ISSN 1983-3156
Qualis A1

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i1p008-058

Modelo praxeológico alternativo para a identificação de números primos

Alternative praxeological model for the identification of primary numbers

Modelo praxeológico alternativo para la identificación de números primarios

Modèle praxéologique alternatif pour l'identification des nombres primaires

Gladys Maria Bezerra de Souza[1]
Universidade Federal de Roraima (UFRR)
Doutorado em Educação em Ciências e Matemática
https://orcid.org/0000-0001-9183-7014

João de Ribamar Silva[2]
Universidade Estadual de Roraima (UERR)
Mestrado em Física

José Messildo Viana Nunes[3]
Universidade Federal do Pará
Doutor em Educação Matemática

https://orcid.org/0000-0001-9492-4914

Resumo

Este artigo tem por objetivo apresentar um modelo praxeológico alternativo para identificação dos números primos em um intervalo qualquer de números. O estudo fundamenta-se na Teoria Antropológica do Didático (TAD). O modelo alternativo refere-se à criação de duas fórmulas que, combinadas, são geradoras de números primos em qualquer intervalo de número. Tais fórmulas foram construídas a partir de modelos de referência da álgebra básica e de conceitos da teoria dos números. Prospecta-se que o modelo construído seja aplicado nas escolas de educação básica e nos cursos de licenciatura que lidam com matemática, em variados níveis.

Palavras-chave: Números primos, Fórmulas geradoras de primos, Educação matemática, Teoria antropológica do didático.

---

[1] gladys.souza@ufrr.br
[2] *In memoriam*
[3] messildo@ufpa.br

Abstract

This article aims to present an Alternative Praxeological Model for the Identification of Prime Numbers in any given range of numbers. The study carried out is based on the Anthropological Didactics Theory. The alternative model refers to the creation of two formulas that when combined generate prime numbers in any range of numbers, built from Basic Algebra reference models and from the concepts of Number Theory. It is expected that the model built will be applied in schools of basic education and in undergraduate courses that deal with Mathematics at various levels.

Keywords: Prime numbers, Prime generating formulas, Mathematics education, Anthropological didactic theory.

Resumen

Este artículo tiene como objetivo presentar un Modelo Praxeológico Alternativo para la Identificación de Números Primos en cualquier rango de números. El estudio realizado se basa en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El modelo alternativo se refiere a la creación de dos fórmulas que combinadas generan números primos en cualquier rango de números, construidas a partir de modelos de referencia del álgebra básica y conceptos de la teoría de números. Se espera que el modelo construido sea aplicado en las escuelas de educación básica y en los cursos de pregrado que traten Matemáticas en varios niveles.

Palabras-clave: Números primos, Fórmulas generadoras de primos, Educación Matemática, Teoría antropológica de lo didáctico.

Résumé

Cet article vise à présenter un modèle praxéologique alternatif pour l'identification des nombres premiers dans n'importe quelle plage de nombres. L'étude menée est basée sur la Théorie Anthropologique du Didactique. Le modèle alternatif fait référence à la création de deux formules qui, combinées, génèrent des nombres premiers dans n'importe quelle plage de nombres, construits à partir de modèles de référence de l'algèbre de base et de concepts de la théorie des nombres. Il est prévu que le modèle construit sera appliqué dans les écoles d'enseignement de base et dans les cours de premier cycle traitant des mathématiques à différents niveaux.

Mots-clés: Nombres premiers, Formules génératrices de nombres premiers, Enseignement des mathématiques, Théorie didactique anthropologique.

Modelo praxeológico alternativo para identificação de números primos

Este artigo tem como tema principal os números primos, que são tratados com mais ênfase no 6º ano do Ensino Fundamental, no estudo dos números naturais, e são aplicados, a partir daí, nos processos de fatoração e de decomposição em números primos.

Apesar de sua importância, os números primos não se apresentam como um objeto específico de estudo nas disciplinas de matemática. Eles fazem parte do estudo inicial dos números naturais: divisibilidade e vêm junto com o estudo de múltiplos e divisores. Posteriormente, no ensino superior, seu estudo está inserido na disciplina teoria dos números, na licenciatura em matemática e no bacharelado em matemática.

No ensino fundamental, inicia-se o estudo dos números primos, no 5º ano, em algumas escolas, dando sequência, no 6º ano, com os números naturais. No entanto, os alunos estudam apenas os números primos entre 1 e 100, e, por vezes, no intervalo entre 1 e 50. Assim, aos alunos do 6º ano, não é dada a oportunidade de conhecer números primos maiores, como os de três dígitos. Trata-se de uma condição restritiva imposta pelo método conhecido como Crivo de Eratóstenes (276 – 194 a.C.). Referimo-nos ao método mais difundido, em livros didáticos do ensino fundamental, para identificação de primos.

Apesar de a disciplina teoria dos números constar na grade curricular dos cursos de licenciatura em matemática, há grande dificuldade, por parte dos estudantes, em estudar os números primos, e, mais particularmente, em fazer relações desse estudo com a escola básica (Oliveira & Fonseca, 2017).

Conforme Oliveira e Fonseca (2017), a teoria dos números oferece uma formalização algébrica consistente para a aritmética dos números inteiros. Significativamente, os futuros professores que se interessam pelo assunto percebem nela a essência da matemática.

Fonseca (2015, p. 58) enfatiza que

> Tópicos da teoria dos números, tais como fatoração, divisores, múltiplos, e congruências fornecem meios para desenvolver e solidificar o pensamento matemático, para o desenvolvimento de uma apreciação enriquecida da estrutura numérica, especialmente no que diz respeito à identificação e reconhecimento de padrões, bem como para formular e testar conjecturas, para fomentar o entendimento dos princípios e respectivas provas, permitindo justificar a verdade de teoremas de formas disciplinada e fundamentada.

Zazkis e Campbell (1996, 2006) e Zazkis e Liljedahl (2004) anunciaram a necessidade de estabelecer um lugar próprio, nas pesquisas em educação matemática, para a teoria dos números. Nesse sentido, Zazkis e Campbell (2006) destacam que a teoria dos números, apesar de representar a essência da matemática, não tem recebido a devida atenção nas pesquisas educacionais, pois são evidenciados apenas estudos pontuais.

Nesse sentido, imergimos nessa temática, a fim de propor uma ampliação do estudo dos números primos, a partir da apresentação de um Modelo Praxeológico Alternativo (MPA) para identificação dos números primos em um intervalo qualquer de números. Nessa proposição de modelo, buscamos agregar mais um método para uso na escola básica, para além do já conhecido Crivo de Eratóstenes.

Estudo bibliográfico

A fim de traçar um panorama que permita diferenciar nossa proposta de outras já desenvolvidas, no Brasil, realizamos um estudo no Catálogo de Teses e Dissertação (CTD) da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), restringimos inicialmente a busca no âmbito de teses na área da Educação Matemática. Para isto, utilizamos os seguintes termos de busca: *divisibilidade, teoria dos números, aritmética, números primos*. Na primeira busca, encontramos apenas três teses com títulos que indicavam o objeto do nosso estudo. Pela leitura dos títulos e resumos, selecionamo-las para uma primeira análise (Tabela 1).

Tabela 1.

Teses que tratam de Teoria dos Números e Números Primos

Autores	**Título da tese**	**Programa/instituição/ano**
RESENDE, Marilene Ribeiro	**Re-significando a Disciplina Teoria dos Números na Formação do Professor de Matemática na Licenciatura.**	(Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.
BARBOSA, Gabriela dos Santos	O Teorema Fundamental da Aritmética: Jogos e Problemas com Alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.	(Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.
FONSECA, Rubens Vilhena	Números Primos e o Teorema Fundamental da Aritmética: Uma Investigação entre Estudantes de Licenciatura em Matemática	(Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2015.

Identificamos que a teoria dos números recebeu atenção nessas três teses de doutorado, na área de Educação Matemática. Mas, somente a tese de Fonseca (2015) apresentou como tema principal números primos, assim procedemos a uma leitura completa dessa pesquisa, que destaca entre outras coisas a escassez de pesquisas relacionadas à Teoria dos Números na área da Educação Matemática. De fato, até o final de 2015, em nosso país, só havia duas publicações de teses sobre esse tema: a de Rezende (2007), e, no ano seguinte, a tese de Barbosa (2008), mas, a partir de então, surgiram vários estudos com o tema *divisibilidade*, principalmente, dissertações provenientes dos Mestrados Profissionais de Ensino de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT[4] – e de Educação Matemática.

Em suas considerações finais, Fonseca (2015, p. 148) enfatiza que:

> Os resultados revelaram a necessidade de um domínio mais amplo dos licenciandos no que se refere às questões relacionadas à compreensão dos temas em tela; especificamente, ficaram evidenciadas dificuldades atinentes ao trabalho com certas representações numéricas de números primos, e, principalmente, em relação aos conceitos de números primos e do teorema fundamental da aritmética.

A problemática anunciada por Fonseca (2015) reverbera para sala de aula, desde a escola básica, uma vez que evidencia dificuldades na compreensão de números primos de futuros professores de matemática (alunos das licenciaturas).

Assim, para nos aprofundarmos na problemática anunciada fizemos uma investigação no Catálogo de teses e dissertações (CTD-CAPES), agora em nível de mestrado utilizando os mesmos parâmetros de busca realizados nas teses. Desse modo, encontramos dezenove dissertações (Tabela 2) dos Programas de Mestrado em Educação Matemática e Mestrados profissionais em Ensino de Matemática, principalmente os do PROFMAT.

Tabela 2.

Dissertações sobre Números Primos

	Título/Programa	**Autor**	**Objetivo**
01	Números Primos Gaussianos para o Ensino Médio. PROFMAT, 2014.	Cybele Verde Aragão de Almeida	Apresentar uma categoria especial de números: os números primos de Gauss.
02	A Conjectura de Goldbach e a Intuição Matemática. PROFMAT, 2018.	Carolina da Silva Bitencourt	Tem por finalidade estimular a intuição matemática no ensino básico para inferir a Conjectura de Goldbach, por meio de uma atividade escrita e do uso de um material manipulável auxiliar.
03	Algoritmos para Fatoração e Primalidade como Ferramenta Didática para o Ensino de Matemática.	Jean Peixoto Campos	Apresenta uma proposta de ensino de matemática com o auxílio do desenvolvimento e implementação de algoritmos para fatoração e

[4] O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) é um programa de mestrado semipresencial, na área de Matemática, com oferta nacional. É formado por uma rede de instituições de ensino superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil/Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (Capes), e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa). Disponível em <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>

	PROFMAT, 2015.		primalidade de inteiros positivos.
04	Números Primos e o Teorema Fundamental da Aritmética no Sexto Ano do Ensino Fundamental. PROFMAT.	Fernando Ramires Carvalho	Apresentar o conteúdo que um professor da educação básica deve dominar para desenvolver e aplicar em uma turma do 6º ano sobre divisibilidade e números primos.
05	Números Primos e Criptografia: da Relação com a Educação ao Sistema RSA. PROFMAT, 2013.	Kelly Cristina Santos Alexandre de Lima Daineze	Este trabalho visa a estabelecer uma discussão sobre os conceitos envolvendo criptografia, através de sua aplicação dos números primos, e as possíveis relações com a educação.
06	Números Primos e Divisibilidade: Estudo de Propriedades PROFMAT, 2013.	Cristina Helena Bovo Batista Dias	O objetivo desse trabalho é apresentar os fundamentos da divisibilidade, estudar as propriedades dos números primos, suas associações com fatoriais e com progressões aritméticas, além de apresentar alguns resultados equivalentes à Conjectura de Goldbach.
07	O Estudo do Ensino de Números Primos na Educação Básica. PROFMAT, 2016.	Djalma Gomes de Farias	Nesse trabalho, pontuam-se algumas das principais propriedades dos números primos, dando ênfase, sempre que possível, além de suas aplicações no restante de sua vida escolar, ao seu contexto histórico, visando mostrar sua importância e as motivações de alguns dos importantes matemáticos que se dedicaram ao seu estudo.
08	Números Primos e o Postulado de Bertrand PROFMAT, 2014.	Antônio Eudes Ferreira	Mostrar um estudo sobre os números primos e uma generalização do Postulado de Bertrand.
09	Título: Números Primos: Uma abordagem Educacional UFAM, 2015.	Edson Ribeiro Machado	Fazer uma nova abordagem na construção dos números primos, na forma de encarar os números naturais, e na diferenciação de números composto dos números naturais com a finalidade de aprimoramento dos nossos alunos do ensino fundamental e médio.
10	Números Primos PROFMAT, 2013.	José Cleiton Rodrigues Padilha	Apresentar uma categoria especial de números inteiros: os números primos.
11	Números Primos e Testes de Primalidade UNICAMP Campinas, 2014.	Glaucia Innocencio de Jesus Paulo Paiva.	Descrever e estudar alguns testes de primalidade, como o Teste de Fermat, Teste de Lucas-Lehmer, Teste de Miller-Rabin e o algoritmo AKS.
12	Números Primos e a Conjectura de Goldbach. PROFMAT, 2017.	Andressa de Lima Pereira.	Estuda os números primos, com abordagem de seu papel na história da matemática, verificando sua

			importância para a criptografia. Também discute os avanços obtidos no estudo da Conjectura de Goldbach.
13	A Função Zeta de Riemann e os Números Primos. UNICAMP, 2016.	Daniel Petravicius.	Nesse trabalho são exibidos e demonstrados resultados conhecidos da Função Zeta de Riemann e sua relação com os números primos
14	Números Primos: Os Átomos dos Números. PROFMAT, 2015.	Márcio Dominicali Rigoti.	Trata-se de um estudo sobre os números primos que passa por resultados básicos, como a infinitude dos números primos e o TFA, Teorema de Wilson e consequentemente a função geradora de primos.
15	Os Números Primos PROFMAT, 2014.	Cediglês Lima dos Santos.	A finalidade do texto não é a pesquisa para encontrar novos números primos, a essência do estudo é tentar explicar a organização desses números e como eles se apresentam e abordá-los de forma simples e especial, como uma espécie de revista superinteressante sobre primos.
16	Números Primos: Aplicações e Primalidade PROFMAT, 2015.	Vagner Caceres Soares.	Conceitos básicos são colocados para compreensão de estudos posteriores, definição de primos e aplicações dos números primos.
17	Números Primos e Criptografia Mestrado Profissional UNICAMP, 2014.	André Vinícius Spina.	Faz a introdução à teoria dos números, através de uma abordagem sobre os métodos criptográficos RSA e Diffie-Helman, nos quais se pode constatar situações em que eles são eficientes.

Selecionamos as dissertações referenciadas na Tabela 2, com a ideia inicial de fazer a leitura apenas dos resumos, contudo, verificamos a necessidade de maior aprofundamento. Então, passamos a fazer a leitura completa de cada dissertação, anotando os pontos que consideramos relevantes sobre o estudo de números primos.

Como análise geral das dissertações, constatamos que grande parte das pesquisas se acercou dos principais temas da teoria dos números, iniciando a apresentação a partir de uma análise histórica. Enfatizou-se o desenvolvimento da teoria dos números, utilizando a linguagem formal e sistemática, com a apresentação das conjecturas, teoremas e suas demonstrações. Além disso, apresentaram-se os principais trabalhos dos matemáticos mais proeminentes dos tempos passados, bem como as proposições, conjecturas e teoremas com suas respectivas demonstrações, relacionados aos números primos. Esses trabalhos apresentaram as mais diversas tentativas dos matemáticos de encontrar uma fórmula para gerar primos e alguns testes de primalidade.

O tema principal dessas dissertações é número primo, contudo, os autores apresentam os principais temas da Teoria dos Números, a partir da divisibilidade, com suas definições, propriedades e teoremas. Além desses temas, apresentaram alguns problemas em abertos que envolvem os números primos, tais como o problema de Riemann e a conjectura de Goldbach.

