

La formación del profesorado de matemáticas en tiempos de crisis paradigmática

Mathematics teacher education in times of paradigmatic crisis

La formation des enseignants de mathématiques en période de crise paradigmatique

Formação de professores de matemática em tempos de crise paradigmática

Josep Gascón¹

Universitat Autònoma de Barcelona

Doutor em Matemática

<https://orcid.org/0000-0001-5570-1144>

Resumen

El punto de vista psicopedagógico se ha ido imponiendo progresivamente en la interpretación de los hechos educativos, especialmente (pero no únicamente) en las instituciones responsables de la enseñanza preuniversitaria. No existe, sin embargo, un acuerdo sobre el tipo de matemáticas que deben enseñarse en dichas instituciones, ni sobre el tipo de argumentos que es necesario utilizar en los correspondientes procesos de enseñanza ni, mucho menos, sobre cuáles son, en definitiva, los fines de la educación matemática en esas etapas educativas. Esta ausencia de un *paradigma didáctico disciplinar* (matemático) compartido, constituye un claro indicador de una crisis que tiene una larga historia y en la que permanece la educación matemática no universitaria desde, al menos, el fracaso de la matemática moderna a mediados del siglo pasado. En este artículo mostraremos que la formación del profesorado vigente en nuestras instituciones docentes continúa fuertemente condicionada por el *paradigma psicopedagógico* y por la cultura de la «posmodernidad» en la que este paradigma se sustenta. En el caso del profesorado de matemáticas, dada la ausencia de un paradigma didáctico disciplinar compartido, la formación está regida, complementariamente, por los paradigmas didácticos subdisciplinares vigentes en cada uno de los ámbitos de la matemática escolar y no siempre compatibles entre sí.

Palabras clave: Teoría antropológica de lo didáctico, Paradigma didáctico, Cultura de la posmodernidad, Paradigma psicopedagógico, Modalidad de formación del profesorado (de matemáticas)

¹ josepgasconperez@gmail.com

Abstract

The psycho-pedagogical point of view has been progressively imposing itself in the interpretation of educational facts, especially (but not only) in the institutions responsible for pre-university education. There is no agreement, however, on the type of mathematics that should be taught in these institutions, nor on the type of arguments that need to be used in the corresponding teaching processes, nor, much less, on what are, in short, the purposes of mathematics education in these educational stages. This absence of a shared disciplinary (mathematical) didactic paradigm is a clear indicator of a crisis that has a long history and in which non-university mathematics education has remained since at least the failure of modern mathematics in the middle of the last century. In this article we will show that teacher education in our educational institutions continues to be strongly conditioned by the psycho-pedagogical paradigm and by the culture of "postmodernity" on which this paradigm is based. In the case of mathematics teachers, given the absence of a shared disciplinary didactic paradigm, training is governed, complementarily, by the subdisciplinary didactic paradigms in force in each of the fields of school mathematics, which are not always compatible with each other.

Keywords: Anthropological didactic theory, Didactic paradigm, Postmodern culture, Psychopedagogical paradigm, Teacher training modality (mathematics)

Résumé

Le point de vue psychopédagogique a progressivement gagné du terrain dans l'interprétation des faits éducatifs, en particulier (mais pas seulement) dans les institutions responsables de l'enseignement pré-universitaire. Cependant, il n'y a pas d'accord sur le type de mathématiques qui devraient être enseignées dans ces institutions, ni sur le type d'arguments qui doivent être utilisés dans les processus d'enseignement correspondants, ni, encore moins, sur les objectifs ultimes de l'enseignement des mathématiques à ces stades de l'éducation. Cette absence de paradigme didactique disciplinaire (mathématique) partagé est un indicateur clair d'une crise qui a une longue histoire et dans laquelle l'enseignement non universitaire des mathématiques est resté depuis au moins l'échec des mathématiques modernes au milieu du siècle dernier. Dans cet article, nous montrerons que la formation des enseignants dans nos établissements d'enseignement continue d'être fortement conditionnée par le paradigme psychopédagogique et par la culture de la "postmodernité" sur laquelle ce paradigme est basé. Dans le cas des enseignants de mathématiques, étant donné l'absence d'un paradigme didactique disciplinaire partagé, la formation est régie, de manière complémentaire, par les paradigmes didactiques

sous-disciplinaires en vigueur dans chacun des domaines des mathématiques scolaires, qui ne sont pas toujours compatibles entre eux.

Mots clé : Théorie anthropologique du didactique, Paradigme didactique, Culture postmoderne, Paradigme psychopédagogique, Modalité de formation des enseignants (mathématiques).

Resumo

O ponto de vista psicopedagógico vem ganhando espaço gradualmente na interpretação dos fatos educacionais, especialmente (mas não apenas) nas instituições responsáveis pela educação pré-universitária. Entretanto, não há acordo sobre o tipo de matemática que deve ser ensinada nessas instituições, nem sobre o tipo de argumentos que precisam ser usados nos processos de ensino correspondentes, nem, muito menos, sobre os objetivos finais da educação matemática nesses estágios educacionais. Essa ausência de um paradigma didático disciplinar (matemático) compartilhado é um indicador claro de uma crise que tem uma longa história e na qual a educação matemática não universitária permanece desde, pelo menos, o fracasso da matemática moderna em meados do século passado. Neste artigo, mostraremos que a formação de professores em nossas instituições educacionais continua a ser fortemente condicionada pelo paradigma psicopedagógico e pela cultura da "pós-modernidade" na qual esse paradigma se baseia. No caso dos professores de matemática, dada a ausência de um paradigma didático disciplinar compartilhado, a formação é regida, complementarmente, pelos paradigmas didáticos subdisciplinares vigentes em cada um dos campos da matemática escolar, que nem sempre são compatíveis entre si.

Palavras-chave: Teoria antropológica do didático, Paradigma didático, Cultura pós-moderna, Paradigma psicopedagógico, Modalidade de formação de professores (matemática)

La formación del profesorado de matemáticas en tiempos de crisis paradigmática

Toda institución educativa construye, en acto, una noción de *estudio*, esto es, asume una forma de interpretar los conocimientos, privilegia unos fines educativos y propugna unos medios didácticos para alcanzarlos. En definitiva, construye un esbozo de *paradigma didáctico*, un tipo particular de *modalidad de estudio*. Se trata de una construcción cultural que se desarrolla a lo largo del tiempo y está condicionada por todo tipo de factores sociales, económicos, culturales, religiosos, etc. Por ello, no es posible asegurar a priori que será suficientemente homogénea y coherente ni, por tanto, que pueda ser asumida y compartida, mayoritariamente (aunque sólo sea de manera implícita) por los sujetos de la citada institución.

En este trabajo pretendemos mostrar, desde la perspectiva que proporciona la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD) en la que nos situamos, que los sucesivos movimientos de renovación de la enseñanza de las matemáticas, especialmente en el nivel de la enseñanza secundaria, han sido intentos fallidos en lo que concierne a construir un paradigma didáctico disciplinar (matemático) que pueda ser asumido en dicha institución (Gascón & Nicolás, 2021b). Veremos que la ausencia de un paradigma didáctico compartido, junto con la implantación progresiva del paradigma psicopedagógico, se reflejan en el tipo de formación que recibe el profesorado de matemáticas de secundaria.

Empezaremos por explicar brevemente, en la sección 1, la noción de *paradigma didáctico*. En la sección 2, describiremos sucintamente algunos de los movimientos de renovación que han pretendido, sin éxito, construir un paradigma disciplinar (matemático) compartido. En la sección 3 mostraremos los rasgos principales del *paradigma psicopedagógico* derivado de la cultura de la posmodernidad, así como los indicios de su creciente implantación, a nivel pedagógico, en los actuales sistemas docentes. En la sección 4, pondremos de manifiesto la incidencia del paradigma psicopedagógico y de los paradigmas didácticos subdisciplinares, vigentes en los diferentes ámbitos de la matemática escolar, sobre la *formación del profesorado de matemáticas*. Y, en la sección 5, propondremos interpretar las modalidades de formación del profesorado como un caso particular de paradigmas didácticos y los denominaremos *paradigmas de formación*. Concluiremos este trabajo con un pequeño resumen, a modo de síntesis, en la sección 6.

