamente, um exemplo ultraclássico, com o fim de mostrar que a investigação epistemológica da qual ele poderá ser o objeto não é, em essência, em nada diferente da “investigação demográfica” esboçada mais acima.

No estudo dessa classe de sistemas geométricos que constituem os *triângulos retângulos*, mais precisamente no estudo das *relações métricas* no triângulo retângulo, encontramos, nos manuais[8], e, portanto, na sociedade e em sua cultura, uma fórmula que dá a medida, h, da altura relativa à hipotenusa em função de diversos parâmetros do triângulo. A fórmula clássica expressa h^2, e, portanto, h, como função das medidas BH e HC dos “segmentos cortados pela altura sobre a hipotenusa” (ver a Figura 1)

[8] (V.O. nota 1) O lugar e o status dados nos manuais à fórmula à qual fazemos alusão variaram: não nos ocuparemos disso aqui.

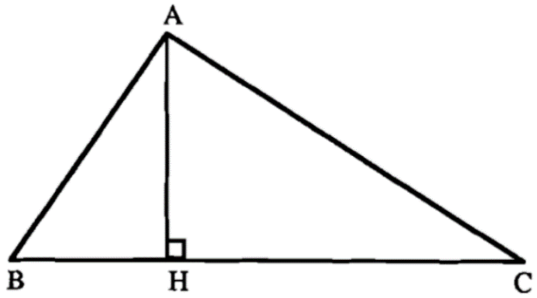

Figura 1.

Relações métrica no triangulo retângulo

A primeira questão que se pode fazer não é: como demonstrar essa fórmula? Ela consiste mais em se perguntar por que tal fórmula é possível; em outras palavras, por que é possível expressar AH = h *com o auxílio das medidas* BH e HC.

Para responder a esta interrogação, basta observar –mediocremente, certos "conhecimentos anteriores" sobre os sistemas "triângulos retângulos"– que sabendo-se BH e HC *determina completamente* (salvo no caso da isometria) o triângulo retângulo ABC. Conhecendo BH e HC, com efeito, conhece-se a hipotenusa (de extremidades B e C) e sabe-se posicionar H sobre a hipotenusa. O ponto A é então a intersecção de um semicírculo de diâmetro a hipotenusa $\overline{BC}$ com a perpendicular em H até $\overline{BC}$. Resulta desta observação que o valor de h *é completamente determinado* pelos valores de BH e HC, e deve assim poder ser expresso com o auxílio desses parâmetros.

Investiguemos agora a maneira de estabelecer a expressão de h em função de BH e HC. Nós o faremos aqui sob uma restrição fundamental, que marca, em um dado momento, os limites de nosso conhecimento da classe de sistemas estudada: *o único modo pelo qual se sabe expressar a medida de um segmento com o auxílio das medidas de outros segmentos não colineares consiste em passar pela relação de Pitágoras.*

Essa restrição implica, sobretudo, que é preciso trabalhar *com o quadrado* das medidas consideradas, e que é preciso trabalhar *com triângulos retângulos*. No esquema já traçado (Figura 1) aparecem três triângulos retângulos, sendo eles ABC, HAB e HAC. Nenhum desses triângulos permite ligar *diretamente* AH com BH e HC pela igualdade de Pitágoras. Os dois últimos triângulos permitem, entretanto, expressar h em função, respectivamente, de AB e BH, e de AC e HC:

$h^2 = AB^2 - BH^2$,

$h^2 = AC^2 - HC^2$.

Nenhuma destas expressões convém; mas, somando as igualdades membro a membro, pode-se fazer aparecer a soma AB^2+AC^2 que é expressa com o auxílio de BH e HC:

$AB^2 + AC^2 = BC^2 = (BH+HC)^2$

Advém então: $2h^2 = (BH+HC)^2 - BH^2 - HC^2 = 2BH.HC$. Donde finalmente: $h^2 = BH.HC$.

Este é o resultado de uma primeira parte de nossa investigação. Mas o princípio colocado no início permite agora expandir seu horizonte. Dado que o triângulo retângulo ABC é inteiramente determinado por BH = x e HC = y, deve ser possível expressar, com o auxílio desses dados, *todo "elemento", ou seja, todo parâmetro, do triângulo*. É deste modo, por exemplo, para os lados do ângulo reto; obtém-se trivialmente:

$AB^2 = BH^2 + h^2 = x^2 + xy = x(x+y)$,

$AC^2 = HC^2 + h^2 = y^2 + xy = y(x+y)$,

De onde tiraremos a área do triângulo $S(x,y) = xy\frac{\sqrt{xy}}{2}$ etc.

Notaremos que os elementos "lineares" da figura são expressos com o auxílio de x e y por *funções homogêneas de grau 1*, ao passo que a área é uma função homogênea *de grau 2*.

Pode-se, ainda, partir *de outra escolha de dados completos*, por exemplo, a medida r do raio do círculo circunscrito e a medida t do ângulo BOA (no qual O é o ponto médio da hipotenusa). Toda tentativa para expressar os diversos parâmetros do triângulo vai, assim, culminar em um problema fundamental, a passagem da medida de um *ângulo* para a medida de um *comprimento*, ou ainda a questão das *funções trigonométricas* –enquanto a determinação de comprimentos a partir de comprimentos tinha colocado em jogo somente funções "algébricas", ao fazer intervirem adição, multiplicação e raiz quadrada.

O caminho inverso –de um comprimento para um ângulo– fará aparecer a questão das funções trigonométricas *inversas*, da qual se poderá assim notar a estranha ausência, muito anterior no currículo dos estudos[9]. Similarmente, a implementação desta mesma problemática de investigação epistemológica em outros contextos permitirá produzir uma "análise espectral" do discurso da leitura escolar, observada em seus silêncios, na ordem de suas razões e de seus vieses. Um triângulo, assim, é determinado pelas medidas a, b, c de seus lados; a medida de sua área deve então poder ser expressa com o auxílio de a, b, c, e o mesmo ocorre com suas medianas, suas alturas, suas bissetrizes etc. Mas onde encontrar as respostas para essas boas questões postergadas ou abandonadas? Nosso questionamento nos conduzirá aqui a interrogar, entre outros, a história e a epistemologia da matemática.

A gestão social e cultural dos saberes

[9] (V.O. nota 2) Seria de evidente pertinência se perguntar por que essa dissimetria se impôs em nosso ensino ; a investigação faria aqui remontar muito longe no passado da matemática "erudita".

Nossa relação com os conhecimentos e com os saberes carrega necessariamente a marca de nossa relação com a *produção social* e com a *gestão cultural* dos saberes e conhecimentos. Desse ponto de vista, o conceito de modelização permite particularmente ultrapassar a visão dos conhecimentos e dos saberes como dados na cultura, para fazê-los aparecer como *produzidos* e *geridos* em práticas escolares específicas, inclusive nas práticas "culturais" (escolares, editoriais etc.). Ver-se-á mais adiante que as considerações que desenvolvemos agora estão situadas no centro de todo projeto de ensino.

Todo conhecimento, com efeito, é produzido por um trabalho específico. Para além dessa fase de produção, o destino do conhecimento produzido pode ser muito variável. Ele poderá ser integrado em um *saber*, nele ser reconhecido e nele encontrar um lugar durável. NesTe próprio caso, sua história, seu estatuto podem variar dramaticamente. Ele poderá nele ocupar um lugar inexpugnável, nele se fundir, nele se naturalizar, tornar-se próprio dele: tal é o caso –exemplo resolutamente elementar– da regra que diz que a medida da área de um triângulo é "o semi-produto da base pela altura". Ele poderá ainda sobreviver apenas às margens desse saber, confidencial, eternamente jovem porque indefinidamente reencontrado: assim como a fórmula, atribuída a Heron (mas parece que devida a Arquimedes) que dá a medida da área de um triângulo em função das medidas a, b, c de seus lados.

Nos saberes mais rigidamente geridos, são produzidos os conhecimentos efêmeros, que serão reinventados, conforme for o caso, que serão tão logo esquecidos pela instituição onde foram produzidos, porque eles não terão sido *institucionalizados em forma de saber*. Isso ocorre a cada dia, em cada aula de cada colégio.

Fenômeno fundamental, ao qual voltaremos. Mas há um fenômeno ainda mais notável. Ocorre que, a partir de um saber-ferramenta S, sejam produzidos conhecimentos que não "interessam" a esse saber. Esses conhecimentos podem não interessar a nenhum saber digno desse nome: assim, em matemática, certos deles só buscarão sobreviver duravelmente no universo desses problemas que se pode chamar, com Bachet[10], "divertidos e deleitosos". (De que modo, por exemplo, particionar um dado triângulo para poder, com os pedaços obtidos, constituir um quadrado?).

Deste caso específico, passamos a outro, diversamente revelador: aquele do conhecimento produzido, com o auxílio de um saber S (por exemplo, a matemática), a respeito de um sistema cujo estudo "interessa" a outro saber, S' (por exemplo a biologia, as ciências

[10] (V.O. nota 3) Claude Gaspar Bachet, autor de uma compilação de "*Problemes plaisans et delectables, qui se font par les nombres* " ["Problemas divertidos e deleitosos, que são feitos com números"] (Lyon, 1612).

sociais etc.), *mas não, em geral, o próprio S*. Então (sobretudo, segundo um uso tornado hoje corrente), *falar-se-á de modelização*. S teria permitido modelizar um sistema cujo conhecimento "advém" de S'. Se produzo um modelo (em nosso sentido) de um sistema *matemático*, terei, de toda boa fé, "*feito matemática*" (eventualmente "trivial", no sentido de Dieudonné); mas se produzo um modelo (em nosso sentido, e no sentido corrente do termo) que permita por exemplo otimizar o uso de um estacionamento (Dunn, 1981), serei reputado por ter feito *modelização matemática*.

Assim, o fato de que uma ou outra modalidade do trabalho *matemático* nos apareça ou não como advinda da modelização matemática está ligado, culturalmente, a certo *recorte social dos saberes*. Restritivamente, a produção de um modelo matemático de um sistema dado será entendida como o produto de uma atividade de modelização matemática sob a condição de que o sistema-alvo seja visto, culturalmente, como essencialmente *não matemático*. O reconhecimento –pelo ator ordinário do sistema dos saberes, havendo (ou não) atividade de *modelização*– exprime de início sua sujeição a uma organização social determinada dos conhecimentos e dos saberes, que pode ser encontrada na cultura. Ele é a leitura cultural de certos tipos de situações sociais de produção de conhecimentos[11].

Os modelos produzidos em tais situações são, assim, identificáveis e visíveis enquanto modelos porque, ao tomar seus materiais no saber S, eles não pertencem, verdadeiramente, nem a S, nem a S'. Eles constituirão em breve, para S, uma excrescência morta, abandonada; e, para S', um corpo estranho, aceito a título provisório, e que, ao fim e ao cabo, talvez seja rejeitado. Mas se, ao contrário, eles passam a se integrar à S, a se fundir nesse "saber de acolhimento", então logo cessarão de aparecer nele como modelos. Eles se inserirão no texto do saber, do qual serão tão logo apenas uma parte como as outras, constitutiva desse saber em igualdade com os outros. Designá-los ainda como modelos, então, procederia de um gesto polêmico, de uma crítica epistemológica em ato. E, de fato, eles reaparecerão talvez, ulteriormente, como "simples" modelos, enquanto o progresso do saber terá denunciado sua validade. Falava-se outrora de *geometria*, sem delongas; podemos falar hoje do *modelo euclidiano* do espaço.

Naturalização dos conhecimentos e reconceituação dos saberes

[11] (V.O. nota 4) O caráter "apátrida" de certos modelos ou, mais exatamente, de todo modelo no sentido restritivo dessa palavra, nos parece fundamental na depreciação e na suspeição epistemológicas da qual a noção de modelo é frequentemente o objeto: é assim, por exemplo, que nós interpretaremos as teses formuladas em tempos passados por Alain Badiou (Badiou, 1968).

Tal como colocado em prática aqui, aquilo que o conceito de modelização vem nos lembrar, contra a ilusão do caráter natural, contra a evidência enganadora (no entanto, necessária) da “naturalidade” dos conhecimentos no seio dos saberes, é que todo “objeto de saber” é de início o fruto epistemologicamente incerto de um trabalho de modelização produtor de conhecimentos que cada aprendiz deverá, por sua vez, reconquistar cognitivamente. “Sejam dois inteiros ímpares, 2n+1 e 2m+1”, ou ainda, “seja a reta de equação 2x-4y+7 = 0”, poder-se-á dizer em tal aula: mas isso irá supor que a noção de *ímpar*, aquela de *reta*, tenham sido anteriormente *modelizadas* –pela “forma” número-literal 2k+1 para a primeira, pela forma equacional ax+by+c = 0 para a segunda. Dir-se-á igualmente, um pouco depois, “Seja a parábola $y = 2x^2-3x+5$”, ou “Seja o círculo $x^2+y^2-6x+y = 0$”: mesmo fenômeno de *naturalização* de conhecimentos que geneticamente emergiram inicialmente na fronteira do campo do saber e que teriam tão bem podido ser indefinidamente rejeitados. À luz desta análise, o saber matemático (mas a análise vale, creiamos, para todo saber) perde assim a aparência de homogeneidade que engendra aos nossos olhos sua frequentação familiar. Ele aparece aqui como uma soma integra de conhecimentos produzidos quase um por um, por modelizações sucessivas, particulares e parciais, que acabam por serem-lhe intrínsecas, e das quais esquecemos a gênese.

Os exemplos dados, talvez se pense, são evidentes. Mas existem casos nos quais o fenômeno nos fica opaco, porque, em verdade, o que era na origem o produto de um trabalho de modelização, o fruto de um trabalho de produção de conhecimentos, se *naturalizou* a ponto de não distinguimos mais o sistema modelizado e seu modelo.