Há enfoque nos testes de primalidade, como o crivo de Eratóstenes, o pequeno teorema de Fermat, o teorema de Wilson, o teste de Fermat, o teste de Lucas-Lehmer, teste de Miller-Rabin, o algoritmo AKS e os números de Carmichael, ou seja, grande parte dos trabalhos apresentou um teste de primalidade, e, além disso, algumas tentativas de criação de fórmulas geradoras de primos, sem, contudo, apresentar alguma que gerasse todos os números primos ou todos os números primos de algum intervalo dado. As fórmulas mais importantes geram alguns primos, como as de Fermat e Mersennhe.

Constatamos também que as pesquisas indicam que, ao seguirem os currículos das escolas e se restringirem ao uso dos livros didáticos, os professores não abordam temas que envolvem a divisibilidade, nas séries posteriores ao 6º ano, pois grande parte dos alunos chega ao ensino médio sem o conhecimento das noções básicas dos números primos.

Dada a problemática anunciada, apontamos como objetivo deste estudo apresentar um Modelo Praxeológico Alternativo, com duas fórmulas que, combinadas, são geradoras de todos os números primos de um intervalo qualquer de números, a ser utilizado como aplicação no ensino de números primos, para favorecer a apropriação de noções conceituais desse tema.

Modelos: discussões introdutórias

Neste estudo, leva-se em conta a integração do pedagógico e do matemático. Tal integração, segundo Gascón (2001, 2014), Delgado (2006) e Florensa et al. (2020) realiza-se a partir do questionamento e da ampliação do que se considera matemático, no modelo popular das matemáticas, que é um modelo epistemológico dominante nas instituições em que se manipula o saber matemático, incluindo as instituições universitárias e a comunidade produtora de conhecimento matemático.

Esse modelo particularmente usado nos cursos de bacharelado de matemática está também presente nos cursos de licenciatura em matemática e, particularmente, na disciplina teoria dos números. Thurston (1994) citado por Delgado (2006, p. 23) caracteriza esse modelo nos seguintes termos:

> 1. Os matemáticos partem de algumas estruturas matemáticas fundamentais e de uma coleção de axiomas “dados” que caracterizam tais estruturas;
> 2. A respeito de ditas estruturas existem questões importantes e variadas que podem ser expressas através de proposições matemáticas formais;
> 3. A tarefa dos matemáticos é buscar uma série de deduções que enlacem os axiomas com tais preposições ou com a negação destes;
> 4. Para dar razão da origem das questões problemáticas se acrescenta a especulação como um ingrediente importante e suplementar a tal modelo. Especular consiste em emitir conjecturas, sugerir perguntas, fazer suposições inteligentes e desenvolver argumentos heurísticos sobre o que é verosímil. Obtém-se assim o modelo definição-especulação-teorema-prova (DSTP).

De acordo com esse autor, o *modelo popular* constitui, definitivamente, uma forma ingênua e simplista de interpretar o conhecimento matemático. Assim, Thurston (1994), propõe a elaboração de um modelo epistemológico alternativo que enfatize que o trabalho do matemático consiste em fazer avançar a compreensão humana das matemáticas e em melhorar a comunicação de tal compreensão.

Gascón (2001, 2003), Delgado (2006) e Florensa et al. (2020) destacam que houve um avanço para a mudança do modelo matemático, com a origem do programa epistemológico que passou a ter a atividade matemática como objeto primário de estudo, como uma alternativa da análise didática. E que o primeiro passo nessa direção foi protagonizado historicamente pela *Teoria das Situações Didáticas* (TSD) que integrou *o matemático* e *o pedagógico*, modelizando de maneira inseparável os conhecimentos matemáticos e *as condições de sua utilização em situação escolar*.

Entretanto, à medida que o programa foi se desenvolvendo, percebeu-se que não era possível interpretar adequadamente *a atividade matemática escolar*, sem levar em conta os fenômenos relacionados com *a reconstrução escolar das matemáticas*, que tiveram sua origem na própria instituição produtora do saber matemático. Para dar conta dessas questões, lança-se mão do fenômeno da *transposição didática* (Chevallard, 1985), que desencadeou a *Teoria Antropológica do Didático* (TAD) (Chevallard, 2009).

Teoria antropológica do didático (TAD)

A TAD parte do princípio de que o saber matemático é construído como resposta ao estudo de situações problemas, aparecendo assim como o resultado (ou produto) de um processo de estudo. Tal processo, enquanto atividade que conduz à construção (ou reconstrução) de conhecimento matemático faz parte da atividade matemática.

O saber matemático aparece assim organizado em dois níveis. O primeiro nível é o que o remete à prática que se realiza, a *práxis* ou saber-fazer, quer dizer, os tipos de problemas ou tarefas que são estudados e as técnicas que são construídas e utilizadas para abordá-los. O segundo nível refere-se à parte descritiva, organizadora e justificadora da atividade: trata-se do *logo* ou, simplesmente, saber. Esse nível inclui as descrições e explicações que são elaboradas para tornar as técnicas inteligíveis, isto é, o discurso tecnológico e a teoria que dá sentido aos problemas formulados e permite fundamentar e interpretar as descrições e demonstrações tecnológicas como forma de justificação.

Segundo Chevallard (1999), o postulado da TAD está além da visão particularizada do mundo social: admite-se que toda atividade humana regularmente realizada pode ser descrita com um modelo único, que se resume com a palavra de praxeologia (Tabela 3).

Tabela 3.

Noção de Praxeologia

Praxeologia			
Bloco prático-técnico (saber-fazer) [T/**τ**]		Bloco tecnológico-teórico [θ/Θ]	
Tipos de Tarefa	Técnica	Tecnologia	Teoria
Na raiz da palavra praxeologia, encontram-se as noções solidárias de tarefa t e de tipos de tarefa T. Assim, quando uma tarefa t faz parte de tipos de tarefa T, se escreverá t Є T (Chevallard, 1999).	Seja T um tipo de tarefa dada; uma praxeologia relativa a T requer (em princípio) uma *maneira de realizar as tarefas* (t Є T): a uma *determinada maneira de fazer*, t, se lê daqui por diante o nome de *técnica* (**τ**).	Entende-se por tecnologia e se indica geralmente porθ um discurso racional – o *logos* – sobre a técnica – **τ**, discurso, cujo primeiro objetivo é justificar *racionalmente* a técnica **τ**, para assegurar-se de que permite realizar as tarefas do tipo T, isto é, realizar o que se pretende.	Por sua vez, o discurso tecnológico contém afirmações, mais ou menos explícitas, das que se pode pensar. Passa-se então a um nível superior de justificativa-explicação-produção da *teoria*, **Θ**, que retoma, em relação à tecnologia, o papel que essa última tem a respeito da técnica.

Ao redor de um tipo de tarefa T, encontra-se, em princípio, uma formação tríplice: uma *técnica* **τ** (pelo menos), uma tecnologia de t (θ) e uma teoria de θ (Θ). O conjunto, indicado por [T/ **τ** / θ /Θ] constitui uma praxeologia pontual, ou seja, trata-se de uma praxeologia relativa a um *único tipo de tarefa* (T). Nesses termos, uma praxeologia ou *organização praxeológica* está, pois, constituída por um bloco prático-técnico [T/**τ**] e por um bloco tecnológico-teórico [θ/Θ].

Segundo Chevallard (1999), as *organizações praxeológicas*, nas instituições de ensino, podem ser descritas e analisadas numa dinâmica, cujo modelo mínimo é denominado *organização praxeologia pontual* [T/**τ**/θ/Θ], caracterizado por envolver um único tipo de tarefa T. Nessa dinâmica, ao se combinar várias praxeologias pontuais, em torno de uma determinada técnica, tem-se a organização *praxeológica local* [Ti/$\boldsymbol{\tau}$i/θ/Θ]. Aumentando a complexidade, concatena-se várias organizações *praxeológicas locais*, em torno de uma determinada tecnologia θ, origina-se a organização *praxeológica regional* [T_{ij}/$\boldsymbol{\tau}_{ij}$/ θ_j/Θ]. O processo dá-se em um nível de complexidade crescente (Bon, 2011), em que o nível mais complexo agrupa *organizações praxeológicas regionais*, em torno de um discurso teórico (Θ), que justifica a tecnologia (θ), revelando a teoria (Θ), que prevalece no bloco praxeológico. Nesse aspecto, o complexo praxeológico descortinado é uma *organização praxeológica global* [T_{ikj}/$\boldsymbol{\tau}_{ijk}$/ θ_{jk}/Θ_k].

Em vistas do processo descrito anteriormente, apoiados em Delgado (2006), Matos et al. (2020, p. 465) postulam que a unidade de análise dos procedimentos didáticos

> deve conter uma Organização Didática (OD) escolar que permita construir, no mínimo, uma Organização Matemática Local (OML) relativamente completa. Essa OML pode ser reconstruída artificialmente na instituição escolar como o resultado de um processo de ampliações e completações progressivas de praxeologias pontuais e praxeologias intermediárias. Essas praxeologias (pontuais e intermediárias) são geradas sucessivamente pelo desenvolvimento evolutivo das questões problemáticas e dos tipos de tarefas associados à OD que serão as razões de ser da OML reconstruída (Matos et al., 2020, p. 465).

A noção de praxeologia aparece, assim, como uma noção genérica cujo estudo convém aprofundar, sobretudo através do estudo empírico e da análise dos dados de observação recolhidos, que caracterizam a forma de fazer e pensar configurada em organizações matemáticas e didáticas.

Nessa dinâmica, buscaremos imprimir esforços para instituir, mesmo que de forma provisória, um modelo praxeológico alternativo para identificação dos números primos em um intervalo qualquer de números.

Organização matemática OM_θ e organização didática OD_θ

Os tipos de objetos considerados serão de duas classes: dado um tema de estudo matemático θ, considerar-se-á sucessivamente: a) a realidade matemática que pode ser construída em uma classe de matemática onde se estuda o tema θ; b) a maneira como pode ser construída essa realidade matemática, isto é, a maneira como pode ser realizado o estudo do tema θ. O primeiro objeto – *a realidade matemática que...* – é uma praxeologia matemática ou Organização Matemática, que se denomina por OM_θ. O segundo objeto – *a maneira que...* – é o que se denominará organização didática, que se indicará, de maneira análoga por OD_θ. Assim, as pesquisas concernem principalmente a dois tipos de tarefas (T): descrever e analisar a organização matemática OM_θ, que se pode construir em uma classe de matemática onde se estuda o tema θ (T_1); descrever e analisar a organização didática OD_θ que pode ser posta em prática em uma classe de matemática onde se estuda o tema θ (T_2).

Diremos agora que *fazer Matemática* consiste em colocar em prática uma Praxeologia Matemática para realizar um determinado tipo de tarefa e que *estudar matemática* consiste em construir ou reconstruir determinados elementos de uma praxeologia matemática para responder a um determinado tipo de situação problema.

Segundo Delgado (2006, p. 32),

> [...] a Organização Matemática corresponde à concepção do trabalho matemático como estudo de tipos de problemas ou tarefas problemáticas. Porém, este não é o único aspecto do trabalho matemático. Com efeito, o matemático não aspira unicamente a construir bons problemas e a resolvê-los, mas sim que pretende, além disso, caracterizar, delimitar e inclusive classificar os problemas em “tipos de problemas”, entender, descrever e caracterizar as técnicas que utiliza para resolvê-los até o ponto de controlá-las e normalizar seu uso, se propõe estabelecer as condições sob as quais estas funcionam ou deixam de ser aplicadas e, em última instancia, aspira a construir argumentos sólidos e eficazes que sustentam a validez de suas maneiras de proceder.

Para analisar uma organização matemática, o primeiro passo é construir ou pelo menos esboçar, a partir dos elementos teórico-tecnológicos introduzidos até aqui, uma técnica *t* de descrição de análise de uma organização matemática OM_θ (Chevallard, 1999).

A seguir, como exemplo, considerar-se-á uma simples espécie de tarefa T_1, escolhendo o tema θ = *div* da divisão de inteiros: T_{div}*: descrever e analisar a organização* OM_θ*, que pode ser construída em uma classe onde se estuda o tema da divisão de inteiros.*

Contudo, Chevallard (1999) enfatiza aqui que se deve ter cuidado para distinguir cuidadosamente essa tarefa da tarefa denominada t_{tdiv}, de descrição e de análise da organização didática correspondente: T_{tdiv}*: descrever e analisar a organização didática* $OD_\theta = \delta OM_{div}$ *que pode ser posta em prática em uma classe onde se estudará o tema da divisão de inteiros.*

Em continuação, a organização matemática que devemos determinar, OM_{div}, é *a priori* uma organização local que pode conter vários tipos de tarefas, por exemplo, T_q*: dados dois números inteiros positivos a e b, b > 0, calcular o quociente de a por b.* A finalidade do estudo, neste caso, seria então, precisar uma técnica $\hat{o}_q$ para realizar as tarefas do tipo T_q.

As organizações podem ser estruturadas em Modelos Epistemológicos de Referências (MER), que subjazem à maneira de fazer e de pensar as praxeologias, em particular, as escolares.

Anúncio de um modelo epistemológico de referência para determinação de números primos

Neste item, apresentamos uma Organização Matemática (OM), em torno da identificação dos números primos, que nos servirá de Modelo Epistemológico de Referência (MER).

Todo MER deve ser elaborado com base nas organizações matemáticas sábias que legitimam epistemologicamente o processo de ensino de tal OM (Gascón, 2014). Contudo, segundo Delgado (2006, p. 55, tradução nossa),

> [...] a própria elaboração do MER constitui ao mesmo tempo uma ferramenta de distanciamento da instituição sábia ao permitir à pesquisa didática explicitar seu próprio ponto de vista sobre o conteúdo matemático em jogo, nos processos didáticos que se planejam, implementam, analisam e avaliam. Em particular, o MER deve levar em conta a evolução histórica das OM sábias, mas sem cloná-las.

Além disso, Delgado (2006) e Gascón (2014) enfatizam que um MER é uma ferramenta de análise de processos didáticos concretos; sua construção também deve levar em consideração as restrições que provêm daquelas instituições escolares em que a OM em questão é designada como a OM a ensinar.

É importante sublinhar que o MER que descreveremos aqui é uma proposta didática que estará sujeita a ajustes e modificações futuras, conforme surjam pesquisas nessa área e sobre esse tema para a melhoria do ensino da matemática. A teoria da transposição didática de Chevallard (1985, 1999) mostra-nos que não existe um sistema privilegiado, absoluto, a partir do qual se observa e analisa a vida institucional (tanto intra como interinstitucional) das organizações matemáticas.

Para Delgado (2006), a explicitação do MER subjacente ao desenho de um processo de estudo permite interpretar melhor a atividade didática que se realiza (ou seja, as tarefas didáticas que se formulam e as técnicas didáticas – de ajuda ao estudo – que são utilizadas para realizar tais tarefas) e, o que é mais importante, proporciona critérios explícitos para modificar a OD, dependendo da relação entre a resposta fornecida a qualquer momento pela comunidade de estudo e a direção de desenvolvimento definida pela MER que, certamente, também pode ser modificada.

A reconstrução escolar de uma organização matemática

Consideremos como ponto de partida o seguinte questionamento: *como identificar os números primos em um intervalo qualquer de números (sequência finita de números naturais ou inteiros positivos), por meio de duas fórmulas com base em uma técnica já existente?*

Podemos responder a essa questão de maneira simples, ou seja, para fazer os cálculos com os números primos, a melhor maneira é utilizar as técnicas já estabelecidas institucionalmente. Contudo, também podemos citar o caso de instituições que não dispõem de nenhuma técnica para identificar todos os números primos de um intervalo qualquer de números, com o uso de uma fórmula ou que, mesmo dispondo de uma técnica, faça uso de forma natural, sem se questionar sobre a sua pertinência ou sobre a razão que explica sua eficácia.

Entretanto, no caso de não se dispor de uma técnica para resolver o problema, a questão torna-se problemática e, ao tentar resolvê-la, gera-se um tipo de tarefa não rotineira designada pela letra T. Sua resolução vai requerer a elaboração de um conjunto de técnicas matemáticas *t*, que, por sua vez, deverão ser descritas, explicadas e justificadas através de um discurso matemático denominado de tecnológico-teórico e que se designa com a notação [θ/Θ].