La noción de paradigma didáctico

Denominamos *paradigma didáctico*, PD, a una forma particular de organizar el estudio

en una institución escolar. Cada uno de los PD o *modalidades de estudio*² viene caracterizado por un *sistema complejo* integrado por cuatro componentes: un *modelo epistemológico*, ME, de los conocimientos en juego; los *finés educativos*, FE, que se persiguen con dicho estudio; los *medios didácticos*, MD, que se utilizan para alcanzar dichos fines; y los *fenómenos didácticos*, ϕD (sorprendentes y habitualmente «indeseables» desde cierta perspectiva) que constituyen el punto de partida, el *iniciador del proceso de constitución* del PD.

$$PD = [ME, FE, MD, \phi D]$$

Cada PD está sustentado en un ME que constituye una *representación* (desde cierta perspectiva) de los conocimientos en juego. Dado que, según la TAD, los conocimientos pueden describirse en términos de *praxeologías*, los ME se representan mediante una arborescencia de praxeologías que, a su vez, pueden interpretarse como respuestas tentativas a las cuestiones (relativas a ciertos sistemas) que podrían aparecer a lo largo de un hipotético proceso de indagación. El ME proporciona las nociones y los términos necesarios para formular los FE y condiciona el tipo de MD que podrían ser útiles para alcanzar dichos fines entre los que figura soslayar (o potenciar) los fenómenos didácticos ϕD . Se pone así de manifiesto la *unidad funcional* de los PD que, por tanto, deben considerarse como *sistemas complejos* cuya característica determinante es la *interdefinibilidad* y mutua dependencia de las *funciones* que cumplen sus componentes, o subsistemas, dentro del sistema total (Rolando García, 2006).

Las primeras versiones de los PD, *teoricismo*, *tecnicismo*, *modernismo*, etc., se referían al estudio de las matemáticas globalmente consideradas en una institución escolar, eran PD *disciplinares* (matemáticos) (Gascón, 1992, 1994, 2001). Utilizando la *escala de niveles de codeterminación didáctica* (Chevallard, 2002), hemos distinguido, además: los PD *pedagógicos*, que caracterizan el estudio escolar globalmente considerado; y los PD *subdisciplinares*, que caracterizan una forma concreta de estudiar cierto *ámbito* (curricular)³ designado como objeto de estudio en una institución escolar (Gascón & Nicolás, 2018b). Si un PD se refiere al estudio de un ámbito @ en una institución I, lo designaremos mediante $PD_I(@)$.

Hemos relacionado algunos PD disciplinares, como el *teoricismo* y el PD de la *modelización matemática*, PMM, con los PD pedagógicos descritos en (Chevallard, 2007b,

² Utilizaré la expresión «modalidad de estudio» como sinónimo de «paradigma didáctico». Para más detalles se puede consultar (Gascón & Nicolás, 2021a).

³ La noción de «ámbito» (curricular) no hace referencia a ninguno de los niveles concretos de la *escala de niveles de codeterminación didáctica* (Chevallard, 2002). Un *ámbito* @, propuesto como objeto de estudio en una institución escolar, está constituido por un *conglomerado praxeológico difuso* que se designa mediante una etiqueta como, p.ej., «el álgebra elemental», «los números reales», «la probabilidad condicionada», «la proporcionalidad», «los problemas de optimización» o «la geometría analítica».

2013a, 2013b), a saber, el PD de la *visita de las obras* (PVO) y el PD del *cuestionamiento del mundo* (PCM). Más concretamente, hemos mostrado que el PVO puede interpretarse como una generalización del teoricismo y el PCM como una generalización del PMM (Gascón & Nicolás, 2021a).

Para llevar a cabo el *análisis didáctico* de la modalidad de estudio vigente (y de las modalidades posibles), en torno a cierto ámbito \mathcal{A} en una institución I, la didáctica construye un *paradigma didáctico de referencia* $PDR_I(\mathcal{A}) = [\text{MER}, \text{FER}, \text{MDR}, \varphi\text{DR}]$.

El análisis didáctico se inicia con el *análisis praxeológico*⁴ de los conocimientos en juego que se lleva a cabo desde la perspectiva que proporciona el MER que sustenta dicho $PDR_I(\mathcal{A})$. Tomando en cuenta los resultados del análisis praxeológico, se estudian las relaciones entre los medios didácticos, los fines educativos y los fenómenos didácticos que la modalidad de estudio vigente pretende soslayar (¿los medios que se proponen son adecuados para obtener los fines que se propugnan?, si no es así, ¿qué medios se requerirían?, con los medios didácticos vigentes, ¿qué otros fines, deseados o no, se alcanzarán?, ¿qué relación puede establecerse entre los fines que se propugnan y los FER?, si el ámbito de la matemática escolar se conceptualiza mediante el $\text{MER}_I(\mathcal{A})$ y se utilizan los medios $\text{MDR}_I(\mathcal{A})$, ¿qué fenómenos didácticos saldrán a la luz?, etc.). El análisis didáctico culmina con la descripción y la explicación de los citados fenómenos didácticos emergentes. Es en este sentido que el análisis praxeológico constituye el primer paso y la puerta de entrada al análisis didáctico.

Al igual que los MER, los PDR son *tipos ideales* en el sentido de (Weber, 1904/2009). Los primeros PD contruidos desde la investigación –como el *teoricismo*, el *tecnicismo*, el *modernismo* y el PMM– deben considerarse PDR puesto que son artefactos teóricos elaborados desde la investigación para analizar y representar (ciertos rasgos de) la modalidad de estudio de las matemáticas vigente en las instituciones escolares. Por la misma razón, el PVO y el PCM deben considerarse PDR que operan a nivel pedagógico.

El análisis didáctico, basado en un $PDR_I(\mathcal{A})$, de los *procesos de estudio* que se llevan a cabo en una institución I en torno al ámbito \mathcal{A} , permite describir, interpretar y evaluar la modalidad de estudio vigente en I relativa a dicho ámbito. Se obtiene así una *representación* (de algunos rasgos) del *paradigma didáctico vigente* (o *dominante*) en I, $\text{PDV}_I(\mathcal{A})$, que depende del $PDR_I(\mathcal{A})$ tomado como referencia.

⁴ Mediante el *análisis praxeológico* se describe y evalúa la forma como se conceptualizan y cómo se utilizan las matemáticas que viven en una institución docente. Se obtiene así una *representación* (de algunos rasgos) de las matemáticas escolares que denominamos *modelo epistemológico vigente* (MEV) en dicha institución, y que depende del *modelo epistemológico de referencia* (MER) tomado como referencia.

$$PDV_I(\mathcal{Q}) = [MEV, FEV, MDV, \phi DV]$$

Podemos considerar que el $PDV_I(\mathcal{Q})$ es un *contrato que rige, al tiempo que caracteriza, la forma de estudiar \mathcal{Q} en I*, desde la perspectiva de cierto $PDR_I(\mathcal{Q})$. En general, los componentes del $PDV_I(\mathcal{Q})$, asumidos y compartidos tácitamente, son bastante transparentes para los sujetos de I.

Un $PDR_I(\mathcal{Q})$, es una *hipótesis científica* que puede formularse como sigue: si una comunidad de estudio (que cumpliera ciertas condiciones) llevara a cabo en I un proceso de estudio *regido* por el $PDR_I(\mathcal{Q})$, esto es, sustentado en el $MER_I(\mathcal{Q})$ y utilizando los medios $MDR_I(\mathcal{Q})$, entonces dicha comunidad eludiría ciertos fenómenos $\phi DR_I(\mathcal{Q})$, que acaecen cuando el estudio del ámbito \mathcal{Q} está *regido* por el $PDV_I(\mathcal{Q})$, y alcanzaría los fines, $FER_I(\mathcal{Q})$ que el $PDR_I(\mathcal{Q})$ propugna. Como toda hipótesis científica, debe ser contrastada empíricamente.

Ausencia de un paradigma disciplinar compartido en la institución de enseñanza secundaria de las matemáticas⁵

Émile Durkheim observó, a principios del siglo XX, que la confusión que afectaba a la enseñanza secundaria francesa se extendía más allá de las fronteras del país. Habla del “problema de la enseñanza secundaria” haciendo hincapié en la *ausencia de fines educativos compartidos*:

Desde la segunda mitad del siglo XVIII, la enseñanza secundaria atraviesa una grave crisis que aún no ha llegado a su desenlace. [...] De ahí esas reformas que, desde hace cerca de un siglo, se van sucediendo periódicamente, atestiguando, a la vez, tanto la dificultad como la urgencia del problema. [...] Hoy en día carecemos por completo de una forma de caracterizar el objetivo que debe perseguir la enseñanza impartida en nuestros institutos; no tenemos más que una idea muy confusa de lo que debe ser ese objetivo. (Durkheim, 1922/2013, p. 141-142).

En el caso de la enseñanza de las matemáticas, Yves Chevallard hizo un diagnóstico coherente con la confusión y la crisis que se desprenden de las palabras de Durkheim:

El estado actual de la enseñanza secundaria de las matemáticas plantea serios interrogantes. Algunos síntomas resumen esta situación: monumentalismo, formalismo, inautenticidad epistemológica, olvido del mundo y desvalorización de sus "necesidades", ilusión lírica, fantasía de insularidad y búsqueda de pureza, huida hacia la insignificancia lúdica y la puerilidad, fe ingenua en una redención "mutualizada" del software (Chevallard, 2007a, p. 460, la traducción es nuestra).

⁵ Algunas de las ideas de esta sección figuran en (Gascón & Nicolás, 2021b).