É assim, sobretudo, quando o modelo se torna padrão. Sublinhou-se (Chevallard, 1989 a, p. 63), seguindo Lebesgue, o caso mais simples, o da adição de inteiros. Nos trabalhos que se tornaram clássicos, Gérard Vergnaud mostrou bem como a igualdade a+b = c constituía, na aritmética da escola primária, o modelo único de seis categorias bastante diferentes de situações que acabamos por tomar como “aritmeticamente equivalentes”[12].

O fenômeno de naturalização dos modelos que poderia ser chamado, utilizando um neologismo, de sua *enculturação*[13], seja sua integração exitosa na cultura do saber considerado, não poderia ser anulado: ele é constitutivo da maneira pela qual todo saber é elaborado a partir de conhecimentos produzidos, reconhecidos, pertinentes em relação ao saber como projeto.

[12] (V.O. nota 5) *Cf.* Vergnaud, 1981, sobretudo o capítulo IX; e também Chevallard, 1986, pp. 38-40.
[13] NT. A enculturação é o processo pelo qual um indivíduo aprende, introjeta e pratica os valores e comportamentos culturalmente aceitos e exigidos por uma cultura. Alguns autores usam “enculturação” como sinônimo de “aculturação”, que designa na maior parte dos casos o processo de assimilação dos valores culturais de uma cultura estrangeira.

Mas o esquecimento da produção dos conhecimentos (e, de mesmo modo, o esquecimento das condições da produção deles) é uma condição da constituição do saber a partir dos conhecimentos produzidos. Os "conhecimentos anteriores", dos quais falávamos mais acima, resultam todos de um trabalho de modelização e *de um esquecimento desse trabalho*. Um triângulo ABC "retângulo em A", este será ao mesmo tempo um triângulo "cujo ângulo em A é reto", "cujo vértice A está situado sobre o círculo de diâmetro $\overline{BC}$", "cujos lados são ligados pela relação de Pitágoras", e até mesmo (mas a ausência de um nome adequado aqui provavelmente significa que este não é bem o caso) "cuja altura tirada de A verifica a relação $AH^2 = BH.HC$".

As modelizações ulteriores supõem, assim, modelizações anteriores esquecidas. Relativamente a um sistema estudado a partir de um saber S, existe uma dialética do conhecimento e da produção dos conhecimentos, uma relação orgânica entre a possibilidade de produzir conhecimentos novos e o esquecimento da produção dos conhecimentos precedentes. Ora, ocorre que o saber entra em crise, que a antiga conceitualização se revela inadequada. Um número ímpar é, certamente, um número cuja escrita decimal é terminada por um dos números 1, 3, 5, 7, 9. Isto –que nada mais é o fruto de uma modelização particular– basta para provar que a soma de dois ímpares é par, ou que o produto deles é ímpar; mas essa modelização da noção de ímpar se revelará já menos adaptada se o caso for mostrar, por exemplo (retomaremos esse exemplo mais adiante), que a soma de dois ímpares sucessivos é um múltiplo de 4 (retomamos esse exemplo um pouco mais adiante). A antiga conceitualização, fruto de uma modelização esquecida, deve ser retomada; uma nova modelização conduzirá a uma *reconceitualização*, que definirá uma nova ortodoxia epistemológica e que se naturalizará por sua vez.

Ora, é esse próprio processo que a ortodoxia epistemológica do momento –concretizada na *relação institucional* com o saber (Chevallard, 189 b)– tenderá a negar mesmo quando o aluno precisar, de bom grado ou de mau grado, vivê-lo, seja lá o que for que ele se torne. É esse próprio processo, também, que o conceito de modelização permite perceber e pensar para além da ortodoxia institucional, e em função do qual ele permitirá situar o aluno e o trabalho do professor.

Tal é a perspectiva na qual faremos funcionar o conceito de modelização a respeito do corpus ensinado no C*olégio*, a fim de dar destaque à pertinência e à evidência dessa *ferramenta algébrica*, antes de considerar, com o *programa de pesquisa* que essa abordagem determina os *problemas didáticos* que sua formulação faz emergir.

Construções cruzadas: o numérico e o algébrico

Uma ferramenta fundamental: os inteiros naturais

Os inteiros naturais constituem, tanto historicamente como didaticamente, a primeira ferramenta da modelização matemática.

Formalmente, seleciona-se o sistema N dos inteiros naturais na classe de sistemas de números definida na segunda parte deste estudo (Chevallard, 1989 a, II) ao se acrescentar a seguinte exigência: *todo conjunto de número que não é vazio tem um elemento mínimo*.

É o axioma da boa ordem. Segue-se que a ordenação de N é discreta, propriedade que oporá N e Z aos outros sistemas de números utilizados.

Ao nível do *Colégio*, o sistema dos números inteiros é "supostamente conhecido". Contrariamente ao que pode ser visado em um nível mais elevado, não se trata aqui de definir N por meio de uma axiomática, a dada até aqui ou alguma outra – "à maneira de Peano", sobretudo. Menos ainda *construir* os inteiros nos moldes de uma teoria dos conjuntos –ao modo de Von Neumann, por exemplo (Halmos, 1967, pp. 56-57). A "axiomática" que de fato apresentamos deve ser olhada apenas como um resumo cômodo de propriedades de N, a partir do qual todas as propriedades "usuais", ou seja, manipuladas "espontaneamente" pelos alunos, *poderiam* ser demonstradas, sem que isso fosse sequer visado.

A propriedade de boa ordem formulada mais acima é de fácil compreensão: é o seu emprego judicioso que é algo mais delicado. Ela enuncia simplesmente o fato que, se um conjunto de inteiros A é não vazio e se os inteiros são enumerados a partir de 0, *penetra-se uma primeira vez em* A[14]. Equivalente em teoria ao "raciocínio por ocorrência", ela pode, em prática, ser oportunamente substituída, assim como veremos mais adiante em um exemplo.

Com essa propriedade, o sistema dos inteiros naturais é constituído, como uma *ferramenta de estudo*, por um lado, como *objeto de estudo*, por outro. Nisso, ele fornece um exemplo notável das duas funções que todo objeto matemático pode, pouco a pouco, assumir, dualidade de perspectivas sob as quais o examinaremos na sequência. Ele está no ponto de partida e instala-se no seio do currículo do *Colégio*, o que justifica o lugar que nós lhe conferimos nos desenvolvimentos que seguem.

Os inteiros naturais como ferramenta de estudo

[14] (V.O. nota 6) Seja por exemplo A o conjunto dos inteiros da forma 3(2k+I)+2. O primeiro inteiro dele é 5. Nesse caso, obviamente, o axioma da boa ordenação é inútil. O mesmo ocorre no exemplo prototípico que daremos um pouco mais adiante.

Um sistema de números SN pode intervir em dois níveis no processo de modelização algébrica. Por um lado, as *variáveis* que definem o sistema estudado podem *ser de valores em SN*. Por outro lado, a formulação das relações governantes do sistema pode utilizar expressões algébricas com *coeficientes em SN*.

Muitos poucos sistemas podem, entretanto, ser modelizados com o auxílio só dos inteiros naturais. Os manuais da escola primária apresentam, por tradição e necessidade, casos particulares dos sistemas reais modelizados em números inteiros[15]. No *Colégio*, só se pode tratar de uma opção menos recomendável, visto que sistemas de números mais adequados (por exemplo D+) tornam-se disponíveis.

Além disso, a introdução do cálculo algébrico é de grande interesse quando se estuda uma classe de estados de um sistema, seja quando queremos obter os valores de uma ou mais variáveis em jogo em função das outras variáveis (como é feito na aritmética elementar), ou quando faltam alguns dados (aparentemente), uma situação menos tradicional da qual segue um exemplo (Berrondo, 1979, p.29):

> Um congresso internacional de dermatologia reúne médicos britânicos, alemães e franceses. Há duas vezes mais franceses do que alemães, esses últimos sendo duas vezes mais numerosos do que os britânicos. Duas técnicas muito diferentes são propostas para tratar do melhor modo a pitiríase rósea, entre as quais cada médico presente é convidado fazer uma escolha. A técnica do professor Smith leva dentre outros, todos os votos britânicos. E, quanto à técnica do professor Simon, há tantos alemães favoráveis quanto há franceses hostis. Assim, qual dessas técnicas é a que ganha mais votos?

Se designarmos por a o número de médico britânicos, há 2a médicos alemães e 4a médicos franceses. Ao designar então por x o número de médicos alemães favoráveis à técnica Simon, o número de votos obtidos pela técnica Smith será

$U(x, a) = a + (2a-x) + x$

e o número de votos obtidos pela técnica Simon será

$V(x, a) = x + (4a-x)$.

Teremos desta forma $U(x, a) = 3a$ e $V(x, a) = 4a$.

Este modelo de voto mostra que os números de votantes U e V *dependem somente do parâmetro a*, e que são, ademais, funções *lineares* de a. Por conseguinte, a *comparação* dos valores de U e de V *não dependem do valor de a*. Obtém-se, seja qual for a, $U < V$. Portanto, vence a técnica do professor Simon.

[15] (V.O. nota 7) "O Sr. Masson, um eletricista, fez alguns reparos no Sr. Brun: ele colocou 9 metros de arame a 35 francos por metro, 12 metros de haste a 20 francos por metro etc. Emitir sua fatura"..”

As matemáticas "finitas"

Outros exemplos, mais realistas (mas que não objeto de estudo aqui), poderiam ser apresentados: assim, por exemplo, o estudo dos fenômenos ligados ao modo de voto em uma eleição[16]. Mas o verdadeiro campo de emprego dos inteiros está nas matemáticas *finitas*, na *combinatória* etc.[17].

Trata-se aqui de campos tradicionalmente pouco explorados no *Colégio* e, como se sabe, muito rapidamente árduos. Mas o interesse atual pelas *matemáticas discretas* (Potts, 1986) conduziu até esse setor a atenção dos especialistas da *engenharia dos currículos*[18]. Daremos aqui apenas um exemplo, que bebe da doutrina grega dos números figurados.

Considera-se as seguintes figuras (Figura 2), formadas por cruzes:

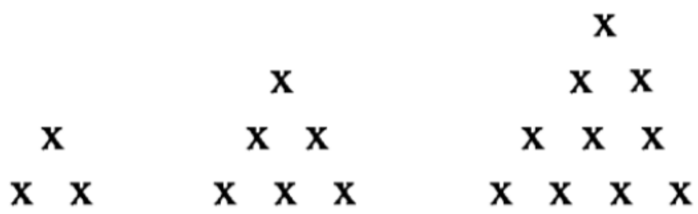

Figura 2.

Representação de números figurados

Se numerarmos essas figuras 1, 2, 3, 4, os números de cruzes que compõem cada uma delas serão respectivamente P(I) =1, P(2) =3, P(3) =6, P(4) =10. Quer-se estudar o número P(n) de cruzes da figura em função de sua posição n na série (que é também o número de cruzes que formam a base da figura).

Inicialmente, ao olharmos e contarmos o número de cruzes de *uma figura* (por exemplo, a figura 4), linha por linha, obteremos; P(4) = 1+2+3+4. Igualmente, P(3) = 1+2+3, etc. Em geral, para a figura número n, obteremos: P(n) = 1+2+3+...+n.

Ao examinar agora *como se passa de uma figura para a seguinte*, assim como é mostrado pela seguinte representação (Figura 3),

---

[16] (V.O. nota 8) *Cf.* Berrondo, 1979, p. 29.

[17] (V.O. nota 9) Lembremos que em direito a noção de conjunto finito pode ser definida sem o uso da noção de número inteiro. O conjunto E é dito finito se, seja qual for a parte F de E, não exista injeção de E em F. Demonstra-se então (por meio do axioma escolhido) que o cardinal de E pode ser medido por um número inteiro (cf. Mendelson, 1964, p. 185). Ou seja, o

[18] (V.O. nota 10) Ou seja, o *Curriculum Development* dos autores de língua inglesa.

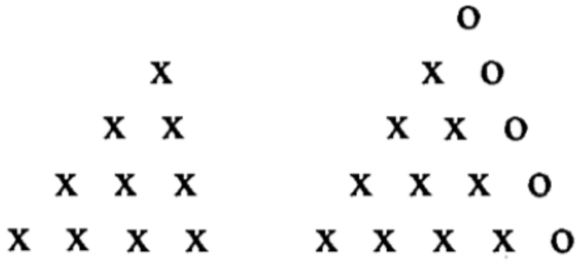

Figura 3.

Representação do trânsito de uma figura para outra

vê-se facilmente que: $P(n) = P(n-1) + n$.

Assim, dá-se destaque a duas propriedades do número P(n). Mas essas propriedades não fornecem ainda *diretamente* o número P(n) para n dado: ambas exigem que se tenha calculado inicialmente P(k), para $k< n$. Se se quer, então, estabelecer um modelo do fenômeno de geração dessas figuras que fornecem, "imediatamente", o número P(n), é possível propor-se a "trabalhar" as relações/razões já obtidas. Mas também se pode examinar novamente o sistema estudado para atualizar uma propriedade mais apropriada de P(n), que virá a enriquecer o modelo do fenômeno estudado, ao aumentá-lo com uma nova relação.

É essa última direção –nem sempre desejável– que escolheremos aqui. Para uma figura dada da série, realizamos as *experiências*[19] descritas pelos dois esquemas da Figura 4.

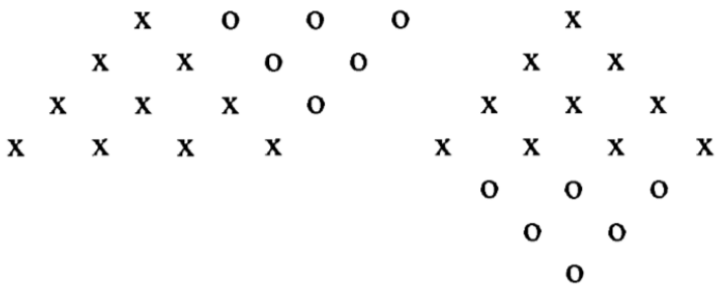

Figura 4.