Dito em outras palavras, se considerarmos a questão anterior como uma *questão problemática que deve ser estudada* e que não pode ser respondida, dando uma simples informação, então, necessita-se de *uma resposta* baseada na construção de uma organização matemática, ou seja, deve-se ter um conjunto de tipos de tarefas ou problemas, de técnicas ou procedimentos para resolver esses problemas e de definições, propriedades e teoremas que permitam descrever e justificar o trabalho realizado. Tal como já foi explicado, anteriormente, utilizaremos a notação OM = [T/t/θ/Θ], para designar uma organização matemática, gerada pelas tarefas do tipo T (Chevallard, 1999).

O fato de considerar uma questão como a anterior, quer dizer que ao apelar para a construção de uma OM como possível resposta ou solução, não significa que se deva considerar a elaboração de uma única OM. Na realidade, no processo de estudar tal questão ou de elaboração de possíveis respostas, coloca-se geralmente em jogo sucessivas organizações matemáticas, em que cada uma poderá corrigir, complementar e/ou desenvolver as anteriores.

Nesse trabalho, será possível observar como ocorreu a evolução das respostas obtidas, a partir da questão acima mencionada, que poderá ser expressa em termos da ampliação progressiva de OMs. E, o que é mais importante, veremos em que sentido essa ampliação permite manifestar as *razões de ser* do modelo alternativo para identificar os números primos.

Para Delgado (2006), estudar uma questão matemática na instituição de ensino I (incluindo as de nível superior) consiste em estudar a organização matemática que outra instituição I' propõe como resposta a essa questão. Porém, para realizar o estudo da organização construída em I', essa deve ser reconstruída em I, através de uma reconstrução escolar que é *artificial*, no sentido de não ser inédita. Em outras palavras, a organização deve ser transportada ou transposta de I' para I - o que se chama de processo de transposição didática de uma organização matemática (Chevallard, 1985).

Segundo Delgado (2006, p. 58) surge assim, um grande tipo de problema didático, de modo que o nosso problema passa a ser um caso particular:

> Dada uma pergunta q que queremos que seja estudada, numa instituição de ensino I, como planejar e gerenciar o processo de reconstrução (que é um processo de estudo) em I das Organizações Matemáticas **OM = [T/t/θ/Θ]** que se dadas como resposta essa pergunta em outra instituição **I'**?

Em nosso problema didático concreto, os parâmetros ***q***, I, OM e I' tomam os seguintes valores:

q = Como identificar os números primos, primeiramente dado um número qualquer e, em segundo lugar, um grupo de números primos em um intervalo qualquer de números, por meio de um modelo que utiliza duas fórmulas que combinadas identificam todos os números primos do intervalo dado?

I = Instituições de ensino básico e superior.

OM = OM_{ip} *= Organização Matemática em torno da Identificação dos Números Primos (o modelo alternativo de identificação de números primos em qualquer intervalo de números).*

I' = Instituição matemática sábia.

Segundo Delgado (2006, p. 58) é necessário indicar que nem a pergunta inicial nem a Organização Matemática ou As organizações Matemáticas a serem construídas são entidades que podem ser completamente delimitadas a priori.

Modelos de identificação dos números primos

O modelo clássico para identificar os números primos em um intervalo de números no ensino fundamental é o crivo de Eratóstenes, mas tal modelo, como é apresentado, tem uma limitação, pois, se for usado para a identificação de listas muito grandes de números primos com “n” (o último número do intervalo dado) cada vez maior, em um intervalo qualquer, torna-se muito trabalhoso, exigindo uma grande quantidade de cálculos. Desse modo, para que a identificação dos números primos seja mais eficiente e mais econômica nos cálculos, sugerimos:

1. Que os conceitos e propriedades que envolvem o conhecimento sobre os números primos sejam enfatizados e usados para a compreensão do funcionamento desses números e sua importância no desenvolvimento da matemática.

2. Que se mostrem maneiras de usar as operações e propriedades, de modo a facilitar a análise e interpretação do processo de identificação dos números primos, e que isso possa ser feito com maior economia de cálculos.

3. Que se proporcionem novas maneiras de se perceber as sequências numéricas e utilizá-las no processo de identificação dos números primos, como sequências alternadas.

4. Que o cálculo para a identificação de números primos e compostos de qualquer intervalo dado seja feito com base na aritmética elementar e álgebra básica, em linguagem matemática mais acessível aos nossos estudantes.

5. Que o estudo dos números primos possa propiciar o reconhecimento de padrões e um melhoramento nos métodos para que os estudantes e professores possam perceber a importância desse conhecimento no desenvolvimento da matemática.

Parece razoável supor que as situações problemas e as tarefas associadas que se tornarão as *razões de ser* da OM_{ip}, em uma instituição, deverão ser extraídas dessas condições.

Essas questões estarão presentes ao longo do processo deste estudo. Para que isso seja possível, determinadas OMs intermediárias, em que tais tarefas sejam problemáticas, deverão ser vivenciadas em I e, portanto, as *razões de ser* tornar-se-ão visíveis.

Partiremos de um modelo de desenvolvimento das questões problemas do processo que nos leve construção de OM_{ip}. Aqui, podemos esquematizar tal evolução, guiando-nos por três grandes categorias de identificação dos números primos (INP). Posteriormente, apresentaremos como técnicas úteis para responder às certas questões problemas e para realizar as tarefas matemáticas que vão gerar, respectivamente, várias organizações matemáticas diferentes.

(1) Identificação do tipo I: identificação individual de número primo

Nesse primeiro tipo, o número em si mesmo tem um papel relevante. Trata-se aqui de identificar se um dado número *a* é primo ou não. A técnica é apresentada nos livros didáticos de Matemática da Educação Básica e da Teoria dos Números (para o ensino superior).

Doravante denominamos essa técnica de t_{ip}, a técnica inicial para a identificação dos números primos.

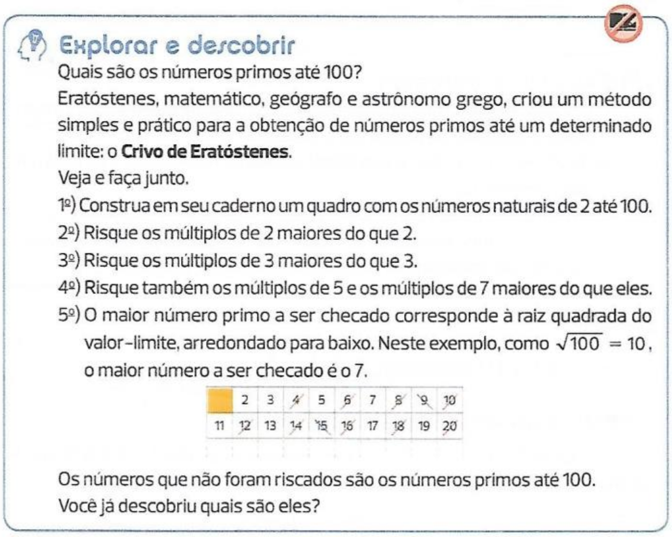
Apresentaremos a técnica (t_{ip}) como se encontra em um livro didático do 6º ano, conforme Dante (2015, p. 240):

> Para reconhecer se um número a é primo, basta ir dividindo esse número pelos números primos a partir do 2 menores do que $\sqrt{a}$, até que ocorra um desses dois fatores: (1) a divisão "dar" exata (nesse caso o número não é primo); (2) O quociente ficar igual ou menor do que o divisor sem que nenhuma divisão tenha "dado" exata, aí conclui-se que o número é primo.

Entretanto, à medida que esse número se torna grande, o processo de identificação fica mais trabalhoso, porque a quantidade de operações de divisão que se deve fazer aumenta à medida que a quantidade dos primos básicos (para a testagem) também aumenta, dependendo do intervalo dado. Contudo, podemos analisar essa técnica e verificar que podemos torná-la mais eficiente, dependendo do contexto em que é aplicada.

(2) Identificação de tipo II: identificação de grupos de números primos

A técnica apresentada nos livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental, nos conteúdos de divisibilidade para identificar os números primos é o crivo de Eratóstenes e identificaremos essa técnica como T_{cE}. Em alguns livros didáticos de Matemática usa-se o intervalo de 01 a 100, relacionando todos os números desse intervalo, bem como os números 2, 3, 5 e 7 para identificar os números primos desse intervalo (Figura 1):



Explorar e descobrir

Quais são os números primos até 100?

Eratóstenes, matemático, geógrafo e astrônomo grego, criou um método simples e prático para a obtenção de números primos até um determinado limite: o **Crivo de Eratóstenes**.

Veja e faça junto.

1º) Construa em seu caderno um quadro com os números naturais de 2 até 100.

2º) Risque os múltiplos de 2 maiores do que 2.

3º) Risque os múltiplos de 3 maiores do que 3.

4º) Risque também os múltiplos de 5 e os múltiplos de 7 maiores do que eles.

5º) O maior número primo a ser checado corresponde à raiz quadrada do valor-limite, arredondado para baixo. Neste exemplo, como $\sqrt{100} = 10$, o maior número a ser checado é o 7.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Os números que não foram riscados são os números primos até 100.

Você já descobriu quais são eles?

Figura 1.

Identificação de grupos de números primos (Dante, 2015, p. 140)

Como na Figura 1, não se apresentou o modelo completo, então, temos uma tarefa a fazer que é relacionar todos os números de 1 a 100, o que poderá ser feito em tabelas ou na forma como se apresenta na sequência dos números naturais, pois se o professor solicitar para os alunos escreverem os primeiros cem números, eles poderiam cortar os múltiplos de 2, de 3, 5 e 7, exceto esses números:

Nesse modelo, há a indicação da tarefa de se riscar os múltiplos dos primos básicos, assim o aprendiz poderá realizar os cálculos dos múltiplos de cada primo básico, tais como, 2 x 1 = 2, 2 x 2 = 4, ... 2 x 50 = 100; 3 x 1 = 3, 3 x 2 = 6, ..., 3 x 33 = 99; 5 x 1 = 5, 5 x 2 = 10, ..., 5 x 20 = 100; e 7 x 1 = 7, 7 x 2 = 14, ..., 7 x 14 = 98.

Mas, se o aprendiz aplicar o que aprendeu previamente, poderá usar os critérios de divisibilidade do número 2 e 5 e eliminar facilmente os números pares e os terminados em 5. Quanto ao critério de divisibilidade do número 3, se já souber identificar os múltiplos de três, também poderá identificar mais facilmente. Contudo, se o estudante ainda não tiver adquirido a capacidade de analisar por si só e se o professor não der nenhuma indicação, terá que fazer muitos cálculos para obter os múltiplos dos quatro primos básicos, riscar esses múltiplos e depois identificar os números primos, que serão aqueles não riscados.

Esta técnica parece-nos problemática. Desse modo, surgem alguns questionamentos: é possível torná-la mais eficiente, evitando muitos cálculos, já que o número 2 é o único número primo par, então seria mesmo necessário relacionar os números pares para fazer os cálculos dos múltiplos de 2 e depois eliminar esses números? Do mesmo modo, pensamos sobre o número 5, que é o único primo terminado em 5, seria necessário relacionar os números terminados em 5, para depois eliminá-los? Partindo-se desses questionamentos, surgem outras questões problemas, tais como: será possível criar uma técnica com o uso de fórmulas matemáticas para identificar os números primos, em qualquer intervalo de números, de forma a diminuir a computação de algoritmos? Em decorrência desses questionamentos, surgiu o tipo III, que é o método a ser apresentado nesta pesquisa.

(3) Identificação do tipo III: Método Alternativo de Identificar os Números Primos em Qualquer Intervalo de Números (MAIP)

Esse método surgiu, inicialmente, como curiosidade, na procura de outros modelos de identificação de primos, por se constatar que se usava apenas o crivo de Eratóstenes, criado em aproximadamente 200 a.C., e, também, porque as fórmulas até então criadas por matemáticos proeminentes dos séculos passados só produzem alguns primos, mas não todos. Trata-se de um método para identificar todos os números primos, em qualquer intervalo de números. Nesse tipo, os primos 2, 3 e 5 são exceções – o primo 2, porque é o único primo par;

o número 3, porque gera a grande parte dos múltiplos de primos; e o número 5, porque é o único primo terminado em 5.

Dessa forma, criaram-se duas fórmulas que combinadas produzem todos os números primos maiores do que 5. A Fórmula 1 ou Fórmula Geral produz um universo de números no qual todos os números primos do intervalo dado estão contidos, mas também produz alguns números compostos e, para se identificar especificamente os compostos produzidos pela Fórmula Geral, criou-se a Fórmula 2, geradora desses números compostos, para que sejam eliminados, restando apenas os números primos. Os cálculos com as fórmulas são feitos considerando as terminações dos números em 1, 3, 7 e 9 e, para cada terminação, serão usadas duas sequências alternadas. Procurou-se, com as fórmulas, uma economia de cálculos. Por exemplo, para cada intervalo de mil números, essa fórmula produz apenas 266 ou 268, assim como, para cada intervalo de dez mil números, a fórmula produzirá apenas 2.666 ou 2.668 números e todos os primos estão contidos entre eles, como também os múltiplos dos primos básicos.

Propõe-se aqui um modelo epistemológico dinâmico guiado pelo desenvolvimento evolutivo de uma sucessão de OMs, de modo que cada nova OM amplie e complete relativamente os distintos componentes da anterior até desembocar em OM_{maip}. Veremos que, nessa sucessão, cada OM encontra sua *razão de ser* nas limitações da anterior (Delgado, 2006).

A escolha das OMs intermediárias provém da análise detalhada da questão matemática *q* e das restrições que impõem o fato de que sua resposta deve ser reconstruída em determinada instituição.

Isso nos leva a considerar duas grandes categorias de Identificação dos Números Primos: Identificar se um número qualquer é primo ou composto (OM_{ipc}), Identificação de grupos de números primos em um intervalo qualquer de números (OM_{igp}) – cada uma das quais dá origem a um novo elo na sucessão de cada OM, partindo de uma OM inicial rudimentar (OM_{ip}), para desembocar em (OM_{maip}): Identificação dos números primos pelo modelo alternativo: $OM_{ip} \Rightarrow OM_{ipc} \Rightarrow OM_{igp} \Rightarrow OM_{maip}$.

Identificação individual de um número primo

Partimos da ideia de se começar com a OM_{ip} a identificação individual de um número qualquer, para se descobrir se é primo ou não, com o intuito de perceber se as definições dos números primos e compostos são de fato suficientes para resolver questões problemáticas do tipo: *verifique se os números, por exemplo, 91 e 97 são primos.*

O tipo de tarefa que gera a Organização Matemática inicial (OM_{ip}) está associado a situações problemas bastante elementares, relativas às definições dos números primos e dos compostos, conforme podemos verificar nos itens, a seguir:

(1) Como um número primo e um número composto são definidos de maneira que se possa identificá-los sem nenhuma ambiguidade?

(2) Como se descobre se um número qualquer é ou não primo?

(3) Como identificar todos os números primos de qualquer intervalo dado a partir de fórmulas matemáticas?

Para que possamos responder a essas questões e produzir uma técnica inicial (t_i) precisamos *utilizar as definições de números primos e compostos e o Teorema Fundamental da Aritmética.*

As duas técnicas até aqui apresentadas respondem às questões (1) e (2), mas não à questão (3). Mas, a partir delas nos permitirá desenvolver a técnica inicial (t_i) e evoluir para técnicas intermediárias que serão mais eficazes, sem perda de sua importância. Ao analisar as duas técnicas, observamos que o ponto chave para a identificação dos números primos encontra-se na definição e no TFA. A definição nos dá a indicação de como é um número primo, mas não do processo para sua identificação no conjunto dos números naturais ou dos inteiros positivos.

Se considerarmos que um inteiro positivo $a > 1$ é composto, então, a possui mais de dois divisores primos e podem ser escritos como fatores primos (TFA).