En esta sección analizaremos brevemente la evolución del impacto de esa crisis desde la segunda mitad del siglo XX hasta nuestros días, con especial atención a la *institución de la enseñanza de las matemáticas en secundaria* (IEMS). En nuestra opinión, la ausencia de fines educativos compartidos conlleva la *ausencia de un paradigma didáctico disciplinar* que pueda ser asumido en esa institución o, en otras palabras, la ausencia de respuestas claras y compartidas a cuestiones tales como las siguientes: ¿qué tipo de argumentos se pueden utilizar en la IEMS?, ¿cómo se deben presentar los conceptos matemáticos?, ¿cómo explicar en la IEMS lo que es una función continua o un triángulo rectángulo?, si no se van a utilizar los argumentos deductivos, ¿cómo se puede apoyar la verdad de una determinada proposición como, por ejemplo, el teorema de Pitágoras o el de Bolzano?, ¿es posible sustentar la verdad de estos teoremas con argumentos racionales?, ¿es necesario?, ¿basta con proponer definiciones “ostensivas” y “mostrar” la credibilidad de algunas proposiciones? En definitiva, ¿cómo se deben presentar las matemáticas en la enseñanza secundaria y *qué se debe presentar?*, y, sobre todo, ¿*para qué*, con qué fines educativos?

Afirmamos, y aportaremos algunas evidencias, que las sucesivas reformas y movimientos de renovación en la enseñanza de las matemáticas de secundaria son intentos de responder a las preguntas anteriores y, en última instancia, intentos de construir un paradigma didáctico disciplinar (matemático) que pudiera ser compartido en la IEMS. Pero todas esas reformas fueron consideradas como fracasos, en mayor o menor medida, por la propia comunidad educativa, aunque también es verdad que cada una de ellas dejó un rastro que todavía pervive de manera más o menos visible.

Empezamos nuestro relato con el movimiento de la *matemática moderna*, cuyo origen puede situarse en 1959, y que pretendía instaurar un nuevo plan de enseñanza de las matemáticas en base al espíritu del grupo Bourbaki. Con la idea de acercar las matemáticas de secundaria a las matemáticas profesionales, se pretendía sistematizar y organizar su enseñanza que había estado tradicionalmente cargada de conceptos y procedimientos inconexos y de muchos tipos de tareas rutinarias.

Para ello se propuso una versión simplificada del modelo epistemológico *euclideanista* (Lakatos, 1978) en el que las teorías formales desempeñaban un papel importante. Así, se trataba de introducir en la IEMS una teoría de conjuntos intuitiva, algunos aspectos de la lógica deductiva (algunos símbolos y rudimentos del método axiomático-deductivo), e incluso el estudio de las estructuras algebraicas, los conjuntos ordenados y los espacios topológicos, que habían demostrado su utilidad para unificar las matemáticas en la comunidad matemática sabia. En ese momento, todavía bajo el fuerte impacto de la gran hazaña intelectual histórica de

Bourbaki, existía una visión unificada de las matemáticas que las identificaba con teorías formales organizadas en torno a ciertos tipos de estructuras.

En consecuencia, los medios didácticos promovidos por el movimiento de la matemática moderna estaban muy condicionados por el *paradigma didáctico teorícista* (Gascón, 2001) que presentaba las matemáticas como una colección de teorías acabadas que aparecían de sopetón, como si fueran objetivos en sí mismas y no medios para alcanzar algún fin apreciado por nuestra sociedad. Esta forma autoritaria de enseñar las matemáticas y, en general, los medios didácticos del paradigma teorícista, subyacente al movimiento de la matemática moderna, pueden explicarse como reacción a la crisis de fundamentos que tuvo lugar a finales del siglo XIX y principios del XX. Pero las paradojas lógico-matemáticas no interpelaban a la IEMS que, por tanto, no podía admitir fácilmente propuestas elaboradas para responder a dicha crisis.

Durante la década de los setenta, el movimiento teorícista recibió muchas críticas que señalaban su falso rigor, su estilo pretencioso, la renuncia a la geometría sintética (Santaló, 1980), los problemas para conseguir que los alumnos aprendieran incluso las operaciones más básicas y, en definitiva, la confusión tanto para los profesores como para los alumnos, por no hablar de la desorientación provocada más allá del sistema educativo, empezando por los padres de los alumnos y llegando a amplios sectores de la sociedad.

Como primera reacción al fuerte movimiento teorícista de la matemática moderna, apareció⁶ la reivindicación de *¡Volver a lo básico!* con un énfasis en *el trabajo de la técnica* en el sentido de (Chevallard, 1999), muy desatendida por la matemática moderna. Así entró en escena un nuevo movimiento reformista que podría relacionarse con el *paradigma tecnicista* (Gascón, 2001). Este paradigma ponía el acento en los aspectos más rudimentarios del trabajo de la técnica, con especial atención a las *técnicas algorítmicas*. Estas tendencias tecnicistas se reforzaron en aquellas sociedades en las que el fracaso escolar en matemáticas había aumentado y son todavía visibles en los actuales sistemas educativos de una forma más o menos inconfesable.

Pero, después de todo, el tecnicismo sólo fue una protesta temporal contra el desastre didáctico del movimiento de la matemática moderna y no proporcionó un paradigma didáctico alternativo que pudiese ser asumido abierta y explícitamente en la IEMS. El paradigma tecnicista, al igual que el teorícista, relegaba la *resolución de problemas abiertos*⁷ a un segundo

⁶ En el ICMI de Kalsruhe (Alemania), en 1976, Michel Atiyah confirmó el fracaso de la reforma de la matemática moderna y propuso "volver a lo básico".

⁷ Los problemas *abiertos* se contraponen normalmente a los problemas *rutinarios* o *algorítmicos*. Se trata de problemas que admiten diferentes métodos de resolución pertenecientes a diferentes dominios de la matemática y cuya resolución requiere un trabajo a "largo plazo".

plano. Esto contradecía uno de los pocos acuerdos generales que estaban apareciendo en los años ochenta del siglo pasado: la necesidad de situar la resolución de problemas en el centro de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas⁸. Entró así en escena el movimiento del *Problem Solving* que comparte muchos rasgos con el *paradigma modernista* (Gascón, 2001) y que propugna, como principal fin educativo, el desarrollo autónomo en la actividad exploratoria de los alumnos y, en última instancia, aumentar su capacidad para resolver problemas abiertos. Sin embargo, el movimiento del *Problem Solving*, del que también quedan rastros en los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas, tampoco proporcionó un paradigma didáctico asumible en la IEMS, ya que los problemas aparecían desconectados, sin un contexto adecuado, proporcionando una imagen artificial de la actividad matemática centrada únicamente en la resolución de una serie de problemas aislados, sin la elaboración de verdaderos campos de problemas ni la utilización de instrumentos de articulación de las matemáticas.

En la década de los noventa aparecieron varios movimientos nuevos, que se pueden englobar bajo la etiqueta genérica de *Aprendizaje Basado en la Indagación*, ABI, (o IBL, por las siglas en inglés). Todos ellos hacen hincapié en la importancia de desarrollar la *habilidad de resolver problemas* aludiendo, de nuevo, al movimiento del *Problem Solving*. Estos movimientos, con fuertes apoyos institucionales, cobran protagonismo, pero tampoco ofrecen un paradigma didáctico unificado para la IEMS, ya que no proponen un modelo epistemológico de las matemáticas y, en muchos casos, defienden fines educativos distintos como el *trabajo colaborativo e interdisciplinar*, las *habilidades colaborativas* y, en definitiva, un tipo de actividad próxima a la *actividad científica*. (Artigue & Blomhøj, 2013), (Gascón & Nicolás, 2018a).

La ausencia de un paradigma didáctico disciplinar en la IEMS descansa finalmente en la falta de fines educativos compartidos⁹ y en la incompatibilidad entre los MEV en la IEMS, relativos a los diferentes ámbitos específicos. Así, por ejemplo, el MEV en torno a la *proporcionalidad*, que la considera como una relación aritmética entre números, complica el vínculo con el *álgebra elemental* y no permite su integración en la familia de relaciones *funcionales elementales* (García et al., 2006); el MEV en torno a los *números reales* ignora su

⁸ Varios autores, como Morris Kline (1973) y Hans Freudenthal (1973), escribieron obras en este sentido. Pero el precedente fundamental fue George Pólya (1945, 1954, 1967), cuya influencia aumentó mucho a partir de 1980. Al mismo tiempo, en Estados Unidos, el *Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas* (NCTM) propuso, en el manifiesto *An Agenda for Action* de 1980, centrar la atención de la educación matemática en la resolución de problemas.