Representação dos resultados das experiências

O número de elementos das figuras obtidas assim, por completamento, é fácil de ser determinada. No caso geral, haverá *n linhas*, cada uma formada por *n cruzes*, sendo no total *n^2 cruzes*. Também, obtém-se a figura completada ao acrescentar um número de elementos igual àquele da figura, ao acrescentar $P(n) – n$ cruzes. Obtém-se assim $n^2 = P(n) + (P(n) - n) = 2P(n) - n$. Deduz-se tão logo que: $P(n) = (n^2+n)/2$.

[19] (V.O. nota 11) Sobre esse ponto, cf. Y. Chevallard, *Les mathématiques comme activité expérimentale* ["A Matemática Como Atividade Experimental"](no prelo quando publicado o artigo. NT).

Se esse modelo for um “bom modelo”, ele deve permitir reencontrar as propriedades anteriormente estabelecidas. Comecemos pela segunda, sendo ela a igualdade P(n) = P(n-1) + n. Ela se verifica diretamente; tem-se, com efeito:

2P(n-1) + 2n = (n-1)2 + (n-1) + 2n

= (n-1)(n-1+1) + 2n = n(n-1) + 2n

= n(n-1+2) =n(n+1) = n2+n =2P(n),

De onde decorre: P(n) =P(n-1) + n, como esperado.

A primeira igualdade, sendo P(n) = 1+2+3+...+n, não pode, em contrapartida, ser estabelecida dessa maneira. O uso da propriedade da *boa ordem*, conjuntamente com uma *raciocínio por absurdo*[20], torna-se necessária. Ao definir P(n) pela igualdade P(n) = $(n^2+n)/2$, suponhamos que existam inteiros (ao menos um!) para os quais a igualdade P(n) = 1+2+3+...+n *não seja verificada*. Em virtude da propriedade da boa ordem de N, sendo k o primeiro inteiro para o qual essa propriedade *não é verificada*. Seu predecessor, k-1, satisfaz essa igualdade P(k-1) = 1+2+3+...+(k-1). Pois, como o vimos, P(k) = P(k-1)+k, decorre imediatamente: P(k) = [1+2+3+...+(k-1)]+k = 1+2+3+...+k, *o que contradiz a hipótese feita sobre k*. Pois assim, para todo inteiro n, tem-se: P(n) = 1+2+3+...+n.

A insuficiência dos inteiros naturais como ferramenta

Na parte anterior, falou-se do que se pode chamar “a modelização algébrica *em N*”. Ora, por muitas vezes, trapaceamos em relação a uma interpretação estrita dessa formulação. A priori, tal modelo deveria comportar somente igualdades (ou desigualdades) de polinômios *com coeficientes em N*. Mas o cálculo algébrico mais simples *raramente pode ser conduzido com essa restrição*. No exemplo do congresso de dermatologia, manipulamos as expressões a+(2a-x)+x e x+(4a-x), que, em termos estritos, definem as funções polinomiais (em a e x) associadas a polinômios de coeficientes *em* Z e são ambas definidas no subconjunto de N^2 descrito pela desigualdade x < 2a. Similarmente, no curso da verificação da igualdade P(n) =P(n-l)+n, calculou-se “livremente”, assim como o teríamos feito em Z.

É preciso aqui lembrar que os hoje nomeados números *relativos* foram por muito tempo chamados números *algébricos*. Há muito tempo, a introdução deles inaugurou o início do cálculo algébrico. Pois o fato de não poder livremente subtrair uma expressão algébrica de coeficientes em N de uma outra de mesma natureza atrapalha o cálculo algébrico. Mais recentemente, entretanto, enquanto o cálculo algébrico se encontrava introduzido em turmas de

[20] (V.O. nota 12) Há no caso um bom assunto de investigação epistemológica. Por que a técnica da redução ao absurdo é familiar no *Colégio, em geometria*, e não o é nos demais setores do corpus matemático ensinado?

sétimo ano, os autores de manuais enredavam momentaneamente essa dificuldade ao enunciar uma "regra" indicando que, "contanto que as subtrações sejam possíveis, pode-se efetuar uma série de adições e de subtrações em uma ordem qualquer"[21] (Monge & Guinchan, 1964, p.42). A jurisdição estabelecida por essa marca permitia então propor aos alunos exercícios dos seguintes tipos (op. cit., p.51):

Efetuar as seguintes adições: 54 + (48-x); etc.

Efetuar as seguintes subtrações: 17 - (13+x); etc.

Efetuar as seguintes operações: (2S-x) - (13-x); etc.

Entretanto, com o fim de se ter uma situação completamente clara, é bom dispor, desde o trabalho com (ou nos) inteiros naturais, de expressões algébricas com coeficientes em Z. É assim que o polinômio descoberto por Euler em 1772 –que engendra números primos para x variando de 0 até 40, sendo $P(x) = x^2 - x + 41$– tem seus coeficientes em Z. O mesmo se aplica aos polinômios $Q(x) = x^2 - 81x + 1681$ ($0 \leq x < 81$) e $R(x) = x^2 - 79x + 1601$ ($0 < x < 80$), mesmo se outros polinômios geradores de números primeiros possam ter seus coeficientes em N, tal como $S(x) = 11x^2 + 9x + 11$ ($0 \leq x < 11$).

A passagem da visão "operatória" do sinal de *menos* à sua visão "predicatória", ou seja, a passagem da concepção de uma expressão número-literal *como série de operações a efetuar*, para uma concepção formal de *polinômios* com coeficientes em Z permite, sozinha, a implementação de uma prática algébrica satisfatória. A passagem inversa é efetuada quando "se dá para x um valor" (em N). Assim, na expressão P(3) = 32 – 3 +41, reencontra-se uma série de operações *efetuáveis em N*. P(3) vale 47 (que é de fato o primo).

No mais humilde nível, portanto, o conjunto N dos inteiros naturais aparece como uma ferramenta *insuficiente*, a partir do momento em que o estudo é conduzido por meio de uma ferramenta algébrica. Este só se torna realmente eficaz baixo a condição de ter à disposição um sobreconjunto de números que facilite as manipulações "algébricas". Este é um fenômeno constante, que será encontrado em outros níveis. Assim, bem mais tardiamente no curso dos estudos científicos, a decomposição em elementos simples de uma fração racional de coeficientes reais poderá ter vantagem em ser conduzida no corpo C dos números *complexos* etc.

[21] NT. Citação no original: "*pourvu que les soustractions soient possibles, on peut effectuer une suite d'additions et de soustractions dans un ordre quelconque*".

Os números “artificiais”

Os números negativos são introduzidos pois, na prática matemática, não tal como os inteiros “naturais”, ou seja, como os números que servem para contar, sendo para “medir” os conjuntos finitos, mas como um *meio de cálculo*, como um artifício de cálculo –do mesmo modo que o automóvel pode ser visto como um “artifício de transporte”. Por esta razão, eles foram por muito tempo colocados –especialmente com as frações– na categoria dos números artificiais (Smith, 1925, capítulo IV), permitindo utilizar mais flexivelmente e, portanto, mais agradavelmente, uma ferramenta potente, o cálculo algébrico.

A “regra dos sinais”, conhecida historicamente muito antes da invenção dos negativos, permitia escrever, ao calcular com inteiros naturais por adição e subtração, igualdades do tipo (a+b)(c-d) = ac+bc – ad- bd (as subtrações do segundo membro podendo ser efetuadas, conquanto c>d, tão logo se tenha efetuado a adição ac+bc) e conduzia às regras de reescrita clássicas, a(-b) -> -ab etc. Ela recebe doravante um fundamento numérico que autoriza ignorar as restrições para o cálculo em N: a igualdade anterior poderá muito bem ser reescrita (a+b)(c-d) = -ad-bd+ac+bc, e torna-se possível efetuar na ordem indicada as diferentes operações nos valores assinaladas às variáveis (ou parâmetros) a, b, c, d.

Desta forma, os números “artificiais” (neste caso, os negativos) não são, inicialmente, motivados pelo estudo de sistemas de variáveis que assumem valores inteiros positivos ou negativos, assim como se faz crer ao apresentar raros sistemas desse tipo de altitude, elevador, perdas e ganhos, etc. Eles nascem *de exigências internas ao trabalho matemático* (exatamente: algébrico). Provavelmente a introdução deles, que estende o campo numérico, levantará, historicamente, muitas interrogações, que encontram necessariamente um eco no currículo do *Colégio*. Sabe-se que Diofanto, no século III a.C., rejeitava como absurda a equação 4x+20 = 4, que daria x = -4. No século XVI, Cardano chamava os números negativos de números *falsos*, e Descartes, em 1637, chama de *raízes falsas* as raízes negativas de uma equação. Considerar os números negativos como “verdadeiros” números exigiu que se escrevessem igualdades do tipo (+15)+(-20) =-5 (Bombelli, 1572), o que não foi realmente aceito até o século XVII.

Notemos, sobretudo, que, na normalização progressiva do status dos negativos, na banalização de seu emprego, *o uso das letras terá um papel unificador essencial*. A própria ideia de usar uma só letra, *não afetada por um sinal*, para designar indiferenciadamente um número positivo ou negativo parece ter aparecido perto de 1659 em Hudde[22].

[22] (V.O. nota 13) Smith, 1925, p.259. Descartes morreu em 1650.

A passagem de N a Z

A passagem de N a Z, do modo indicado, parte então do seguinte problema[23]. Para todo inteiro a>0, é preciso introduzir um "número", anotado -a, tal como, para os inteiros naturais b e c quaisquer que verifiquem b > ac, possa-se escrever: b - ac = b + (-a)c. Seja, portanto, um número tal que, segundo a definição (em N) de b - ac, tenha-se: b = ac + b + (-a)c.

1. Tomemos b = a e c = 1. O número -a deve então verificar a igualdade a=a + a + (-a), ou ainda a + (-a) = a - a = 0. Em outros termos, *-a é a solução da equação x + a = 0*. Se o conjunto que se quer obter a partir de N, por adjunção dos "números" -a (a inteiro natural > 0), for efetivamente um *sistema de números de* Z (no sentido definido acima), então essa equação só tem em Z uma solução; assim, a equação x + a = 0 *caracteriza -a completamente*.

2. Sempre supondo que Z seja realmente um sistema de números, da igualdade a+(-a) = 0, deduz-se inicialmente (por meio da multiplicação por c) a igualdade ac + (-a)c =0, então (por meio da adição de b), temos a igualdade ac + b + (-a)c = b. Se os inteiros naturais a, b, c são tais que b > ac, decorre: b - ac =b + (-a)c. *Assim, para constituir Z a partir de N, é necessário e suficiente acrescentar, para todo inteiro a > 0, um número tal que a + (-a) =0.*

A hipótese de que um tal sistema de números possa existir é muito forte. Ela implica especialmente que, em Z, toda equação da forma x+a = 0 possui uma solução: se, com efeito, a pertence a N, então x = -a pertence a Z e é solução da equação; se a pertence a Z-N, existe b em N tal que a = -b, e a equação considerada é satisfeita por x = b. Anotamos geralmente -a, a solução (única) da equação x + a = 0, para a pertencendo a Z. Se a = -b, com b em N, decorre: b = -a = -(-b). De modo mais geral, para todo a em Z, tem-se: -(-a) = a.

A hipótese de que Z é um sistema de números permite ver como convém *calcular* em Z. Sejam os números -a e -b, com a e b em N. Quanto vale a *soma* deles, (-a) + (-b)? Tem-se as igualdades (-a)+a = 0 e (-b)+b = 0. Deduz-se daí, por adição membro a membro, e em virtude das propriedades emprestadas a Z, a igualdade ((-a)+(-b)) + (a+b) = 0. Esta última igualdade fornece a resposta esperada, pois ela nos *mostra* que temos: (-a)+(-b) = -(a+b). Todas as propriedades de Z perante operações de adição, de subtração, todas as relações de

[23] (V.O. nota 14) Mesmo que ela tenha penetrado só um pouco na esfera didática, sublinhemos que se trata de uma concepção do numérico que se impôs, na esfera do saber sábio, desde a metade do século XIX. "Aos olhos dos algebristas ingleses (como Peacock, De Morgan, Hamilton) e alemães (Grassmann, Hankel) do meio do século XIX, assim o notam Balibar e Macherey, a permanência do conceito de número através de suas extensões sucessivas, que não é nem aquela de uma representação concreta, nem aquela de uma evidência intelectual, é aquela do simbolismo (...). Um sistema de "números" não é outra coisa senão um sistema de objetos para os quais [as] regras operatórias (usuais) são válidas" (Balibar e Macherey, 1985, p. 1183 c); e também Artin.

compatibilidade entre ordem e leis de composição podem ser obtidas dessa maneira. Ainda, a função *valor absoluto* pode então ser definida, e a igualdade triangular estabelecida. Z se distingue de N pelo fato de que a subtração nele é sempre definida e que a propriedade da boa ordem não é mais satisfeita senão para os conjuntos *minorados*, o que basta para implicar que a ordem de Z, como aquela de N, *é discreta*.