Por exemplo, o número 21 é um número composto, pois 3 x 7 = 21, logo, além de 1 e 21, há também o número 3 e 7 como seus divisores.

Denominamos de técnica primitiva de identificar os números primos e compostos (t_i) a partir das definições de números primos e compostos. Evidentemente, esta técnica t_i apresenta fortes limitações, pois dá uma indicação apenas a partir da quantidade de divisores dos números.

A organização matemática para identificar se um número qualquer é primo ou composto (OM_{ipc})

A técnica t_{ipc} utiliza o procedimento e os conhecimentos que fundamentam o estudo dos números primos e que são necessários para a aplicação das técnicas de identificação desses números. Esta técnica t_{ipc}, empregada para identificar se um número qualquer é primo ou composto, pode ser considerada uma evolução da técnica inicial t_i, gerando uma nova organização OM_{ipc}, desenvolvida em torno da identificação de número primos do tipo I, cuja principal qualidade é identificar se um número qualquer é primo ou composto, sem restrições. O tipo de tarefas geradas por esta OM_{ipc}, está associado às questões problemáticas descritas para a OM_{ip} que não encontraram uma resposta satisfatoriamente completa na OM_{ip}. Conforme as duas técnicas já apresentadas, observa-se que no modelo apresentado na Figura 1, não há a indicação de como saber se 2, 3, 5 e 7 são números primos, apenas se diz, “risque os múltiplos de 2, exceto 2”, o mesmo se dá para 3, 5 e 7.

Segundo Delgado (2006), em cada nova organização, poderão ser formuladas novas questões, como (4), (5), (6) e (7) e, mesmo assim, podemos ver que nem todas serão plenamente respondidas por esta OM_{ipc}.

(1) Como um número primo e um número composto são definidos de maneira que se possa identificá-los sem nenhuma ambiguidade?

(2) Como se descobre se um número qualquer é ou não primo?

(3) Como calcular os múltiplos dos números primos básicos?

(4) Como identificar os primeiros números primos, através da partição-multiplicação-divisão?

(5) Será necessário calcular todos os divisores de um número, para descobrir se ele é primo ou composto?

(6) Como aplicar os critérios de divisibilidade dos números primos?

(7) Como identificar grupos de números primos de um intervalo dado com maior economia na escrita e de cálculos?

A nova técnica t_{ipc} utiliza também definições e teoremas, de modo que as tarefas associadas às questões (1) e (2), que já tinham sido resolvidas pela t_i, também são plenamente resolvidas pela t_{ipc}. A tarefa associada à questão 3, que não foi resolvida pela t_i, será respondida pela nova técnica, a partir da solução encontrada para as questões (4), (5), (6) e (7).

Podemos até agora afirmar que a OM_{ipc} proporciona uma técnica para identificar se um número qualquer é primo ou não. A partir da definição de número primo e do teorema fundamental da aritmética, pode-se responder à questão (1) e (2), mas não à questão (3), pois não indica como fazer os cálculos. Por outro lado, a t_i poderá responder às questões (1) e (2), mas mostrou-se limitada, dependente de outros conceitos matemáticos e de melhoria da técnica, para que não houvesse ambiguidade no resultado, sendo assim as tarefas associadas à questão (3) não encontraram uma resposta satisfatória.

Além do mais, como dependia de um método de identificar os primeiros números primos, independentemente do arcabouço já definido, não se poderia aplicar a técnica sem que se soubesse identificar os primeiros números primos, o que ocorreu somente a partir da nova organização OM_{ipc}, de onde surgiu mais questões problemáticas (4), (5), (6), e (7), relativas às operações aritméticas que dão suporte à testagem de primalidade de um número qualquer.

A seguir, apresentamos alguns elementos que justificam o uso de algumas técnicas associadas a tipc:

A técnica (tpmd) de identificar as parcelas iguais na adição, os fatores da multiplicação e de relacionar com os termos da divisão, possibilitou o desenvolvimento da técnica de identificar os primeiros números primos, através da associação da partição, multiplicação e divisão.

Essa técnica não foi apresentada em nenhum livro didático conforme pesquisa de Souza (2018) sobre a divisibilidade em 22 livros didáticos de matemática do 6º ano desde 1984 a 2016. A técnica surge a partir da observação de que ao se apresentar o crivo de Eratóstenes, usam-se os primeiros primos básicos sem se dizer como e porque esses números foram classificados como primos. Na Tabela 4 apresentamos a técnica (tpmd), na primeira coluna encontram-se os primeiros números naturais (de 1 a 10) e na segunda coluna, a representação pelas operações de adição, multiplicação e divisão. Queremos mostrar que a partir da adição de parcelas iguais levará à multiplicação e, consequentemente à divisão, obtendo-se os divisores desse número. Usamos a partição para mostrar as possíveis somas desse número com parcelas iguais, pois se houver outras possibilidades além da primeira, só com a adição de número 1, então ele será um número composto, já que as várias somas de parcelas iguais de um número, leva ao produto de várias possibilidades de dois fatores diferentes e, posteriormente com a divisão exata, aos divisores desse número. Então, a partir das operações básicas e fundamentais da aritmética, corroborados pela definição de números primos e compostos podemos reconhecer que os números 2, 3, 5 e 7 têm apenas dois divisores e por isso são denominados de primos.

Tabela 4.

Técnica de partição, multiplicação e divisão (t_{pmd}) para identificar os primeiros números primos

	Técnica para identificar os primeiros números primos
1	1 => 1 x 1 = 1, 1 ÷ 1 = 1 => Logo, há um único divisor, o próprio 1 (que não é nem primo e nem compostos).
2	1 + 1 = 2 => 2 x 1 = 2 => 2 ÷ 1 = 2, 2 ÷ 2 = 1 => 2 dv = {1 e 2}. Logo é número primo.
3	1 + 1 + 1 = 3, 1 + 2 = 3 => 3 x 1 = 3 => 3 ÷ 1 = 3, 3 ÷ 3 = 1 => 2 dv = {1 e 3}. Logo é número primo.
4	1 + 1 + 1 + 1 = 4, 2 + 2 = 4, 1 + 3 = 4 => 4 x 1 = 4, 2 x 2 = 4 => 4 ÷ 1 = 4, 4 ÷ 4 = 1, 4 ÷ 2 = 2 => 3 dv = {1, 2 e 4}. Logo é número composto.

5	1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5, 1 + 2 + 2 = 5, 2 + 3 = 5, 1 + 4 = 5 => 5 x 1 = 5 => 5 ÷ 1 = 5, 5 ÷ 5 = 1 => 2 dv = {1 e 5}. Logo é número primo.
6	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6, 2 + 2 + 2 = 6, 3 + 3 = 6, 2 + 4 = 6, 1 + 5 = 6 => 6 x 1 = 6, 2 x 3 = 3 x 2 = 6 => 6 ÷ 1 = 6, 6 ÷ 6 = 1, 6 ÷ 2 = 3, 6 ÷ 3 = 2 => 4 dv = {1, 2, 3 e 6}. Logo é número composto.
7	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7, 1 + 2 + 2 + 2 = 7, 1 + 3 + 3 = 7, 3 + 4 = 7, 2 + 5 = 7, 1 + 6 = 7 => 7 x 1 = 7 => 7 ÷ 1 = 7, 7 ÷ 7 = 1 => 2 dv = {1 e 7}. Logo é número primo.
8	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8, 2 + 2 + 2 + 2 = 8, 4 + 4 = 8, 3 + 5, 2 + 6, 1 + 7 = 8 => 8 x 1 = 8, 2 x 4 = 4 x 2 = 8 => 8 ÷ 1 = 8, 8 ÷ 8 = 1, 8 ÷ 2 = 4, 8 ÷ 4 = 2 => 4 dv = {1, 2, 4 e 8}. Logo é número composto.
9	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9, 1 + 2 + 2 + 2 + 2= 4, 3 + 3 + 3 = 9, 1 + 4 + 4, 4 + 5, 3 + 6, 2 + 7, 1 + 8 = 9 => 9 x 1 = 9, 3 x 3 = 9 => 9 ÷ 1 = 9, 9 ÷ 9 = 1, 9 ÷ 3 = 3 => 3 dv = {1, 3 e 9}. Logo é número composto.
10	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10, 2 + 2 + 2 + 2 + 2= 10, 1 + 3 + 3 + 3 = 10, 2 + 4 + 4 = 10, 5 + 5 = 10, 4 + 6 = 10, 3 + 7 = 10, 2 + 8 = 10, 1 + 9 = 10 => 10 x 1 = 10, 2 x 5 = 5 x 2 = 10 => 10 ÷ 1 = 10, 10 ÷ 10 = 1, 10 ÷ 2 = 5, 10 ÷ 5 = 2 => 4 dv = {1, 2, 5 e 10}. Logo é número composto.

- A técnica de calcular os divisores e a quantidade de divisores justifica-se porque são necessários, no processo de identificação dos números primos e compostos, bem como usar os critérios de divisibilidade dos números 2, 3 e 5, que proporcionam uma economia de cálculo.
- A técnica de divisão justifica-se, já que é usada para definir e estabelecer o limite de cálculos de testagem da primalidade de um número qualquer.

O elemento chave teórico é o TFA, pois permite mostrar que um número composto qualquer pode ser escrito como fatoração única de fatores primos (a não ser pela ordem) e a conclusão de que o que diferencia os números primos dos compostos é a quantidade de divisores que ele contém.

Podemos dizer que a técnica inicial (t_i) necessitou de complementação de outras técnicas para dar respostas às questões problemáticas fazendo surgir novas OMs em torno dos conhecimentos que fundamentam o estudo dos números primos dando suporte para a aplicação da técnica nova t_{pmd} em torno da identificação dos primeiros números primos (OM_{ipc}).

Esta nova técnica t_{pmd} surgiu com o novo método de identificação dos números primos que apresentaremos mais adiante, como processo, já que nenhum livro didático pesquisado mostrou como identificar os quatro primeiros números primos.

Resumindo, podemos considerar que o objetivo principal ou a *razão de ser* do estudo da identificação dos números primos, o do tipo 1, é a representação dos números primos e compostos de maneira que não se tenha dúvidas da identificação de cada um deles nem do que os diferencia. Sabe-se que o que diferencia um número composto de um número primo é a quantidade de seus divisores e mesmo que um número primo tenha a menor quantidade de divisores, com exceção do um, ainda assim não é fácil confirmar que um número ímpar muito grande (por exemplo, maior do que 50 mil), pelo método conhecido, seja um número primo. Então, com certeza, pela indução matemática, podemos afirmar que um número na forma 2n + 1 é ímpar, mas não que é primo.

É evidente a importância dos números primos na construção dos demais números, porque se infere que os números primos são os geradores de todos os números naturais. Na verdade, é isso que diz o TFA.

Constatamos a necessidade de variação e complementação da técnica inicial para que se pudesse responder satisfatoriamente a todas as questões problemáticas que surgiram, dessa forma: t_i => t_{ip} => t_{ipmd} => t_{ipc}.

Temos que t_i é a técnica que se utiliza das definições e teoremas (como o TFA) para diferenciar os números primos dos compostos. A t_{ip} é a técnica para identificar se um número a é primo tendo a raiz quadrada de a ($\sqrt{a}$) como indicação do limite do uso dos primos básicos para a testagem, conforme modelo já apresentado. Contudo, percebeu-se que não se pode dar resposta à questão (7), porque requer a evolução das técnicas existentes para a identificação de uma lista maior de números primos, para que se possa identificá-los em intervalos cada vez maiores.

O TFA, que afirma que todos os números podem ser escritos como fatores primos, nos dá pista de que os demais primos só podem ser encontrados através dos próprios primos, ou seja dos primos básicos.

Com a intenção de ampliar mais ainda a possibilidade de identificação dos números primos, já que eles são os construtores dos demais números, o fundamento de sua existência. Entretanto, a técnica t_{ipc}, aplicada para testar um número qualquer, não é suficiente para identificar um grupo de primos, num intervalo qualquer de número. Por enquanto, com o conhecimento dos primeiros primos básicos 2, 3, 5 e 7, podem-se identificar todos os primos, dentre os cem primeiros números. Entretanto, queremos aumentar a eficácia do processo e a economia dos números utilizados e, assim, responder à questão (7). Desse modo, consideramos uma nova direção de evolução da técnica t_{ipc}**,** que se caracteriza por ampliar a abrangência de identificação dos números primos, agora, em agrupamentos de números, com base no crivo de Eratóstenes (técnica t_{cE}) que já foi apresentado anteriormente.

$$t_i \rightarrow t_{ipc} \rightarrow T_{cE}$$

A nova técnica utiliza toda a fundamentação teórica da técnica que utilizava t_{ipc} para identificar um número de cada vez, só que, agora, iremos aplicar em identificar grupos de primos com a variação de se relacionar menor quantidade de números (50 % menos).

Segundo Santos (2007, p. 12), se *n* não é primo, então *n* possui, necessariamente, um fator primo menor do que ou igual a $\sqrt{n}$, e além disso a raiz quadrada de *n* dá o limite para o uso dos primos básicos no teste de primalidade.

A nova técnica t_{cE}' irá responder à questão (7), ainda que de maneira limitada, somente para o intervalo de 01 a 100, aplicando uma variação do crivo de Eratóstenes para identificar os números primos que estão, por exemplo, no intervalo de 1 a 100, usando apenas os números ímpares, terminados em 1, 3, 7 e 9 já que na técnica (t_{cE}) foram usados todos os números de 1 a 100. Desse modo, temos as seguintes tarefas:

- Definir um intervalo dado (a, b). Nesse caso: de 1 a 100, fazendo uma tabela somente com os números ímpares terminados em 1, 3, 7 e 9.
- Calcular o limite dos primos básicos através de $p_b \leq \sqrt{b}$; com b = 100, calcula-se a raiz quadrada de b: $\sqrt{100} = 10,$ a raiz estabelece o limite para os primos básicos.
- Relacionar os primos básicos menores do que 10: 2, 3, 5 e 7 (já foram identificados pela t_{ipmd}).

Devido às técnicas anteriores, verificou-se que 2 e 5 são exceções, pois o número 2 é o único número par que é primo, e o 5 o único número primo terminado em 5 (já que todos os outros terminados em 5 são divisíveis por 5). Esses dois números não serão usados nos cálculos. Dessa forma, os primos 3 e 7 serão usados para o cálculo de seus múltiplos.

- Calcular os múltiplos de 3 e 7. Os múltiplos de 3 serão identificados pela cor azul e os múltiplos de 7, a partir do quadrado de 7, serão identificados pela cor verde. O número 1 não é primo nem composto, será identificado pela cor amarela e excluído, conforme Tabela 5.

Tabela 5.

Crivo de números ímpares terminados em 1, 3, 7 e 9

11	**13**	**17**	**19**
21	**23**	27	**29**
31	33	**37**	39
41	**43**	**47**	49
51	**53**	57	**59**
61	63	**67**	69
71	**73**	77	**79**

81	**83**	87	**89**
91	93	**97**	99

- Relacionar os números que não foram identificados (estão em branco); incluímos os números 2 e 5 na relação final dos números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97.

Pode-se observar que, para se identificar os números primos do intervalo aberto de 01 a 100, conforme a técnica (t_{cE}'), foram necessários apenas dois primos básicos.

Note-se que, na t_{cE} (Crivo de Eratóstenes) foi necessário relacionar previamente todos os números do intervalo dado (de 1 a 100) e calcular os múltiplos de todos os primos básicos (2, 3, 5 e 7), o que torna o processo bastante trabalhoso. Entretanto, na maioria dos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental, especificamente, os do 6º ano, o modelo encontra-se de forma bastante restrita, sendo necessário que o professor apresente aos alunos alguma ampliação do modelo usado. Como foi apresentado pelas técnicas t_{Pmd} e t_{cE}'.

O objetivo desta técnica é mostrar uma forma mais abreviada do uso do crivo de Eratóstenes, pois os alunos, já tendo conhecimentos prévios da aritmética básica, são capazes de distinguir os números ímpares dos pares, assim, como os primos dos compostos, bem como aplicar os critérios de divisibilidade pelo menos dos números 2, 3 e 5.