⁹ Neil Postman (1996) extiende esta carencia de fines educativos compartidos a toda la educación formal.

relación con las magnitudes, y oculta ciertas cuestiones relativas a la aproximación con expresiones decimales acotadas, el grado de precisión y las operaciones con números reales (Licera, 2017). Cada uno de estos modelos epistemológicos asigna al ámbito en cuestión una determinada razón de ser oficial y viene acompañado de ciertos fines educativos, FDV, y determinados medios didácticos, MDV. En otras palabras, cada uno de estos MEV sustenta un *paradigma subdisciplinar* que está vigente en la enseñanza secundaria. Pero como estos paradigmas subdisciplinares son incompatibles entre sí, no pueden articularse para constituir un paradigma didáctico disciplinar global.

Implantación del paradigma psicopedagógico derivado de la cultura de la posmodernidad

En lo que sigue describiremos algunos rasgos de un PDR que emerge a nivel *pedagógico* y que denominaremos *paradigma psicopedagógico*, (PPP)¹⁰. En algunos aspectos lo contrastaremos con el PD *artesanal* (PDA) que puede considerarse como un contra-PD¹¹ del PPP. Utilizaremos esta pareja de PDR, PPP-PDA, para representar algunos rasgos del PDV, a nivel pedagógico, en las actuales instituciones docentes.

Como todos los PDR, el PPP es un tipo ideal que define un caso límite que no ha existido nunca ni puede existir en estado puro en ninguna institución, pero su construcción explícita, como artefacto teórico, (en contraste con el PDA) será útil para analizar un conjunto de hechos empíricos muy visibles en los niveles escolares de infantil y primaria, y cada vez más presentes en la enseñanza secundaria y más allá¹².

Relacionaremos el PPP con la cultura de la *posmodernidad* o *cultura de la superficialidad* (Sennett, 1998/2006, 2006/2088, 2012) –donde la noción de «cultura» se emplea más en un sentido antropológico que en el artístico– y, complementariamente, con la *modernidad líquida* (Bauman, 2000/2017, 2005/2019, 2006/2007)¹³. Los orígenes de esta cultura pueden situarse en el momento en que las empresas capitalistas que proveían de empleos para toda la vida empiezan a desaparecer y las instituciones del estado del bienestar, encargadas entre otras cosas de la salud y de la educación, se hacen más *imprevisibles* y reducen su escala.

¹⁰ Algunas de las características del PPP fueron avanzadas en el Primer Congreso Internacional sobre la TAD celebrado en Baeza en 2005 (Gascón & Bosch, 2007) y en (Gascón, 2009).

¹¹ En (Chevallard, 2013a) se considera al PCM como *contraparadigma emergente* del PVO.

¹² En 1990 se aprobó en España la *Ley de Ordenación General del Sistema Educativo* (LOGSE) que entroniza de manera oficial en el sistema educativo muchos de los rasgos del PPP. Dichos rasgos se han mantenido en las leyes posteriores y, en particular, en la LOMLOE de diciembre de 2020.

¹³ En lo que sigue, utilizaremos libremente la caracterización de la *cultura de la superficialidad* tal como ha sido expuesta principalmente por Richard Sennett y completada por ciertas características de la *modernidad líquida* (coherentes con la cultura de la superficialidad) descritas por Zygmunt Bauman.

Junto al advenimiento de la *desregulación* de los mercados se produjo el *debilitamiento* de todo tipo de pautas predeterminadas, lo que se ha traducido en *precariedad e incertidumbre* constantes. Esta *inseguridad* provoca la necesidad imperiosa de buscar informaciones creíbles (que se desechan a corto plazo) y el surgimiento de múltiples medios formadores de opinión.

En esta nueva sociedad se impone progresivamente la norma universal de la «desechabilidad» y nada puede permitirse perdurar más de lo debido. Las competencias del individuo quedan rápidamente obsoletas y es necesario desarrollar constantemente nuevas habilidades porque las demandas de la realidad cambian muy rápidamente.

La sociedad «moderna líquida» es aquella en que las condiciones de actuación de sus miembros cambian antes de que las formas de actuar se consoliden en unos hábitos y en unas rutinas determinadas. (Bauman, 2005/2019, p. 9).

Todo confluye hacia un proceso imparable de *inestabilidad, fragmentación y desmantelamiento de las instituciones* de todo tipo. Así, se van diluyendo progresivamente las *convenciones y reglas* que son constitutivas de dichas instituciones y, por tanto, dejan de tener sentido los derechos y deberes que estas determinan (Mosterín, 2008), haciendo recaer sobre el individuo el peso de la construcción de pautas y la responsabilidad del fracaso. En consecuencia, este se ve obligado a manejar las relaciones a corto plazo y a improvisar en cada momento el curso de su vida en *ausencia de instituciones sólidas* susceptibles de proporcionarle un sentido.

En el ámbito escolar se tienden a substituir las disciplinas escolares por una «cultura» superficial, lo que comporta la transparencia e irrelevancia del *modelo epistemológico de los conocimientos* en juego, en el que se sustenta (o debería sustentarse) la acción didáctica. En este sentido, Agustín García Calvo denunció, poco después de la puesta en marcha de la LOGSE en España, que la tendencia de ir reemplazando sistemáticamente la enseñanza del griego y el latín por una “cultura clásica” en los (sucesivos) “nuevos” planes de estudio se apoya en una *idea dominante* respecto a las relaciones entre lenguaje y cultura, idea que atribuye a esta última una importancia desmesurada y paradójica al presentarla como independiente de la actividad que la genera (el estudio de las lenguas clásicas en este caso) (García Calvo, 1992).

Esta es una tendencia característica del PPP que instaura de manera sistemática la separación entre la *enseñanza* de las matemáticas (y de cualquier otra disciplina) y la *actividad generadora* de las mismas. Así, se tiende a eliminar (o, al menos, a poner en segundo plano) lo que es propio de los diferentes tipos de conocimientos, diluyéndolos en presuntas competencias

genéricas, como se pone de manifiesto en la preeminencia del eslogan de «aprender a aprender» que sigue plenamente vigente como una de las *competencias clave* en la LOMLOE.

En conformidad con los valores que se encarnan en la cultura de la posmodernidad, el PPP sitúa los *finés educativos* en el desarrollo de múltiples habilidades prácticas que cambian constantemente y en cultivar la inteligencia emocional, la «creatividad» y los intereses personales y profesionales de los alumnos. De esta forma, el PPP se aleja completamente de los fines que propugna el PDA, esto es, del *compromiso desinteresado* por hacer una única cosa realmente bien hecha por el placer de hacerla bien. El perfeccionamiento de una habilidad mediante la práctica (uno de los fines educativos del PDA) es incompatible con el cambio constante de actividad que se promueve en esta sociedad de las habilidades múltiples y constantemente cambiantes. En la nueva cultura, el enfrentarse continuamente a tareas diferentes y a nuevos estímulos (que envejecen muy rápidamente) se interpreta como un rasgo de *creatividad* que, así conceptualizada, constituye uno de los *finés educativos* del PPP.

Así, entre los fines educativos que propugna el PPP no es prioritario el aprendizaje de proposiciones verdaderas, puesto que los conocimientos ‘tienen una vida corta’ y la existencia de verdades objetivas y universales es discutible. Este postulado es compartido por algunos autores del *enfoque por competencias* (Gascón, 2011), tal como indica W. Hutmacher, presidente de la Fundación de las Regiones Europeas para la Investigación en Educación y Formación:

Es menos importante proporcionar a los jóvenes un “bagaje” de conocimientos para la vida que prepararlos para poder aprender a lo largo de toda la vida, para orientarse en un medio en el cual los conocimientos, las referencias y las certezas tienen una vida corta [...] (Hutmacher, 2003, p. 6).

La educación posmoderna teme que el *aprendizaje repetitivo* embote la mente y, para no aburrir a los alumnos, insta al profesor a presentar *situaciones constantemente nuevas* que eviten la rutina. En coherencia con ello, el PPP no propone, como medios didácticos, dispositivos que, como el *taller de prácticas matemáticas*, potencian un *dominio robusto de las técnicas* a pesar de que dicho dominio es imprescindible para alcanzar la verdadera *creatividad matemática*¹⁴ (Bosch & Gascón, 1994). Por el contrario, para el PDA, las rutinas no son

¹⁴ La organización escolar vigente dificulta objetivamente el desarrollo de la «genuina» creatividad matemática (la que comporta la producción de nuevos objetos matemáticos y la emergencia de ideas generales), sustituyéndola por una creatividad «aparente» consistente en cambiar constantemente de actividad (para evitar la rutina), en la línea de los fines educativos propugnados por el PPP. Dado que, sin embargo, la escuela otorga un gran valor a la creatividad productiva, se produce un desfase entre los *medios didácticos* que se ponen en juego y los *finés educativos* que se persiguen, dando origen a la *paradoja de la creatividad* (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997, pp. 289-290).

estáticas, evolucionan, y los artesanos progresan. En las fases superiores de la habilidad hay una constante interrelación entre el *conocimiento tácito* y el *reflexivo*.