A integração dos relativos no trabalho matemático

Pelo anterior, desenha-se o retrato falado daquilo que deveria ser, se existisse, o sobe-sistema de números procurado, Z. Coloca-se então, com todo rigor, a questão da *existência efetiva* de Z ou de sua "*construção*" como sistema de números. O ponto de vista *realista* –que preconizaremos mais adiante sobre sistemas de números, tais como D+ ou Q+, dos quais a existência é, de algum modo, "forçada" pelas necessidades da medição das distâncias no plano[24]– carece aqui de evidência. Se quisermos, então, "construir" Z, a direção mais adequada consiste em colocar simplesmente Z = N U N-, em que N- designa o conjunto dos pares (-, a), para a pertencendo a N*, o sinal - sendo um elemento qualquer determinado; subsequentemente, anotando -a ou (-a) o número (-, a), que munirá o conjunto Z assim definido com ordem e leis de composição ordinárias (que o retrato falado esboçado anteriormente terá permitido precisar), ao verificar que eles realmente fazem de Z um sistema de números[25].

Posto isso, convém sobretudo integrar *os números relativos ao trabalho matemático*. Porque Z é um sistema de números, já se sabe que eles são manipuláveis, nos cálculos, assim como números já conhecidos –e isso, como já foi bastante sublinhado, com uma flexibilidade maior. Assim, três níveis de integração se desenham. Já mencionamos o *primeiro nível*: os relativos se integram como os inteiros na prática do cálculo –tal era o objetivo visado. Mas, em um *segundo nível* de integração, pode-se agora atribuir-lhes a função de *valores* assumidos por uma variável. Retomemos aqui o polinômio $P(x) = x^2 - x + 41$. Para $x = -3$, tem-se: $P(-3) = (-3)^2 - (-3) + 41 = 9 + 3 + 41 = 53$, que é um número primo. O polinômio P(x) fornece de fato números primos para todo x tal como $-40 < x < 41$; de mesmo modo, o polinômio $S(x) = 11x^2 + 9x + 11$ engendra números primos para todo x tal como $-11 < x < 11$ etc.

---

[24] (V.O. nota 15) Sabe-se ademais que se pode construir os números (reais) a partir de uma axiomática da geometria do plano euclidiano, assim como o faz, em especial, Hilbert com seu "cálculo segmentário": *cf.* Hilbet.

[25] (V.O. nota 16) O proceder sugerido aqui possui, vale sublinhar, tanto "rigor matemático" quanto outro, por exemplo, a simetrização de N, colocada há pouco em lugar de honra por "matemáticos modernos". Ademais, ele permanece próximo da relação que todos –o matemático e o aluno– entretêm com os números negativos: um número inteiro, com um sinal de *menos* à frente.

Um terceiro nível de integração se situa, enfim, ao nível da modelização de sistemas, que não se poderia modelizar tão facilmente somente com o auxílio dos inteiros naturais: assim ocorre essencialmente com sistemas cuja modelização supõe uma “orientação”, em se tratando de figuras geométricas, de circuitos elétricos etc. Dessa forma, portanto, ao introduzirmos os números relativos para obtenção de um cálculo algébrico simplesmente mais agradável, *estendemos nossa potência de modelização.*

Os inteiros naturais como objeto de estudo

*Um objeto de estudo por excelênci*a

Como objeto de estudo, os inteiros naturais se revelam muito rapidamente insuficientes. Em contrapartida, considerados como *objeto de estudo*, eles fornecem ao currículo do *Colégio* um tema de trabalho privilegiado, mas hoje negligenciado, ou até mesmo ignorado.

Os inteiros naturais têm inicialmente essa virtude essencial de constituir uma realidade que, psicologicamente, é vivida como familiar, pois frequentada há longa data. Ao mesmo tempo, entretanto, eles oferecem uma multiplicidade de “sistemas” cuja complexidade do estudo é muito diversa, e propõem principalmente um importante material que exige a implementação e o desenvolvimento das formas mais elementares do cálculo algébrico.

Os exemplos rapidamente apresentados na sequência ilustrarão, ademais, um fenômeno importante sobre a significação, ao qual voltaremos mais à frente: desde os casos mais simples de emprego de modelizadores do cálculo algébrico, sendo ele essa ferramenta de base que *nunca intervém sozinha na prática*. Ele entra quase sempre em combinação com outras ferramentas, específicas do campo ao qual “pertence”, em outras palavras, o sistema estudado. Desta forma, não será surpreendente ver aparecerem, muito rapidamente, conceitos próprios à teoria dos números, mesmo que se permaneça nos rudimentos ainda presentes em um passado recente do currículo do *Colégio*.

A primeira implementação do cálculo literal

O sistema dos números inteiros oferece, com efeito, de forma óbvia, muitos fenômenos que podem ser modelizados algebricamente. A modelização deve geralmente apoiar-se em um certo número de correspondências entre propriedades dos inteiros e expressões literais, que constituem tantos conhecimentos tirados de modelizações anteriores, que terão sido integrados no saber ensinado: um inteiro par é escrito com a forma $2k$, um inteiro ímpar com a forma $2k+1$, um quadrado será escrito com a forma k^2 etc.

Consideremos assim dois números ímpares, por exemplo, 5 e 9. A soma deles, 14, é um número par. Como justificar esse fenômeno? Os números ímpares dados, a e b, sendo escritos 2k+1 e 2h+1, a soma deles c é dada por:

$c = a+b = (2k+1)+(2h+1) = 2k+2h+1+1 = 2k+2h+2 = 2(k+h+1)$,

e, essa última expressão mostra que c é mesmo um inteiro par.

Tomemos em seguida dois inteiros ímpares *sucessivos*, como 5 e 7. A soma deles, 12, é par, como previsto; mas ela é ainda *um múltiplo de 4* –ela é "parcialmente par". O exame de outros pares de ímpares sucessivos (3+5 = 8, 9+11 = 20, 13+15 = 28, etc.) conduz à mesma observação, cuja generalização aparece desde logo como uma *conjectura* razoável.

No caso geral, os números ímpares sucessivos considerados, a e b, serão modalizados aqui com as formas 2k+1 e 2k+3. A soma delas é escrita

$c = (2k+1)+(2k+3) = 4k+4 = 4(k+1)$,

expressão que, ainda nesse caso, mostra aquilo que já esperávamos –a soma c é um múltiplo de 4.

O estudo assim iniciado pode ainda ser prosseguido. Acaba-se de colocar em evidência um certo *fenômeno numérico*. Podemos agora nos perguntar por que tal fenômeno é produzido; e, nessa perspectiva, procurar o que "*explica*" que a soma de dois ímpares sucessivos seja sempre um múltiplo de 4.

Para isso, ao observar que a soma de dois ímpares quaisquer é sempre par, pode-se perguntar em quais casos ela é "parmente par"; em quais casos ela é, ao contrário "imparmente par". Sendo dados dois ímpares a = 2k+1 e b =2h+1. A soma deles a+b = 2(k+h+1) é parmente par, se e somente se, k+h+1 for par, então, se k+h é ímpar, ou seja, enfim, *se k e h forem de paridade diferente*. Suponhamos k par e h ímpar (o que não diminui a generalidade do estudo): k = 2n e h = 2m+1. Advém então: a = 4n+1 e b = 4m+3, números cuja soma é realmente um múltiplo de 4. Assim, dois *ímpares* têm a soma como o dobro de um número parmente par se, e somente se, *um for da forma 4n+1 e outro da forma 4m+3*. Compreende-se então o porquê da soma de dois ímpares *sucessivos* ser sempre parmente par: se o primeiro for escrito 4n+1, o segundo será escrito 4n+3; se o primeiro for da forma 4m+3, o segundo será escrito 4m+5 = 4(m+1)+1, e terá a forma 4n+1 (com n =m+1).

Esse estudo salienta ainda um fato que não era evidente no início. Se todos os pares (a, b) de ímpares com soma múltipla de 4 forem da forma (4n+1, 4m+3) ou (4m+3, 4n+1), será particularmente assim que ocorrerá com todos os pares de ímpares sucessivos. Deduzimos, pois, *que todo ímpar é ou da forma 4n+1, ou da forma 4n+3,* resultado que fornece *uma nova modelização algébrica*, ao distinguir dois casos, *da noção de inteiro ímpar*. Esse resultado –já “encontrado” no curso do estudo precedente sem que ele tenha nele estado explícito– pode, certamente, ser reencontrado diretamente a partir da forma genérica 2k+1, fazendo, respectivamente, k = 2n e k = 2n+1.[26]

Equações diofantinas simples

Por tão elementar que seja, o cálculo algébrico permite elucidar uma multitude de fenômenos numéricos. Consideremos assim três inteiros consecutivos, por exemplo, 5, 6, 7. *O produto dos “extremos”* –sendo aqui, 5x7 = 35, subtraído do quadrado do “meio”, sendo 6^2 =36, dá 1. Este resultado é obtido, quaisquer que sejam os inteiros consecutivos a, b, c que se escolhe: 8^2 -7 x 9 = 64 - 63 = 1; 12^2 - 11 x 13 = 144 - 143 = 1; etc. Coloquemos b = a+1, c = b+1 = a+2. Decorre: $b^2 - ac = (a+1)2 - a(a+2) = (a^2+2a+1) - (a^2+2a) = 1$. A igualdade $(a+1)^2 - a(a+2) =1$ assim obtida constitui um *modelos algébrico do fenômeno numérico estudado.* Segundo uma perspectiva de pesquisa já emprestada, poderíamos ainda nos perguntar quais são as ternas (a, b, c), com a < b <c, de modo que se tenha: $b^2 - ac = 1$ etc.

Neste exemplo, bem como no anterior, teremos notado outro traço de toda atividade de modelização: somos levados a examinar situações, muitas vezes e tão simplesmente, *geradoras de novos problemas*. O problema ao qual chegamos, a resolução com números inteiros da equação $b^2 - ac =1$, advém do campo das equações *diofantinas*[27]. Certas delas podem ser tidas como objeto de um estudo simples, associando cálculo algébrico e teoria elementar dos números. Daremos aqui um só exemplo disso[28]. O número 8 pode ser escrito como a diferença de dois quadrados: 8 = 9-1; do mesmo modo 7 (= 16-9), ou 12 (=16-4), etc. Pode-se perguntar se todos os inteiros têm essa propriedade. A resposta é negativa, para vê-lo, basta dar um *contraexemplo* numérico. Sendo ele o número 6. Se existissem inteiros a e b de modo que se tenha: $6 = a^2-b^2$, ter-se-ia também: 6 = (a-b)(a+b), igualdade que mostra que a+b divide 6. Deduz-se daí que os números a e b, se existirem, *são inferiores a 6*. Essa observação permite proceder a uma *enumeração exaustiva* dos pares (a, b) suscetíveis que satisfazem tais observações, o que confirma que 6 é indecomponível.

Pode-se então perguntar quais são, precisamente, os inteiros decomponíveis em uma diferença de dois quadrados de inteiros. A igualdade n = (a-b)(a+b) constitui um *modelo* dos números procurados que já foi utilizada a propósito do número 6. O *trabalho* deste modelo

[26] (V.O. nota 17) Ele pode ainda ser estabelecido ao considerar os restos na divisão de um inteiro por 4. Os valores possíveis do resto são 0, 1, 2, 3. Os restos 0 e 2 correspondem aos inteiros pares respectivamente divisíveis por 4; os restos 1 e 3, aos ímpares da forma 4n+1 e 4n+3, respectivamente.
[27] (V.O. nota 18) Para algumas equações diofantinas clássicas, *cf.* Ore, 1967.
[28] (V.O. nota 19) Deixamos o leitor examinar a equação $b^2 - ac = 1$.

permite produzir um certo número de conhecimentos que se revelarão decisivos. Se a e b *têm mesmo paridade*, os fatores a-b e a+b são *pares* e, por conseguinte, n *é um múltiplo de 4*; se a e b *são de paridade diferente*, a-b e a+b são *ímpares*, e então n, o produto deles, é *ímpar*. Estabelece-se assim que os inteiros decomponíveis devem ser buscados dentre os números ímpares e aqueles múltiplos de 4 (o número 6, não decomponível, não é nem um, nem outro). É fácil, aqui, ver que, de fato, estão *todos os ímpares*, de um lado, e *todos os múltiplos de 4*, do outro, que são decomponíveis. Se, com efeito, $n = 2k+1$, tem-se: $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$; se $n = 4k$, tem-se: $4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$.

Poderíamos então nos perguntar se um inteiro decomponível possui uma decomposição única e, caso não, quantas existem etc.[29]; e, sobretudo, para *quais tipos de situações* podemos ser conduzidos a estudar equações diofantinas simples no *Colégio*. Esta questão faz reaparecer o fio vermelho de nossa investigação, as interrelações entre *construção e emprego dos sistemas de números*, de um lado, e *cálculo algébrico*, de outro.

Um campo para a formação matemática do aluno

Os exemplos que precedem ilustram o que faz com que o emprego fecundo do cálculo algébrico *suponha uma dialética permanente entre o cálculo e os fenômenos que ele permite modelizar*, entre a *conduta* do cálculo e o *raciocínio* que sozinho permite chegar às *decisões de cálculo* pertinentes. Como expressar uma ou outra propriedade por meio de uma escrita literal? Inversamente, quais propriedades essa forma algébrica nos mostra? Eis aqui duas questões motoras da resolução dos problemas examinados. Esse é um princípio geral que os alunos reencontrarão no *ensino médio* e em outros níveis, na implementação do cálculo algébrico (em geometria “analítica”, por exemplo) e que não pode ser enfatizado em demasia.

Na linha desta última observação, acrescentemos que o corpo de problemas ao qual temos feito alusão até aqui exige que se ponha em ação, com exemplos inteiramente controláveis pelo aluno, uma diversidade de noções *cuja destreza é constitutiva da cultura matemática* (e, com maior extensão, de toda cultura científica), e isso, desde o nível elementar no qual nos situamos aqui. Sem desenvolver este ponto, citemos, a título de exemplo, a noção de *conjectura*, reclamada pelo exame (não exaustivo!) de exemplos, as noções solidárias, mas distintas de *convicção* (pessoal ou partilhada), etc. e de *prova* (desembocada na retórica reclamante da noção de *demonstração*), etc. Tudo isso faz do estudo elementar (com o auxílio do cálculo algébrico mais simples) do sistema dos números inteiros, um campo excepcional de

[29] (V.O. nota 20) Outra questão deixada ao leitor!

formação matemática, ou seja, de "aprendizado matemático" –e não somente de aprendizado de matemáticas.