Desse modo, a partir da nossa proposta, de um modelo alternativo, do qual a Tabela 4 faz parte, será muito útil para os alunos perceberem como a quantidade dos primos básicos poderá aumentar e será cumulativa. Poderá surgir a pergunta sobre como é esse aumento cumulativo. Para responder, vamos ao exemplo: com base no intervalo de 1 a 100, na técnica T_{cE}', foram usados somente dois primos, para a mesma quantidade de números. Observar-se-á, na tabela 4, que, para a identificação de primos no intervalo de 100 a 200, será necessário incluir os números primos 11 e 13, no conjunto dos primos básicos. Se considerarmos um intervalo maior de 1 a 1000, então, será necessário incluir mais números primos. Dessa forma, para identificar os números primos de 1 a 1000, considerando a técnica t_{cE}', a quantidade de números primos básicos para o cálculo dos múltiplos será de 9 primos (3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 e 31).

A tabela 6 apresenta os primos básicos necessários para o cálculo dos múltiplos ou compostos nos intervalos de 100 a 100 números até 1000. Podemos observar que se usará os mesmos números primos básicos que são usados para calcular de 1 a 1000, ou de 100 a 1000, ou de 200 a 1000 e, assim, sucessivamente, até 900 a 1000. Mesmo que, em alguns intervalos, a quantidade de números primos básicos não aumente, como nos intervalos de 300-400 e 400-

500, serão usados os mesmos números primos básicos. Já para o próximo intervalo 500-600, observamos que aumentou apenas um número primo e será a mesma quantidade para os intervalos de 600-700 e 700-800. Considerando intervalos pequenos como de cem números, a quantidade de números primos básicos poderá ou não aumentar e isso se deve à irregularidade na distribuição de números primos na sequência dos números naturais.

Tabela 6.

Quantidade de primos básicos no intervalo de 01 a 1.000.

Intervalo	Primos básicos	Quantidade
01–100	3 e 7	02
100–200	3, 7, 11 e 13	04
200–300	3, 7, 11, 13 e 17	05
300–400	3, 7, 11, 13, 17 e 19	06
400–500	3, 7, 11, 13, 17 e 19	06
500–600	3,7, 11, 13, 17, 19 e 23	07
600–700	3, 7, 11, 13, 17, 19 e 23	07
700–800	3, 7, 11, 13, 17, 19 e 23	07
800–900	3, 7, 11, 13, 17, 19, 23 e 29	08
900–1000	3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 e 31	09

Note-se que com a aplicação da técnica nova t_{cE}’, os números foram reduzidos em menos de 50%, ao aplicar a restrição, sem haver nenhuma perda, pois, no final do processo, os números primos 2 e 5 serão computados.

Contudo, mesmo com a redução dos cálculos aplicando-se essa nova técnica percebemos que seguindo esses passos, o processo se tornará muito trabalhoso para identificar números primos grandes ou de intervalos maiores de números. Desse modo, surge mais uma questão problemática:

(8) Como identificar grupos de primos em intervalos cada vez maiores com maior economia e eficácia do processo, com outro método (usando fórmulas)?

Para responder a essa pergunta, surge a necessidade de novas OMs.

Elementos tecnológico-teóricos de identificação dos números primos pelo crivo de eratóstenes

A partir do desenvolvimento deste estudo e, como consequência da definição de primos e compostos, bem como do TFA, podemos afirmar que a OM_{cE} nos proporciona uma técnica t_{cE} de identificação de grupos de números primos, embora, conforme mostrado, ainda limitada pelos primos básicos para um intervalo de números até 100, mas, depois de se identificar os números primos deste intervalo, a técnica só encontra restrições para intervalos de números cada vez maiores por ser um processo muito trabalhoso. Entretanto, a ampliação de t_{cE} para t_{cE}’ permite uma economia de escrita dos números e dos cálculos dos múltiplos dos primos básicos, já que se reduziu o conjunto dos números, passando a trabalhar somente com o conjunto dos números ímpares, usando as quatro terminações.

Portanto, podemos concluir que essa nova representação da técnica t_{cE}’ permite fazer operações aritméticas de multiplicação e divisão com os primos básicos com mais economia e eficiência. A respeito do crivo de primalidade de Eratóstenes, Fonseca (2016, p. 53) enfatiza

> Na apresentação dos números primos uma questão habitual é a de determinar todos os números primos até certo limite dado. Um procedimento simples, mostrado no ensino fundamental. Há que se indicar, também, a relevância, no ensino superior, não apenas de se determinar certa quantidade de primos usando os crivos, como a questão fundamental de se discutir a primalidade de inteiro positivo ímpar como estratégia de trabalho didático e de resolução de problemas, no âmbito de situações didáticas.

Para que se possa trabalhar didaticamente com a identificação de grupos de números primos em intervalos, cada vez mais amplos, em decorrência de tudo o que já foi exposto neste estudo, surgiu a necessidade de ampliação da técnica de identificar um grupo de primos, em qualquer intervalo de números.

O método alternativo de identificação de grupos de números primos em qualquer intervalo de números

As limitações da atividade matemática percebidas na Organização Matemática OM_{cE} tornam evidente a necessidade de ampliação desta OM_{cE}, ou seja, da construção de uma nova, a qual denominamos OM_{maip}, para a realização das tarefas matemáticas que não foram possíveis de executar na OM_{cE}. Temos uma nova questão problemática como tarefa geradora da OM_{maip}:

(8) Como identificar grupos de primos em intervalos cada vez maiores com maior economia e eficácia do processo, com outro método (usando fórmulas)?

Para atender à nova organização matemática (OM_{maip}), criamos um método, com processos próprios e duas fórmulas que, combinadas, geram todos os números primos de qualquer intervalo de números, apresentado a seguir.

Organização matemática, em torno do método alternativo de identificação de grupos de números primos em qualquer intervalo de números

A identificação de números primos do tipo 4 (através do método alternativo de identificação de grupos de números primos em qualquer intervalo de números) constitui uma técnica de processos de identificação de grupos de primos t_{maip},, que possibilita dar uma resposta definitiva à questão (3) e resolver a tarefa (8).

Anteriormente à técnica t_{cE}', apresentou-se um processo mais econômico de identificação de grupos de primos, utilizando os números ímpares com quatro terminações. Contudo, nosso objetivo com a OM_{maip} é reduzir ainda mais esse conjunto de números e resolver com confiabilidade as tarefas associadas à questão (8), a partir do método alternativo proposto, com a criação de duas fórmulas: fórmula geral (1) e fórmula de geração dos compostos primazes (2), além de um processo bem definido para aplicação do método.

Para o desenvolvimento desta $OM_{maip,,}$ alguns elementos e definições serão usados daqui em diante para aplicação inicial da técnica t_{maip}:

- Os números primos básicos 2, 3 e 5 são exceções. Os múltiplos de 3 não fazem parte dos números que compõem as fórmulas 1 e 2.
- O conjunto dos números ímpares foi reduzido para se utilizar apenas os que terminam em 1, 3, 7 e 9, identificados pelos algarismos da unidade, daqui por diante representados por: T_1, T_3, T_7, T_9.
- Uso das duas fórmulas: fórmula geral (F1), produz todos os números do intervalo dado como base (primos e compostos primazes); a segunda (F2), produz os compostos primazes contidos nos números gerados pela F1.
- Uso de duas sequências (alternadas) para cada uma das quatro terminações.
- Os múltiplos dos primos básicos $m(p_b)$ são denominados de compostos primazes (Č) por pertencerem ao universo de números gerados pela fórmula geral e serão usados na identificação dos primos do intervalo dado.

Para identificar os números primos, é necessário calcular os múltiplos dos primos básicos, mas não todos os múltiplos, apenas os restritos ao intervalo dado e gerados pela fórmula 1, terminados em 1, 3, 7 e 9, representado da seguinte forma: $p_b \,.\, n = m(p_b) = \check{C}$, onde "n" o segundo fator da multiplicação terá as mesmas terminações (n_1, n_3, n_7, n_9).

Para facilitar os cálculos dos múltiplos dos primos básicos, produzimos os arranjos de combinações possíveis com as quatro terminações, conforme Tabela 7:

Tabela 7.

Combinações possíveis para o cálculo dos múltiplos $m(p_b)$.

Terminação 1	**Terminação 3**	**Terminação 7**	**Terminação 9**
$P_{b1} \,.\, n_1 = \check{C}_1$	$P_{b1} \,.\, n_3 = \check{C}_3$	$P_{b1} \,.\, n_7 = \check{C}_7$	$P_{b1} \,.\, n_9 = \check{C}_9$
$P_{b3} \,.\, n_7 = \check{C}_1$	$P_{b3} \,.\, n_1 = \check{C}_3$	$P_{b3} \,.\, n_9 = \check{C}_7$	$P_{b3} \,.\, n_3 = \check{C}_9$
$P_{b7} \,.\, n_3 = \check{C}_1$	$P_{b7} \,.\, n_9 = \check{C}_3$	$P_{b7} \,.\, n_1 = \check{C}_7$	$P_{b7} \,.\, n_7 = \check{C}_9$
$P_{b9} \,.\, n_9 = \check{C}_1$	$P_{b9} \,.\, n_7 = \check{C}_3$	$P_{b9} \,.\, n_3 = \check{C}_7$	$P_{b9} \,.\, n_1 = \check{C}_9$

Os índices de p e n são as terminações (1, 3, 7 e 9). Onde P = número primo básico e n Є N*, e Č = composto primaz, nas terminações 1, 3, 7 e 9.

Para determinar o segundo fator dos primos básicos das duas sequências, de cada terminação, dado um intervalo de números (a, b), usa-se o menor número do intervalo dado (a), para ser referência do fator *n,* sendo n > (a / P_b). Por exemplo, dado o intervalo de 500 a 1.000, usa-se o menor número do intervalo, 500 e divide-se esse número pelos primos básicos; o quociente significa o número que dá o referencial para o segundo fator que iniciará os cálculos das duas sequências de cada terminação, sendo: P_b . $n_{1,\,2}$ > 500.

Assim, teremos os cálculos dos múltiplos dos primos básicos que iniciarão as duas sequências de cada terminação.

Exemplo: Para o cálculo do 2º fator de P_b = 7 => 500 / 7 = 71,4

Logo, 71,4 é o referencial para a escolha do segundo fator "n", sendo n ≠ m(3), assim $n_{1,\,2}$ > 71 para as quatro terminações.

Quando (a / p_b) < P_b,, usamos o conceito da divisibilidade primeira, com o próprio primo básico como referência, assim $n_{1,2} \geq P_b$, se n = P_b , implica em $(P_b)^2$.

Conceito de divisibilidade primeira

Se um número é múltiplo de outro, por exemplo: 77 = 7 x 11, diz-se que 77 é múltiplo de 7 e de 11, mas, primeiramente, é múltiplo de 7 e dizemos que 77 é divisível por 7, ou seja, 77 sendo produto de dois primos tem 4 divisores: 1, 7, 11 e 77. Mas há números que só tem três divisores: a unidade, um primo e o próprio número, esses números são os quadrados de primos (P^2), como o número 49, que é divisível por ele próprio, por 7 e por 1. São esses números que determinam a divisibilidade primeira. No intervalo de 1 a 100, no exemplo dado anteriormente, usando o crivo de Eratóstenes, pode-se perceber esse fato, quando se escolhe calcular os múltiplos de 7, a partir do seu quadrado, ou seja, 7 x 7, pois, se fizesse 7 x 5 ou 7 x 3, os produtos já existiram quando se multiplicou primeiramente por 3 (3 x 7) ou por 5 (5 x 7).

Desta forma, esse é um conceito importante para reduzir o cálculo dos múltiplos dos primos básicos e evitar cálculos de números repetidos. Quando $P_b < \sqrt{b}$, e o quociente de (a / P_b) = n se torna menor que P_b, então os produtos de P_b por $n_{1,\,2}$ serão números já produzidos pelos primos básicos menores que o P_b em referência. Desse modo, para evitar essa situação, o primo básico que irá produzir os múltiplos será o referencial para o segundo fator (n), ou seja, $n \geq P_b$, se $n = P_b$,, então, o produto será o quadrado perfeito de P_b. Portanto, o quadrado de P é um referencial para se produzir os múltiplos primeiramente de P ou números divisíveis primeiramente por P. Daí o nome de divisibilidade primeira.

Os quadrados perfeitos de números primos terminados em 1, 3, 7 e 9 têm terminação 1 e 9, logo os quadrados perfeitos dos primos básicos ≥ 7 (neste contexto) só vão aparecer nas sequências de terminações 1 e 9.

As fórmulas usadas na aplicação da técnica t_{maip}

Para a identificação de um grupo de números primos, em qualquer intervalo de números, criou-se duas fórmulas: a primeira, denominada de *fórmula geral* ou também *fórmula (1)* produz o universo de números (primos e compostos primazes) do intervalo dado (a, b); a segunda fórmula (2) produz todos os múltiplos dos primos básicos do intervalo dado (a, b), denominados de compostos primazes (Č), por estarem contidos no universo de números produzidos pela fórmula (1).

$$\text{Fórmula geral: } 30n + \alpha_{1,2} = P \text{ ou } \check{C} \quad (1)$$

O número “α” é qualquer número ímpar terminados em 1, 3, 7 e 9, para as duas sequências, sendo números distintos e sequenciais ≠ m(3); sendo n = 0, 1, 2, 3, ... e $n \in Z_+$

No final dos cálculos com a Fórmula geral juntaremos as duas sequências, formando uma única sequência para cada terminação.

A segunda fórmula (2) foi elaborada para gerar apenas os múltiplos dos primos básicos (**Č**) que estão contidos no universo de números gerados pela fórmula 1.

$$rn + m(p_b)_{1,\,2} = \check{C} \quad (2)$$

Sendo “r” a razão e, $r = 30p_b$, com n = 0, 1, 2, 3, ... e $n \in Z_+$; $m(p_b)_{1,\,2}$, qualquer múltiplo dos primos básicos, sendo dois números distintos e sequenciais, para cada uma das sequências, nas quatro terminações e diferente de múltiplo de 3 ($m(p_b) \neq m(3)$). No final dos cálculos de cada $m(p_b)$ relacionamos os compostos primazes (**Č**)em uma única sequência por terminação.

Como a fórmula (2) produz **Č** que está contido da fórmula (1), temos que:

$$(30n + \alpha_{1,2}) - (rn + m(p_b)_{1,\,2}) = P$$

No início dos estudos, quando se procurava aprimorar esta técnica de identificar grupos de números primos em qualquer intervalo dado, ao fazer o primeiro teste para o intervalo de 01 a 1.000, observou-se que os múltiplos de três eram equivalentes a 56,8% dos números compostos produzidos, ou seja, enquanto os primos básicos (7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 e 31) produziram 43,2% juntos, no total de 101 múltiplos, o número 3, sozinho, produziu 133 múltiplos. Portanto, retirar o cálculo dos múltiplos de 3 foi uma decisão que propiciou aprimorar as duas fórmulas e elaborar o processo de aplicação do método.

Seguindo o procedimento das técnicas anteriores, T_{eE} e T_{cE}', na utilização do crivo de Eratóstenes conforme Dante (2015, p. 140) foram escritos os 100 primeiros números e solicitado para fazer o cálculo dos múltiplos dos quatro primos básicos e depois riscá-los. A proposta de variação da técnica T_{cE}, é para reduzir os cálculos e a escrita, surgindo o crivo somente dos números ímpares terminados em 1, 3, 7 e 9 com a técnica T_{cE}'. Assim, da mesma forma, a nossa proposta do método alternativo é para proporcionar mais ainda a redução de cálculos com o uso de fórmulas matemáticas para a identificação dos números primos. Por isso, vamos aplicar primeiramente no intervalo de 01 a 100, para mostrar que houve a redução dos cálculos.