«¡No expliques, muestra!» es un consejo coherente con los medios didácticos que propone el PPP y con el lema de la nueva comunicación: «ver es comprender» (Ramonet, 1998). Este *aprendizaje por «mostración»* descarga su peso sobre el aprendiz y da por supuesta la posibilidad de la imitación directa que, con frecuencia, fracasa. El *aprender haciendo*, si no existe interrelación entre el conocimiento tácito y el reflexivo (que requiere esfuerzo persistente y a largo plazo), plantea la cuestión del talento personal para actuar y abre la posibilidad de aprender poco o nada a causa de la falta de aptitud para hacer realmente el trabajo. El aprender haciendo (sin la guía del conocimiento reflexivo), panacea de la educación posmoderna, puede ser *segura receta de crueldad* (Sennett, 2006/2008).

Como todos los paradigmas, los medios que propone el PPP para alcanzar los fines educativos que propugna consisten en la puesta en marcha de ciertos procesos didácticos que tienen que ser activados y gestionados por los profesores (en colaboración con los alumnos) en tanto que representantes de la institución docente y portadores de las funciones que dicha institución les asigna. Pero la *inestabilidad y fragmentación* de todo tipo de instituciones, característica fundamental de la nueva cultura de la superficialidad, debilita las instituciones educativas que deberían constituir el fundamento de la legitimidad de las funciones docente y discente, haciendo recaer sobre los profesores (y sobre los alumnos), como personas, la responsabilidad de sus respectivas funciones. Se tiende así a ignorar que no es el profesor como persona el que educa, sino que lo hace *en tanto que profesor* y a través de la enseñanza de los conocimientos creados por la humanidad para responder a las cuestiones vitales.

Al identificar al alumno, *sujeto* de la institución escolar, con la *persona*, se pervierten (o, cuanto menos, se diluyen) muchas de las funciones de la Escuela entre las que destaca la necesaria función educativa de la *evaluación*. En efecto, en estas condiciones, el alumno no puede ser evaluado negativamente porque el fracaso escolar sería un *fracaso personal*¹⁵, y porque no se pueden hacer distinciones entre los alumnos (unos aprueban y otros suspenden, unos pasan al curso siguiente y otros deben repetir el curso, etc.) porque esto sería una *discriminación personal* y, como tal, injusta.

¹⁵ El mayor tabú social en la nueva cultura es la inutilidad, la marginación y el *fracaso*. Esta situación es especialmente grave porque, en el nuevo orden, la responsabilidad del fracaso recae primordialmente sobre los hombros del individuo. El único antídoto ante el fracaso lo proporciona la *carrera profesional* tomada como tabla de salvación por las nuevas generaciones.

El PPP enfatiza la *atención a la diversidad*, cuyo ideal consiste en la *personalización e individualización* de los objetivos, contenidos y métodos de evaluación. Esta concepción individualista de la enseñanza es el reflejo, en el sistema escolar, de la cultura de la superficialidad propia de la nueva organización social y económica. De hecho, la *flexibilidad* de las instituciones, junto a su *inestabilidad*, da origen a relaciones superficiales y vínculos institucionales breves, lo que refuerza el *individualismo* en todos los ámbitos de la vida social. El PPP conjuga este individualismo con el principio de la *construcción de los conocimientos* por parte del sujeto individual, lo que magnifica de nuevo las singularidades de los individuos como «personas» y minimiza las características compartidas como «alumnos» (sujetos de la institución escolar).

La construcción histórica del PPP se inicia cuando las instituciones escolares toman conciencia, y consideran indeseable, el *fenómeno de la expulsión escolar* de los alumnos. Se empiezan a eliminar progresivamente, de entre los conocimientos a estudiar, aquellos aspectos disciplinares que, por su dureza y exigencia, se supone, puedan alejar a los alumnos de la vida escolar. Así, por ejemplo, el PPP prescinde de los *objetivos globales y a largo plazo* en línea con un postulado psicopedagógico que, en armonía con la cultura de la superficialidad, favorece la *facilidad* a expensas del *trabajo profundizado* que requiere *rigor, precisión, paciencia y autodisciplina*, característico del PDA, y que es considerado por la nueva cultura como un trabajo rutinario y aburrido. En este punto el PPP se contrapone a la idea de Alfred North Whitehead según la cual sólo quien realmente domina las técnicas, el *experto*, actúa de tal modo que no es consciente de que las está usando efectivamente, lo que le permite incluirlas en actividades más amplias y complejas que son las que posibilitan la verdadera creatividad:

Porque es sólo en calidad de *experto* –aunque sólo sea de una pequeña parcela de las matemáticas– como podrá el estudiante «apreciar la exacta formulación de las ideas generales» (Whitehead, 1929/1965, p. 30).

En la medida que estos postulados del PPP, consolidados por la cultura dominante, forman parte del paradigma pedagógico vigente en una institución escolar, se tienden a eliminar algunas características importantes de la *disciplina matemática* (filosófica, literaria, musical, etc.) de la vida escolar, dificultando así la entrada de los alumnos en las obras que se proponen para ser estudiadas y, en última instancia, alejando a los alumnos de la institución escolar. Se pone así de manifiesto un aspecto de la incoherencia interna del PPP puesto que uno de los medios que propone para disminuir la expulsión escolar de los alumnos (la eliminación de ciertos aspectos de las disciplinas escolares) tiene como resultado el efecto contrario al

perseguido. Esta incoherencia se explica por la forma como el PPP interpreta las relaciones entre la *disciplina matemática*, la *motivación* y la *expulsión escolar* de los alumnos (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997, p. 129-134).

Una formación del profesorado de matemáticas sustentada en el paradigma psicopedagógico y en los paradigmas didácticos subdisciplinares vigentes

La modalidad de *formación del profesorado de matemáticas* (FPM) vigente en una institución docente se sustenta en una interpretación conjunta de las matemáticas y la educación matemática y, todo ello, en el marco de una concepción global del papel que desempeñan los conocimientos y la educación en nuestras sociedades. Parece razonable suponer que, si existe un PDV disciplinar (matemático) en una institución docente y un PDV pedagógico coherente con él, estos serán los que sustentarán conjuntamente la modalidad vigente de FPM. Pero, como hemos visto, esta no es la situación en la *institución de enseñanza de las matemáticas en secundaria* (IEMS). De hecho, la ausencia de un PD disciplinar (matemático) compartido en dicha institución, junto con el creciente predominio del paradigma psicopedagógico, determinan la modalidad de FPM vigente. Esta modalidad de formación contiene características *indeseables*, desde la perspectiva de la TAD, que describiremos a continuación. Algunas de estas características ya fueron señaladas por Guy Brousseau (1991).

(a) La modalidad vigente de FPM aparece como una formación «escindida» que separa la formación *disciplinar* de la formación *docente* que, se supone, es independiente de las disciplinas. Este rasgo es coherente con uno de los postulados fundamentales del PPP según el cual «hacer matemáticas» y «enseñar (matemáticas)» son actividades relativamente independientes.

(b) En la FPM se imparte una formación *disciplinar matemática* esencialmente centrada en cuestiones «locales» específicas de los diferentes ámbitos designados como objetos de estudio en la IEMS. Esta formación disciplinar no proporciona una visión global de la estructura de la matemática escolar. Es poco frecuente que en la FPM se estudien cuestiones que abarquen las relaciones entre diferentes ámbitos como, por ejemplo: ¿cómo están relacionadas la probabilidad y la estadística?, ¿el estudio de la geometría debe sustentarse en el álgebra o el del álgebra en la geometría?, ¿cómo se relacionan los números negativos con el álgebra elemental?, ¿y el cálculo diferencial con la modelización funcional?, ¿es obligatorio estudiar primero aritmética, después álgebra y finalmente cálculo diferencial?, ¿qué relación puede establecerse entre la geometría sintética y la geometría analítica?

(c) La FPM, en coherencia con el PPP, enfrenta al profesor con un conjunto de saberes: psicológicos, pedagógicos, didácticos y sociológicos, desconectados entre sí y alejados de su problemática profesional. De hecho, en la FPM vigente se ignora que la didáctica de las matemáticas es la única disciplina capaz de organizar y gestionar una formación que integre lo matemático y lo didáctico.

(d) En la FPM el modelo epistemológico de las matemáticas que se asume es transparente, ni siquiera se toma en consideración para analizarlo y, mucho menos, para cuestionarlo. Se trata de otra característica compatible con el PPP puesto que para este paradigma sólo se debe cuestionar (y, en su caso, modificar) la forma de enseñar, pero las matemáticas no son cuestionables.

(e) En la FPM vigente se propugna el ideal de una enseñanza individualizada, puesto que, según el PPP, la problemática de la educación (matemática) es, en primer lugar, una problemática individual, determinada por factores cognitivos, motivacionales y actitudinales (de los alumnos y de los profesores). En general, la FPM tiene un fuerte sesgo individualista: se pone el acento en la responsabilidad del profesor y en su formación como factor esencial de la «calidad» de la enseñanza. En definitiva, se concluye que todas las deficiencias del sistema educativo (como, por ejemplo, el «fracaso escolar») son responsabilidad de los profesores como individuos.