Construção do numérico e controle do cálculo

Há outro motivo que impulsiona o prosseguimento do estudo dos inteiros em seus aspectos mais elementares pelos meios oferecidos pelo cálculo algébrico (utilizados conjuntamente com os meios mais específicos do campo da realidade estudada): esse estudo oferece uma base sólida na construção, análise e emprego dos sistemas de números que seguem "depois" de N.

Juntamos mais acima algumas observações sobre a passagem de N para Z; a passagem de Z para Q poderia ser o objeto de semelhantes análises[30]. Permanecendo aqui em um nível já abordado, daremos novamente um exemplo que é reportado desta vez ao tema *da análise e do controle dos erros*.

Consideremos o seguinte cálculo: 5/6 - 4/5 = (5-4)/(6x5) = 1/30. Contrariamente às aparências, este cálculo é inteiramente *válido*. Decerto, a regra utilizada (diferença dos numeradores/produto dos denominadores) é *falsa* como regra *geral* de cálculo com frações. Por que ela teve êxito aqui? Em quais outros casos ela pode ter êxito? Em outros termos, qual é seu campo de validade? Se se tentar modelizar, "com a maior proximidade possível", o fenômeno numérico observado, chega-se ao seguinte modelo: a/(a+1) - (a-1)/a = 1/a(a+1). Podemos verificar que se trata mesmo do caso de uma *identidade*. Teremos, então, por exemplo: 7/8 – 6/7 = 1/56, 11/12 - 10/11 =1/132, etc. Essa identidade explica por que o cálculo inicial dava um resultado exato.

Pode parecer muito ambicioso querer determinar *o campo de validade completo* da regra colocada em prática. Para que ela seja válida, deveríamos ter a igualdade a/b - c/d = (a-c)/bd. Ora, temos, no caso geral, a/b - c/d = (ad-bc)/bd. A validade da regra equivale então à igualdade: a-c = ad-bc. O estudo do campo de validade conduz assim ao estudo de uma equação diofantina. Essa equação, modelo do fenômeno estudado, é, de alguma maneira, uma ilha do tesouro: pode-se dizer que ela abarca toda a verdade do fenômeno que o exemplo numérico inicial só nos havia permitido observar fugazmente. Sua "exploração" nos entregará as respostas às questões que nós nos fizemos a esse respeito.

Problemas abertos e currículo

[30] (V.O. nota 21) Para essa questão, *cf.* Freudenthal, 1973, pp.224-241.

A igualdade obtida pode ser ainda escrita: ad = a + (b-1)c. Deduz-se dela que a divide (b-1)c, e que existe então n, m, h e k, tais que: a = nm, b-1 = nh, c = mk; de onde se segue que também d = hk+1. No caso geral, obtém-se, então, as frações nm/(nh+1) e mk/(hk+1), cuja diferença é realmente dada pela regra examinada. Quando se particulariza, ao tomar m = h = 1, obtém-se a diferença n/(n+1) - k/(k+1), que generaliza o caso "geral" estudado mais acima. Tomando agora n = 1, advém a diferença m/(hk+1) que, reescrita, dá a/b - kA/[k(b-1)+1], expressão que nos mostra que, qualquer que seja a fração a/b, existe uma infinidade de frações c/d tais que o cálculo da diferença a/b - c/d possa ser efetuado pela regra examinada.

De modo mais geral, sendo dada uma fração a/b, obter-se-á *todas* as frações c/d "admissíveis" da seguinte maneira: sendo n um divisor comum para a e b-1, e sendo então m e h os inteiros tais que a = nm e b-1 = nh; as frações admissíveis são então as frações na forma mk/(hk+1), onde k é um inteiro qualquer. Assim, para a = 12 e b = 27, os divisores comuns para a e b-1 são 1 e 2, que conduzem respectivamente às duas séries de frações 12k/(26k+1) e 6k/(13k+1).

Se demos um pouco de espaço para esse último exemplo[31], foi para sublinhar com qual facilidade a abordagem, em termos de modelização, das situações matemáticas mais clássicas no currículo tradicional do *Colégio* (aqui, a diferença de duas frações) pode conduzir a problemas *abertos* relativamente a esse currículo; e com qual facilidade, então, essa abordagem, que introduz uma atividade matemática localmente autogeradora, provoca um funcionamento em um currículo aberto, aproximando assim a atividade matemática escolar daquela do matemático[32]. Agora se verá, entretanto, que esse aspecto, que faz parcialmente a força da perspectiva proposta, levanta problemas didáticos consideráveis, que convém que sejam inicialmente identificados para que se possa trabalhar para resolvê-los.

Primeiras demarcações de um programa de pesquisa

Os campos de emprego do cálculo algébrico

O estudo dos inteiros naturais aparece assim como um *campo de emprego*, matematicamente aberto, do cálculo algébrico. De modo mais geral, o programa de pesquisa requisitado pela problemática apresentada aqui supõe que seja feita a *demarcação* e *a exploração de tais campos de emprego potenciais.*

---

[31] (V.O. nota 22) Cujo estudo poderia ser prosseguido: se n e n' são dois divisores comuns para a e b - 1 e são *distintos*, as séries [*suites*] de frações obtidas não têm elementos comuns? Etc.

[32] (V.O. nota 23) Notaremos particularmente, em conformidade com as análises anteriores, que a abordagem "modelizante" recoloca constantemente em jogo as conceitualizações adquiridas.

Ao conjunto daqueles em que aparecem apenas variáveis de valores inteiros, a extensão do sistema de números disponível permite acrescentar outros que fornecem sistemas de variáveis decimais, *racionais*, reais. A introdução dos racionais pode ser associada a problemas de divisão de grandezas, como observado. A introdução dos *irracionais* é, quase necessariamente, e desde as origens gregas da matemática, levada adiante pela vontade de medir grandezas que a teoria das áreas faz aparecer como "irracionais".

No *Colégio*, esse entrelaçamento do problema da *medida das grandezas* e do problema da *construção dos sistemas de números* é *fundamental*[33]. Nesse sentido, a *"metrização" da geometria* (do plano e do espaço) é um tema central neste nível. Ela inaugura imediatamente uma floração muito rica de configurações geométricas, cujo exame no espírito da modelização algébrica conduz, de fato, ao encontro dos encantos, hoje fora de moda, daquilo que se chamava outrora *relações métricas* (em um triângulo, círculo etc.), e que constituem um campo de emprego a ser considerado de modo sistemático.

Sobre esse último tema, já abordado mais acima, daremos aqui apenas um exemplo, ao mesmo tempo elementar e não clássico. Quer-se traçar um triângulo em que um dos lados tenha como medida 6 e cujas medidas dos dois outros lados tenham como diferença 2. O sistema considerado pode ser descrito com a ajuda de um só parâmetro, x, as medidas dos lados sendo respectivamente 6, x, x+2 (cf. a Figura 5).

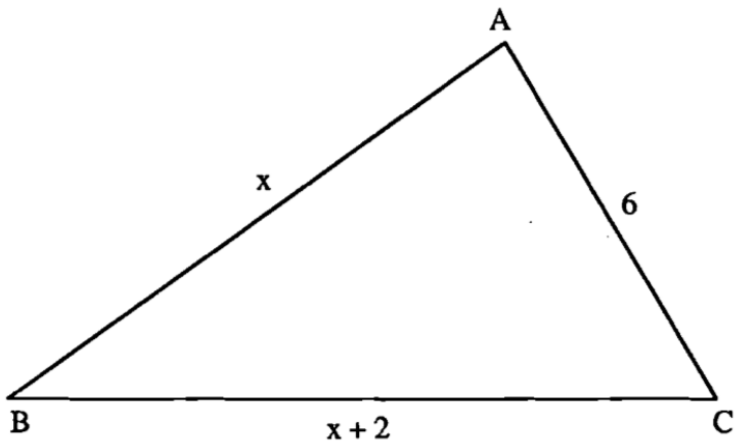

Figura 5.

Ilustração do exemplo

Imaginemos que se tente traçar tal triângulo delineando-se inicialmente o lado de medida 6 e em seguida os dois círculos centrados nas duas extremidades desse lado, tendo como abertura do compasso x e x + 2, respectivamente. É claro que se x for muito pequeno, os dois

[33] (V.O. nota 24) A melhor exposição dessa questão continua a ser, até o presente, a obra de Henri Lebesgue sobre a medida das grandezas (Lesbegue, 1932). Também será proveitoso ler Dhombres, 1978.

círculos não se cortarão. Mais precisamente, eles não se cortarão se a soma das duas aberturas, x + (x+2), for inferior à medida do lado, 6. Em outros termos, para que esse triângulo possa ser traçado, é necessário que se tenha a desigualdade: x+(x+2) > 6.

Essa condição é suficiente? Poder-se-ia imaginar que, para x "muito grande", os dois círculos deixem de se cortar, um deles sendo então contido no outro. A resposta para essa pergunta pode ser trazida por um "conhecimento precedente" relativo aos sistemas "triângulos": é possível traçar um triângulo (exato) cujos lados têm medidas dadas *a priori* se e somente se cada uma dessas medidas for inferior à soma dos outros dois. No caso considerado, isso conduz a modelizar os triângulos procurados por um sistema de três inequações:

$$6 < x+(x+2) \quad (1)$$
$$x < 6+(x+2) \quad (2)$$
$$x+2 < x+6 \quad (3)$$

As desigualdades (2) e (3) são sempre verificadas; a desigualdade (1) constitui, então, uma condição necessária e suficiente. Ela equivale a x > 2.

Este resultado confirma que x não deve ser "muito pequeno". Em contrapartida, mostra que, contrariamente a uma conjectura a priori pensada, x poderá ser "tão grande quanto se queira". O fenômeno que se podia imaginar não se produz. Ele poderia ser produzido, por exemplo, por outro valor da diferença dos dois lados? Para estudar essa questão, convém introduzir *parâmetros*[34]. Um dos lados sendo de medida 6, designamos por a, a diferença das medidas dos dois outros lados. O modelo algébrico correspondente é então:

$$6 < x+(x+a) \ (1')$$
$$x < 6+(x+a) \ (2')$$
$$x+a < x+6 \ (3')$$

A desigualdade (2') é sempre trivialmente verificada. A desigualdade (3') não o é, exceto se a < 6, mas ela não impõe nenhuma condição para x. Supor-se-á, então, que ela seja satisfeita, senão o problema proposto não teria solução. A desigualdade (1') é equivalente a x > (6-a)/2, com (6-a)/2 > 0. O estudo do modelo algébrico obtido mostra assim que, para que haja uma solução, x deve ser "suficientemente grande", *mas que ele pode então ser "tão grande quanto se queira"*. O resultado confirma e generaliza aquele obtido no caso particular examinado anteriormente: se o problema tem uma solução, ele tem soluções "arbitrariamente grandes". O fenômeno imaginado por um instante *nunca acontece*.

[34] (V.O. nota 25) É um fato fundamental, em geometria *euclidiana*, que o "tamanho" [*taille*] da figura não intervém: pode-se então conservar o valor 6 escolhido inicialmente, sem diminuir a generalidade do estudo.

Na verdade, pode-se muito bem não ficar totalmente satisfeito com esse resultado. Se a diferença a é estritamente inferior a 6, os dois círculos traçados sempre se cortam, uma vez que x é suficientemente grande, seguramente: eis o que nosso modelo algébrico nos leva a concluir. Mas *como* as coisas ocorrem assim? Para responder a esta pergunta, podemos retornar ao registro geométrico: em outras palavras, podemos dar um *modelo geométrico* do nosso *sistema algébrico de inequações*. Tomaremos aqui novamente a = 2. Seja $\overline{OO'}$ o lado de medida 6. Considera-se na reta (OO') o referencial de origem o ponto O para o qual *o ponto* O' *tem como abscissa 6*. O círculo C(O, x) corta o eixo assim definido nos pontos M e N de abscissas -x e x respectivamente[35]. O círculo C(O´, x+2) corta (OO') nos pontos P e Q de abscissas 6-(x+2) e 6+(x+2), respectivamente, ou seja -x+4 e x+8. No eixo (OO'), teremos, se -x+4 < x, ou seja, se x > 2, então:

M(-x) < P(-x+4) < N(x) < Q(x+8).

Os pontos M e N pertencem ao círculo C(O, x), os pontos P e Q pertencem ao círculo C(O, x+2): cada um dos dois círculos tem, então, um ponto interior e um ponto exterior ao outro; por conseguinte, esses dois círculos se cortam[36].

A modelização de sistemas extramatemáticos

Exploração algébrica do numérico e do geométrico: tais são os dois grandes eixos que estruturam o espaço das pesquisas necessárias. Além disso, adentra-se campos que numérico e geométrico, frequentemente em combinação, permitem submeter à modelização. Universo imenso, sobre o qual faremos aqui apenas algumas breves observações.

Quando o sistema estudado não é matemático, o corpo de conhecimentos (relativos ao sistema) sobre o qual se apoia o trabalho de modelização –que permitirá produzir *novos conhecimentos* relativos ao sistema– pode advir de um saber bastante determinado: ciências físicas, biológicas, econômicas etc. Infelizmente é necessário dizer novamente aqui que, em todos os casos, um certo conhecimento da disciplina é necessário: para modelizar um sistema físico, é preciso conhecer "física" etc. Mas, entre o estudo do pêndulo simples –por exemplo (Chevallard, 1989 a, p.54)– que "pertence" institucionalmente à física, e o estudo de um sistema "propriamente matemático", outras situações se intercalam.