Procedimentos para aplicação das duas fórmulas

1º passo: Escolher o intervalo (a, b) para identificação de grupos de primos;

2º passo: Determinar o limite dos primos básicos, a partir da raiz quadrada do maior número do intervalo dado (b), ou seja, $p_b \leq \sqrt{b}$, se a raiz de b não for um número inteiro, usar apenas a parte inteira como referência.

3º passo: Aplicar a fórmula 1 para encontrar o universo dos números;

4º passo: Aplicar a fórmula 2 para calcular todos os compostos primazes do intervalo dado e no final dos cálculos relacioná-los em sequência única para cada terminação;

5º passo: Relacionar as quatro sequências dos números produzidos pela fórmula 1 para eliminar os compostos primazes produzidos pela Fórmula 2:

6 º passo: Relacionar todos os números primos do intervalo dado.

A aplicação da técnica t_{maip} – identificação de grupos de primos no intervalo aberto de 01 a 100

1º passo: Escolha do intervalo (1, 100) para identificação de grupos de primos;

2º passo: Determinar o limite dos primos básicos, a partir da raiz quadrada do maior número do intervalo dado (100), ou seja, $p_b \leq \sqrt{100} = 10$. Logo, o primo menor do que 10 é o número 7.

3º passo: Aplicar a fórmula 1: $(30n + \alpha_{1,2})$ em duas sequências para as quatro terminações, conforme tabelas 8 e 9:

Tabela 8.

Aplicação da Fórmula Geral nas Terminações 1 e 3 no intervalo de 1 a 100

30n + $\alpha_{1,2}$ Sendo $\alpha \neq m(3)$, n = 0, 1, 2, 3, ... e n Є Z_+			
T_1		T_3	
S_1	S_2	S_1	S_2
30x0 + 11 = 11	30x0 + 31 = 31	30x0 + 13 = 13	30x0 + 23 = 23
30x1 + 11 = 41	30x1 + 31 = 61	30x1 + 13 = 43	30x1 + 23 = 53
30x2 + 11 = 71	30x2 + 31 = 91	30x2 + 13 = 73	30x2 + 23 = 83

Tabela 9.

Aplicação da Fórmula Geral nas Terminações 7 e 9 no intervalo de 500 a 1.000

30n + $\alpha_{1,2}$ sendo $\alpha \neq M(3)$, n = (0, 1, 2, 3, ...) e n Є Z_+			
T_7		T_9	
S_1	S_2	S_1	S_2
30x0 + 7 = 7	30x0 + 17 = 17	30x0 + 19 = 19	30x0 + 29 = 29
30x1 + 7 = 37	30x1 + 17 = 47	30x1 + 19 = 49	30x1 + 29 = 59
30x2 + 7 = 67	30x2 + 17 = 77	30x2 + 19 = 79	30x2 + 29 = 89
30x3 + 7 = 97			

A seguir juntaremos as duas sequências de cada terminação:

- Terminação 1: 11, 31, 41, 61, 71 e 91.
- Terminação 3: 13, 23, 43, 53, 73 e 83.
- Terminação 7: 7, 17, 37, 47, 67, 77 e 97.
- Terminação 9: 19, 29, 49, 59, 79 e 89.

Total de números: 25

4º passo: Aplicar a fórmula 2 ($rn + m(p_b)_{1,\ 2}$) para calcular todos os compostos primazes do intervalo dado, em duas sequências para cada uma das quatro terminações.

No segundo passo obtivemos o número primo 7 como o primo menor anterior a 10, raiz quadrada do maior número do intervalo dado. Como 2, 3 e 5 são exceções, vamos calcular os compostos primazes apenas de 7.

Primeiramente calculamos o 1º e 2º múltiplo das duas sequências para cada terminação, e a razão de cada primo básico (r = 30p) para depois aplicarmos nas fórmulas.

- Cálculo da razão para o número primo básico 7: 30 x 7 = 210
- Terminação 1: S_1: 7 x 13 = 91 S_2: 7 x 23 = 161 (excede o intervalo)

Aplicando na Fórmula 2: 210 x 0 + 91 = 91

- Terminação 3: S_1: 7 x 19 = 133 (excede o intervalo), logo não precisa calcular S_2 e não se aplica na Fórmula 2.
- Terminação 7: S_1: 7 x 11 = 77 S_2: 7 x 31 = 217 (excede o intervalo e não se aplica)

Aplicando na Fórmula 2: 210 x 0 + 77 = 77

- Terminação 9: S_1: 7 x 7 = 49 S_2: 7 x 17 = 119 (excede o intervalo e não se aplica)

Logo, os múltiplos de 7 de cada terminação são os seguintes: T_1: 91, T_3: não tem, T_7: 77, T_9: 49.

5º passo: Relacionar as quatro sequências dos números produzidos pela fórmula 1 para eliminar os compostos primazes produzidos pela Fórmula 2, riscando-os:

- Terminação 1: 11, 31, 41, 61, 71 e ~~91~~.
- Terminação 3: 13, 23, 43, 53, 73 e 83.
- Terminação 7: 7, 17, 37, 47, 67, ~~77~~ e 97.
- Terminação 9: 19, 29, ~~49~~, 59, 79 e 89.

6 º passo: Relacionar todos os números primos do intervalo dado.

- Terminação 1: 11, 31, 41, 61 e 71.
- Terminação 3: 13, 23, 43, 53, 73 e 83.
- Terminação 7: 7, 17, 37, 47, 67 e 97.
- Terminação 9: 19, 29, 59, 79 e 89.

Apresentaremos em uma sequência única a relação dos 25 números primos do intervalo de 1 a 100, agora incluindo os três primos que são as exceções: 2, 3, 5 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97.

Analisando esta nova técnica (t_{maip}) podemos concluir que houve bastante redução dos cálculos dos múltiplos, com relação às técnicas anteriormente apresentadas (t_{cE} e t_{cE}'), pois fizemos o cálculo apenas com um número primo básico. Além disso, confirmações nossa afirmação de que todos os números primos (com a exceção de 2, 3 e 5) e os compostos primazes, encontrados pela Fórmula 2, foram todos produzidos pela Fórmula 1.

Portanto concluímos que, de fato, com a aplicação das duas fórmulas encontramos todos os números primos do intervalo dado, F1 – F2 = P, ou seja, $(30n + \alpha_{1,2}) - (rn + m(p_b)_{1,2}) = P$

Para afirmamos que esse método poderá ser aplicado em qualquer intervalo dado de números vamos provar que as duas fórmulas usadas são válidas, usando as fórmulas a partir do primeiro intervalo dado, da forma como foi usada em cada terminação.

Aqui, apresentamos a validade de um caso particular, o que não pode garantir que poderá ser válida para qualquer intervalo de números, mesmo que possamos afirmar que fizemos o teste até o intervalo de cem mil números.

Segundo Sominski (1996, p. 13):

> Se temos uma proposição válida em vários casos particulares e é impossível analisar todos os casos, quando podemos afirmar que essa proposição é válida em geral? Às vezes tem-se a resposta aplicando um argumento especial, conhecido como método de indução matemática completa ou perfeita.

Esse método se baseia no princípio de indução matemática que consiste no seguinte: uma proposição é válida para todo número natural n se: 1º) é válida para n =1 e 2º) de sua validade para um número natural qualquer n = k deduz-se sua validade para n = k + 1 (Sominski, 1996, 13).

Desse modo, vamos testar a validade das duas fórmulas pelo método da indução matemática. Primeiro vamos testar a fórmula 1.

Para o uso da Fórmula Geral ou Fórmula 1 temos a proposição de que esta fórmula produz o universo de números ímpares, nas terminações 1, 3, 7 e 9, com a condição de que o número α deverá ser diferente de múltiplos de 3, assim, para qualquer intervalo de números em que será aplicada, a escolha desse número deve levar em conta essa condição, por isso, por exemplo, para a terminação 1, não escolhemos o número 21, pois é múltiplo de 3 (3|21) para a 2ª sequência, assim como escolhemos o número 3 para a 1ª sequência.

Vamos aplicar o método para 30n + 11, onde n = 0 => 30 x 0 +11 = 11

1º) A proposição é válida para n = 0

2º) Suponhamos que a proposição seja válida para n = k, ou seja, 30k + 11

$A_k = 30k + 30$

$$U_{k+1} = A_k + 11 = (30k + 30) + 11 = 30k + 41 =$$
$$= 30(k+1) + 11$$

Como podemos verificar, a fórmula da 1ª sequência da terminação 1 é válida para n = k e n = k+1.

Vamos verificar para a 2ª sequência com 30n + 31, onde n = 0 => 30 x 0 +31 = 31

1º) A proposição é válida para n = 0

2º) Suponhamos que a proposição seja válida para n = k, ou seja, 30k + 31

$A_k = 30k + 30$

$U_{k+1} = A_k + 31 = (30k + 30) + 31 = 30k + 61 =$

$= 30(k+1) + 31$

Portanto, podemos concluir que se a Fórmula geral é válida para as duas sequências da terminação 1 será válida para as duas sequências das terminações 3, 7 e 9.

Agora, vamos verificar a validade da Fórmula 2 ($rn + m(p_b)_{1,\,2}$) para p = 7, r = 30x7, ou seja, r = 210, onde o 1º múltiplo de 7 é 91, pois 7 x 13 = 91 e para a 2ª sequência o 2º múltiplo de 7 será 161, pois 7 x 23 = 161. Assim temos que para a 1ª sequência temos a fórmula: 210n + 91 e para a 2ª sequência temos: 210n + 161.

A primeira proposição é que 210n + 91seja divisível por 7.

1º) A proposição é válida para n = 0

2º) suponhamos que a proposição seja válida para n = k, ou seja, que

$A_k = 210k + 210$

$A_{k+1} = A_k + 91 = (210k + 210) + 91 =$

$= 210k + 301$

$= 210(k+1) + 91$

Como A_{k+1} é a soma de duas parcelas, ambas divisíveis por 7, então, A_{kt1} é divisível por 7.

A segunda proposição é que 210n + 161seja divisível por 7.

1º) A proposição é válida para n = 0

2º) suponhamos que a proposição seja válida para n = k, ou seja, que

$A_k = 210k + 210$

$A_{k+1} = A_k + 161 = (210k + 210) + 161 =$

$= 210k + 371$

$= 210(k+1) + 161$

Como A_{k+1} é a soma de duas parcelas, ambas divisíveis por 7, então, A_{kt1} é divisível por 7.

Portanto, se a fórmula 2 é válida para o número primo básico 7, então podemos inferir que é válida para qualquer número primo básico do intervalo dado da aplicação da técnica t_{maip}

Desse modo, para melhor visualização do processo, em qualquer intervalo de números, vamos aplicar o método para o intervalo de 500 a 1000 números.

Procedimentos para aplicação das duas fórmulas geral (1) e fórmula (2)

1º passo: Determinar o intervalo dado (a, b**):** 500 a 1000**.**

2º passo: Aplicar a fórmula 1 **(**30n + $\alpha_{1,\ 2}$) para gerar o universo de números no intervalo de 500 a 1000.

- Escolha do número "α" para as duas sequências de cada terminação, sendo α > 500 e α ≠ m(3): T_1: (S_1: α = 511, S_2: α = 521); T_3: (S_1: α = 503, S_2: α = 523); T_7: (S_1: α = 517, S_2: α = 527); T_9: (S_1: α = 509, S_2: α = 529).

Tabela 10.

Aplicação da Fórmula Geral nas Terminações 1 e 3 no intervalo de 500 a 1.000

30n + $\alpha_{1,\ 2}$ **Sendo α ≠ m(3), n = 0, 1, 2, 3, ... e n Є Z_+**			
T_1		T_3	
S_1	S_2	S_1	S_2
30x0 + 511 = 511	30x0 + 521 = 521	30x0 + 503 = 503	30x0 + 523 = 523
30x1 + 511 = 541	30x1 + 521 = 551	30x1 + 503 = 533	30x1 + 523 = 553
30x2 + 511 = 571	30x2 + 521 = 581	30x2 + 503 = 563	30x2 + 523 = 583
30x3 + 511 = 601	30x3 + 521 = 611	30x3 + 503 = 593	30x3 + 523 = 613
30x4 + 511 = 631	30x4 + 521 = 641	30x4 + 503 = 623	30x4 + 523 = 643
30x5 + 511 = 661	30x5 + 521 = 671	30x5 + 503 = 653	30x5 + 523 = 673
30x6 + 511 = 691	30x6 + 521 = 701	30x6 + 503 = 683	30x6 + 523 = 703
30x7 + 511 = 721	30x7 + 521 = 731	30x7 + 503 = 713	30x7 + 523 = 733
30x8 + 511 = 751	30x8 + 521 = 761	30x8 + 503 = 743	30x8 + 523 = 763
30x9 + 511 = 781	30x9 + 521 = 791	30x9 + 503 = 773	30x9 + 523 = 793
30x10 + 511 = 811	30x10 + 521 = 821	30x10 + 503 = 803	30x10 + 523 = 823
30x11 + 511 = 841	30x11 + 521 = 851	30x11 + 503 = 833	30x11 + 523 = 853
30x12 + 511 = 871	30x12 + 521 = 881	30x12 + 503 = 863	30x12 + 523 = 883
30x13 + 511 = 901	30x13 + 521 = 911	30x13 + 503 = 893	30x13 + 523 = 913
30x14 + 511 = 931	30x14 + 521 = 941	30x14 + 503 = 923	30x14 + 523 = 943
30x15 + 511 = 961	30x15 + 521 = 971	30x15 + 503 = 953	30x15 + 523 = 973

30x16 + 511 = 991	30x16 + 503 = 983

Tabela 11.

Aplicação da Fórmula Geral nas Terminações 7 e 9 no intervalo de 500 a 1.000

$30n + \alpha_{1,2}$

sendo $\alpha \neq M(3)$, n = (0, 1, 2, 3, ...) e $n \in Z_+$

T_7		T_9	
S_1	S_2	S_1	S_2
30x0 + 517 = 517	30x0 + 527 = 527	30x0 + 509 = 509	30x0 + 529 = 529
30x1 + 517 = 547	30x1 + 527 = 557	30x1 + 509 = 539	30x1 + 529 = 559
30x2 + 517 = 577	30x2 + 527 = 587	30x2 + 509 = 569	30x2 + 529 = 589
30x3 + 517 = 607	30x3 + 527 = 617	30x3 + 509 = 599	30x3 + 529 = 619
30x4 + 517 = 637	30x4 + 527 = 647	30x4 + 509 = 629	30x4 + 529 = 649
30x5 + 517 = 667	30x5 + 527 = 677	30x5 + 509 = 659	30x5 + 529 = 679
30x6 + 517 = 697	30x6 + 527 = 707	30x6 + 509 = 689	30x6 + 529 = 709
30x7 + 517 = 727	30x7 + 527 = 737	30x7 + 509 = 719	30x7 + 529 = 739
30x8 + 517 = 757	30x8 + 527 = 767	30x8 + 509 = 749	30x8 + 529 = 769
30x9 + 517 = 787	30x9 + 527 = 797	30x9 + 509 = 779	30x9 + 529 = 799
30x10 + 517 = 817	30x10 + 527 = 827	30x10 + 509 = 809	30x10 + 529 = 829
30x11 + 517 = 847	30x11 + 527 = 857	30x11 + 509 = 839	30x11 + 529 = 859
30x12 + 517 = 877	30x12 + 527 = 887	30x12 + 509 = 869	30x12 + 529 = 889
30x13 + 517 = 907	30x13 + 527 = 917	30x13 + 509 = 899	30x13 + 529 = 919
30x14 + 517 = 937	30x14 + 527 = 947	30x14 + 509 = 929	30x14 + 529 = 949
30x15 + 517 = 967	30x15 + 527 = 977	30x15 + 509 = 959	30x15 + 529 = 979
30x16 + 517 = 97		30x16 + 509 = 989	

A fórmula geral (Tabelas 10 e 11) produziu 132 números. Dentre esses números, há os números primos e os compostos primazes. Com o cálculo da produção dos compostos primazes pela fórmula 2, todos os primos gerados pela fórmula 1 serão identificados.