(f) La FPM, de acuerdo con los medios didácticos que propone el PPP, impele a los profesores a que, en su práctica docente, presenten situaciones y propongan actividades constantemente nuevas con un doble objetivo: que los alumnos desarrollen nuevas habilidades y evitar el trabajo rutinario que, se supone, los expulsaría del sistema escolar. Así, la FPM tiende a favorecer la atomización de la actividad matemática a expensas del trabajo profundizado que requiere paciencia, autodisciplina y objetivos a largo plazo.

(g) La FPM, lejos de abordar e intentar resolver el difícil problema del tipo de argumentaciones que es posible utilizar en la IEMS, propone, de acuerdo con el PPP, la *enseñanza por demostración* (¡no expliques, muestra!) puesto que «ver es comprender». De esta forma quedan sin respuestas las cuestiones que proponíamos al principio de este trabajo relativas a si es posible (o incluso necesario) sustentar la verdad de las proposiciones utilizando argumentos racionales y, en ese caso, qué tipo de argumentos se pueden utilizar.

(h) La *formación docente*, común para todos los profesores, se considera independiente de las disciplinas escolares, tal como asume el PPP. Las cuestiones que se proponen en dicha formación se sitúan en el nivel pedagógico y se formulan sin mencionar ninguno de los ámbitos de una disciplina concreta: ¿Cómo motivar a los alumnos para que planteen por sí mismos

cuestiones? ¿Qué papel podrían jugar las TIC para mejorar el aprendizaje? ¿Cómo utilizar situaciones de la «vida real» en los procesos de enseñanza? ¿Cómo articular el trabajo en grupo con el trabajo individual?

(i) Ante la ausencia de un PD disciplinar (matemático) asumido y compartido en la IEMS, la formación disciplinar que reciben los futuros profesores de matemáticas, además de estar fuertemente condicionada por el PPP, tal como hemos visto, está regida, en cada uno de los ámbitos de las matemáticas escolares, por el correspondiente PD subdisciplinar vigente en torno a dicho ámbito.

Así, por ejemplo, y en concordancia con el MEV en la IEMS en torno al *cálculo diferencial elemental* (CDE), el profesorado recibe una formación basada en una interpretación muy tecnicista del CDE que lo reduce, de facto, a un instrumento para analizar las propiedades de determinados tipos de funciones. Esta formación está encaminada a que los profesores aprendan a poner en marcha los MDV que son útiles para ayudar a sus alumnos a alcanzar los FEV, es decir, a desarrollar técnicas de representación gráfica de funciones y llevar a cabo el trabajo técnico dentro de unos pocos modelos funcionales.

Las modalidades de formación del profesorado como paradigmas de formación

Hemos analizado algunas características de la *modalidad vigente de formación del profesorado de matemáticas* de secundaria. El principal resultado obtenido ha consistido en mostrar su fuerte dependencia del PPP y, ante la falta de un PDV disciplinar (matemático) asumido y compartido en dicha institución, hemos descrito la incidencia de los PD subdisciplinares vigentes en la IEMS sobre la formación disciplinar matemática del profesorado.

En este apartado caracterizaremos las modalidades de formación como un caso particular de paradigmas didácticos y las denominaremos *paradigmas de formación*. En general, los paradigmas didácticos (PD) o modalidades de estudio, caracterizan cómo se organiza (o podría organizarse) el estudio de algún tipo de conocimientos en las instituciones escolares. En particular, las *modalidades de formación del profesorado* o *paradigmas de formación* (PF), caracterizan cómo se organiza (o podría organizarse) la formación de los profesores, mediante el estudio de un tipo conocimientos de naturaleza didáctica, en las instituciones responsables de dicha formación.

Tal como sucede para cualquier tipo de PD, podemos hacer una primera distinción entre: los *paradigmas de formación vigentes* (PFV) en una institución de formación como, por

ejemplo, el que hemos analizado en la sección 4, esto es, la modalidad vigente de formación del profesorado de matemáticas de secundaria; y los *paradigmas de formación de referencia* (PFR), o posibles, que son artefactos teóricos contruidos por la investigación para analizar y representar el PFV en una institución y, en su caso, para analizar las condiciones requeridas para promover un cambio de PF en una dirección determinada. En este punto surge una cuestión fundamental: *¿cómo se puede caracterizar, en general, un paradigma de formación del profesorado?* Dado que se trata de un tipo particular de PD, los PF tendrán la estructura de cualquier PD, con ciertas particularidades específicas.

En la sección 4 hemos descrito un conjunto de características de un PF concreto, el PFV para los profesores de la IEMS¹⁶. Hemos mostrado que el PFV_{IEMS} toma en consideración, como núcleo de la *materia de la formación*, la manera de interpretar las matemáticas y la educación matemática vigente en la IEMS, esto es, la respuesta institucional al *qué enseñar y cómo enseñar* matemáticas (y al *por qué* y al *para qué* enseñarlas en la IEMS). Pero también hemos subrayado que dichas respuestas, proporcionadas por los PDV_{IEMS} subdisciplinares, están fuertemente condicionadas por las respuestas genéricas (respecto a la educación y a la formación del profesorado) que proporciona el PPP. Podemos suponer que esta múltiple dependencia –de los conocimientos matemático-didácticos que están en juego, respecto de los PD pedagógicos, disciplinares o subdisciplinares– está presente en todo PF.

Los *finés de la formación vigente* (FFV_{IEMS}) que persigue este PFV_{IEMS} quedan relativamente implícitos, pero pueden rastrearse a lo largo de las propiedades descritas y resumirse diciendo que esta modalidad de formación del profesorado pretende formar a los profesores para que ayuden a sus alumnos a ser «buenos sujetos» de la institución docente en cuestión, esto es, para que dichos alumnos interpreten y utilicen los diferentes ámbitos de las matemáticas tal y como rigen los respectivos PDV_{IEMS} subdisciplinares.

Entre los *medios de formación vigentes* (MFV_{IEMS}), utilizados por dicho PFV_{IEMS} destaca la separación, condicionada por el PPP, entre la formación docente (común para todos los profesores) y la formación disciplinar. La primera está basada en conocimientos psicológicos, pedagógicos, didácticos y sociológicos desconectados entre sí, mientras que la segunda está regida por los distintos PDV_{IEMS} subdisciplinares, puesto que para el PPP la matemática escolar no es cuestionable.

¹⁶ Hemos descrito algunas de las características del PFV para los profesores de la IEMS desde la perspectiva de cierto PFR implícito y coherente con los postulados de la TAD. Este PFR, que no podemos describir aquí, se sustenta en los PD que asume, de facto, la TAD, esto es, el *paradigma de la modelización matemática* (PMM) a nivel disciplinar (matemático) y el *paradigma del cuestionamiento del mundo* (PCM) a nivel pedagógico.

Por último, este PFV_{IEMS} no surge de la nada, empieza a constituirse cuando desde la IEMS se vislumbran ciertos fenómenos didácticos (ϕDV_{IEMS}) considerados como «indeseables» desde la perspectiva de la IEMS. El PFV_{IEMS} que hemos analizado se sustenta en un PDV_{IEMS} , que propone unos MDV_{IEMS} y propugna unos FEV_{IEMS} , presuntamente adecuados para evitar, en consonancia con el PPP y con la cultura de la posmodernidad, el fenómeno de la expulsión escolar de los alumnos.

En definitiva, podemos caracterizar el PFV en la IEMS como un sistema complejo integrado por los cuatro subsistemas descritos:

$$PFV_{IEMS} = [PDV_{IEMS}, FFV_{IEMS}, MFV_{IEMS}, \phi DV_{IEMS}]$$

Utilizando esta estructura de los PF diremos dos palabras sobre otro PF concreto, el PF de los profesores de matemáticas (de enseñanza primaria y secundaria) vigente en Japón:

$$PFV_J = [PDV_J, FFV_J, MFV_J, \phi DV_J]$$

Para analizar el PFV_J , deberíamos empezar por examinar a fondo el PDV_J en el que se sustenta¹⁷. Se trata del PD disciplinar (matemático) vigente en Japón y que algunos autores (Takahashi, 2021; Hino, 2007) identifican con la *enseñanza a través de la resolución de problemas*, (TTP, por las siglas en inglés de *Teaching Through Problem-solving*) esto es, $PDV_J = TTP$. Y si, además, de acuerdo con la mayoría de los autores (Murata, 2011; Shimizu, 2014; Fujii, 2016 y 2018), interpretamos el *estudio de clases*, EC, como el principal *medio de formación*¹⁸ del profesorado vigente en Japón, esto es, $MFV = EC$, entonces podemos representar el PFV_J en los siguientes términos:

$$PFV_J = [TTP, FFV_J, EC, \phi DV_J]$$

El análisis del PFV_J deberá proseguir estudiando las relaciones entre los diferentes componentes del PFV_J y, en particular, entre el TTP y el EC: ¿los FFV en Japón consisten realmente en dotar a los profesores de matemáticas de los instrumentos para que ayuden a los alumnos japoneses a ser «buenos sujetos» de la institución docente, esto es, para que dichos alumnos interpreten y utilicen las matemáticas y el estudio de las matemáticas tal como rige el $PDV_J = TTP$?, en caso afirmativo, ¿los MFV, esto es, el EC tal como se interpreta y se lleva a cabo en Japón, son adecuados para obtener dichos FFV?, ¿existe un PD pedagógico vigente en Japón?, en caso afirmativo, ¿cómo condiciona dicho PDV pedagógico los MFV, esto es, la

¹⁷ Esta es una tarea compleja que no podemos hacer aquí y que realizaremos en un trabajo posterior.