---

35 (V.O. nota 26) É intencional... que não propomos figura aqui: o leitor poderá fazê-lo por sua própria conta.

36 (V.O. nota 27) O fato que, sob esta condição, os dois círculos se cortam, é tido no *Colégio,* para que seja natural; com todo rigor, sua demonstração exigia um axioma "*à* Dedekind": consultar por exemplo Greenberg, 1974, p. 82.

Certos sistemas que se pode querer estudar estão submetidos a leis objetivas, que não dependem da vontade dos homens. É o caso dos fenômenos físicos e, de modo mais geral, fenômenos que estudam as ciências da natureza. Em contrapartida, certos sistemas, criação da cultura, são explicitamente regrados, por vezes de modo muito preciso, pela convenção social. É o caso das transações financeiras, de empréstimos com juros etc., práticas sociais que são de fato *definidas a priori por um modelo matemático*[37].

Notaremos, entretanto, que essa distinção tende frequentemente a ser obliterada: a convenção, banalizada por um estágio social de longa duração, tende a se tornar culturalmente transparente. Ela tende a *se naturalizar*. Fruto de um "pacto" explícito na origem, ela toma uma aparência objetiva que lhe confere o aspecto dos sistemas que a natureza nos apresenta.

Mas, ao menos em algumas ocasiões, a distinção entre a realidade matemática e a realidade extramatemática tende ela mesma ao esvaecimento. Daremos apenas um exemplo. Em suas *Récréations Mathématiques* ("*Recreações Matemáticas*"), Edouard Lucas descrevia, no século passado, uma forma de cálculo digital que, nos diz ele, se encontra "na Palestina" e permite multiplicar duas cifras superiores ou iguais a 5 (Lucas, 1892, p.22):

> A mão aberta, com os dedos juntos, representa cinco; para representar seis, o dedo pequeno é abaixado; para representar sete, dois dedos são abaixados, o dedo pequeno e o dedo anelar; para representar oito, três dedos são abaixados e para representar nove, quatro dedos são abaixados. Quando isto é feito, representamos os dois fatores com ambas as mãos e a multiplicação é feita pelas seguintes regras: 1. Adicionar os dedos abaixados e contá-los como dezenas. 2. Multiplicar os dedos levantados e adicionar o produto contado para as unidades ao número de dezenas já obtidas.

Tomemos um exemplo: para multiplicar 7 e 8, abaixam-se 2 dedos da mão esquerda e 3 dedos da mão direita. Há então 5 dedos abaixados (cifra das dezenas). O número de dedos levantados é 3 para a mão esquerda e 2 para a mão direita, números cujo produto é 6 (cifra das unidades). O produto de 7 por 8 é então 56.

Para o matemático ocidental, essa técnica de multiplicação –culturalmente exótica, em que o corpo, os dedos das duas mãos, é a ferramenta semiótica essencial– exige explicação: ela reclama uma *investigação epistemológica*. Esta pode assumir a forma de um modelo algébrico muito simples, que Lucas fornece ademais explicitamente, com o seguinte comentário: "Tal é a justificativa desse belo procedimento que nós recomendamos aos "professores de primário"". Se é preciso, com efeito, multiplicar o número 5+a pelo número 5+b, com a e b inferiores a 5, teremos a dedos abaixados (e, portanto, 5-a dedos levantados) em uma mão, e b dedos abaixados

[37] (V.O. nota 28) Sobre esse tema, *cf. Chevallard et Jullien*, 1989, capítulo 6.

(e então 5-b dedos levantados) na outra. A validade do procedimento empregado será estabelecida se for possível demonstrar que, ao menos para a e b variando de 0 a 4, tem-se a igualdade:

$$(5+a)(5+b) = l0(a+b) + (5-a)(5-b).$$

Ora, verifica-se facilmente que se trata no caso de uma identidade.

Um matemático "palestino" da época, escrevendo alguma obra de distrações matemáticas, teria talvez divertido seu público ao relatar a curiosa maneira pela qual as crianças francesas fazem, em quatro anos, a multiplicação de dois números superiores a 10:

$$\begin{array}{r} 67 \\ 29 \\ \hline 603 \\ 134 \\ \hline 1943. \end{array}$$

Talvez ele também tenha procurado dar a essa estranha técnica uma sã e necessária justificativa. O contraste, entretanto, vale ser ressaltado. Tal justificativa apareceria, aos nossos olhos, como um trabalho *matemático* (como ocorria anteriormente a propósito do procedimento do cálculo digital) operado em um objeto, sendo *ele mesmo matemático* –o algoritmo "usual" da multiplicação à mão. No caso do procedimento "palestino", em contrapartida, a justificativa matemática que fornecemos parece não se distinguir, pelo efeito do exotismo ligado a uma certa distância espaço-cultural, da modelização matemática de uma ou outra prática social pouco familiar, como a geomancia, por exemplo[38]. Junte a todos aqueles já citados, o exemplo que se acaba de desenvolver nos ajudará a alcançar um problema didático fundamental, retomado um pouco mais à frente no quadro do exame das dificuldades que as perspectivas até aqui expostas erguem diante de nós: aquele do estatuto dos sistemas submetidos ao estudo, e conhecimentos dele derivados.

Problemática do programa de pesquisa

Restrições normativas e determinismo didático

As prescrições impostas por toda perspectiva curricular entram em choque, assim foi dito (Chevallard, 1989 a, p.49), com as restrições *permanentes* que prevalecem a despeito da vontade daqueles que tomam decisões. O muro espesso do *determinismo didático* ignora nossos

[38] (V.O. nota 29) Sobre a geomancia, confira, por exemplo Jaulin, 1971.

devaneios, assim como nossos desencantos; e as intenções didáticas, aparentemente as mais bem preparadas, entram em choque com ele e se despedaçam facilmente.

Portanto, antes mesmo de nos perguntarmos se uma determinada reforma é uma “boa” reforma, devemos nos certificar, na medida do possível. no estado atual de nosso conhecimento didático, que ela é simplesmente possível, e, robusta, que seja capaz de resistir às múltiplas distorções que as leis didáticas, que não se importam com nossa boa vontade, estão todas prontas para lhe infligir.

Deste ponto de vista, a perspectiva esboçada ao longo de nosso trabalho tem esse primeiro mérito, como veremos, de dar destaque a algumas restrições didáticas incontornáveis, que a ilusão da transparência, infeliz apanágio[39] das situações adquiridas, tende, nos períodos “normais”[40], a apagar de nosso campo de consciência.

Estas são, no entanto, restrições que o desenvolvimento recente, ao desestabilizar o currículo do *Colégio* por muito tempo, trouxeram à tona mais uma vez. O problema da integração didática da questão da modelização, que agora vamos considerar, os tornará ainda mais evidentes.

Adequação, idoneidade, patologias

As restrições normativas, ou *prescrições*, se identificam a classes de *condições didáticas* que estariam por ser criadas e que deveriam permitir aos alunos (ou ao menos à maioria deles) aprender a empregar de modo satisfatório o cálculo algébrico (e, de modo mais geral, a praticar a modelização algébrica) em uma variedade de áreas.

Essa intenção, e as “manobras” que ela inspira, são em si mesmas banais. As “leis” didáticas que governam a realização disso também o são. Concretizadas em um currículo localmente estabilizado, as restrições retidas seriam traduzidas pela definição de uma certa *relação institucional* com o cálculo algébrico, padrão em função do qual será avaliado, por meio de um processo complexo[41], a adequação da *relação pessoal* do aluno com o cálculo algébrico. Reconhecer-se-á aqui, expresso no quadro de uma conceitualização provavelmente não familiar[42], um fenômeno didático banal.

---

[39] NT. Apanágio ou “*apanage*” em francês, derivado do francês antigo “*apaner*”, por sua vez, derivado do baixo latim *ad panem* “dar pão”. No sistema feudal, sobretudo francês, trata-se da porção de terra do domínio real concedida, como compensação, aos irmãos ou filhos do rei excluídos da sucessão à coroa. Aqui, o sentido derivado seria o de privilégio.

[40] (V.O. nota 30) No sentido com que Kuhn pôde distinguir “ciência normal” de “crises científicas” (*cf.* Kuhn, 1983).

[41] (V.O. nota 31) *Cf.* Chevallard e Feldmann, 1986.

[42] (V.O. nota 32). Sobre as noções de relação institucional [*rapport institutionnel*] e de relação pessoal [*rapport personnel*], *cf.* Chevallard, 1989 b.

Entretanto, nenhum conjunto de condições didáticas pode ser universal a esse respeito, no sentido em que ele asseguraria, para cada aluno, a formação da relação esperada. Ainda que provavelmente de modo desigual, todo conjunto de condições didáticas deixa a porta aberta para o surgimento de *patologias* determinadas da relação com o saber. Sobretudo por meio de estudos experimentais e clínicos conduzidos há muitos anos, a didática da matemática pode hoje fornecer preciosas pistas em um campo no qual aqueles que tomam as decisões e opinião pública em total conjunto recobrem ainda com uma etiqueta simultaneamente global, pudica e dramatizante de "fracasso matemático", ou mesmo, ainda mais frequentemente, de "fracasso escolar"[43]. Como se falássemos, em matéria de saúde pública, da "doença", entidade única e indiferenciada que se trataria de erradicar sem outra solução!

Resumiremos com mais prudência, mas de modo ainda mais global, certas conclusões geradas pela pesquisa, ao dizer que as distorções provocadas no jogo (erroneamente julgado) livre e soberano das *condições* didáticas (que pretendemos criar por *restrições didáticas permanentes*) criam no aluno uma relação pessoal com o saber ensinado que apresenta determinadas patologias, ou, no mínimo, certas particularidades, que a torna pouco idônea[44]: assim se viu, no mais das vezes, na segunda parte desse estudo, a respeito do cálculo algébrico.

Reencontra-se então os efeitos da solidariedade orgânica entre os elementos que normalmente são postos separadamente para a boa administração das coisas do ensino, solidariedade que, em última instância, justifica as expressões de *sistema* didático e de sistema de ensino que muitas vezes foram utilizadas.

Essa solidariedade "sistêmica" pode ser expressa, de modo um pouco pessimista, ao dizer que *toda "solução" é ela mesma geradora de problemas*[45].

A ruptura da autonomia relativa do algébrico

Em relação à situação passada e atual, o remanejamento que visamos aqui encontra uma dificuldade evidente. Por princípio, ele conduz, mesmo que localmente, à ruptura da *autonomia relativa* do algébrico, e, por consequência, de cada um dos campos de emprego que se tentará oferecer ao cálculo algébrico –tanto numérico quanto geométrico– por exemplo. Visando estabelecer relações *intersetoriais* orgânicas, ele ameaça a diferença interna, em diferentes *setores*, do *corpus* ensinado[46], violando assim uma lei didática pela qual será necessário, de

---

[43](V.O. nota 33). *Cf.* Chevallard, 1988 a.
[44] (V.O. nota 34). Sobre a noção de "*idoneidade"*, *cf.* Chevallard, 1989 a e b.
[45] (V.O. nota 35) Para um exemplo da análise nessa linha de pensamento, remetemos o leitor ao anexo 1 ("Empirismo, Solução e Problemas") Chevallard, 1989 a.
[46] (V.O. nota 36) Sobre esse tema, *cf.* Chevallard, 1985 b.

algum modo, pagar-lhe o que lhe é devido –a menos que a carga didática e cognitiva da relação didática imposta aos atores, professores e alunos, cresça de forma irrealista.

Tal evolução gera uma abertura, de modo geral, para um universo de problemas didáticos sobre os quais, ainda hoje avançamos pouco, e que se pode resumir assim: quais são as *condições de possibilidade*, e os limites, de um ensino e de uma aprendizagem *funcionais* do cálculo algébrico? Em particular, ela chama a atenção para as condições de geração da relação do aluno com as *escritas simbólicas* (e não somente com o cálculo algébrico) enquanto *ferramentas de conceitualização e de resolução de problemas*. Esta última linha de pesquisa nos leva a inserir a questão das escritas algébricas em uma perspectiva de *longa duração*, no que concerne à construção de *códigos* e manipulação *formalmente válida* e *funcionalmente pertinente* dos códigos assim criados: partindo da escola maternal com as primeiras codificações gráficas[47], passando pela escola primária com as escritas numéricas[48], ela se cristaliza, no *Colégio*, em torno do código algébrico, e prossegue para além pela implementação funcional do cálculo algébrico.

Essa perspectiva, unitária e progressiva, que reencontra um problema comum em diversos avatares sucessivos, é, entretanto, insuficiente se quisermos resolver o problema didático da autonomia relativa interna do corpus ensinado. O objetivo geral visado deve se articular com o reconhecimento da diferenciação dos alvos –assim como a análise das diferenças entre linguagem aritmética e código algébrico nos mostrou (Chevallard, 1989a, pp.63-64).

Aplicações e modelização

Não é por acaso, com efeito, que o *corpus* ensinado se apresenta fragmentado em vários setores com a articulação sempre incerta. A fórmula usual de tal articulação, como se sabe, é aquela da aplicação: aplicação de um setor (ferramenta) em outro (objeto). É então necessário medir, do ponto de vista que nos interessa aqui, a distância que separa essa noção tradicional de aplicação daquela de modelização.

Na primeira fórmula, as interrelações entre dois setores são diretamente, explicitamente controladas em direção como em conteúdo. Se interpretarmos isso em termos de modelização, diremos que o setor aplicado, S, fornece um repertório predefinido de *ferramentas de modelização* que permitirão a produção, em relação a certos sistemas do setor de *aplicação*, S', de certos conhecimentos: aqueles, muito precisamente, que podem ser produzidos com o auxílio

[47] (V.O. nota 37) *Cf.* Pérès, 1984.
[48] (V.O. nota 38) *Cf.*, por exemplo Schubauer-Leoni, 1986.

do conjunto predeterminado de ferramentas que oferece S (postos em prática de acordo com um repertório de gestos técnicos também fixado) e *apenas com o auxílio dessas ferramentas*. Assim, o que importa é menos o conhecimento do tipo de sistemas estudado do que a *capacidade* das ferramentas consideradas para *produzir conhecimentos* relativos a esses tipos de sistemas.