3º passo: Determinar o limite dos primos básicos para aplicar a fórmula 2, geradora dos compostos primazes, calculando-se a raiz quadrada do maior número do intervalo dado:

$$\sqrt{1000} = 31{,}6 \Rightarrow p_b \leq 31{,}6 \Rightarrow p_b = 31$$

Logo, os primos básicos para aplicar na F2 são: 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 e 31.

4º passo: Aplicar a fórmula 2, usando duas sequências alternadas para cada terminação: $rn + m(p_b)_{1,2} + = \check{C}$, sendo a razão r = $30p_b$, n = 0, 1, 2, 3, ... com n Є Z_+ e $m(p_b)$, qualquer múltiplo dos primos básicos que inicia o intervalo dado para cada uma das duas sequências de cada terminação

1) Cálculo dos múltiplos de 7, r: 30 x 7 = 210 (Tabela 12)

- Combinações para os cálculos: T_1:

  T_1: (p_7 x n_3), T_3: (p_7 x n_9), T_7: (p_7 x n_1), T_9 = (p_7 x n_7)

- Cálculo de m(7) para iniciar as duas sequências: 500 / 7 = 71,4, para n > 71.

  T_1, S_1 = 7 x 73 = 511, T_1, S_2 = 7 x 83 = 581

  T_3, S_1 = 7 x 79 = 553, T_3, S_2 = 7 x 89 = 623

  T_7, S_1 = 7 x 91 = 637, T_7, S_2 = 7 x 101 = 707

  T_9, S_1 = 7 x 77 = 539, T_9, S_2 = 7 x 97 = 679

Tabela 12.

Geração dos compostos primazes m(7) pela Fórmula 2

210n + m(7)$_{1,2}$			
Terminação 1		Terminação 3	
S_1	S_2	S_1	S_2
210 x 0 + 511= 511	210 x 0 + 581= 581	210 x 0 + 553= 553	210 x 0 + 623= 623
210 x 1 + 511= 721	210 x 1 + 581= 791	210 x 1 + 553= 763	210 x 1 + 623= 833
210 x 2 + 511= 931		210 x 2 + 553= 973	
Terminação 7		Terminação 9	
S_1	S_2	S_1	S_2
210 x 0 + 637= 637	210 x 0 + 707= 707	210 x 0 + 539= 539	210 x 0 + 679 = 679
210 x 1 + 637= 847	210 x 1 + 707= 917	210 x 1 + 539= 749	210 x 1 + 679 = 889
		210 x 2 + 539= 959	
Total de m(7) = 19			

2) Cálculo dos múltiplos de 11: r: 30 x 11 = 330 (Tabela 13)

- Combinações para os cálculos:

  T_1: (p_1 x n_1), T_3: (p_1 x n_3), T_7: (p_1 x n_7), T_9: (p_1 x n_9)

- Cálculo de m(11) para iniciar as duas sequências: 500 / 11 = 45,4, para n > 45.

  T_1, S_1 = 11 x 61 = 671, T_1, S_2 = 11 x 71 = 781,

  T_3, S_1 = 11 x 53 = 583, T_3, S_2 = 11 x 73 = 803

  T_7, S_1 = 11 x 47 = 517, T_7, S_2 = 11 x 67 = 737

  T_9, S_1 = 11 x 49 = 539, T_9, S_2 = 11 x 59 = 649

Tabela 13.

Geração dos compostos primazes m(11) pela Fórmula 2

330n + m(11)$_{1,2}$			
Terminação 1		Terminação 3	
S_1	S_2	S_1	S_2
330 x 0 + 671= 671	330 x 0 + 781= 781	330 x 0 + 583= 583 330 x 1 + 583= 913	330 x 0 + 803= 803
Terminação 7		Terminação 9	
S_1	S_2	S_1	S_2
330 x 0 + 517= 517 330 x 1 + 517= 847	330 x 0 + 737= 737	330 x 0 + 539= 539 330 x 1 + 539= 869	330 x 0 + 649 = 649 330 x 1 + 649 = 979
Total de m(11) = 12			

3) Cálculo dos múltiplos de 13, com r: 30 x 13 = 390 (Tabela 14)

- Combinações para os cálculos:
  T_1: (p_3 x n_7), T_3: (p_3 x n_1), T_7: (p_3 x n_9), T_9: (p_3 x n_3)
- Cálculo de m(13) para iniciar as duas sequências: 500 / 13 = 38,4, para n > 38.
  T_1, S_1 = 13 x 47 = 611, T_1, S_2 = 13 x 67 = 871
  T_3, S_1 = 13 x 41 = 533, T_3, S_2 = 13 x 61 = 793
  T_7, S_1 = 13 x 49 = 637, T_7, S_2 = 13 x 59 = 767
  T_9, S_1 = 13 x 43 = 559, T_9, S_2 = 13 x 53 = 689

Tabela 14.

Geração dos compostos primazes m(13) pela Fórmula 2

390n + m(13)$_{1,2}$			
Terminação 1		Terminação 3	
S_1	S_2	S_1	S_2
390 x 0 + 611= 611	390 x 0 + 871= 871	390 x 0 + 533= 533 390 x 1 + 533= 923	390 x 0 + 793= 793
Terminação 7		Terminação 9	
S_1	S_2	S_1	S_2
390 x 0 + 637= 637	390 x 0 + 767= 767	390 x 0 + 559= 559 390 x 1 + 559= 949	390 x 0 + 649 = 689
Total de m(13) = 10			

4) Cálculo dos múltiplos de 17, com r: 30 x 17 = 510 (Tabela 15)

- Combinações para os cálculos:

  T_1: (p_7 x n_3), T_3: (p_7 x n_9), T_7: (p_7 x n_1), T_9: (p_7 x n_7)

- Cálculo de m(17) para iniciar as duas sequências: 500 / 17 = 29,4, para n > 29.

  T_1, S_1 = 17 x 43 = 731, T_1, S_2 = 17 x 53 = 901

  T_3, S_1 = 17 x 49 = 833, T_3, S_2 = 17 x 59 = 1003*

  T_7, S_1 = 17 x 31 = 527, T_7, S_2 = 17 x 41 = 697

  T_9, S_1 = 17 x 37 = 629, T_9, S_2 = 17 x 47 = 799

Observação: (p x n) > 1000, (*) excede o intervalo, não é válido.

Tabela 15.

Geração dos compostos primazes m(17) pela Fórmula 2

510n + m(17)$_{1,2}$			
Terminação 1		Terminação 3	
S_1	S_2	S_1	S_2 (*)
510 x 0 + 731= 731	510 x 0 + 901= 901	510 x 0 + 833= 833	
Terminação 7		Terminação 9	
S_1	S_2	S_1	S_2
510 x 0 + 527= 527	510 x 0 + 697= 697	510 x 0 + 629= 629	510 x 0 + 649 = 799
Total de m(17) = 07			

5) Cálculo dos múltiplos de 19, com r: 30 x 19 = 570 (Tabela 16)

- Combinações para os cálculos:

T_1: (p_9 x n_9), T_3: (p_9 x n_7), T_7: (p_9 x n_3), T_9: (p_9 x n_1)

- Cálculo de m(17) para iniciar as duas sequências: 500 / 19 = 26,3, para n > 26.

T_1, S_1 = 19 x 29 = 551, T_1, S_2 = 19 x 49 = 931

T_3, S_1 = 19 x 37 = 703, T_3, S_2 = 19 x 47 = 893

T_7, S_1 = 19 x 43 = 817, T_7, S_2 = 19 x 53 = 1007*

T_9, S_1 = 19 x 31 = 589, T_9, S_2 = 19 x 41 = 779

Observação: (p x n) > 1000, (*) excede o intervalo, não é válido.

Tabela 16

Geração dos compostos primazes (19) pela Fórmula 2

570n + m(19)$_{1,2}$			
Terminação 1		Terminação 3	
S_1	S_2	S_1	S_2
570 x 0 + 551= 551	570 x 0 + 931= 931	570 x 0 + 703= 703	570 x 0 + 893= 893

Terminação 7		Terminação 9	
S_1	S_2 (*)	S_1	S_2
570 x 0 + 817= 817		570 x 0 + 589= 589	570 x 0 + 779 = 779
Total de m(19) = 07			

6) Cálculo dos múltiplos de 23, com r: 30 x 23 = 690 (Tabela 17)

- Combinações para os cálculos:

T_1: (p_3 x n_7), T_3: (p_3 x n_1),T_7: (p_3 x n_9), T_9: (p_3 x n_3)

- Cálculo de m(23) para iniciar as duas sequências: 500 / 13 = 21,7 para n > 21.

T_1, S_1 = 23 x 37 = 851, T_1, S_2 = 23 x 47 = 1081*

T_3, S_1 = 23 x 31 = 713, T_3, S_2 = 23 x 41 = 943

T_7, S_1 = 23 x 29 = 667, T_7, S_2 = 23 x 49 = 1127*

T_9, S_1 = 23 x 23 = 529, T_9, S_2 = 23 x 43 = 989

Observação: (p x n) > 1000, (*) excede o intervalo, não é válido.

Tabela 17.

Geração dos compostos primazes m(23) pela Formula 2

690n + m(23)$_{1, 2}$			
Terminação 1		Terminação 3	
S_1	S_2 (*)	S_1	S_2
690 x 0 + 851= 851		690 x 0 + 713= 713	690 x 0 + 943= 943
Terminação 7		Terminação 9	
S_1	S_2 (*)	S_1	S_2
690 x 0 + 667= 667		690 x 0 + 529= 529	690 x 0 + 989 = 989
Total de m(23) = 06			

7) Cálculo dos múltiplos de 29, com r: 30 x 29 = 870 (Tabela 18)

- Combinações para os cálculos:

T_1: (p_9 x n_9), T_3: (p_9 x n_7), T_7: (p_9 x n_3), T_9: (p_9 x n_1)

- Cálculo de m(29) para iniciar as duas sequências: 500 / 29 = 17,3.

Observe que 17, 3 < 29, então n ≥ 29.

Para n ≥ 29. T_1, S_1 = 29 x 29 = 841, T_1, S_2 = 29 x 49 = 1.421*

T_3, S_1 = 29 x 37 = 1073*, T_3, S_2 = 29 x 47 = 1363*

T_7, S_1 = 29 x 43 = 1247, T_7, S_2 = 29 x 53 = 1537

T_9, S_1 = 29 x 31 = 899, T_9, S_2 = 29 x 41 = 1189

Observação: (pn) > 1000, (*) excede o intervalo, não é válido.

Tabela 18.

Geração dos compostos primazes m(29) pela Fórmula 2

870n + m(29)$_{1,2}$			
Terminação 1		Terminação 3	
S_1	S_2 (*)	S_1 (*)	S_2 (*)
870 x 0 + 841= 841			
Terminação 7		Terminação 9	
S_1 (*)	S_2 (*)	S_1	S_2 (*)
		870 x 0 + 899= 899	
Total de M(29) = 02			

8) Cálculo dos múltiplos de 31: r: 30 x 31 = 930 (Tabela 19)

- Combinações para os cálculos:

T_1: (p_1 x n_1), T_3: (p_1 x n_3), T_7: (p_1 x n_7), T_9: (p_1 x n_9)

- Cálculo de m(31) para iniciar as duas sequências: 500 / 11 = 16,1.

Observe que 16,1 < 31, logo, aplica-se o critério da divisibilidade primeira. Para n ≥ 31:

T_1, S_1 = 31 x 31 = 961, T_1, S_2 = 31 x 41 = 1271*

T_3, S_1 = 31 x 43 = 1.333*, T_3, S_2 = 31 x 53 = 1.643*

T_7, S_1 = 31 x 37 = 1.147*, T_7, S_2 = 31 x 47 = 1.457*)

T_9, S_1 = 31 x 49 = 1.519*, T_9, S_2 = 31 x 59 = 1.829*

Observação: (p x n) > 1000, (*) excede o intervalo, não é válido.

Nesse caso o cálculo do m(31) só se aplica na Fórmula 2 para a primeira sequência da terminação 1, pois para as outras terminações o valor p.n excede o intervalo dado.

Terminação: S_1: 930 x 0 + 961= 9611

5º passo: relaciona-se os números compostos primazes do intervalo dado em sequência única nas quatro terminações e identifica-se nos números produzidos pela fórmula 1.

1) A sequência única os compostos primazes m(7) nas quatro terminações:

Terminação 1: 511, 581, 721, 791 e 931 Terminação 3: 553, 623, 763, 833 e 973.

Terminação 7: 637, 707, 847 e 917 Terminação 9: 539, 679, 749, 889 e 959.

2) A sequência única dos compostos primazes m(11) nas quatro terminações:

Terminação 1: 671 e 781 Terminação 3: 583, 803 e 913.

Terminação 7: 517, 737 e 847_r Terminação 9: 539_r, 649, 869 e 979.

Observação: têm dois compostos primazes repetidos ($\check{C}_r$), pois aparecem em m(7).

3) A sequência única dos compostos primazes m(13) nas quatro terminações:

Terminação 1: 611 e 871 Terminação 3: 533, 793 e 923.

Terminação 7: 637_r, e 767 Terminação 9: 559, 689 e 949.

Observação: tem um composto primaz repetido ($\check{C}_r$), pois aparece em m(7).

4) A sequência única dos compostos primazes m(17) nas quatro terminações:

Terminação 1: 731 e 901 Terminação 3: 833_r

Terminação 7: 527, e 797 Terminação 9: 629 e 799.

Observação: tem um composto primaz repetido ($\check{C}_r$), pois aparece em m(7).

5) A sequência única dos compostos primazes m(19) nas quatro terminações:

Terminação 1: 551 e 931_r Terminação 3: 703 e 893

Terminação 7: 817 Terminação 9: 589 e 779.

Observação: tem um composto primaz repetido ($\check{C}_r$), pois aparece em m(7).

6) A sequência única dos compostos primazes m(23) nas quatro terminações:

Terminação 1: 851 Terminação 3: 713 e 943

Terminação 7: 667 Terminação 9: 529 e 989.

7) A sequência única dos compostos primazes m(29) nas quatro terminações:

Terminação 1: 841 Terminação 3: 0 Terminação 7: 0 Terminação 9: 899.

8) A sequência única dos compostos primazes m(31) nas quatro terminações:

Terminação 1: 961 Terminação 3:0 Terminação 7: 0 Terminação 9: 0

O total de compostos primazes gerados foram 64, mas retiramos os cinco compostos repetidos (C - $\check{C}_r$), pois não aparecem mais de uma vez na fórmula geral. Logo, serão 59 compostos primazes a serem eliminados.

- Vamos usar as Tabela 19 e 20 que contém os números produzidos pela fórmula geral, para identificar os compostos primazes produzidos pela fórmula 2.

Tabela 19.