¹⁸ Al igual que no se deben confundir los *medios didácticos* (MD) con el PD globalmente considerado, tampoco deben confundirse los *medios de formación* (MF) con el PF. En el caso particular de Japón, no debe confundirse el *estudio de clases* (EC), considerado como el MFV, con el PFV_J .

estructura y el funcionamiento del EC?, ¿qué fenómenos didácticos ϕ DV están en el origen del proceso histórico de constitución del PFV_J? Y, sobre todo, ¿desde qué perspectiva, desde qué PFR = [PDR, FFR, MFR, ϕ DR], se llevará a cabo el análisis del PFV_J y cómo dependerán los resultados del PFR elegido?

En relación con estas cuestiones, en (García et al., 2019) se empieza a discutir el papel que desempeñan ciertos PDR (centrándose, especialmente, en el MER y en los MDR), asumidos por los investigadores, en el diseño y la gestión de procesos de *estudio de clases* en diferentes países (Japón, Inglaterra y España). Se pone en evidencia la interconexión que existe entre los medios de formación que se ponen en marcha (en este caso, la forma particular de diseñar y gestionar los procesos de estudio de clases) y el PDR en el que se sustenta la modalidad de formación implementada, así como la incidencia del PDR asumido sobre el aprendizaje profesional de los profesores.

En los dos PFV particulares citados hasta aquí, PFV_{IEMS} y PFV_J, los FF consistían en proporcionar a los profesores de cierta institución docente las herramientas necesarias para ayudar a sus alumnos a ser «buenos sujetos» de la institución en cuestión. Sin embargo, en general, el PD en el que se sustenta un PF, esto es, la forma de interpretar las matemáticas y la educación matemática, que constituyen el núcleo de la materia de la formación que reciben los profesores de I, no tiene por qué coincidir necesariamente con las respuestas que proporciona el *paradigma didáctico vigente* en I. En otras palabras, los FF perseguidos por un PF del profesorado de la institución docente I no tienen que consistir, obligatoriamente, en formar a los profesores para que ayuden a sus alumnos a ser «buenos sujetos» de I.

Esto significa que, desde la investigación, se puede construir y experimentar un PF que se sustente en un PD alternativo al PDV en I. De hecho, existen muchos ejemplos de investigaciones que han diseñado un PDR sustentado en un MER que conceptualiza las matemáticas (o un cierto ámbito de la matemática escolar) de forma diferente a como lo hace el MEV en I y que propugna unos fines educativos, FER, completamente diferentes (e incluso contradictorios) con los FEV en I, lo que comporta que los MDR también sean diferentes de los MDV en I. En esos casos, la puesta en marcha de un PF sustentado en dicho PDR suele originar conflictos y dificultades debido a que la cultura matemático-didáctica de los profesores en formación choca con la que el nuevo PF pretende instaurar.

Un ejemplo¹⁹ de este tipo de PF se describe detalladamente en (Lucas, Ruiz-Olarría & Gascón, 2023). En este trabajo se construye y se experimenta, en el ámbito del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria, un PF del profesorado para la enseñanza del cálculo diferencial elemental (CDE) en el paso de la Secundaria a la Universidad (SU). Se trata de un PFR basado en un PDR que, en contraposición al PDV en SU, sitúa la razón de ser del CDE en el ámbito de la modelización funcional (MF). Este PDR_{SU}(CDE) construido y experimentado en (Lucas, 2015), lejos de reducir el CDE, como hace el PDV, a un instrumento para analizar las propiedades de determinados tipos de funciones y para llevar a cabo el trabajo técnico dentro de unos pocos modelos funcionales dados de antemano, considera el CDE como herramienta de *construcción de modelos funcionales* de sistemas de todo tipo (físicos, biológicos, financieros, matemáticos, etc.) para trabajar en ellos y para interpretar los resultados con el objetivo de *responder a cuestiones planteadas en dichos sistemas*. En consecuencia, los fines educativos que propugna este PDR, así como los medios didácticos que propone (basados en los *recorridos de estudio e investigación*, REI), son completamente diferentes a los propuestos por el PDV.

En base a este PDR_{SU}(CDE), el PFR_{SU}(CDE), construido y experimentado con los instrumentos que proporciona la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD), propugna unos fines de la formación, FFR, que consisten en proporcionar a los profesores los instrumentos necesarios para ayudar a sus alumnos a que interpreten y utilicen las matemáticas y el estudio de las matemáticas tal como rige el PDR_{SU}(CDE), alternativo al PDV_{SU}(CDE). Los medios para llevar a cabo esta formación, elaborados con las herramientas que proporciona la TAD, se apoyan en una estrategia descrita en (Ruiz-Olarría, 2015) que integra el PDR_{SU}(CDE) como parte del PFR_{SU}(CDE) y que utiliza los *recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado*, REI-FP, como componente esencial²⁰.

Para acabar de caracterizar este PFR_{SU}(CDE) diremos que el fenómeno didáctico, ϕ DR, que está en el origen de su construcción como artefacto teórico, se manifiesta en la *ausencia de*

¹⁹ Existen otros ejemplos de PFR, contruidos como artefactos teóricos, que se sustentan en un PDR alternativo al PDV. Citaremos, en primer lugar, un PF del profesorado de Enseñanza Secundaria, PFR_{IEMS}(SN), en torno a los sistemas de numeración (Sierra & Gascón, 2018) y, en segundo lugar, un PF del profesorado de Educación Infantil (EI), PFR_{EI}(Contar), en torno a la cuestión: *¿Cómo enseñar a contar a alumnos de Educación Infantil?* En este último caso, el PF fue construido mediante la colaboración de dos teorías didácticas que forman parte del mismo Programa de Investigación, la teoría de las situaciones didácticas y la teoría antropológica de lo didáctico (Sierra, Bosch & Gascón, 2012).

²⁰ En la TAD se establece una dependencia mutua entre los fenómenos didácticos emergentes en un ámbito de las matemáticas escolares y el problema docente relativo al qué enseñar y cómo hacerlo en relación con dicho ámbito. En consecuencia, la construcción de un PF del profesorado para abordar el problema docente en cuestión toma en consideración los resultados de la investigación didáctica que explican los fenómenos didácticos asociados (Ruiz-Olarría, 2015; Lucas, Ruiz-Olarría & Gascón, 2023).

un trabajo eficaz y práctico de la actividad de modelización funcional en el paso de Secundaria a la Universidad, en el consiguiente *aislamiento escolar de la MF respecto del CDE* y en las dificultades del sistema educativo (y, por lo tanto, de los profesores y de los alumnos) para integrar el estudio del CDE en una praxeología matemática *regional* en torno a la MF (Lucas, 2015). Se trata de un fenómeno didáctico considerado «indeseable» desde la perspectiva de la TAD, puesto que choca con los fines educativos que propugna los PD asumidos, de facto, por la TAD, el PMM a nivel disciplinar (matemático) y el PCM a nivel pedagógico.

A modo de síntesis

En resumen, podemos concluir que, en términos generales, toda modalidad de formación del profesorado de matemáticas, todo PF, se sustenta en una forma de interpretar las matemáticas y la educación matemática, en un PD. Este PD puede ser una construcción cultural (que puede eventualmente coincidir con el PDV) o bien un artefacto teórico construido por una teoría didáctica. En ambos casos, los fines de la formación que propugna un PF consisten en proporcionar a los profesores herramientas para ayudar a sus alumnos a interpretar las matemáticas y el estudio de las matemáticas tal como rige el PD en el que se sustenta. En particular, cada PF pretende que los profesores, en colaboración con sus alumnos, pongan en marcha los MD útiles para alcanzar los FE propugnados por cierto PD. Los medios de la formación que propone un PF para alcanzar los FF, así como los fenómenos didácticos que están en el origen de su constitución, están condicionados en el primer caso por los PD vigentes en la institución (a nivel pedagógico y en los niveles disciplinar y subdisciplinares) y, en el segundo, por los PD asumidos (de manera más o menos explícita) por la teoría didáctica en cuestión. En ningún caso puede garantizarse a priori que los MF serán efectivamente útiles para alcanzar los FF.