No processo de modelização, pelo contrário, *o sistema e seu estudo são primeiros*. As ferramentas reencontram sua função de meios ao serviço de um fim, o conhecimento do sistema. A experiência mais simples pode convencer que não existe, *a priori*, garantia de que o repertório de ferramentas –necessárias (ou desejáveis) para conduzir corretamente o estudo do sistema– estará realmente disponível ao nível do currículo. Passa-se assim da *bricolagem*– definida como a reutilização dos meios disponíveis, cuja disponibilidade em um dado momento está ligada à história autônoma do processo de produção dessas ferramentas na aula– para uma atividade de *engenharia*, na qual a procura pelas ferramentas pertinentes e o esforço em disponibilizá-los para si, ambos se impõem. Correlativamente, se passa de uma ferramenta fechada e predefinida para uma ferramenta aberta e indefinida.

Esta abertura, consubstancialmente ligada à atividade de modelização, foi constatada em quase cada um dos exemplos com os quais ilustramos nosso propósito até aqui. Ela é o ponto de partida de uma série de problemas didáticos não resolvidos globalmente (com a restrição de conservar a exigência de modelização) e dar destaque, *ao contrário*, à robustez da solução tradicional em termos de aplicação.

A direção da pesquisa que surgiu, desta forma, tão naturalmente, é a seguinte: em cada ponto do currículo, convém fazer com que a ferramenta dominante –cujo aprendizado é visado (o cálculo algébrico aqui) – seja copresente com as ferramentas, cuja disponibilidade é necessária para conduzir corretamente um estudo significativo. Trata-se de colocar nele um problema de *ecologia didática dos objetos de saber* que se revelam de extrema dificuldade.

O estatuto dos sistemas estudados e de seu estudo

Qualquer que seja a atividade proposta pelo professor, é necessário que seja dado um *estatuto didático* aos objetos dessa atividade. Ao colocar em primeiro plano o *sistema* estudado, a abordagem que modeliza coloca instantaneamente o problema do estatuto acordado ao *sistema*, e aos *conhecimentos* que sua modelização produzirá. Ele é um objeto de saber ensinado? Os conhecimentos produzidos são “a saber”? Ou, em outros termos, o ensinado deve, ao fim do estudo, conhecer o sistema estudado como, por exemplo, o engenheiro deve conhecer os sistemas dos quais ele assegura a conservação?

Se reexaminarmos a atividade matemática-escolar tradicional na perspectiva da modelização, vê-se imediatamente que, nesse quadro, a resposta às questões precedentes é geralmente negativa. Os sistemas que estão por serem conhecidos, os conhecimentos a respeito dos sistemas são, de fato, muito firmemente designados pela tradição. Assim que for demonstrado, *a título de exercício*, que três inteiros consecutivos a, b, c verificam a relação $b^2 - ac = 1$, *o aluno poderá esquecer esse resultado*. De modo similar, do estudo dos sistemas "retângulos" (Chevallard, 1989 a, p. 59), ele deverá reter a fórmula S = ad, provavelmente não a fórmula x = Stan(u). De modo mais geral, o contrato didático governa essa repartição da maneira mais clara, por meio do processo de topogênese[49]. Um conhecimento produzido *nos exercícios,* isto é, em princípio, pelos *alunos* não é suposto "a saber"; um conhecimento produzido *no curso*, ou seja, em princípio, *pelo professor*, será considerado "a saber".

O mecanismo pelo qual, no tratamento didático usual, os sistemas estudados se encontram, de algum modo, *colocados entre parênteses*, pode ser mais precisamente descrito. Inicialmente, há realmente um sistema a ser estudado e o estudo assume, de modo bastante corrente, a forma concreta de *questões* que são colocadas a seu propósito. Trazer uma *resposta* às questões propostas significa, na linguagem utilizada aqui, produzir conhecimentos relativos ao sistema. Mas, noutra linguagem, mais familiar, apresentar uma questão é propor um problema, e fornecer uma resposta à questão apresentada é dar uma *solução* ao problema proposto.

Os problemas nascem assim no estudo de sistemas. Eles constituem o meio pelo qual passamos da *intenção do estudo* à *produção de conhecimentos*. Desde então*, a colocada entre parênteses do sistema* sobre o qual falávamos aparece correlativa *ao destaque dado aos problemas* que aparecem no estudo do sistema. Ou seja, ele se realiza pelo destaque dado à *resolução* de problemas (relativos ao sistema estudado); pela primazia concedida ao fato de vencer uma dificuldade, ou seja, *resolver o problema* em relação aos resultados que essa resolução permite estabelecer. Por conseguinte, no quadro didático-escolar usual, mais problemas são resolvidos *do que sistemas estudados*. Assim, *o problema serve como muro entre o sistema e o conhecimento do sistema.*

Deve-se sublinhar aqui que esse fenômeno é *propriamente didático*, naquilo em que ele está ligado, muito precisamente, ao problema do estatuto didático dos sistemas estudados e dos conhecimentos produzidos para o qual ele fornece uma solução. De modo realmente muito

[49] (V.O. nota 39) Sobre essa noção, *cf.* Chevallard, 1985 b.

esclarecedor, vê-se ser invertida a relação de dominância entre sistemas e conhecimentos dos sistemas, de um lado, e problemas, de outro lado, se, em lugar de considerar a categoria dos *exercícios,* dirigimos nosso olhar para a aula. Ou, para dizê-lo de maneira independente de uma ou outra estrutura didática em particular, quando se passa do "papel" do aprendiz ao "papel" do professor.

Neste último caso, de acordo com uma mudança estatutária já assinalada, o *procedimento de produção* de conhecimento, que o aluno pode esquecer, conta menos do que *os conhecimentos produzidos,* que ele terá que fazer seu. Portanto, os "exercícios" não produzirão novos conhecimentos a serem institucionalizados, mas atestarão a capacidade do aluno de manipular os conhecimentos produzidos e institucionalizados pelo *professor*.

Uma organização didática patógena

Ao legitimar a proscrição dos sistemas estudados somente em proveito da resolução dos problemas que sua análise fornece a ocasião de suscitar, o contrato didático usual engendra uma espécie determinada de patologia. Um problema de matemática transforma-se em uma série de dificuldades a serem vencidas; o sistema subadjacente é esquecido a tal ponto, que a organização das diferentes questões que são colocadas sobre esse assunto, suas interrelações e as dependências entre as vias e os meios da resolução tendem a ser apagadas. Por consequência, a relação do aluno com esse objeto didático particular –que é um problema, no sentido escolar do termo– toma uma estrutura extremamente singular. Uma vez respondida a primeira pergunta, ou seja, uma vez superada a primeira dificuldade, será fácil esquecer o resultado estabelecido e as técnicas utilizadas para resolver a questão, e os conhecimentos auxiliares, que surgiram durante a solução da pergunta, relativos ao sistema que as seguintes questões posteriores do problema continuarão, no entanto, a ser estudadas.

A situação da resolução de problema é assim o lugar de uma intensa amnésia didática. Um problema está "por ser feito", não "por aprender", distinção que predefine uma relação particular com a atividade de resolução de problemas. O slogan, hoje tão bem recebido, segundo o qual "aprende-se matemática resolvendo problemas", tem uma significação ambígua para isso.

Os didatas, seguindo Guy Brousseau, falam da devolução do problema que os alunos deverão resolver: o problema proposto pelo professor deve tornar-se problema *para o aluno*. Parece-nos, entretanto, que essa noção deve ser analisada à luz das observações que precedem. O segundo problema, lógica e cronologicamente em relação ao sistema do qual ele permitirá, por meio de sua resolução, aumentar nosso conhecimento, só pode ser designado com base na devolução primária do sistema que pretendemos estudar.[50]. De modo mais ampliado, tomando aqui a palavra problema em seu sentido escolar usual[51], proporemos, para essa amnésia, *o estudo do problema*, por oposição à sua única "resolução": estudo –que o enunciado do problema organiza e conduz– do sistema subadjacente, por certo; o estudo, também, desses sistemas que são os modelos sucessivos que esse estudo mesmo engendra; estudo, enfim, de segundo grau, se assim o quisermos chamar, das técnicas do trabalho desses modelos, ou seja, do modo pelo qual são gerados.

Nessa perspectiva, o problema se vê conferido o estatuto de um *campo de aprendizado matemático* –mesmo que os conhecimentos que sejam nele produzidos não sejam o objeto, enquanto tal, de uma institucionalização nas formas dominantes do "curso".

Resolução de problemas" e "atividades

No ensino tradicional, a "colocada entre parênteses" do sistema subadjacente a um problema dado é possibilitada pelo fato segundo o qual os sistemas, assim (potencialmente) estudados, pertencem *a classes padrão de sistemas*. Assim ocorre com as configurações geométricas, em que os triângulos retângulos sucedem aos retângulos etc. A familiarização adquirida é então uma condição de possibilidade essencial do problema de dominância dos problemas. Ora, essa condição deixa de ser realizada quando –segundo as visões aqui desenvolvidas, e, de modo mais geral, segundo uma evolução que toca o currículo de muitos países– tende-se a interessar-se por sistemas "*não standard*" –assim como ocorre no caso das "atividades" que a reforma dos programas que acabam de terminar teria tentado promover.

O problema didático geral da atribuição de um *estatuto* para os sistemas estudados toma então uma forma concreta imediatamente sensível. Na medida em que os conhecimentos produzidos não são institucionalizados como saber ensinado, o tempo do estudo aparece como o tempo do relógio que permanece *fora do tempo didático*[52], em outras palavras, como tempo cronológico *não didaticamente produtivo*. O professor e os alunos "perdem tempo", qualquer que seja a massa de conhecimentos manipulados ou produzidos no curso do estudo. Manifestação cruel e, poder-se-á pensar, absurda, mas bastante real no caso, dessas restrições

---

[50] (V.O. nota 40) A coisa é aparente a partir do momento em que o plano da realidade do sistema e aquele do modelo se distanciam um do outro. Ela é ainda mais nítida quando o sistema é, por exemplo, uma configuração geométrica; ela se torna evidente quando se trata de um sistema físico –que aparecerá suficiente, então, para apresentar concretamente aos alunos antes e a fim de iniciar o estudo desse sistema.
[51] (V.O. nota 41) Sobre a análise dessa noção, remetemos a Chevallard, 1989 c.
[52] (V.O. nota 42) Sobre a noção de tempo didático, *cf.* Chevallard, 1985 b.

didáticas das quais se falava mais acima: restrições que o fervor reformador não saberia, com suas próprias forças, anular!

Esse problema didático é antigo: ele aparece quando é imposta, historicamente, a tirania fecunda do tempo didático “moderno”[53]. A “solução” à qual nos detivemos durante esses últimos anos está indicada pela palavra *atividade*. Formalmente, o princípio dela é simples. Mais do que resolvê-la, trata-se sempre de contornar, de evitar o problema didático que coloca a necessária presença, no campo didático, dos sistemas cujo estudo fornecerá o campo do aprendizado.

A solução “tradicional” -que herdamos- é utilizar apenas sistemas “clássicos”, que supostamente já *estão naturalizados* pelo ensino fornecido, e que o problema que colocamos a propósito deles vem oportunamente fazer esquecer. Essa naturalização, entretanto, mal pode concernir aos sistemas (tidos por) *intramatemáticos*, que advêm, por exemplo, do numérico ou do geométrico. No entanto, no ensino clássico, ao qual a reforma da matemática moderna colocou fim, o ensino da matemática supunha a exploração didática de sistemas claramente extramatemáticos, dos quais era preciso, por conseguinte, que os alunos tivessem algum conhecimento[54]. Não podendo ser naturalizados, tais tipos de sistema eram então transformados em sistemas padrões, vistos como clássicos, enquanto “suportes” de problemas (eles mesmos clássicos): assim falava-se de “problemas de comerciantes de vinho”, de “problemas de ações combinadas”, de “problemas de misturas” ou de “problemas de ligas” – modo de proceder cujas expressões de “problemas de torneira” ou “de trens que se cruzam” foram tornadas culturalmente emblemáticas.

A solução contemporânea recente, à qual a palavra atividade serve de emblema, conduz ao extremo essa solução clássica, e, em certo sentido, a desnatura. Falar-se-á então de “problemas”, pura e simplesmente; de “resolução de problemas”, sem outra precisão; de “atividade de resolução de problemas”, de modo mais cabal; e, por um atalho epistemologicamente ambíguo e didaticamente arriscado, de “atividade”, simplesmente. A significação didática do tempo despendido com o estudo de um sistema necessariamente determinado seria então, genericamente, que “resolvemos nela um problema”, ou mesmo,

[53] (V.O. nota 43) *Cf.* Chevallard e Mercier, 1987.

[54] (V.O. nota 44) Para compreender corretamente o problema didático que se apresenta aqui, pode-se refletir no exemplo seguinte: se em um curso elementar de teoria das probabilidades (ou de combinatória), quisermos propor problemas que tratem do jogo de *bridge* ou do jogo de *xadrez*, convém que certos conhecimentos relativos a esses jogos estejam disponíveis; ora, o conhecimento desses jogos não é visto como advindos intrinsecamente da matemática, e será conveniente então associar esses jogos (esses “sistemas”), de certa maneira, ao ensino prescrito.

apenas que teríamos desenvolvido uma "atividade" – que poderia, no restante, não ser uma "resolução de problemas".