Resultado dos cálculos com as duas fórmulas (F1 – F2)

$\mathbf{(30n + \alpha_{1,2}) - (rn + m(p_b)_{1,2}) = P}$			
Terminação 1		Terminação 3	
Sequência 1	Sequência 2	Sequência 1	Sequência 2
30x0 + 511 = 511-M(7)	30x0 + 521 = 521	30x0 + 503 = 503	30x0 + 523 = 523
30x1 + 511 = 541	30x1 + 521 = 551-M(19)	30x1 + 503 = 533-M(13)	30x1 + 523 = 553-M(7)
30x2 + 511 = 571	30x2 + 521 = 581-M(7)	30x2 + 503 = 563	30x2 + 523 = 583-M(11)
30x3 + 511 = 601	30x3 + 521 = 611-M(13)	30x3 + 503 = 593	30x3 + 523 = 613
30x4 + 511 = 631	30x4 + 521 = 641	30x4 + 503 = 623-M(7)	30x4 + 523 = 643
30x5 + 511 = 661		30x5 + 503 = 653	30x5 + 523 = 673

30x6 + 511 = 691	30x5 + 521 = 671-M(11)	30x6 + 503 = 683	30x6 + 523 = 703-M(19)
30x7 + 511 = 721-M(7)	30x6 + 521 = 701	30x7 + 503 = 713-M(23)	30x7 + 523 = 733
30x8 + 511 = 751	30x7 + 521 = 731-M(17)	30x8 + 503 = 743	30x8 + 523 = 763-M(7)
30x9 + 511 = 781-M(11)	30x8 + 521 = 761	30x9 + 503 = 773	30x9 + 523 = 793-M(13)
30x10 + 511 = 811	30x9 + 521 = 791-M(7)	30x10 + 503 = 803-M(11)	30x10 + 523 = 823
30x11+511= 841-M(29)	30x10 + 521 = 821	30x11 + 503 = 833-M(7)	30x11 + 523 = 853
30x12+511= 871-M(13)	30x11 + 521 = 851-M(23)	30x12 + 503 = 863	30x12 + 523 = 883
30x13+511= 901-M(17)	30x12 + 521 = 881	30x13 + 503 = 893-M(19)	30x13+523= 913-M(11)
30x14 + 511 = 931-M(7)	30x13 + 521 = 911	30x14 + 503 = 923-M(13)	30x14 + 523 = 943-M(23)
30x15+511= 961-M(31)	30x14 + 521 = 941	30x15 + 503 = 953	30x15 + 523 = 973M(7)
30x16 + 511 = 991	30x15 + 521 = 971	30x16 + 503 = 983	

Tabela 20.

Resultado final dos cálculos com as duas fórmulas (F1 – F2)

$(30n + \alpha_{1,2}) - (rn + m(p_b)_{1,2}) = P$			
Terminação 7		Terminação 9	
Sequência 1	Sequência 2	Sequência 1	Sequência 2
30x0 + 517 = 517-M(11)	30x0 + 527 = 527-M(17)	30x0 + 509 = 509	30x0 + 529 = 529-M(23)
30x1 + 517 = 547	30x1 + 527 = 557	30x1 + 509 = 539-M(7)	30x1 + 529 = 559-M(13)
30x2 + 517 = 577	30x2 + 527 = 587	30x2 + 509 = 569	30x2 + 529 = 589-M(19)
30x3 + 517 = 607	30x3 + 527 = 617	30x3 + 509 = 599	30x3 + 529 = 619
30x4 + 517 = 637-M(7)	30x4 + 527 = 647	30x4 + 509 = 629-M(17)	30x4 + 529 = 649-
30x5 + 517 = 667-M(23)	30x5 + 527 = 677	30x5 + 509 = 659	
	30x6 + 527 = 707-	30x6 + 509 = 689-	

30x6 + 517 = 697-M(17)	M(7)	M(13)	M(11)
30x7 + 517 = 727	30x7 + 527 = 737-M(11)	30x7 + 509 = 719	30x5 + 529 = 679-M(7)
30x8 + 517 = 757	30x8 + 527 = 767-M(13)	30x8 + 509 = 749-M(7)	30x6 + 529 = 709
30x9 + 517 = 787	30x9 + 527 = 797	30x9 + 509 = 779-M(19)	30x7 + 529 = 739
30x10 + 517 = 817-M(19)	30x10 + 527 = 827	30x10 + 509 = 809	30x8 + 529 = 769
30x11 + 517 = 847-M(7)	30x11 + 527 = 857	30x11 + 509 = 839	30x9 + 529 = 799-M(17)
30x12 + 517 = 877	30x12 + 527 = 887	30x12 + 509 = 869-M(11)	30x10 + 529 = 829
30x13 + 517 = 907	30x13 + 527 = 917-M(7)	30x13 + 509 = 899-M(29)	30x11 + 529 = 859
30x14 + 517 = 937	30x14 + 527 = 947	30x14 + 509 = 929	30x12 + 529 = 889-M(7)
30x15 + 517 = 967	30x15 + 527 = 977	30x15 + 509 = 959-M(7)	30x13 + 529 = 919
30x16 + 517 = 997		30x16 + 509 = 989-M(23)	30x14 + 529 = 949-M(13)
			30x15 + 529 = 979-M(11)

Como podemos observar identificamos os compostos primazes, múltiplos dos primos básicos do intervalo dado. Desse modo, eliminando esses compostos primazes restarão somente os números primos, ou seja, com a aplicação das duas fórmulas, teremos como resultado de todo o processo apenas os números primos.

$$(30n + \alpha_{1,2}) - (rn + m(p_b)_{1,2}) = P$$

A seguir apresentamos todos os números primos do intervalo de 500 a 1000 a partir do uso da técnica.

6º passo: relacionar os números que não foram identificados pela fórmula 2. Esses números são todos os números primos do intervalo de 500 a 1000 (Tabela 21).

Tabela 21.

Números que não foram identificados pela fórmula 2

Números primos do intervalo de 500 a 1000											
503	509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587
593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739
743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823

827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907
911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991
997											

Fazendo o cálculo da diferença dos números produzidos pelas duas fórmulas, obtém-se a quantidade de números primos (F1 – F2 = P**)**. A Fórmula 1 produziu 132 números e a Fórmula 2 produziu 59 compostos primazes. Logo, 132 – 64 = 73 números primos.

Portanto, com a técnica T_{maip}, combinando as duas fórmulas foi possível gerar todos os números *primos do intervalo dado de 500 a 1000.*

Comparação das técnicas de identificação de grupos de primos

A técnica t_{maip} surgiu ao se perceber as dificuldades no uso da técnica t_{cE} de identificação de primos pelo crivo de Eratóstenes, quando se tratava de aplicar em intervalos maiores que 100. Com a ideia de aprimorar a técnica, desenvolvemos o método alternativo de identificar grupos de primos, em qualquer intervalo de números. O objetivo inicial era criar uma fórmula geradora de primos, mas percebemos que só uma fórmula não conseguiria concretizar a ideia, o que foi possível com a criação da segunda fórmula e, principalmente, com a aplicação em duas sequências (alternadas) em ambas as fórmulas. Como resultado do processo empregado na aplicação das duas fórmulas, conseguiu-se grande redução de números e de cálculos. Entretanto, comparado com a técnica t_{cE}, tem-se mais confiabilidade, pois o processo está bem definido.

Através da fórmula 1, há a possibilidade de fazer a projeção do total de números gerados, no intervalo de mil em mil números, a qual foi testada inicialmente até 10 mil números. A partir daí as duas fórmulas foram testadas para o intervalo de 1 a 10.000 sendo usado o programa Excel para facilitar a computação dos dados, de forma que qualquer aluno que não entenda de programação poderia fazer. A Fórmula geral produziu o total de 2.668 números ímpares e, desses números 1.443 são compostos e 1.226 são números primos, complementando com os três primos que são exceções neste método (2, 3 e 5), o total de primos no intervalo de 1 a 10 mil foi de 1.229 números.

Poderíamos apresentar mais uma aplicação do nosso método, com outros intervalos de números, contudo, ultrapassaria a quantidade de páginas requeridas nas normas para a escrita deste trabalho.

Conclusão

Nesta pesquisa, propomos um modelo praxeológico alternativo para identificação de grupos de primos, em qualquer intervalo de números, para suprir a lacuna existente no ensino para o reconhecimento de primos maiores do que 100.

Nesse sentido, começamos com os primeiros 100 números para identificar os 25 primeiros números primos apresentando uma técnica inicial e tradicional nos livros didáticos de matemática, com algumas variações até se chegar à técnica T_{maip} - nosso método - com aplicação inicial no intervalo de 1 a 100 números e, posteriormente, apresentamos o processo para o intervalo de 500 a 1000 números.

A técnica t_{maip} surgiu ao percebermos as dificuldades no uso da técnica t_{cE} para identificação de primos pelo crivo de Eratóstenes, quando se tratava de aplicar em intervalos maiores que 100. Assim, desenvolvemos o método alternativo para identificar grupos de primos, em qualquer intervalo de números. O objetivo inicial era criar uma fórmula geradora de primos, mas percebemos que só uma fórmula não conseguiria concretizar a ideia, o que foi possível com a criação da segunda fórmula e, principalmente, com a aplicação em duas sequências (alternadas) em ambas as fórmulas.

Como resultado do processo empregado na aplicação das duas fórmulas, conseguimos uma expressiva redução nos cálculos, como podemos constatar ao compararmos a técnica (t_{cE}) inicial (crivo de Eratóstenes) - que se utiliza de todos os 100 números e do cálculo de todos os múltiplos dos primos (2, 3, 5 e 7) - e a nossa proposição, pois no emprego de nossa técnica T_{maip} pela Fórmula 1 geramos 25 números e usamos apenas o primo básico 7 que calcula somente três múltiplos (49, 77 e 91). Além disso, alargamos a identificação de números primos ao aplicarmos a técnica no intervalo de 500 a 1000 números.

Através da fórmula 1, há a possibilidade de fazer a projeção do total de números gerados, no intervalo de mil em mil números, a qual foi testada inicialmente até 10 mil números. A partir daí as duas fórmulas foram testadas para o intervalo de 1 a 10.000 sendo usado o programa Excel para facilitar a computação dos dados. A Fórmula geral produziu o total de 2.668 números ímpares e, desses números 1.443 são compostos e 1.226 são números primos, complementando com os três primos que são exceções neste método (2, 3 e 5), o total de primos no intervalo de 1 a 10 mil foi de 1.229 números.

Nesses termos, apresentamos um modelo praxeológico alternativo para identificação de grupos de primos para qualquer intervalo de número, a fim de ampliar o conhecimento ou mesmo revigorar o conhecimento existente sobre os números primos. Não tivemos a intenção de apenas trazer mais um algoritmo de cálculo com fórmulas, mas uma proposta para auxiliar na compreensão dos números primos e sua difusão nas escolas.

Esperamos que este estudo sirva para que os profissionais do ensino das matemáticas possam refletir sobre as questões aqui levantadas e para que se possa melhorar o quadro em que se encontra esse ensino. Espera-se ainda que o tema dos números primos tenha um lugar de destaque no ensino pela sua importância no próprio desenvolvimento da matemática, tanto da matemática que se ensina nas salas de aulas como na pesquisa em matemática pura e aplicada, bem como na sua aplicação em outras áreas do conhecimento.

Referências

Almeida, C. V. A. (2014). *Números Primos Gaussianos para o Ensino Médio*. **[**Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal da Paraíba]. https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/19488

Barbosa, G. S. (2008). *O Teorema Fundamental da Aritmética: Jogos e Problemas com Alunos do 6º ano do Ensino Fundamental*. [Tese de Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11358

Bitencourt, C. S. (2018). *A Conjectura de Goldbach e a Intuição Matemática*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal da Bahia]. https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3914&id2=150131131

Campos, J. P. (2014). *Algoritmos para Fatoração e Primalidade como Ferramenta Didática para o Ensino de Matemática*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de Rondônia]. https://ri.unir.br/jspui/handle/123456789/1224

Carvalho, F. R. (2015). *Números Primos e o Teorema Fundamental da Aritmética no Sexto Ano do Ensino Fundamental*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada]. https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2222&id2=79399

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique desenvolvimento Mathematiques: I' approche anthropologique. *Recherces em Didactique dês mathematiques. 19*(2), 221-226.

Chevallard. Y. (2009). *La TAD face au professeur de mathématiques*. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_face_au_professeur_de_mathematiques.pdf

Daineze. K. C. S. A. L. (2013*). Números Primos e Criptografia: da Relação com a Educação ao Sistema RSA*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro]. https://tede.ufrrj.br/jspui/handle/jspui/1912

Dante, L. R. *Projeto Teláris: Matemática*. Livro do professor. 6º ano. São Paulo: Ática, 2015.

Dias, C. H. B. B. (2013). *Números Primos e Divisibilidade: Estudo de Propriedades.* [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Estadual Paulista]. http://www.rc.unesp.br/igce/pos/profmat/arquivos/dissertacoes/N%C3%BAmeros%20Primos%20e%20Divisibilidade%20Estudo%20de%20Propriedades.pdf

Fonseca, R. V. (2017). *Números primos e o teorema fundamental da aritmética: uma investigação entre estudantes de licenciatura em Matemática* [Tese de Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11036

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa, 4*(2), 129–159.

Gascón, J. (2003). La necessidade de utilizar modelos em didáctica de las Matemáticas. *Educação Matemática e Pesquisa, 5*(2), 11 – 37.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, (número especial: 26 anos), 99–123.

Florensa, I. Bosch, M. & Gascón, J. (2020). Reference epistemological model: what form and function in school institutions?Modelo epistemológico de referencia: ¿qué forma y función en las instituciones escolares? *Educação Matemática Pesquisa, 22*(4), 240-249. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p240-249

Farias, D.G. (2016). *O Estudo do Ensino de Números Primos na Educação Básica*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de Alagoas]. https://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/2433/1/Um%20estudo%20do%20ensino%20de%20n%C3%BAmeros%20primos%20na%20educa%C3%A7%C3%A3o%20b%C3%A1sica.pdf

Ferreira, A. E. (2014). *Números Primos e o Postulado de Bertrand*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal da Paraíba]. https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9336/2/arquivototal.pdf

Machado, E. R. (2015). *Números Primos: Uma abordagem Educacional*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Amazonas]. https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/4951

Oliveira, G. P., Fonseca, R. V. (2017). A teoria dos números na formação de professores de matemática: (in)compreensões acerca da primalidade e do teorema fundamental da Aritmética**.** *Ciência & Educação, 23*(4), 881-898. https://doi.org/10.1590/1516-731320170040015

Padilha, J. C. R. (2013). *Números Primos*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal da Paraíba]. https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7534

Paiva. G. I. J. P. (2014). *Números Primos e Testes de Primalidade*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada]. https://impa.br/wp-content/uploads/2017/07/31CBM-P_DMTereza.pdf

Pereira, A. L. (2017). *Números Primos e a Conjectura de Goldbach*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do ABC]. http://biblioteca.ufabc.edu.br/index.php?codigo_sophia=107321

Petravicius, D. (2016). *A Função Zeta de Riemann e os Números Primos*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Estadual de Campinas]. https://repositorio.unicamp.br/Busca/Download?codigoArquivo=503655

Rigoti, M. D. (2016). *Números Primos: Os Átomos dos Números*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná]. http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1075

Santos, C. L. (2014). *Os Números Primos*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz]. https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=928&id2=272

Delgado, T. A. D. (2006). *Lo matemático en el diseño y analisis de organizaciones didáticas*: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes. Madrid: Universidade Complutense de Madrid. (Tese de Doutorado).

Soares, V. C. (2015). *Números Primos: Aplicações e Primalidade*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Estadual Paulista]. https://repositorio.unesp.br/bitstream/11449/108812/1/000773210.pdf

Spina, A. V. (2014). *Números Primos e Criptografia*. [Disertação de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Estadual de Campinas]. https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/931032

Resende, M. R. (2007). *Re-significando a Disciplina Teoria dos Números na Formação do Professor de Matemática na Licenciatura*. [Tese de Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11207

Santos, J. P. O. (2007). *Introdução à Teoria dos números*. 3ª ed. Rio de Janeiro: IMPA.

Sominski, I. S. (1996). *Método de indução matemática*. Coordenação Nilson Machado; traduzido por Gelson Iezzi. – São Paulo: Atual; Moscou: Editora MIR. – (Coleção Matemática: aprendendo e ensinando).

Souza. G. M. B. (2018). O conteúdo de divisibilidade nos livros didáticos de matemática do 6º ano e documentos curriculares do ensino fundamental anos finais. [Tese de Doutorado em Educação em Ciências e Matemática]. - Universidade Federal de Mato Grosso, Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá.

Thurston W. P. (1994), On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society. 30*(2) 161-177. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/9404236.

Zazkis, R. & Campbell. S. R. (1996). Prime decomposition: Understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 207-218.

Zazkis, R & S. R. Campbell. (2006). Number Theory in Mathematics Education Research: Perspectives and Prospects. In R. Zazkis & S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (p. 1–18). https://doi.org/10.4324/9780203053904

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(3), 164-186. https://doi.org/10.2307/30034911