El esquema anterior puede complicarse cuando se analiza un PFV en una institución determinada. Puede suceder, por ejemplo, que no exista un PDV a nivel disciplinar (matemático) globalmente compartido en la institución en cuestión (como sucede en la IEMS) y que, sin embargo, exista un PDV a nivel pedagógico tan dominante que condicione fuertemente los MF de cualquier PF posible, así como los posibles fenómenos ϕD visibles (como sucede con el PPP en las actuales instituciones docentes).

En el caso de la construcción y experimentación de un PF por parte de una teoría didáctica, como el $PFR_{SU}(CDE)$ para los profesores de SU o el $PFR_{EI}(\text{Contar})$ para los profesores de Educación Infantil, surgen dificultades en su implementación originadas por el choque entre la cultura matemático-didáctica de los profesores en formación y la que pretende

instaurar el nuevo PFR, puesto que este se sustenta, normalmente, en un PDR alternativo al PDV en la institución.

En todo caso, relacionar los PF, sean construcciones culturales o artefactos teóricos, con el PD en el que sustentan y con los FF asociados y, simultáneamente, estudiar la incidencia de los PD (pedagógicos, disciplinares y subdisciplinares) sobre los MF, y sobre los ϕ D que están en el origen de la constitución del PF, proporciona un marco de análisis general de los PF que podría ser útil en futuras investigaciones.

Agradecimientos:

Esta investigación se ha financiado mediante el proyecto: PID2021-126717NB-C31 y “FEDER Una manera de hacer Europa”.

Referencias

- Artigue, M. y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45, 797 – 810.
- Bauman, Z. (2000/2017). *Modernidad líquida*, Fondo de Cultura Económica: Madrid.
- Bauman, Z. (2005/2019). *Vida líquida*, Paidós: Barcelona.
- Bauman, Z. (2006/2007). *Miedo líquido. Las sociedades contemporáneas y sus temores*, Paidós: Barcelona.
- Bosch, M. y Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 12(3), 314 – 332.
- Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? *Enseñanza de las Ciencias*, 9(1), 10-21.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221 – 266.
- Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie et régulation. En J. L. Dorier (Ed.), *Actes de la XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41 – 56). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2007a). Les mathématiques à l'école : pour une révolution épistémologique et didactique. *Bulletin de l'APMEP*, 471, 439-461.
- Chevallard, Y. (2007b). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En A. Estepa, L. Ruiz, F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Chevallard, Y. (2013a). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161 – 182. DOI: 10.4471/redimat.2013.26

- Chevallard, Y. (2013b). *La enseñanza de la matemática en la encrucijada: por un nuevo pacto civilizacional*. Curso impartido en la Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba, Argentina.
- Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE(UB)-Horsori. ISBN: 84-85840-50-X.
- Durkheim, E. (1922/2013). *Educación y Sociología*. Ediciones Península. (Original work published 1922)
- Freudenthal, H. (1973): *Mathematics as an Educational Task*, Berlin: Springer.
- Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. *ZDM - Mathematics Education*, 48(4), 411–423. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0770-3>
- Fujii, T. (2018). Lesson Study and Teaching Mathematics Through Problem Solving: The Two Wheels of a Cart. En M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, A. Ní Shúilleabháin y A. Takahasi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world* (pp. 1–21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_1
- García, R. (2006). *Sistemas complejos. Conceptos, método y fundamentación epistemológica de la investigación interdisciplinaria*. Gedisa Editorial: Barcelona.
- García Calvo, A. (1992): Recuerdo de la charla dada en Alcalá de Henares el 6 de abril de 1989, en Gómez, F.J. y Gómez-Pantoja, J. (eds.), *Pautas para una seducción. Ideas y materiales para una nueva asignatura. Cultura Clásica*. ICE de la Universidad de Alcalá de Henares: Madrid.
- García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higuera, L. & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, *ZDM International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 226-246. Retrieved from. DOI: 10.1007/bf02652807
- García, F. J., Wake, G., Lendínez, E. M. y Lerma, A. M. (2019). El papel de los modelos epistemológicos y didácticos en la formación del profesorado a través del dispositivo del estudio de clase. *Enseñanza de las ciencias*, 37(1), 137-156. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2512>
- Gascón, J. (1992). Què s'entén per resolució de problemes de matemàtiques? *BIAIX*, 2, 10 – 17.
- Gascón, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación Matemática*, 6(3), 37 – 51.
- Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 129 – 159.
- Gascón, J. (2009). El problema de la Educación Matemática entre Secundaria y la Universidad, *Educação Matemática Pesquisa*, 11(2), 273-302.
- Gascón, J. (2011). ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la Teoría Antropológico de lo Didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 9-50.
- Gascón, J. & Bosch, M. (2007). La miseria del «generalismo pedagógico» ante el problema de la Formación del Profesorado. En L. Ruiz Higuera, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Matemáticas, Escuela y Sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo*

- Didáctico* (pp. 201-240). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén. ISBN: 978- 84-8439- 367-2. Depósito legal: J-668-2007.
- Gascón, J., & Nicolás, P. (2018a). Inquiry-based learning and pre-service teachers' education. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild, & N. M. Hogstad (Eds.), *Second Conference of the International Network of Didactic Research in university Mathematics* (pp. 412-421). University of Agder and INDRUM.
- Gascón, J., & Nicolás, P. (2018b). Paradigmas didácticos y reforma curricular: el caso de la teoría antropológica de lo didáctico. In H. Chaachoua & M. Bosch (Eds.), *Sixth International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 88-102). University of Grenoble Alpes.
- Gascón, J. & Nicolás, P. (2021a). Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente, *Educación Matemática*, 33 (1), 7-40.
- Gascón, J. & Nicolás, P. (2021b). Paradigm crisis in the step from tertiary to secondary mathematics education, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1153-1169. DOI: [10.1080/0020739X.2021.2005169](https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.2005169)
- Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: Trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM - Mathematics Education*, 39(5-6), 503-514. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0052-1>
- Hutmacher W. (2003) Definició de les competències bàsiques. La situació a Europa. *Congrés de competències bàsiques*, Barcelona 2003.
- Kline, M. (1973). *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Mathematics*. St. Martin's Press.
- Lakatos, I. (1978). *Proofs and Refutation*. Cambridge University Press.
- Licera, R.M. (2017). *Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado* (Tesis de doctorado). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile).
- Lucas, C. (2015). *Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional*. (Tesis de doctorado). Universidad de Vigo.
- Lucas, C., Ruiz-Olarría, A. & Gascón, J. (2023). Una estrategia para la formación del profesorado: El caso del cálculo diferencial elemental, *Enseñanza de las Ciencias* (aceptado para su publicación).
- Mosterín, J. (2008). *Lo mejor posible. Racionalidad y acción humana*. Madrid: Alianza Editorial.
- Murata, A. (2011). Introduction: conceptual overview of lesson study. En L. Hart, A. Alston y A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 1-12). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_1
- Pólya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press.
- Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton University Press.
- Pólya, G. (1967). *La découverte des mathématiques*. Dunod.
- Postman, N. (1996). *The End of Education. Redefining the value of school*. United States: Vintage.
- Ramonet, I. (1998). *La tiranía de la comunicación*. Editorial Debate, S.A.: Barcelona.

- Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. (Tesis de doctorado). Universidad Autónoma de Madrid.
- Santaló, L. A. (1980). Situación de la enseñanza de la Geometría frente a las nuevas tendencias de la educación matemática. *Revista de Bachillerato*, 13, 23-28.
- Sennett, R. (1998/2006). *La corrosión del carácter. Las consecuencias personales del trabajo en el nuevo capitalismo*, Anagrama: Barcelona.
- Sennett, R. (2006/2008). *La cultura del nuevo capitalismo*, Anagrama: Barcelona.
- Sennett, R. (2012). *Juntos. Rituales, placeres y política de cooperación*, Anagrama: Barcelona.
- Sierra, T.A., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). La formación matemático-didáctica del maestro de Educación Infantil: el caso de «cómo enseñar a contar». *Revista de Educación*, 357, 231-256.
- Sierra, T. A. & Gascón, J. (2018). Los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado y la construcción de praxeologías matemáticas para la enseñanza. El caso de los sistemas de numeración, *Recherches en didactique des mathématiques*, 38 (1), 79-117.
- Shimizu, Y. (2014). Lesson study in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 358-360). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_91
- Takahashi, A. (2021). *Teaching mathematics through problem-solving*. Routledge. <https://doi.org/https://doi.org/10.4324/9781003015475>
- Weber, M. (1904/2009). *Die «Objektivität» sozialwissenschaftlicher und sozialpolitischer Erkenntnis*. Traducción española de Joaquín Abellán: *La «objetividad» del conocimiento en la ciencia social y en la política social*. Alianza Editorial: Madrid.
- Whitehead, A.N. (1929/1965). *Los fines de la educación y otros ensayos*, Paidós: Buenos Aires.