Assim, a instituição de ensino inicia um falatório *abstrato*, que substitui o jargão colorido de outrora. A estabilidade de tal modificação trazida para o contrato didático não é natural. Ela supõe, com efeito, que "resolução de problemas" e "atividades" sejam tratados *iguais a um objeto do saber*, único tipo de objeto com o qual se pode atar um contrato de ensino e de aprendizado. O desafio aqui é dar crédito a essa ficção segundo a qual "resolver problemas" nada mais é do que apropriar-se de um objeto de um determinado saber –a "resolução de problemas", ou, como se diz em inglês, o *problem solving*.

Nesse contexto, a tentativa mais ambiciosa, ainda que situada às margens do sistema de ensino, é constituída pela obra pioneira de George Polya: *How to Solvev It*, data de 1945[55]. Tal ambição repousa na hipótese metateórica segundo a qual existiria um corpo de conhecimentos muito bem definido, chamado de *heurística* por Polya, do qual o domínio permitiria, em termos de performance, "resolver problemas", *sem que sejam esclarecidos quais tipos de problemas, relativos a quais tipos de sistema, estão em jogo.*

Não entraremos aqui no detalhe da crítica dessa tentação unitarista, contra a qual muitos argumentos poder ser invocados[56]. Sublinharemos somente que, caso existisse um conjunto com valor universal de princípios de resolução de "problemas", não se trataria menos de fazer vivenciar em aula, e de integrar ao currículo, tanto o sistema-suporte do problema a ser revolvido, quanto o problema que o estudo do sistema evidencia.

Ora, face a esta incontornável exigência, o movimento favorável ao *problem solving* sofre a tentação de esquecer o *sistema* ao hipostasiar o *problema*, de dar destaque à *resolução* do problema ao omitir a *devolução* do problema, fosse ela, como ocorre frequentemente na atividade de pesquisa, *auto*-devolução do problema. Tentativa *a priori* arriscada de resolver um problema didático do qual ela simplifica abusivamente o enunciado, a via aberta pelas pesquisas sobre o *problem solving* passa, assim, longe das dificuldades que queremos sublinhar aqui.

Organização do saber e campos do conhecimento

A lei didática de autonomização interna do *corpus* ensinado, já mencionada, implica certa *organização* do saber, e destina ao fracasso as tentativas de tratamento que querem manter-se "indiferentes ao contexto"[57]. O *corpus* matemático ensinado se apresenta sempre

[55] (V.O. nota 45) *Cf.* Polya, 1965.
[56] (V.O. nota 46) Contentaremo-nos em remeter a Schoenfeld, 1985 (capítulo 3, especialmente), e a Schoenfeld, 1987.
[57] (V.O. nota 47) *Cf.* Niss, 1987, p.493.

mais ou menos estruturado. O estado presente do sistema de ensino o faz aparecer, nessa perspectiva, menos estruturado; situação que descrevemos como o efeito durável, e ainda não reduzido, de uma estabilização do currículo inaugurada pela reforma das matemáticas modernas (Chevallard, 1989 a, pp. 45-46). Mas parece possível estabelecer uma hierarquia dos níveis de organização que, ao mesmo tempo, fornecem à análise didática um esquema descritivo amplo e dota a engenharia curricular com um quadro diretor realista.

Distinguir-se-á, em primeiro lugar, a organização *global* do *corpus*, que divide este em diferentes *setores*. É aquela que, na vasta agitação da reforma da matemática moderna, é inicialmente remanejada; mesmo os títulos das rubricas que compunham os programas são alterados (Chevallard, 1985 a). No nível imediatamente inferior, as organizações regionais se encontram, nas quais aparecem, com formar definidas, relações intersetoriais, sobre as quais dissemos mais acima que elas não devem, por razões de economia didática, tornarem-se demasiadamente complexas. No nível imediatamente inferior estão as organizações regionais, em que as relações intersetoriais aparecem em formas definidas, o que dissemos anteriormente não deveria, por razões de economia didática, tornar-se muito complexo. Finalmente, há o nível das organizações locais, cujo papel estruturante foi enfatizado por Hans Freudenthal [58].

É neste último nível que chegamos ao problema que nos ocupa aqui. Uma organização local, lembremo-nos, dá forma ao saber institucionalmente reconhecido como "a ensinar" e "a aprender". Ora, o tratamento didático do saber ensinado *supõe mais do que o saber ensinado*. Faz apelo, como foi mostrado, aos *tipos de sistemas*, que nunca foram do saber ensinado ou que deixaram de sê-lo, sobre quais *tipos de problemas* serão tratados, e faz apelo ainda a essas classes de sistemas (intramatemáticos) cuja manipulação pertinente permitirá a resolução dos problemas propostos.

Surge assim, no cruzamento entre um tipo de sistema e um tipo de problema, o que nomearemos um *campo de conhecimentos* –conhecimentos dos quais uma grande parte presente em sala de aula *a título de meio de atividade da classe*– necessário, por conseguinte, *ao exercício da função de aluno*, nunca será institucionalizado como saber.

O reconhecimento desse estado de fato pode ser resumido pela expressão "currículo escondido", *hidden curriculum*, conjunto das condições e restrições que entram na definição do currículo, mas que nunca são explicitadas pelos textos que administram oficialmente o sistema de ensino. É, portanto, neste espaço curricular, estruturado pela organização tripla –global, regional, local– do *corpus* ensinado, quadro de atividade no qual emergem os campos de

[58] (V.O. nota 48) *Cf.* Freudenthal, 1971.

conhecimentos, que o funcionamento didático supõe e gera, que deve ser proposto o problema fundamental dos usos do cálculo algébrico no Colégio.

Contrato didático e cultura matemático-escolar

Fazer um novo conceito funcionar em uma instituição nunca é apenas uma questão de propaganda, doutrinação ou aprendizagem "'pura". Pode ser uma moda por um tempo –apenas por um tempo– mas sua sustentabilidade requer uma mudança mais profunda.

Assim acontece com o conceito de modelização. Sua inclusão institucional na escola não pode ser satisfeita com uma revolução na mente das pessoas, uma mudança de mentalidade. Ou melhor, qualquer mudança de mentalidade está correlacionada com uma mudança na cultura da instituição, que é, inseparavelmente, uma mudança na cultura material da instituição.

Tal mudança se articula então, inevitavelmente, na emergência de dispositivos concretos inéditos, em torno dos quais vêm atarem-se contratos didáticos renovados. Não basta mostrar que a atividade matemático-escolar está suscetível a uma leitura diferente, e, ainda, sugerir que essa leitura carregue consigo uma potência de transformação da qual ela pretende ser leitura. Ainda é preciso que essa outra maneira de ler seja constantemente reativada, no próprio cerne da instituição, e que, a partir de um abrigo no qual ela apareça como a única culturalmente possível, ela irradie, de algum modo por contiguidade, para as partes nas quais ela é menos suscetível de ser espontaneamente recebida.

Dissemos mais acima que a noção comum de modelização –a partir da qual, por continuidade e ruptura, pode ser estabelecido o conceito de modelização– era chamada pelo estudo desses sistemas dos quais o conhecimento não é reivindicado por nenhum saber estabelecido. Assim, a hipótese de trabalho que retém o programa de pesquisa aqui esboçado é que o conceito de modelização, para criar raiz na escola, deve ser concretizado no estudo de tais sistemas, que não advêm claramente, no percurso de suas histórias, de nenhuma das disciplinas ensinadas. Pôr à prova tal hipótese supõe, portanto, um lugar específico, sendo esse o abrigo do qual já falamos. É em tal lugar que a equipe "Modelização algébrica" do IREM de Aix-Marseille deu o nome provisório *Atelier MSE*, ou *Atelier de modelisation mathématique de systèmes extramathématiques* [Oficina de modelização matemática de sistemas extramatemáticos]. E é em torno deste lugar que ela conduz atualmente pesquisas cuja série de três artigos que termina aqui tentou apresentar a problemática geral[59].

Conclusão

[59] (V.O. nota 49) Cf. Chevallard, 1989 d.

A análise didática das perspectivas curriculares que esboçamos revela problemas de didática da matemática que sublinham a necessidade de vínculos muito estreitos, de uma dialética tenaz, que deveria ser a preocupação de todos, entre a pesquisa fundamental em didática e as atividades de desenvolvimento do sistema de ensino.

Por contraste, a situação atual deixa transparecer a grande superficialidade da qual a tradição, de inspiração empírica e dogmática, nos fez infelizes herdeiros. Não basta debilitar, decidir e agir para resolver os problemas com os quais estamos e continuamos a nos confrontar. Como em outros campos, a pesquisa não é mais hoje essa parte de sonho em que sociedades com alto crescimento poderiam oferecer-se como bônus. Cabe a ela explorar, em nome de todos, as vias do possível.

Referências

Artin E. (1972), Algèbre géométrique, Gauthier-Villars, Paris.

Badiou A. (1968), Le concept de modèle, François Maspéro, Paris.

Balibar E. et Macherey P. (1985), "Fonnalisme et fonnalisation", Encyclopaedia Universalis, vol. 7, Paris, pp.1183-1186.

Berrondo M. (1979), Les jeux mathématiques d'Eurêka, Dunod, Paris.

Chevallard Y. (1985a), "Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique", Petit x, 5, pp.5194.

Chevallard Y. (1985b), La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné, La Pensée sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1986), "Les programmes et la transposition didactique - Illusions, contraintes et possibles", Bulletin de l'APMEP, 352 (février 1986), pp.32-50.

Chevallard Y. (1988a), Notes sur la question de l'échec scolaire, Publications de l'IREM d'AixMarseille, nO 13, Marseille.

Chevallard Y. (1988b), "Implicit Mathematics: Ils Impact on Societal Needs and Demands", in John Malone, Hugh Burkhardt et Christine Keitel (eds), The Mathematics Curriculum: Towards the Year 2000, Curtin University of Technology, Perth (Australie), 1989, pp.49-57.

Chevallard Y. (1989a), "Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation", Petit x, 19, pp.43-75.

Chevallard Y. (1989b), Le concept de rapport au savoir -Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, intervention au Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique (Université Joseph-Fourier - Grenoble l, 26 juin 1989), année 1988-1989, LSD-lMAG et Institut Fourier, Grenoble, pp.211-235.

Chevallard Y. (1989c), Activités de modélisation mathématique en classe de seconde, rapport intennédiaire de l'équipe «Modélisation algébrique» de l'IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard Y. (1989d), Arithmétique, algèbre, modélisation -Etapes d'une recherche, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, nO 16, Marseille.

Chevallard Y. et Feldmann S. (1986), Pour une analyse didactique de l'évaluation, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, nO 3, Marseille.

Chevallard Y. et Mercier A. (1987), Sur la formation historique du temps didactique, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n08, Marseille. [p.38]

Chevallard Y. et Jullien M. (1989), Sur l'enseignement des fractions au Collège - Ingénierie, recherche, société, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, no 15, Marseille.

Dhombres J. (1978), Nombre, mesure et continu: épistémologie et histoire, Cedic/Nathan, Paris.

Dunn S.C. (1981), "Parking a Car", in DJ.G. James et J.J. McDonalds (eds), Case Studies in' Mathematical Modelling, Stanley Thornes, Cheltenham, pp.ll0-123.

Freudenthal H. (1971), "Geometry Between the Devil and the Deep Sea", Educational Studies in Mathematics, 3, ppA13-435.

Freudenthal H. (1973), Mathematics as an Educational Task, D. Reidel, Dordrecht.

Greenberg M.J. (1974), Euclidean and Non-Euclidean Geometry, W.H. Freeman, San Francisco.

Halmos P.R. (1967), Introduction à la théorie des ensembles, Gauthier-Villars, Paris, et Mouton, Paris - La Haye, deuxième édition 1970.

Hilbert D. (1971), Les fondements de la géométrie, édition critique préparée par Paul Rossier et publiée avec le concours du CNRS, Dunod, Paris, 1971.

Jaulin R. (1971), "Analyse formelle de la géomancie", in P. Richard et R. Jaulin (eds), Anthropologie et calcul, Union générale d'éditions, Paris, pp.183-215.

Kuhn T.S. (1983), La structure des révolutions scientifiques, Flammarion, Paris.

Lebesgue H. (1932), La mesure des grandeurs, Albert Blanchard, Paris, 1975.

Lucas E. (1892), Récréations mathématiques, vol. III, Albert Blanchart, Paris, 1960.

Mendelson E. (1964), Introduction to Mathematical Logic, D. Van Nostrand, Princeton.

Niss M. (1987), "Applications and Modelling in the Mathematics Curriculum - State and Trends", Int. J. Math. Educ. Sci. Techn., 18, 4, ppA87-505.

Ore O. (1967), Invitation to Number Theory. The Mathematical Association of America, Yale University.

Pérès J. (1984), Utilisation d'une théorie des situations didactiques en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'une activité d'apprentissage scolaire - Construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle, Université de Bordeaux l, IREM de Bordeaux.

Polya G. (1965), Comment poser et résoudre un problème, deuxième édition, Dunod, Paris.

POllS R.B. (1986), "Discrete Mathematics", in M. Carss (éd.), Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematics Education, Birkhaüser, Boston, pp.31-47.

Schoenfeld A.H. (1985), Mathematical Problem Solving, Academic Press, Orlando.

Schoenfeld A.H. (1987), "Polya, Problem Soving, and Education", Mathematics Magazine, 60, 5 (décembre 1987), pp.283-291. .

Schubauer-Leoni ML. (1986), Le contrat didactique dans l'élaboration d'écritures symboliques par des élèves de 8 - 9 ans, Interactions didactiques, no 7, Universités de Genève et de Neuchâtel.

Smith D.E. (1925), History of Mathematics. vol. II, Dover, New York, 1958.

Vergnaud G. (1981),L'enfant.la mathématique et la réalité, Peter Lang, Berne.